Общероссийский математический портал

Д. А. Шакин, О некоторых обобщениях комбинаторной теоремы Маколея на случай факторколец, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 9, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm598>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:38:37

УДК 512.714

Д. А. Шакин

О некоторых обобщениях комбинаторной теоремы Маколея на случай факторколец

В настоящей статье рассматривается задача описания функций Гильберта однородных идеалов в кольце многочленов, содержащих мономиальный идеал I . Полученное описание функций Гильберта обобщает результат Маколея для кольца многочленов на случай факторколец по некоторым мономиальным идеалам. В частности, приведено необходимое и достаточное условие на идеал I для выполнения теоремы Маколея в факторкольце кольца многочленов от двух переменных, а также если I является лексическим. Также доказывается возможность обобщения теоремы Маколея для широкого класса идеалов, порожденных мономами от первых по порядку двух переменных. Кроме того, приводится эквивалентная формулировка теоремы Маколея и необходимые условия на идеал I , при которых обобщение возможно.

Библиография: 4 названия.

§ 1. Введение

Пусть $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от n переменных над полем k со стандартной градуировкой, т.е. $\deg x_i = 1 \ \forall i$. Пусть J – однородный идеал и $H(J, d) = \dim_k J_d$ – его функция Гильберта.

В 1927 году Маколеем [1] доказана теорема, из которой следует, что функции Гильберта однородных идеалов $J \subseteq A$ исчерпываются функциями Гильберта лекс-сегментных идеалов, т.е. мономиальных идеалов, состоящих в каждой степени из старших по лексикографическому порядку мономов:

ТЕОРЕМА 1.1 (Маколей). *Для любого однородного идеала J существует лекс-сегментный идеал L такой, что $H(J, d) = H(L, d) \ \forall d \geq 1$.*

Пусть $\mathfrak{A}$ – множество всех однородных идеалов в A , $\mathfrak{B}$ – некоторое его подмножество, $H(\mathfrak{B})$ – множество функций Гильберта идеалов $J \in \mathfrak{B}$. В настоящей статье рассматривается следующая задача: найти описание множества $H(\mathfrak{B})$, аналогичное полученному Маколеем, если в качестве $\mathfrak{B}$ рассмотреть множество всех идеалов из $\mathfrak{A}$, содержащих некоторый мономиальный идеал I . Более конкретно: каким условиям должен удовлетворять идеал I для того, чтобы было справедливо равенство $H(\mathfrak{B}(I)) = H(\mathfrak{B}_0(I))$ для некоторого $\mathfrak{B}_0(I) \subseteq \mathfrak{B}(I)$. В качестве $\mathfrak{B}_0(I) \subseteq \mathfrak{B}(I)$ естественно взять множество идеалов из $\mathfrak{B}(I)$, содержащих, кроме мономов из I , старшие мономы в каждой степени. В частности, теорема Маколея 1.1 утверждает, что при $I = 0$ ($\mathfrak{B}(I) = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0(I)$ – множество

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01144).

всех лекс-сегментных идеалов) подобное описание возможно. Авторы работы [2] обобщили результат Маколей на случай, когда $I = (x_1^{d_1}, x_2^{d_2}, \dots, x_n^{d_n})A$, причем $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n \leq \infty$.

Следует отметить, что случай произвольного однородного идеала I нельзя свести к случаю, рассматриваемому в нашей статье:

ПРИМЕР 1.2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in A = k[x_1, \dots, x_n]$ – однородный многочлен степени $d \geq 2$, неприводимый над полем k , $I = (f)A$ – однородный идеал. Тогда для любого мономиального идеала $K \subseteq A$ множества $H(\mathfrak{B}(I))$ и $H(\mathfrak{B}(K))$ различны.

Действительно, рассмотрим произвольный мономиальный идеал $K \subseteq A$. Предположим, что $H(\mathfrak{B}(I)) = H(\mathfrak{B}(K))$. Тогда, в частности, $H(I, n) = H(K, n) \forall n$, следовательно, $H(I, d-1) = H(K, d-1) = 0$, $H(I, d) = H(K, d) = 1$. Так как K – мономиальный идеал, то K_d порождено одним мономом t степени d . Рассмотрим идеал $J = (t/x_i, K)A \in \mathfrak{B}(K)$ для некоторого i такого, что x_i делит t . Очевидно, что $H(J, d-1) = 1$, $H(J, d) = n$. Так как $H(\mathfrak{B}(I)) = H(\mathfrak{B}(K))$, то $\exists M \in \mathfrak{B}(I)$ такой, что $H(M, d-1) = 1$, $H(M, d) = n$. Следовательно, M_{d-1} порождено одним однородным многочленом g степени $d-1$, но в силу неприводимости f многочлены $f, gx_1, gx_2, \dots, gx_n$ линейно независимы над k , т.е. $H(M, d) = n+1$ – противоречие.

С другой стороны, случай произвольного мономиального идеала I нельзя свести к случаю лекс-сегментного идеала:

ПРИМЕР 1.3. Пусть $A = k[x_1, x_2]$, $I = (x_1^2, x_2^3)A$ – мономиальный идеал. Тогда для любого лекс-сегментного идеала L множества $H(\mathfrak{B}(I))$ и $H(\mathfrak{B}(L))$ различны.

Действительно, рассмотрим произвольный лекс-сегментный идеал $L \subseteq A$. Предположим, что $H(\mathfrak{B}(I)) = H(\mathfrak{B}(L))$. Тогда, в частности, $H(I, n) = H(L, n) \forall n$, следовательно, $L = (x_1^2, x_1x_2^2, x_2^4)A$. Положим $J = (x_1x_2, L)A \in \mathfrak{B}(L)$. Очевидно, что $H(J, 2) = 2$, $H(J, 3) = 3$. Однако $\forall M \in \mathfrak{B}(I)$ из $H(M, 2) = 2$ следует, что $H(M, 3) = 4$ – противоречие.

Заметим сразу, что изучение функций Гильберта однородных идеалов $J \in \mathfrak{B}(I)$ можно свести к изучению функций Гильберта мономиальных идеалов в силу следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.4 (Маколей). *Функция Гильберта однородного идеала J совпадает с функцией Гильберта мономиального идеала старших членов $\text{in } J$.*

(Остается заметить, что если $J \in \mathfrak{B}(I)$, то $\text{in } J \in \mathfrak{B}(I)$, так как I мономиальный.) Таким образом, не ограничивая общности, можно рассматривать только мономиальные идеалы $J \in \mathfrak{B}(I)$.

Везде далее в статье: $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – кольцо многочленов от n переменных, I – некоторый мономиальный идеал в A , $R = A/I$ – факторкольцо, A_i, R_i, I_i – множества мономов степени i в A, R, I соответственно. Введем на мономах в A лексикографический порядок: $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} > x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$, если $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_l = b_l, a_{l+1} > b_{l+1}$. Так как I – мономиальный идеал, то на мономах в R индуцируется аналогичный порядок.

Теорему Маколей можно сформулировать в терминах факторкольца R : требование $J \in \mathfrak{B}(I)$ означает, что рассматриваются образы однородных идеалов из $\mathfrak{A}$ в

факторкольце $R = A/I$, а $\mathfrak{B}_0(I)$ – множество мономиальных идеалов в R , содержащих старшие мономы в каждом R_i . Удобно переформулировать теорему Маколея в комбинаторных терминах. Пусть M – мономиальное множество в R_i , обозначим через $D^R M$ множество, состоящее из старших мономов в R_i , $|D^R M| = |M|$, а через $C^R M$ – множество, состоящее из меньших мономов в R_i , $|C^R M| = |M|$ (верхний индекс R указывает, в каком кольце действуют операторы C, D). Если $a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in R_i$, то обозначим

$$\begin{aligned}\Gamma^R(a) &= \{x_1^{a_1-1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}, x_1^{a_1} x_2^{a_2-1} \cdots x_n^{a_n}, \dots, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n-1}\} \cap R_{i-1}, \\ \Gamma^R(M) &= \bigcup_{a \in M} \Gamma^R(a), \\ \Delta^R(a) &= \{x_1^{a_1+1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}, x_1^{a_1} x_2^{a_2+1} \cdots x_n^{a_n}, \dots, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n+1}\} \cap R_{i+1}, \\ \Delta^R(M) &= \bigcup_{a \in M} \Delta^R(a).\end{aligned}$$

Будем называть множество $M \subseteq R_i$ D^R -сжатым, если $D^R M = M$, и C^R -сжатым, если $C^R M = M$.

Теорема Маколея 1.1 утверждает, что

$$|\Delta^A(D^A M)| \leq |\Delta^A(M)| \quad \forall i \geq 1, \quad \forall M \subseteq A_i.$$

Будем говорить, что в факторкольце R выполняется теорема Маколея, если

$$|\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)| \quad \forall i \geq 1, \quad \forall M \subseteq R_i. \quad (1)$$

Легко видеть, что (1) эквивалентно обобщению теоремы Маколея, приведенному выше.

Основной целью статьи является нахождение условий на идеал I , при которых в кольце R выполняется теорема Маколея (1).

В §2 статьи изложены, в основном, технические утверждения, в том числе равносильная формулировка теоремы Маколея (теорема 2.7) и два условия на идеал I , необходимых для выполнения в R теоремы Маколея (следствие 2.5 и теорема 2.10).

В §3 приведено условие на идеал I , необходимое и достаточное для выполнения теоремы Маколея в кольце R , если $A = k[x_1, x_2]$ (теорема 3.5). Кроме того, с помощью метода, изложенного в [2] (с небольшими изменениями), получено обобщение теоремы Маколея на факторкольца по некоторым идеалам, порожденным мономами от переменных x_1 и x_2 (теорема 3.1).

В §4 изложены условия, необходимые и достаточные для выполнения теоремы Маколея, если I является лексическим (см. определение в §4) или вполне лексическим (теоремы 4.12, 4.11).

Автор хотел бы выразить свою глубокую признательность Е. С. Голоду за его многочисленные ценные замечания.

§ 2. Свойства сжатых множеств и отображений Γ и Δ

ЛЕММА 2.1. Если I – произвольный мономиальный идеал, $M \subseteq R_i$ – D^R -сжатое множество, то $\Delta^R(M)$ D^R -сжато.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta^R(M)$ не D^R -сжато, т.е. существуют

$$a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in R_{i+1} \setminus \Delta^R(M), \quad b = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \in \Delta^R(M)$$

такие, что $a > b$. Так как $a > b$, то $\exists l \geq 1$ такое, что $a_1 = b_1, \dots, a_{l-1} = b_{l-1}$, $a_l > b_l$, кроме того, пусть $k = \max\{t : x_t \mid b\}$; понятно, что $k > l$. Если $a_{l+1} = \dots = a_n = 0$, то $a/x_l \geq b/x_k$, а если $\exists r > l$ такое, что $a_r > 0$, то $a/x_r > b/x_k$; в обоих случаях $a \in \Delta^R(M)$ – противоречие.

ЛЕММА 2.2. Следующие условия равносильны:

- (а) если $M \subseteq R_{i+1}$ C^R -сжато, то $\Gamma^R(M)$ C^R -сжато;
- (б) если $a \in R_{i+1}$, $b \in R_i$, $bx_n < a$ и из $bx_j < a$ следует, что $bx_j \in I_{i+1}$, то $\exists l$ такое, что $a = bx_l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено (а), и пусть $a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in R_{i+1}$, $b = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} \in R_i$ такие, что $bx_n < a$ и из $bx_j < a$ следует, что $bx_j \in I_{i+1}$. Обозначим $M = \{m \in R_{i+1} : m \leq a\}$. Так как M – C^R -сжатое множество, то $\Gamma^R(M)$ C^R -сжато. Аналогично доказательству леммы 2.1 получаем, что $\exists k$ такое, что $a/x_k \geq b$. Если $a/x_k > b$, то $b \notin \Gamma^R(M)$ (в силу свойств мономов a и b), что противоречит C^R -сжатости множества $\Gamma^R(M)$.

Пусть теперь выполнено (б), но существует C^R -сжатое множество $M \subseteq R_{i+1}$ такое, что $\Gamma^R(M)$ не C^R -сжато. Возьмем в качестве a максимальный элемент в M . Снова аналогично доказательству леммы 2.1 $\exists k$ такое, что a/x_k – максимальный элемент в $\Gamma^R(M)$. Так как $\Gamma^R(M)$ не C^R -сжато, то $\exists b \in R_i \setminus \Gamma^R(M)$, $b < a/x_k$. Элементы a и b удовлетворяют условию (б): в силу $b < a/x_k$ имеем $bx_n < a$; если $bx_j < a$, то $bx_j \in I_{i+1}$, так как иначе $b \in \Gamma^R(M)$. Поэтому из условия (б) вытекает, что $a = bx_l$ – противоречие.

ЛЕММА 2.3. Если $M \subseteq R_i$, $A = R_{i-1} \setminus \Gamma^R(M)$, $B = R_{i+1} \setminus \Delta^R(M)$, то

- (а) $M \cap \Delta^R(A) = \emptyset$,
- (б) $M \cap \Gamma^R(B) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Если $m \in M$, то $\Delta^R(m) \subseteq R_{i-1} \setminus A$, а если $m \in \Delta^R(A)$, то $\exists i$ такое, что $m/x_i \in A$; поэтому если $m \in \Delta^R(A) \cap M$, то $A \cap \Gamma^R(M) \neq \emptyset$ – противоречие.

(б) Если $m \in M$, то $\Delta^R(m) \subseteq R_{i+1} \setminus B$, а если $m \in \Gamma^R(B)$, то $\exists i$ такое, что $mx_i \in B$; поэтому если $m \in \Gamma^R(B) \cap M$, то $B \cap \Delta^R(M) \neq \emptyset$ – противоречие.

ЛЕММА 2.4. Пусть в кольце R выполняется теорема Маколея, $M \subseteq R_i$ – C^R -сжатое множество, тогда $\Gamma^R(M)$ C^R -сжато.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует C^R -сжатое множество $M \subseteq R_i$ такое, что $\Gamma^R(M)$ не C^R -сжато. Обозначим

$$A = R_{i-1} \setminus \Gamma^R(M), \quad B = R_{i+1} \setminus C^R(\Gamma^R(M)).$$

В силу леммы 2.3 имеем, что $\Delta^R(A) \cap M = \emptyset$; следовательно, используя лемму 2.1, C^R -сжатость множества M и теорему Маколея в кольце R ($B = D^R A$), получаем, что $\Delta^R(B) \cap M = \emptyset$. С другой стороны, так как $\Gamma^R(M)$ не C^R -сжато, то $B \cap \Gamma^R(M) \neq \emptyset$, поэтому $\Delta^R(B) \cap M \neq \emptyset$ – противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Если в кольце $R = A/I$ выполняется теорема Маколея, то идеал I удовлетворяет условию (b) леммы 2.2, в частности, если существует $a \in R_i$ такой, что $ax_j \in I \forall j$, то $\forall b \in A_{i+1}$, $b \geq ax_n$, имеем $b \in I_{i+1}$.*

Однако условие C^R -сжатости Γ^R -образа любого C^R -сжатого множества не является достаточным для выполнения теоремы Маколея, что видно на следующем примере.

ПРИМЕР 2.6. $A = k[x_1, x_2, x_3]$, I порожден x_2x_3 и всеми мономы степени 3. C^R -сжатость Γ^R -образа любого C^R -сжатого множества очевидна, но $|\Delta^R(x_1)| = 3 > |\Delta^R(x_2)| = 2$.

ТЕОРЕМА 2.7. *Для выполнения теоремы Маколея (1) в кольце R необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R(\Gamma^R(M)) \quad \forall i \geq 2, \quad \forall M \subseteq R_i. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется (2), но (1) неверно, т.е.

$$\exists M \subseteq R_i \text{ такое, что } |\Delta^R(D^R M)| > |\Delta^R(M)|.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A &= \Delta^R(D^R M), & B &= \Delta^R(M), \\ A' &= R_{i+1} \setminus A, & B' &= R_{i+1} \setminus B. \end{aligned}$$

Так как $|A| > |B|$, то $|A'| < |B'| = |C^R B'|$, кроме того, в силу леммы 2.1 множество A D^R -сжато, поэтому множество A' C^R -сжато; следовательно, $A' \subseteq C^R B'$ (включение строгое), из этого получаем, что $C^R B' \cap A \neq \emptyset$ и $\Gamma^R(C^R B') \cap D^R M \neq \emptyset$.

С другой стороны, по лемме 2.3 имеем, что $\Gamma^R(B') \cap M = \emptyset$, таким образом, $|\Gamma^R(B')| + |M| \leq |R_i|$, следовательно, $C^R(\Gamma^R(B')) \cap D^R M = \emptyset$; кроме того, из (2) следует, что $\Gamma^R(C^R B') \subseteq C^R(\Gamma^R(B'))$, т.е. $\Gamma^R(C^R B') \cap D^R M = \emptyset$ – противоречие.

Пусть теперь выполняется (1), но (2) неверно, т.е.

$$\exists M \subseteq R_i \text{ такое, что } \Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M)).$$

В силу леммы 2.4 получаем, что $|\Gamma^R(C^R M)| > |\Gamma^R(M)|$.

Обозначим

$$\begin{aligned} A &= \Gamma^R(C^R M), & B &= \Gamma^R(M), \\ A' &= R_{i-1} \setminus A, & B' &= R_{i-1} \setminus B. \end{aligned}$$

Так как $|A| > |B|$, то $|A'| < |B'| = |D^R B'|$, кроме того, в силу леммы 2.4 множество A C^R -сжато, поэтому множество A' D^R -сжато, следовательно, $A' \subset D^R B'$ (включение строгое); из этого получаем, что $D^R B' \cap A \neq \emptyset$ и $\Delta^R(D^R B') \cap C^R M \neq \emptyset$.

С другой стороны, по лемме 2.3 имеем, что $\Delta^R(B') \cap M = \emptyset$, таким образом, $|\Delta^R(B')| + |M| \leq |R_i|$, следовательно, $D^R(\Delta^R(B')) \cap C^R M = \emptyset$; кроме того, из (1) и леммы 2.1 следует, что $\Delta^R(D^R B') \subseteq D^R(\Delta^R(B'))$, т.е. $\Delta^R(D^R B') \cap C^R M = \emptyset$ — противоречие.

Из леммы 2.1 следует, что (1) равносильно

$$\Delta^R(D^R M) \subseteq \Delta^R(M) \quad \forall i \geq 1, \quad \forall M \subseteq R_i,$$

однако (2) нельзя заменить на

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leq |C^R(\Gamma^R(M))| \quad \forall i \geq 2, \quad \forall M \subseteq R_i,$$

что видно на следующем примере.

ПРИМЕР 2.8. $A = k[x_1, x_2]$, $I = (x_1^3, x_1 x_2^2, x_2^3)A$. Очевидно, что

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leq |C^R(\Gamma^R(M))| \quad \forall i \geq 2, \quad \forall M \subseteq R_i,$$

но теорема Маколея (2) не выполняется ($M = \{x_1^2 x_2\}$).

ТЕОРЕМА 2.9. *Если идеал I таков, что множества I_i D^A -сжаты для всех $i \geq 1$ (лекс-сегментный идеал), то в $R = A/I$ выполняется теорема Маколея.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — произвольное мономиальное множество в R_i . В силу теоремы Маколея в кольце A имеем, что $|\Delta^A(M \cup I_i)| \geq |\Delta^A(D^A(M \cup I_i))|$, а так как $D^A(M \cup I_i) = I_i \cup D^R M$, то $\Delta^A(M \cup I_i) = \Delta^A(I_i) \cup \Delta^R(M)$ и $\Delta^A(D^A(M \cup I_i)) = \Delta^A(I_i) \cup \Delta^R(D^R M)$. Поэтому $|\Delta^A(I_i)| + |\Delta^R(M)| \geq |\Delta^A(I_i)| + |\Delta^R(D^R M)|$, т.е. $|\Delta^R(M)| \geq |\Delta^R(D^R M)|$.

Приведем еще одно условие, необходимое для выполнения теоремы Маколея, которое будет использовано в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 2.10. *Если в $R = A/I$ выполняется теорема Маколея и d — минимальная степень порождающих идеала I , то $\exists i \geq 1$ такое, что $x_1^{d-1+j} x_i \in I \quad \forall j \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $\exists i \geq 1$ такое, что $x_1^{d-1} x_i \in I$.

Если $d = 1$, то теорема очевидна. Пусть $d \geq 2$ и $x_1^{d-1} x_i \notin I_d \quad \forall i \geq 1$, тогда $\Delta^R(x_1^{d-1}) = n$; но если $a \in I_d$, $x_j \mid a$, то $\Delta^R(a/x_j) \leq n-1$ — противоречие.

§ 3. Теорема Маколея для факторкольца по идеалу, порожденному мономами от первых двух переменных

Пусть $M \subseteq R_v$, положим

$$M_{i=d} = \{m = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in M : a_i = d\}.$$

Обозначим через $C_{i=d}^R M$ меньшие $|M_{i=d}|$ элементов в $(R_v)_{i=d}$. Будем говорить, что множество M *сжато по индексу i* или *i -сжато*, если $C_{i=d}^R M = M_{i=d} \quad \forall d$, $0 \leq d \leq v$.

Пусть $M_v \subseteq R_v$. Рассмотрим множества M_v^j , $j \geq 1$, определенные следующим образом:

$$M_v^1 = M_v; \quad M_v^{j+1} = \bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R M_v^j, \quad i \equiv j \pmod{n}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть I — идеал в A , порожденный мономами от переменных x_1, x_2 , $R = A/I$. Если в $R' = R/(x_3, x_4, \dots, x_n)$ выполняется теорема Маколея, то в R тоже выполняется теорема Маколея.*

В силу теоремы 2.7 будем доказывать теорему Маколея в форме (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1 проведем индукцией по числу переменных в кольце A . База индукции при $n = 2$ обеспечивается условием теоремы ($R' = R$ при $n = 2$). Далее будем предполагать, что $n \geq 3$. Докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 3.2. *Если $M_v \subseteq R_v$, то $\exists p \geq 1$ такое, что M_v^p i -сжато для $i = 1, 2, \dots, n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенумеруем элементы R_v в соответствии с лексикографическим порядком, начиная с меньшего. Пусть $n(a)$ — номер элемента $a \in R_v$ и $n(M_v)$ — сумма номеров элементов M_v .

Так как $n(M_v^i) \geq 0$ и $n(M_v^1) \geq n(M_v^2) \geq \dots \geq n(M_v^i) \geq \dots$, то $\exists p$ такое, что $n(M_v^p) = n(M_v^{p+1}) = \dots$, но тогда $M_v^p = M_v^{p+1} = \dots$, а это означает, что M_v^p i -сжато для $i = 1, 2, \dots, n$.

ЛЕММА 3.3. *Пусть теорема 3.1 верна при $n = k - 1$, и пусть множества $M_v \subseteq R_v$ и $M_{v-1} \subseteq R_{v-1}$ таковы, что $\Gamma^R(M_v) \subseteq M_{v-1}$ при $n = k$. Тогда $\Gamma^R(M_v^j) \subseteq M_{v-1}^j \quad \forall j \geq 1$ при $n = k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по j .

При $j = 1$ утверждение следует из того, что $\Gamma^R(M_v) \subseteq M_{v-1}$. Пусть лемма доказана для j , докажем для $j + 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M_v^{j+1}) &= \Gamma^R\left(\bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R M_v^j\right) = \bigcup_{d=0}^v \Gamma^R(C_{i=d}^R M_v^j) \\ &= \bigcup_{d=0}^v [(\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d} \cup (\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d-1}] \\ &= \left[\bigcup_{d=0}^v (\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d}\right] \cup \left[\bigcup_{d=1}^v (\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d-1}\right], \end{aligned} \quad (3)$$

где $i \equiv j \pmod{n}$, $1 \leq i \leq n$.

В первой части объединения (3) i -й показатель остается постоянным под действием Γ^R . Если $i \geq 3$, то по условию леммы (теорема верна при $n = k - 1$) имеем:

$$\bigcup_{d=0}^v (\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d} \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R (\Gamma^R[(M_v^j)_{i=d}]) \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R (\Gamma^R[M_v^j]).$$

Если $i < 3$, то, применяя теорему 2.9 в кольце $k[x_1, x_3, \dots, x_n]$ для идеала $I' = (x_1^{a_1})$ или в кольце $k[x_2, x_3, \dots, x_n]$ для идеала $I' = (x_2^{a_2})$, получаем, что

$$\bigcup_{d=0}^v (\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d} \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R (\Gamma^R[(M_v^j)_{i=d}]) \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R (\Gamma^R[M_v^j]).$$

Во второй части объединения (3) все показатели, кроме i -го, остаются постоянными. Пусть $a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_i^d \dots x_n^{a_n}$ — наибольший элемент в $C_{i=d}^R M_v^j$, тогда $a' = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_i^{d-1} \dots x_n^{a_n}$ — наибольший элемент в $(\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d-1}$. Пусть $b' = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_i^{d-1} \dots x_n^{b_n} < a'$, $b' \in (R_v)_{i=d-1}$, тогда покажем, что $b = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_i^d \dots x_n^{a_n} \in (R_v)_{i=d}$ и $b < a$.

Если $i > 2$, то $b \in (R_v)_{i=d}$, так как I порожден мономами только от переменных x_1, x_2 .

Если $i = 1$, то $a_1 = b_1 + 1 = d$ и $a_2 \geq b_2$ ($a' > b'$), следовательно, $b \in (R_v)_{i=d}$.

Если $i = 2$, то аналогично $a_2 = b_2 + 1 = d$ и $a_1 \geq b_1$ ($a' > b'$), следовательно, $b \in (R_v)_{i=d}$.

Кроме того, так как $b' < a'$, то $b = b' x_i < a' x_i = a$.

Таким образом, $b \in C_{i=d}^R M_v^j$ и $b' \in (\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d-1}$, кроме того,

$$|(\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d-1}| = |C_{i=d-1}^R (\Gamma^R[(M_v^j)_{i=d}])|,$$

поэтому

$$(\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d-1} = C_{i=d-1}^R (\Gamma^R[(M_v^j)_{i=d}])$$

и, следовательно,

$$\bigcup_{d=1}^v (\Gamma^R[C_{i=d}^R M_v^j])_{i=d-1} \subseteq \bigcup_{d=1}^v C_{i=d-1}^R (\Gamma^R[(M_v^j)_{i=d}]) \subseteq \bigcup_{d=0}^{v-1} C_{i=d}^R [\Gamma^R(M_v^j)].$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \Gamma^R(M_v^{j+1}) &\subseteq \left[\bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R (\Gamma^R[M_v^j]) \right] \cup \left[\bigcup_{d=0}^{v-1} C_{i=d}^R (\Gamma^R[M_v^j]) \right] \\ &= \bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R (\Gamma^R[M_v^j]) \subseteq \bigcup_{d=0}^v C_{i=d}^R M_{v-1}^j = M_{v-1}^{j+1} \end{aligned}$$

(последнее включение имеет место по предположению индукции).

ЛЕММА 3.4. Пусть $g = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_n^{g_n}$, $h = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n}$, $g, h \in R_v$, $g < h$. Если $h_n = 0$, $h \in S \subseteq R_v$ и S — i -сжатое для $i = 1, 2, n$, то $g \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие случаи.

- 1) $g_1 = h_1$ либо $g_n = h_n$. Утверждение леммы очевидно, так как S 1- и n -сжато.
- 2) $g_1 < h_1$, $g_n > h_n$ и $h_2 = h_3 = \dots = h_{n-1} = 0$. Рассмотрим моном $u = x_1^{u_1} x_2^{u_2} \dots x_n^{u_n}$, где $u_1 = h_1 - g_n + h_n$, $u_2 = \dots = u_{n-1} = 0$, $u_n = g_n$; $u \in R_v$, так как $u_1 < h_1$, $u_2 = h_2$, и $u \in S$, так как $u_2 = h_2$ и S 2-сжато. Кроме того, $h > u \geq g$ и $u_n = g_n$, следовательно, рассуждая аналогично случаю 1), получаем, что $g \in S$.
- 3) $g_1 < h_1$, $g_n > h_n$ и $\exists i$, $2 \leq i \leq n-1$, такое, что $h_i > 0$. Рассмотрим моном $u = x_1^{u_1} x_2^{u_2} \dots x_n^{u_n}$, где $u_1 = h_1$, $u_n = \min(\sum_{j=2}^{n-1} h_j, g_n)$, $u_{n-1} = \sum_{j=2}^{n-1} h_j - u_n$, а остальные $u_k = 0$. Моном $u \in R_v$, так как $u_1 = h_1$, $u_2 \leq h_2$, и $u \in S$, так как $u_1 = h_1$ и S 1-сжато. Кроме того, $h > u \geq g$, и если $u_n = g_n$, то, рассуждая аналогично случаю 1), получаем, что $g \in S$, а если $u_n < g_n$, то $u_2 = \dots = u_{n-1} = 0$ и для окончания доказательства достаточно воспользоваться рассуждениями из случая 2).

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3.1. Пусть теорема доказана при $n-1$, докажем при n . Пусть M_v – произвольное множество в R_v . Рассмотрим множества M_v^j , $j = 1, 2, \dots$. По лемме 3.2 $\exists p \geq 1$ такое, что M_v^p i -сжато для $i = 1, 2, \dots, n$. Положим $S = M_v^p$ и $T = (\Gamma^R[M_v])^p$. Применяя лемму 3.3 к M_v и $\Gamma^R(M_v)$, получаем, что $\Gamma^R(S) \subseteq T$.

Если $S = R_v$, то $M_v = R_v$ и, очевидно, $\Gamma^R(C^R M_v) = C^R(\Gamma^R(M_v))$.

Если $S \neq R_v$, то обозначим через $h = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n}$ наибольший моном в S и через $g = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_n^{g_n}$ наименьший моном в $R_v \setminus S$. Рассмотрим два случая.

- 1) $g < h$. По лемме 3.4 $h_n > 0$, так как S i -сжато для $i = 1, 2, \dots, n$. Положим $h' = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \dots x_n^{h_n-1}$ и $g' = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_n^{g_n-1}$, если $g_n > 0$. Так как $\Gamma^R(S) \subseteq T$, то $h' \in T$. Обозначим:

$$S' = (S \setminus \{h\}) \cup \{g\}, \quad T' = \begin{cases} T, & g_n = 0, \\ (T \setminus \{h'\}) \cup \{g'\}, & g_n > 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\Gamma^R(S') \subseteq T'$.

Пусть $x \in S \setminus \{h\}$, тогда $h' \notin \Gamma^R(x)$, следовательно, $\Gamma^R(S \setminus \{h\}) \subseteq T'$.

Пусть $g_n > 0$, тогда $g' \in T'$ по построению. Если $\exists i$, $1 \leq i \leq n-1$, такое, что $g_i > 0$, то $x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n} \in \Gamma^R(g)$. Моном $g'' = x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n+1} \in S$, так как $g'' < g$ и g – наименьший в $R_v \setminus S$ ($g'' \in R_v$, так как $n \geq 3$). Таким образом, $\Gamma^R(g) \subseteq T \cup \{g'\}$. Заметим далее, что $h_1 > g_1$ (S i -сжато) и, значит, $x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n} < h'$, т.е. $\Gamma^R(g) \subseteq T'$.

Пусть $g_n = 0$, тогда $g'' \in \Gamma^R(x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_i^{g_i-1} \dots x_n^{g_n+1})$, $g'' < g$ и снова $\Gamma^R(g) \subseteq T' (g'' \in R_v, \text{ так как } n \geq 3)$.

Таким образом, $\Gamma^R(S') \subseteq T'$.

Очевидно, что S' i -сжато для $i = 1, 2, \dots, n$.

После конечного числа применений операции $'$ получим $S'^{\dots'} = C^R M_v$ и $\Gamma^R(S'^{\dots'}) = \Gamma^R(C^R M_v) \subseteq T'^{\dots'} = U$, следовательно, $|\Gamma^R(C^R M_v)| \leq |U| = |\Gamma^R(M_v)|$ и $\Gamma^R(C^R M_v) \subseteq C^R(\Gamma^R(M_v))$, так как $\Gamma^R(C^R M_v)$ C^R -сжато по лемме 2.2 ($n \geq 3$).

- 2) $g > h$. Значит, $S = C^R M_v$ и, следовательно, $\Gamma^R(C^R M_v) = C^R(\Gamma^R(M_v))$.

Теорема 3.1 доказана полностью.

Рассмотрим более подробно случай, когда $n = 2$, т.е. $A = k[x_1, x_2]$.

Пусть $I_v = \{x_1^{l_1^v} x_2^{m_1^v}, x_1^{l_2^v} x_2^{m_2^v}, \dots, x_1^{l_s^v} x_2^{m_s^v}\}$, причем $l_1^v > l_2^v > \dots > l_s^v$. Составим векторы:

$$\begin{aligned} l^v &= (l_0^v, l_1^v, \dots, l_{s+1}^v) = (v+1, l_1^v, l_2^v, \dots, l_s^v, -1), \\ \Delta l^v &= (\Delta l_0^v, \Delta l_1^v, \dots, \Delta l_s^v) \\ &= (l_0^v - l_1^v - 1, l_1^v - l_2^v - 1, \dots, l_{s-1}^v - l_s^v - 1, l_s^v - l_{s+1}^v - 1), \\ s^v &= (s_1^v, s_2^v, \dots, s_r^v), \end{aligned}$$

где вектор s^v получается из Δl^v удалением компонент, равных нулю (s^v может быть пустым).

Множество вида $\{x_1^{a_1} x_2^{a_2}, x_1^{a_1-1} x_2^{a_2+1}, \dots, x_1^{a_1-q} x_2^{a_2+q}\}$ будем называть *отрезком*.

ТЕОРЕМА 3.5. *Теорема Маколея в кольце $R = A/I = k[x_1, x_2]/I$ выполняется тогда и только тогда, когда идеал I удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *если $m \in R_v$, но $mx_1 \in I$, $mx_2 \in I$, то $\forall m' \in R_{v+1}$, $m' \geq mx_2$, имеем $m' \in I$;*

(б) $\forall v \geq 1$:

- (i) *если $\Delta l_0^v = 0, \Delta l_s^v = 0$, то $s_i^v \leq s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \dots, r-1$;*
- (ii) *если $\Delta l_0^v = 0, \Delta l_s^v > 0$, то $s_i^v \leq s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \dots, r-2$;*
- (iii) *если $\Delta l_0^v > 0, \Delta l_s^v = 0$, то $r = 1, s_1^v = \Delta l_0^v = 1$;*
- (iv) *если $\Delta l_0^v > 0, \Delta l_s^v > 0$, то либо $l^v = (v+1, -1)$, либо $r = 2, s^v = (\Delta l_0^v, \Delta l_s^v)$ и $s_1^v = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в кольце R выполняется теорема Маколея (например, в формулировке (2)), т.е.

$$\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R(\Gamma^R(M)) \quad \forall v \geq 2, \quad \forall M \subseteq R_v.$$

Выполнение условия (а) вытекает из следствия 2.5.

Предположим теперь, что условие (б) не выполняется.

(i) Пусть $\exists v \geq 2$ такое, что $\Delta l_0^v = 0, \Delta l_s^v = 0$, но $\exists j, 1 \leq j \leq r-1$, такое, что $s_j^v > s_{j+1}^v$. Пусть j — максимальное с таким условием, т.е. $s_j^v > s_{j+1}^v \leq s_{j+2}^v \leq \dots \leq s_r^v$. Пусть $s_i^v = l_{j_i}^v - l_{j_i+1}^v - 1, i = 1, 2, \dots, r$. Обозначим

$$B_i = \{w \in F_v : x_1^{l_{j_i}^v} x_2^{m_{j_i}^v} > w > x_1^{l_{j_i+1}^v} x_2^{m_{j_i+1}^v}\}$$

при $i = 1, 2, \dots, r$. Очевидно, что $|B_i| = s_i^v, |\Gamma^R(B_i)| = s_i^v + 1$ при всех i . Положим

$$M = B_j \cup \bigcup_{i=j+2}^r B_i,$$

тогда

$$C^R M = D_j \cup \bigcup_{i=j+1}^r B_i,$$

где $D_j \subset B_j$, $|D_j| = |B_j| - |B_{j+1}| > 0$. Очевидно, что

$$|\Gamma^R(M)| = s_j^v + 1 + \sum_{i=j+2}^r (s_i^v + 1),$$

$$|\Gamma^R(C^R M)| = |D_j| + 1 + \sum_{i=j+1}^r (s_i^v + 1).$$

Таким образом, $|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^R(C^R M)| - 1$, поэтому $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ – противоречие.

(ii) Пусть $\exists v \geq 2$ такое, что $\Delta l_0^v = 0$, $\Delta l_s^v > 0$, но $\exists j$, $1 \leq j \leq r - 2$, такое, что $s_j^v > s_{j+1}^v$. Будем считать, что $r \geq 3$, так как иначе условие очевидно. Пусть j – максимальное с данным условием, т.е. $s_j^v > s_{j+1}^v \leq s_{j+2}^v \leq \dots \leq s_{r-1}^v$. Используя обозначения, введенные выше, заметим, что $|B_i| = s_i^v$, $|\Gamma^R(B_i)| = s_i^v + 1$ при $i < r$ и $|B_r| = s_r^v$, $|\Gamma^R(B_r)| = s_r^v$. Положим

$$M = B_j \cup \bigcup_{i=j+2}^r B_i,$$

тогда

$$C^R M = D_j \cup \bigcup_{i=j+1}^r B_i,$$

где $D_j \subset B_j$, $|D_j| = |B_j| - |B_{j+1}| > 0$. Очевидно, что

$$|\Gamma^R(M)| = s_j^v + \sum_{i=j+2}^r (s_i^v + 1),$$

$$|\Gamma^R(C^R M)| = |D_j| + \sum_{i=j+1}^r (s_i^v + 1).$$

Таким образом, $|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^R(C^R M)| - 1$, значит, $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ – противоречие.

(iii) Пусть $\exists v \geq 2$ такое, что $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v = 0$, но либо $r > 1$, либо $s_1^v > 1$. Заметим сразу, что $I_v \neq \emptyset$, следовательно, в силу теоремы 2.10 неравенство $s_1^v > 1$ невозможно. Поэтому остается лишь случай, когда $r > 1$. Положим

$$M = \{x_1^v\}.$$

Так как $r > 1$, то $C^R M \neq M$, а так как $\Delta l_s^v = 0$, то $|\Gamma^R(C^R M)| = 2$, но $|\Gamma^R(M)| = 1$, следовательно, $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ – противоречие.

(iv) Пусть $\exists v \geq 2$ такое, что $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v > 0$ и либо $r = 1$, но $l^v \neq (v + 1, -1)$, либо $r = 2$, но $s^v \neq (1, \Delta l_s^v)$, либо $r > 2$.

Если $r = 1$, то из условий $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v > 0$ получаем $l^v = (v + 1, -1)$.

Если $r = 2$, то $I_v \neq \emptyset$, следовательно, в силу теоремы 2.10 получаем, что $s_1^v = 1$, т.е. $s^v = (1, \Delta l_s^v)$.

Остается случай $r > 2$. Положим (используя введенные выше обозначения)

$$M = \{x_1^v\} \cup B_r.$$

Так как $r > 2$, то $C^R M \cap \{x_1^v\} = \emptyset$, следовательно,

$$|\Gamma^R(M)| = |B_r| + 1, \quad |\Gamma^R(C^R M)| = |B_r| + |\Gamma^R(C^R M \setminus B_r)| = |B_r| + 2$$

и в результате $\Gamma^R(C^R M) \not\subseteq C^R(\Gamma^R(M))$ – противоречие.

Таким образом, условие (b) доказано.

Пусть теперь выполняются условия (a) и (b), докажем теорему Маколея. Покажем сначала, что

$$|\Gamma^R(C^R M)| \leq |\Gamma^R(M)| \quad \forall v \geq 2, \quad \forall M \subseteq R_v. \quad (4)$$

Для этого воспользуемся условием (b).

(i) $\Delta l_0^v = 0, \Delta l_s^v = 0$.

Положим $M^i = M \cap B_i$. Представим каждое из множеств M^i в виде объединения максимальных отрезков:

$$M^i = \bigcup_{j=1}^{r_i} B_{ij},$$

причем $B_{ij} \cup B_{ik}$ не является отрезком при $j \neq k$.

Положим

$$N(M) = \sum_{i=1}^r r_i.$$

Очевидно, что

$$|\Gamma^R(M)| = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_i} (|B_{ij}| + 1) = |M| + N(M).$$

В силу условия (b) имеем $s_i^v \leq s_{i+1}^v$ при $i = 1, 2, \dots, r-1$, следовательно, $N(M) \geq N(C^R M)$, таким образом,

$$|\Gamma^R(M)| = |M| + N(M) \geq |C^R M| + N(C^R M) = |\Gamma^R(C^R M)|.$$

(ii) $\Delta l_0^v = 0, \Delta l_s^v > 0$.

Пусть $M^i, B_{ij}, N(M)$ – как и выше. Рассмотрим множества

$$S = M \cap \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} B_i \right), \quad S' \subseteq \bigcup_{i=1}^{r-1} B_i,$$

причем S' состоит из меньших элементов в $\bigcup_{i=1}^{r-1} B_i$, $|S'| = |S|$. Тогда аналогично доказанному в предыдущем пункте получаем, что $|\Gamma^R(S)| \geq |\Gamma^R(S')|$ и, следовательно, $|\Gamma^R(M)| \geq |\Gamma^R(S' \cup (M \cap B_r))|$. Очевидно, что $N(S') + 1 \geq N(C^R M)$, следовательно,

$$\begin{aligned} |\Gamma^R(M)| &= |\Gamma^R(S)| + |\Gamma^R(M \setminus S)| \geq |\Gamma^R(S')| + |M \setminus S| = |S'| + N(S') + |M \setminus S| \\ &= |M| + N(S') \geq |C^R M| + N(C^R M) - 1 = |\Gamma^R(C^R M)|. \end{aligned}$$

(iii) $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v = 0$. Из условия (b) следует, что $|R_v| = 1$ и, очевидно, $|\Gamma^R(C^R M)| = |\Gamma^R(M)|$.

(iv) $\Delta l_0^v > 0$, $\Delta l_s^v > 0$. Если $r = 1$, то из условия (b) следует, что $l^v = (v+1, -1)$, т.е. в степени v нет мономов, принадлежащих идеалу, следовательно, по теореме Маколея для кольца A имеем $|\Gamma^R(C^R M)| \leq |\Gamma^R(M)|$. Если $r = 2$, то из условия (b) следует, что $s^v = (1, \Delta l_s^v)$. Если $M = R_v$, то неравенство (4) очевидно. Пусть $M \neq R_v$, тогда $|\Gamma^R(C^R M)| = |C^R M|$ и

$$|\Gamma^R(M)| = |\Gamma^R(M \cap B_1)| + |\Gamma^R(M \cap B_2)| \geq |M \cap B_1| + |M \cap B_2| = |M|,$$

следовательно, $|\Gamma^R(C^R M)| \leq |\Gamma^R(M)|$.

Таким образом, (4) доказано.

Легко видеть, что при $n = 2$ условие (a) теоремы эквивалентно условию (b) леммы 2.2, поэтому из (a) следует, что если множество M C^R -сжато, то $\Gamma^R(M)$ тоже C^R -сжато.

Применяя (4) и пользуясь C^R -сжатостью множеств $C^R(\Gamma^R(M))$ и $\Gamma^R(C^R M)$, получаем $\Gamma^R(C^R M) \subseteq C^R(\Gamma^R(M))$.

Теорема 3.5 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Условие (a) теоремы 3.5 достаточно проверить при $v = 1, 2, \dots, q-1$, а условие (b) — при $v = 1, 2, \dots, 2q$, где q — максимальная степень порождающих идеала I .

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть I — идеал в $A = k[x_1, \dots, x_n]$, порожденный мономами от переменных x_1, x_2 , $R = A/I$. Следующие условия равносильны:

- (a) идеал $I' = I/(x_3, \dots, x_n) \in k[x_1, x_2]$ удовлетворяет условиям (a) и (b) теоремы 3.5;
- (b) в кольце $k[x_1, x_2]/I'$ выполняется теорема Маколея;
- (c) теорема Маколея в кольце R выполняется при всех $n \geq 2$.

Следует отметить, что теорема, обратная к теореме 3.1, неверна:

ПРИМЕР 3.8. Рассмотрим идеалы $I \subseteq k[x_1, x_2]$ и $I' \subseteq k[x_1, x_2, x_3]$, порожденные мономами $x_1^5, x_1^2 x_2^5, x_2^7, x_1^4 x_2^4$. В кольце $R = k[x_1, x_2]/I$ теорема Маколея не выполняется, так как при $v = 7$ нарушается условие (i) теоремы 3.5. Докажем, что в кольце $R' = k[x_1, x_2, x_3]/I'$ теорема Маколея выполняется. Воспользуемся формулировкой (2). Если $i < 7$, то теорема Маколея выполняется, так как I' в этих степенях совпадает с лекс-сегментным идеалом. Если $i \geq 7$, то $R'_i = x_3^{i-7} R'_7$, поэтому достаточно рассмотреть случаи $i = 7$ и $i = 8$. Как было проверено на компьютере, в этих двух случаях теорема Маколея выполняется.

§ 4. Теорема Маколея для факторколец по лексическим и вполне лексическим идеалам

Если $u, v \in A_i$, $u \geq v$, то множество мономов $\{t \in A_i : u \geq t \geq v\}$ в A будем называть *отрезком* и обозначать через $[u, v]$, кроме того, идеал, порожденный $[u, v]$, будем называть *лексическим* и обозначать через $L[u, v]$. Однородный идеал I , у которого все I_j являются отрезками, будем называть *вполне лексическим*.

В статье [3] было дано следующее описание вполне лексических идеалов:

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $u = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$, $v = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$; $I = L[u, v]$ является вполне лексическим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- (а) $v = x_n^d$, $u \geq x_2^d$;
- (б) $v > x_n^d$, $a_1 > 0$, $a_1 = b_1$, $u = x_1^{a_1} x_2^{d-a_1}$, $v = x_1^{a_1} x_n^{d-a_1}$;
- (с) $v > x_n^d$, $a_1 > 0$, $a_1 > b_1$ и $\forall w < v$, $\deg w = d$, $\exists i > 1$ такое, что $x_i \mid w$ и $wx_1/x_i \leq u$.

Для доказательства этой теоремы авторы статьи [3] использовали весьма сложную конструкцию минимальных резольвент из статьи [4], а также аппарат теории производных функторов. Ниже приводится более простое доказательство теоремы 4.1 без использования методов гомологической алгебры.

Если m – моном, то положим $M(m) = \max\{k : x_k \mid m\}$.

ЛЕММА 4.2. Если $I = L[u, v]$, u, v удовлетворяют условию (а) теоремы 4.1, то I_{d+1} – отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m \in A_{d+1} \setminus I_{d+1}$, $m < x_1 u$.

Если $x_1 \mid m$, то $m/x_1 < u$, т.е. $m/x_1 \in I_d$ – противоречие.

Если $x_1 \nmid m$, то $m/x_{M(m)} \leq x_2^d \leq u$ – снова противоречие.

ЛЕММА 4.3. Если $I = L[u, v]$, u, v удовлетворяют условию (б) теоремы 4.1, то I_{d+1} – отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m \in [x_1 u, x_n v] \setminus I_{d+1}$.

Если $x_1^{a_1+1} \mid m$, то $u > m/x_1 \geq v$ – противоречие.

Если $x_1^{a_1} \mid m$, но $x_1^{a_1+1} \nmid m$, то $u \geq m/x_{M(m)} \geq v$ – снова противоречие.

ЛЕММА 4.4. Если $I = L[u, v]$, u, v удовлетворяют условию (с) теоремы 4.1, то I_{d+1} – отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \in [x_1 u, x_n v] \setminus I_{d+1}$.

Разберем следующие случаи:

1) $a_1 > b_1 + 1$.

Если $c_1 > b_1 + 1$, то $u > m/x_1 > v$ – противоречие.

Если $c_1 \leq b_1 + 1$, то $u > m/x_{M(m)} \geq v$ – противоречие.

2) $a_1 = b_1 + 1$.

Если $c_1 = a_1 + 1$, то $u > m/x_1 > v$ – противоречие.

Если $c_1 = b_1$, то $u > m/x_{M(m)} \geq v$ – противоречие.

Если $c_1 = a_1$, то $u > m/x_1$. Если $m/x_1 \geq v$, то $m/x_1 \in I_d$ – противоречие, а если $m/x_1 < v$, то в силу условия (с) $\exists i > 1$ такое, что $x_i \mid (m/x_1)$ и $\frac{m}{x_1} \frac{x_1}{x_i} \leq u$, т.е. $u \geq m/x_i$. Кроме того, так как $c_1 = a_1$, то $m/x_i > v$, следовательно, $m/x_i \in I_d$ – противоречие.

ЛЕММА 4.5. Если $I = L[u, v]$, u, v удовлетворяют условию (а) теоремы 4.1, то I – вполне лексический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.2 I_{d+1} – отрезок, $x_1 u$ и $v x_n$ удовлетворяют условию (а) теоремы 4.1, следовательно, по лемме 4.2 I_{d+2} – отрезок и т. д.

ЛЕММА 4.6. Если $I = L[u, v]$, u, v удовлетворяют условию (с) теоремы 4.1, то I – вполне лексический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $u' = x_1 u, v' = x_n v$. Очевидно, что $a'_1 > 0, a'_1 > b'_1$. Пусть $w = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \in A_{d+1}, w < v'$, тогда $M(w) > 1$ и $u > w/x_{M(w)}$, так как $c_1 \leq b'_1 = b_1 < a_1$, следовательно, $u' > wx_1/x_{M(w)}$, т.е. u', v' удовлетворяют условию (с) теоремы 4.1. Кроме того, по лемме 4.4 I_{d+1} – отрезок, поэтому, применяя лемму 4.4 к I_{d+1} , получаем, что I_{d+2} – отрезок и т.д.

ЛЕММА 4.7. Если $I = L[u, v]$, u, v удовлетворяют условию (b) теоремы 4.1, то I – вполне лексический.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $u' = x_1 u, v' = x_n v$. Очевидно, что $a'_1 > 0, a'_1 > b'_1$. Пусть $w = x_1^{c_1} \cdots x_n^{c_n} \in A_{d+1}, w < v' = x_1^{a_1} x_n^{d-a_1+1}$, тогда $c_1 < a_1$, следовательно, $wx_1/x_{M(w)} < u'$, т.е. u', v' удовлетворяют условию (с) теоремы 4.1. Кроме того, по лемме 4.3 I_{d+1} – отрезок, поэтому, применяя лемму 4.6 к I_{d+1} , получаем, что I – вполне лексический.

ЛЕММА 4.8. Если $I = L[u, v]$ и I_{d+1} – отрезок, то $u \geq x_2^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $u < x_2^d$, тогда $ux_1 > x_2^{d+1} > vx_n$, а так как I_{d+1} – отрезок, то $x_2^{d+1} \in I_{d+1}$, следовательно, $x_2^d \in I_d$ – противоречие.

ЛЕММА 4.9. Если $I = L[u, v]$, $v > x_n^d$ и I_{d+1} – отрезок, то $a_1 > 0$ и выполняется одно из следующих условий:

- (а) $a_1 = b_1$ и $u = x_1^{a_1} x_2^{d-a_1}, v = x_1^{a_1} x_n^{d-a_1}$;
- (б) $a_1 > b_1$ и $\forall w < v, \deg w = d, \exists i > 1$ такое, что $x_i \mid w$ и $wx_1/x_i \leq u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что $a_1 = 0$, тогда $ux_1 > x_n^d x_1 > vx_n$, поэтому либо $x_n^d \in I_d$, либо $x_1 x_n^{d-1} \in I_d$ – в обоих случаях противоречие, т.е. $a_1 > 0$.

Пусть $a_1 = b_1$. Если $v > x_1^{a_1} x_n^{d-a_1}$, то $ux_1 > x_1^{a_1+1} x_n^{d-a_1} > vx_n$, следовательно, либо $x_1^{a_1+1} x_n^{d-a_1} \in I_d$, либо $x_1^{a_1+1} x_n^{d-a_1-1} \in I_d$ – в обоих случаях противоречие, т.е. $v = x_1^{a_1} x_n^{d-a_1}$. Если $u < x_1^{a_1} x_2^{d-a_1}$, то $ux_1 > x_1^{a_1} x_2^{d-a_1+1} > vx_n$, следовательно, либо $x_1^{a_1} x_2^{d-a_1} \in I_d$, либо $x_1^{a_1-1} x_2^{d-a_1+1} \in I_d$ – в обоих случаях противоречие, т.е. $u = x_1^{a_1} x_2^{d-a_1}$.

Пусть $a_1 > b_1$, но $\exists w < v, \deg w = d$, такой, что $\forall i > 1$ такого, что $x_i \mid w$, имеем $wx_1/x_i > u$. В этом случае $ux_1 > wx_1 > ux_{M(w)} \geq vx_n$, следовательно, $\exists j$ такое, что $wx_1/x_j \in [u, v]$, но если $j = 1$, то получаем, что $w \in [u, v]$, а если $j > 1$, то получаем, что $wx_1/x_j \in [u, v]$ – в обоих случаях противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Если I – вполне лексический, то, применяя леммы 4.8 (если $v = x_n^d$) и 4.9 (если $v > x_n^d$), получаем выполнение условий (а), (б) или (с). Если же выполняется одно из условий (а), (б) или (с), то, применяя леммы 4.5, 4.7 или 4.6 соответственно, получаем, что I – вполне лексический.

ТЕОРЕМА 4.10. Если идеал I порожден мономами $x_1^{d-1} x_{i_1}, x_1^{d-1} x_{i_2}, \dots, x_1^{d-1} x_{i_s}, i_1 < i_2 < \dots < i_s$, то в $R = A/I$ выполняется теорема Маколея.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно доказать, что

$$|\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)| \quad \forall v \geq 1, \quad \forall M \in R_v. \quad (5)$$

Если $v = d + r$, $r \geq 0$, то $I_{d+r} = x_1^{d-1} \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\} \cdot A_r$ и $|I_{d+r}| = \binom{n+r}{r+1} - \binom{n-s+r}{r+1}$. Следовательно, $D^A(I_{d+r}) = x_1^{d-1} \cdot \{x_1^{r+1}, x_1^r x_2, x_1^r x_3, \dots, x_s x_n^r\}$ состоит из всех мономов степени $d + r$, больших $x_1^{d-1} x_{s+1}^{r+1}$, так как $|D^A(I_{d+r})| = \binom{n+r}{r+1} - \binom{n-s+r}{r+1}$ и $D^A(I_{d+r})$ состоит из старших мономов в A_{d+r} .

Пусть M_{d+r} — произвольное мономиальное множество в R_{d+r} . Заметим, что $|\Delta^R(D^R M_{d+r})| = |\Delta^A(D^R M_{d+r} \cup I_{d+r})| - |\Delta^A(I_{d+r})|$ и $|\Delta^R(M_{d+r})| = |\Delta^A(M_{d+r} \cup I_{d+r})| - |\Delta^A(I_{d+r})|$, кроме того, по теореме Маколея в кольце A имеем, что $|\Delta^A(M_{d+r} \cup I_{d+r})| \geq |\Delta^A(D^A(M_{d+r} \cup I_{d+r}))|$. Таким образом, достаточно показать, что

$$|\Delta^A(D^R M_{d+r} \cup I_{d+r})| = |\Delta^A(D^A(M_{d+r} \cup I_{d+r}))|. \quad (6)$$

Пусть $m_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ — минимальный элемент в $D^R M_{d+r}$. Если $m_0 < x_1^{d-1} x_{i_s} x_n^r$, то $D^A(M_{d+r} \cup I_{d+r}) = D^R M_{d+r} \cup I_{d+r}$ и (6) очевидно.

Пусть теперь $m_0 > x_1^{d-1} x_{i_s} x_n^r$, тогда

$$D^R M_{d+r} = \{m = x_1^{b_1+d-1} \dots x_n^{b_n} \in A_{r+d} : b_{i_1} = b_{i_2} = \dots = b_{i_s} = 0, m \geq m_0\}.$$

Представим $D^A(I_{d+r} \cup M_{d+r})$ в виде $D^A I_{d+r} \cup B$, $|B| = |D^R M_{d+r}|$. Сопоставим каждому элементу из $D^R M_{d+r}$ элемент в B по правилу:

$$x_1^{b_1+d-1} \dots x_n^{b_n} \mapsto x_1^{d-1} x_{s+1}^{c_{s+1}} \dots x_n^{c_n}, \\ (c_{s+1}, \dots, c_n) = (b_1, \dots, \widehat{b}_{i_1}, \dots, \widehat{b}_{i_s}, \dots, b_n) \quad (b_{i_j} \text{ пропущены}),$$

в частности,

$$m_0 = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \mapsto m'_0 = x_1^{d-1} x_{s+1}^{a'_{s+1}} \dots x_n^{a'_n}.$$

Очевидно, что построенное отображение устанавливает взаимно однозначное сохраняющее порядок соответствие между $D^R M_{d+r}$ и B , следовательно, $B = x_1^{d-1} \cdot \{m = x_{s+1}^{b_{s+1}} \dots x_n^{b_n} \in A_{r+1} : x_1^{d-1} m \geq m'_0\}$.

Понятно, что $\Delta^A(D^A(I_{d+r})) = x_1^{d-1} \cdot \{x_1^{r+2}, x_1^r x_2, x_1^r x_3, \dots, x_s x_n^{r+1}\}$ состоит из всех мономов степени $d + r + 1$, больших $x_1^{d-1} x_{s+1}^{r+2}$, и $\Delta^A(I_{d+r}) = x_1^{d-1} \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}\} \cdot A_{r+1}$, следовательно, $\Delta^A(D^A(I_{d+r})) = D^A(\Delta^A(I_{d+r}))$. Кроме того,

$$\Delta^A(B) \setminus \Delta^A(D^A(I_{d+r})) = \{m = x_1^{d-1} x_{s+1}^{b_{s+1}} \dots x_n^{b_n} \in A_{r+d+1} : m \geq m'_0 x_n\},$$

$$\Delta^A(D^R M_{d+r}) \setminus \Delta^A(I_{d+r}) \\ = \{m = x_1^{b_1+d-1} \dots x_n^{b_n} \in A_{r+d+1} : b_{i_1} = b_{i_2} = \dots = b_{i_s} = 0, m \geq m_0 x_n\}.$$

Поэтому можно, как и выше, построить взаимно однозначное соответствие между множествами $\Delta^A(D^R M_{d+r}) \setminus \Delta^A(I_{d+r})$ и $\Delta^A(B) \setminus \Delta^A(D^A(I_{d+r}))$, следовательно, $|\Delta^A(D^R M_{d+r}) \setminus \Delta^A(I_{d+r})| = |\Delta^A(B) \setminus \Delta^A(D^A(I_{d+r}))|$, а так как $|\Delta^A(D^A(I_{d+r}))| = |\Delta^A(I_{d+r})|$, то

$$\begin{aligned} |\Delta^A(D^R M_{d+r} \cup I_{d+r})| &= |\Delta^A(D^R M_{d+r}) \setminus \Delta^A(I_{d+r})| + |\Delta^A(I_{d+r})| \\ &= |\Delta^A(B) \setminus \Delta^A(D^A(I_{d+r}))| + |\Delta^A(D^A(I_{d+r}))| \\ &= |\Delta^A(D^A(M_{d+r} \cup I_{d+r}))|, \end{aligned}$$

т.е. (6) доказано, а вместе с ним и (5) при $v \geq d$.

Если $v < d - 1$, то (5) выполняется в силу теоремы Маколея для кольца A ($I_v = \emptyset, v \leq d - 1$).

При $v = d - 1$ имеем

$$|\Delta^R(D^R M)| = |\Delta^A(D^R M)| - s \leq |\Delta^A(M)| - s \leq |\Delta^R(M)|$$

(среднее неравенство – в силу теоремы Маколея в кольце A).

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть $u, v \in A_d$, $u \geq v$ и $I = L[u, v]$ – вполне лексический идеал в A . Теорема Маколея в $R = A/I$ выполняется тогда и только тогда, когда I удовлетворяет одному из следующих условий:

- (a) $u = x_1^d$;
- (b) $u = x_1^{d-1}x_2$, $v > x_1^{d-2}x_2x_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполняется (a), то идеал I является лекс-сегментным, и по теореме 2.9 в R выполняется теорема Маколея.

Если выполняется (b), то в силу теоремы 4.1 (I – вполне лексический) имеем, что $v \leq x_1^{d-1}x_n$.

Пусть $M \subseteq R_s$. Докажем, что

$$|\Delta^R(D^R M)| \leq |\Delta^R(M)|. \quad (7)$$

Пусть $s < d - 1$, тогда неравенство (7) выполняется в силу теоремы Маколея в кольце A .

Пусть $s = d - 1$, тогда если $v = x_1^{d-1}x_n$, то $|\Delta^R(D^R M)| = |\Delta^A(D^A M)| - (n - 1)$ и $|\Delta^R(M)| \geq |\Delta^A(M)| - (n - 1)$, т.е. $|\Delta^R(M)| \geq |\Delta^R(D^R M)|$, а если $v = x_1^{d-2}x_2x_k$, $1 < k < n$, то из $|M| = 1$ следует, что $|\Delta^R(D^R M)| = 1 \leq |\Delta^R(M)|$, а из $|M| \geq 2$ имеем $|\Delta^R(D^R M)| = |\Delta^A(D^R M)| - (n + k - 2) \leq |\Delta^R(M)|$.

Пусть $s > d - 1$. Обозначим $T = A/(I, x_1^d)$, тогда

$$|\Delta^R(D^R M)| = |\Delta^T(D^R M \setminus x_1^s)| + 1 \leq |\Delta^R(M)|.$$

Пусть теперь в R выполняется теорема Маколея, докажем выполнение условий (a) и (b). В силу теоремы 2.10 имеем, что $u \geq x_1^{d-1}x_n$.

Если $u = x_1^{d-1}x_k$, $k \geq 3$, то $|\Delta^R(x_1^d)| \geq k - 1 \geq 2$, и в силу того, что I – вполне лексический, $|\Delta^R(x_1^{d-1}x_2)| = 1$, т.е. $|\Delta^R(x_1^d)| > |\Delta^R(x_1^{d-1}x_2)|$ – противоречие, значит, $u \geq x_1^{d-1}x_2$. Осталось доказать, что если $u = x_1^{d-1}x_2$, то $v > x_1^{d-2}x_2x_n$.

Пусть $v \leq x_1^{d-2}x_2x_n$, тогда $|\Delta^R(x_1^{d-2}x_2)| = 0$, $|\Delta^R(x_1^{d-1})| = 1$ – противоречие, значит, $v > x_1^{d-2}x_2x_n$.

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть $u, v \in A_d$, $u \geq v$ и $I = L[u, v]$ – лексический идеал в A . Теорема Маколея в $R = A/I$ выполняется тогда и только тогда, когда I удовлетворяет одному из следующих условий:

- (a) $u = x_1^d$;
- (b) $u = x_1^{d-1}x_2$, $v > x_1^{d-2}x_2x_n$;
- (c) $u = x_1^{d-1}x_k$, $k > 2$, $v > x_1^{d-2}x_2^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполняется (a), то идеал I является лекс-сегментным, и по теореме 2.9 в R выполняется теорема Маколея.

Пусть выполняется (b). Если $v \leq x_1^{d-1}x_n$, то в силу теоремы 4.1 I является вполне лексическим, следовательно, по теореме 4.11 в R выполняется теорема Маколея. А если $v > x_1^{d-1}x_n$, то по теореме 4.10 в R выполняется теорема Маколея.

Если выполняется (c), то теорема Маколея в R выполняется в силу теоремы 4.10.

Пусть теперь в R выполняется теорема Маколея. По теореме 2.10 $u \geq x_1^{d-1}x_n$. Если $u = x_1^{d-1}x_2$, но $v \leq x_1^{d-2}x_2x_n$, то $|\Delta^R(x_1^{d-1})| = 1 > |\Delta^R(x_1^{d-2}x_2)| = 0$ – противоречие.

Если, наконец, $u = x_1^{d-1}x_k$, $k > 2$, но $v \leq x_1^{d-2}x_2^2$, то $|\Delta^R(x_1^d)| = k - 1 > |\Delta^R(x_1^{d-1}x_2)| = k - 2$ – противоречие.

Список литературы

1. *Macaulay F. S.* Some properties of enumeration in the theory of modular systems // Proc. London Math. Soc. 1927. V. 26. P. 531–555.
2. *Clements G. F., Lindström B.* A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay // J. Combin. Theory. 1969. V. 7. P. 230–238.
3. *De Negri E., Herzog J.* Completely lexsegment ideals // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 3467–3473.
4. *Eliashou S., Kervaire M.* Minimal resolutions of some monomial ideals // J. Algebra. 1990. V. 129. P. 1–25.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
24.08.2000