Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Захаров, А. М. Ильин, От слабого разрыва к градиентной катастрофе, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 10, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm599>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 05:46:36

УДК 517.95

С. В. Захаров, А. М. Ильин

От слабого разрыва к градиентной катастрофе

Рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром при старшей производной в случае, когда решение вырожденного уравнения имеет слабый разрыв, переходящий затем в сильный. В работе исследованы особенности коэффициентов асимптотики решения в пограничном слое слабого разрыва при приближении к точке градиентной катастрофы.

Библиография: 5 названий.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

с ограниченной непрерывной и кусочно гладкой начальной функцией $u(x, -1) = \bar{u}(x)$. Будем предполагать, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\varphi''(u) > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 1$. Тогда, как известно (см. [1; гл. V]), при $\varepsilon > 0$ данная задача Коши единственным образом разрешима в классе $C^\infty(S) \cap C(\bar{S})$, где $S = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, -1 < t < T\}$. Задача состоит в том, чтобы выяснить поведение решения $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Нас будет интересовать случай, когда решение $u_0(x, t)$ вырожденной задачи ($\varepsilon = 0$) при $t < 0$ является гладкой функцией всюду, за исключением линии $\ell_- = \{(x, t) : x = 0, -1 \leq t < 0\}$, в точках которой само решение $u_0(x, t)$ непрерывно, а его производная по x имеет разрыв первого рода. Для простоты возьмем в качестве начальных данных, воспроизводящих описанную ситуацию, ограниченную функцию вида

$$\bar{u}(x) = -(x + ax^2)\Theta(-x)(1 + q(x)), \quad (1.2)$$

где $a > 0$, Θ — функция Хевисайда, а носитель гладкой функции q лежит вне некоторой окрестности нуля. Кроме того, пусть начальная функция такова, что характеристики вырожденного уравнения не пересекаются при $t < 0$, а для сколь угодно малого $t > 0$ существуют характеристики, пересекающиеся в момент t . Чтобы это выполнялось, параметр a , входящий в правую часть (1.2), должен удовлетворять неравенству $b = a - \varphi'''(0)/2 > 0$. Отметим, что при $t < 0$ для решения вырожденного уравнения справедлива формула

$$u_0(x, t) = \bar{u}(y), \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 99-01-00139 и 00-15-96038).

где y выражается через x и t с помощью уравнения характеристик

$$x = y + \varphi'(\overline{u}(y))(t+1). \quad (1.4)$$

Из формул (1.2)–(1.4) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{t}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, на линии ℓ_- предельное решение имеет *слабый разрыв*, за которым при $t = 0$ следует *градиентная катастрофа*.

Вблизи линии ℓ_- асимптотика решения $u(x, t, \varepsilon)$ имеет вид ряда по полупелым степеням ε (см. [2]). Коэффициенты этого ряда имеют весьма сложную асимптотику при $t \rightarrow -0$, которая и исследуется в настоящей работе.

§ 2. Пограничный слой вблизи линии слабого разрыва. Асимптотика первого коэффициента разложения

Разложение решения $u(x, t, \varepsilon)$ в окрестности линии слабого разрыва ищется в виде формального ряда

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} v_k(\zeta, t), \quad (2.1)$$

где $\zeta = x/\sqrt{\varepsilon}$ – новая независимая переменная. Тогда из уравнения (1.1), условия (1.2) и предположений относительно функции φ вытекает рекуррентная система начальных задач

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} = 0, \quad v_1(\zeta, -1) = -\Theta(-\zeta)\zeta, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 v_2)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial \zeta^2} = \frac{\varphi'''(0)}{6} \frac{\partial v_1^3}{\partial \zeta}, \quad v_2(\zeta, -1) = -a\Theta(-\zeta)\zeta^2, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 v_k)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial J_k}{\partial \zeta}, \quad v_k(\zeta, -1) = 0, \quad k \geq 3, \quad (2.4)$$

где

$$J_k = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^{k-1} v_j v_{k+1-j} - \sum_{q=3}^{k+1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} \sum_{i_1+\dots+i_q=k+1} \prod_{s=1}^q v_{i_s}. \quad (2.5)$$

Решение задачи (2.2) находится с помощью замены Хопфа [3]

$$v_1(\zeta, t) = -2[\Psi(\zeta, t)]^{-1} \frac{\partial \Psi(\zeta, t)}{\partial \zeta}. \quad (2.6)$$

Функция $\Psi(\zeta, t)$ есть решение следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2}, \quad \Psi(\zeta, -1) = \exp\left[\Theta(-\zeta) \frac{\zeta^2}{4}\right]. \quad (2.7)$$

Последнее нетрудно записать в явном виде

$$\Psi(\zeta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t+1)}} \left\{ \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(\zeta-\eta)^2}{4(t+1)} + \frac{\eta^2}{4}\right] d\eta + \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta-\eta)^2}{4(t+1)}\right] d\eta \right\}. \quad (2.8)$$

При $t \geq 0$ формула (2.8) теряет смысл, так как первый из интегралов расходится. Асимптотика функции $v_1(\zeta, t)$ при $t \rightarrow -0$ имеет сложный характер, существенно зависящий от соотношения переменных ζ и t . Для точных формулировок оказывается удобным рассматривать области

$$\begin{aligned} D_\delta^0 &= \{(\zeta, t) : |\zeta| < |t|^\delta, \quad -1 < t < 0, \quad \delta > 0\}, \\ D_\rho^- &= \left\{(\zeta, t) : \zeta < -|t|^\rho, \quad -1 < t < 0, \quad \delta < \rho < \frac{1}{2}\right\}, \\ D_\rho^+ &= \{(\zeta, t) : \zeta > |t|^\rho, \quad -1 < t < 0\}. \end{aligned}$$

Параметры δ и ρ подобраны так, что области $D_\rho^\pm$ и D_δ^0 перекрываются.

ТЕОРЕМА 1. *При $t \rightarrow -0$ имеют место асимптотические формулы*

$$v_1(\zeta, t) = \frac{\zeta}{t} + O\left(|t|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{4}|t|^{2\rho-1}\right\}\right), \quad (\zeta, t) \in D_\rho^-, \quad (2.9)$$

$$v_1(\zeta, t) = \sum_{m=0}^N |t|^{(m-1)/2} R_{1,0,m}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{-t}}\right) + O(|t|^{N\delta}), \quad (\zeta, t) \in D_\delta^0, \quad (2.10)$$

$$v_1(\zeta, t) = \sum_{m=0}^N t^m S_{1,m}(\zeta) + O(|t|^{N(1-2\rho)}), \quad (\zeta, t) \in D_\rho^+. \quad (2.11)$$

Здесь $N \geq 0$, $R_{1,0,m} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $S_{1,m} \in C^\infty(0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\zeta, t) \in D_\rho^-$. В формуле (2.8) сделаем замену переменной интегрирования

$$\eta = -\frac{\zeta}{t} + 2y\sqrt{-\frac{t+1}{t}}, \quad \eta = \zeta + 2y\sqrt{t+1}$$

в первом и втором интегралах соответственно. В результате получим следующее выражение:

$$\Psi(\zeta, t) = \frac{1}{\sqrt{-\pi t}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4t}\right) \int_{-\infty}^{-\frac{\zeta}{2\sqrt{-(t+1)}}} \exp(-y^2) dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\zeta}{2\sqrt{t+1}}}^{\infty} \exp(-y^2) dy. \quad (2.12)$$

Тогда непосредственно из формулы (2.12) следует, что при $t \rightarrow -0$

$$\Psi(\zeta, t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4t}\right) + O(|t|^{-\rho}), \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \Psi(\zeta, t)}{\partial \zeta} = -\frac{\zeta}{2t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{-t}} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4t}\right) + O(|t|^{-\rho}) \right\}. \quad (2.14)$$

Подставляя эти выражения в (2.6), имеем

$$v_1(\zeta, t) = \frac{\zeta}{t} + O\left(|t|^{-\rho} g\left(\frac{|\zeta|}{\sqrt{-t}}\right)\right), \quad \text{где } g(\eta) = \eta e^{-\eta^2/4}. \quad (2.15)$$

Так как в области D_ρ^- функция $g\left(\frac{|\zeta|}{\sqrt{-t}}\right)$ достигает максимального значения при $|\zeta| = |t|^\rho$, справедлива формула (2.9).

Пусть $(\zeta, t) \in D_\delta^0$. Если переписать выражение (2.12) через автомодельную переменную $\theta = \frac{\zeta}{2\sqrt{-t}}$ и разложить выражения для пределов интегрирования по формуле Тейлора, то при $t \rightarrow -0$ получатся следующие асимптотические формулы:

$$\Psi(\zeta, t) = \frac{1}{2\Lambda(\theta)\sqrt{-t}} + \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{N-1} P_{2n+1}(\theta)|t|^{n+1/2} + O(|t|^{(2N+1)\delta}), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \Psi(\zeta, t)}{\partial \zeta} = \frac{Z_0(\theta)}{4t\Lambda(\theta)} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} P'_{2n+1}(\theta)|t|^n + O(|t|^{2N\delta}), \quad (2.17)$$

где

$$\Lambda(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\exp(-\theta^2)}{\int_\theta^\infty \exp(-y^2) dy}, \quad Z_0(\theta) = -2\theta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Lambda(\theta),$$

а $P_k(\theta)$ — полиномы степени k . Подставляя разложения (2.16) и (2.17) в (2.6), получаем формулу (2.10).

Для дальнейшего полезно иметь формулы для нескольких первых коэффициентов разложения (2.10):

$$\begin{aligned} R_{1,0,0}(\theta) &= Z_0(\theta), & R_{1,0,1}(\theta) &= -\Lambda(\theta)Z_0(\theta), \\ R_{1,0,2}(\theta) &= \frac{2\theta^2 - 1}{\sqrt{\pi}}\Lambda(\theta) - 2\theta\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)\Lambda^2(\theta) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Lambda^3(\theta). \end{aligned}$$

Наконец, пусть $(\zeta, t) \in D_\rho^+$. Из формулы (2.8) следует, что при $t \rightarrow -0$

$$\Psi(\zeta, t) = \frac{D(\zeta)}{\sqrt{\pi}\zeta} + \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) \sum_{m=1}^{N-1} t^m \zeta^{-2m-1} P_{4m-2}(\zeta) + O(|t|^{N(1-2\rho)-\rho}), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\zeta, t)}{\partial \zeta} &= \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\pi}\zeta^2} + \sum_{m=1}^{N-1} t^m \zeta^{-2m-2} P_{4m}(\zeta) \right. \\ &\quad \left. + O(|t|^{N(1-2\rho)-2\rho}) \right\}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $D(\zeta) = \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) + \zeta \int_{-\infty}^{\zeta/2} e^{-y^2} dy$. Подставляя разложения (2.18) и (2.19) в (2.6), получаем формулу (2.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно показать, что асимптотические формулы (2.9)–(2.11), а также (2.13)–(2.19) можно дифференцировать почленно любое число раз.

§ 3. Асимптотика второго коэффициента разложения

Следующие коэффициенты разложения (2.1) являются решениями линейных уравнений с одним и тем же оператором, поэтому исследование их асимптотики проводится единообразно. Остановимся подробнее на асимптотике функции $v_2(\zeta, t)$ при $t \rightarrow -0$.

Разложение решения задачи (1.1), (1.2) вне некоторой окрестности множества, на котором теряется гладкость функции $u_0(x, t)$, т.е. внешнее разложение, можно построить (см. [4; гл. VI]) в виде ряда

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t), \quad (3.1)$$

где $u_0(x, t)$ определяется выражением (1.3),

$$u_1(x, t) = \Theta(-y) \frac{\omega(y, t) - 1}{\omega^2(y, t)} \frac{g''(y) \bar{u}'(y)}{[g'(y)]^2} + \frac{\ln \omega(y, t)}{\omega(y, t)} \left[\frac{1}{\varphi''(\bar{u}(y))} \right]', \quad (3.2)$$

$$u_n(x, t) = \Theta(-y) \sum_{s=0}^n \ln^s \omega(y, t) \sum_{p=1}^{3n-s-1} [\omega(y, t)]^{-p} \Phi_p(y), \quad n \geq 2. \quad (3.3)$$

Здесь y определяется из формулы (1.4), $\omega(y, t) = \frac{\partial x(y, t)}{\partial y}$, $g(y) = \varphi'(\bar{u}(y))$, а Φ_p — гладкие функции. Если в формуле (1.4) перейти от x к $\zeta = x/\sqrt{\varepsilon}$, то для переменной y нетрудно получить следующее разложение:

$$y(\zeta, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} \zeta}{t^2} \right)^k P_k(t),$$

где, в частности, $P_1(t) = -t$, $P_2(t) = -b(t + t^2)$. Тогда

$$\omega(y, t) = -t \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} \zeta}{t^2} \right)^2 P_k(t) \right], \quad \ln \omega(y, t) = \ln |t| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} \zeta}{t^2} \right)^k P_k(t).$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.2) и (3.3), получаем

$$u_n(x, t) = \sum_{m=0}^n \sum_{s=0}^m \ln^s |t| \sum_{k=m-s}^{\infty} \varepsilon^{k/2} \zeta^k \frac{P_{3n-m+k-2}(t)}{t^{3n-m+2k-1}}.$$

Если теперь сгруппировать слагаемые в (3.1) при одинаковых степенях ε , то получится формальный ряд

$$\begin{aligned} V^- &= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/2} V_k^-(\zeta, t), \quad \text{где } V_1^-(\zeta, t) = t^{-1} \zeta, \\ V_2^-(\zeta, t) &= b \zeta^2 t^{-3} - \left(2b + \frac{\varphi'''(0)}{2} \zeta^2 \right) t^{-2} - \varphi'''(0) t^{-1} \ln |t| - 2b t^{-1}, \\ V_k^-(\zeta, t) &= \sum_{n=0}^{[k/2]} \zeta^{k-2n} \sum_{s=0}^n t^{-2k+n+s+1} \ln^s |t| P_{k+n-s-2}(t). \end{aligned}$$

Наша ближайшая задача – доказать, что решения $u_k(\zeta, t)$ уравнений (2.3), (2.4) асимптотически совпадают с функциями $V_k^-(\zeta, t)$ в области D_ρ^- .

Ниже мы будем использовать следующие обозначения:

$$Lv \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v_1 v)}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2}; \quad G(\eta, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4s}\right).$$

Нетрудно проверить, что решение начальной задачи $Lv = F$, $v(\zeta, -1) = v_0(\zeta)$ записывается в явном виде $v(\zeta, t) = z(\zeta, t) + w(\zeta, t)$, где

$$z(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{h(\zeta, t)}{\Psi(\zeta, t)} \right], \quad (3.4)$$

$$h(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta - \zeta, 1 + t) \Psi(\eta, -1) \int_{\eta_0}^{\eta} v_0(y) dy d\eta,$$

$$w(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g(\zeta, t)}{\Psi(\zeta, t)} \right], \quad (3.5)$$

$$g(\zeta, t) = \int_{-1}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta - \zeta, 1 - s) \Psi(\eta, s) \int_{-\infty}^{\eta} F(y, s) dy d\eta ds.$$

Всюду далее будем обозначать посредством M_l , λ_l и m_l положительные константы, вещественные и натуральные числа соответственно, опуская индексы там, где это не вызывает недоразумений.

ЛЕММА 1. Пусть функция $F(\zeta, t)$ при $t < 0$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\zeta} |F(y, t)| dy \leq M |t|^{\lambda} (1 + \zeta^{2m}) \left[\Theta(-\zeta) \exp\left(\frac{\zeta^2}{4t}\right) + \Theta(\zeta) \right]. \quad (3.6)$$

Тогда для решения задачи Коши $Lw = F$, $w(\zeta, -1) = 0$ в области D_ρ^- справедлива оценка

$$w(\zeta, t) = O\left(|t|^{\lambda_0} \exp\left\{-\frac{1}{4}|t|^{2\rho-1}\right\}\right). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение $w(\zeta, t)$ дается формулой (3.5). Сходимость интегралов, входящих в эту формулу, вытекает из (3.6) и неравенства

$$|\Psi(\eta, s)| \leq \frac{2}{\sqrt{-s}} \left[\Theta(-\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{4s}\right) + \Theta(\eta) \right], \quad (3.8)$$

которое, в свою очередь, следует из формул (2.13), (2.16) и (2.18). На основании неравенств (3.6) и (3.8) получаем оценку

$$|g(\zeta, t)| \leq M_1 \int_{-1}^t \frac{|s|^{\lambda_1}}{\sqrt{t-s}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \eta^{2m}) \exp\left[-\frac{(\eta - \zeta)^2}{4(t-s)}\right] d\eta ds.$$

После замены $\eta = 2\sigma\sqrt{t-s} + \zeta$ приходим к неравенству (в области D_ρ^-)

$$|g(\zeta, t)| \leq M_2 |t|^{\lambda_2} (1 + \zeta^{2m}).$$

Точно так же доказывается аналогичное неравенство для производной $g(\zeta, t)$ по ζ . Из полученных неравенств и формул (2.13), (2.14) следует оценка (3.7).

ТЕОРЕМА 2. В области D_ρ^- имеет место асимптотическая формула

$$v_2(\zeta, t) = V_2^-(\zeta, t) + O\left(|t|^\lambda \exp\left\{-\frac{1}{4}|t|^{2\rho-1}\right\}\right), \quad t \rightarrow -0. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.3) следует, что разность $r(\zeta, t) = v_2(\zeta, t) - V_2^-(\zeta, t)$ является решением задачи Коши

$$Lr = -\varphi'''(0)\left(\frac{\zeta p}{t^2} + \frac{p^2}{2t} + \frac{v_1^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \zeta}\right) - \frac{\partial(V_2^- p)}{\partial \zeta}, \quad r(\zeta, -1) = a\zeta^2 \Theta(\zeta), \quad (3.10)$$

где $p(\zeta, t) \equiv v_1(\zeta, t) - V_1^-(\zeta, t)$. Решение $r(\zeta, t)$ задачи (3.10) представим в виде суммы решения $z(\zeta, t)$ однородного уравнения $Lz = 0$ с начальной функцией $a\zeta^2 \Theta(\zeta)$ и решения $w(\zeta, t)$ неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными. Из выражений (2.7) и (3.4) получаем

$$z(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{h(\zeta, t)}{\Psi(\zeta, t)} \right], \quad h(\zeta, t) = \frac{a}{6\sqrt{\pi(1+t)}} \int_0^\infty \eta^3 \exp\left\{-\frac{(\eta-\zeta)^2}{4(1+t)}\right\} d\eta.$$

Очевидно, что h — гладкая функция, имеющая медленный рост по ζ . Тогда, применяя формулы (2.13) и (2.14) из теоремы 1, заключаем, что в области D_ρ^-

$$z(\zeta, t) = O\left(|t|^{\lambda_1} \exp\left\{-\frac{1}{4}|t|^{2\rho-1}\right\}\right), \quad t \rightarrow -0.$$

Из формулы (2.15) и из вида $V_1^-(\zeta, t)$ следует, что модуль функции $p(\zeta, t)$ вместе с производной по ζ при $t < 0$ и всех ζ оценивается сверху выражением того же вида, что и правая часть неравенства (3.6). Отсюда с учетом (3.10), теоремы 1 и выражения для $V_2^-(\zeta, t)$ вытекает применимость леммы 1 к функции $w(\zeta, t)$. Таким образом, функция $w(\zeta, t)$ (а следовательно, и $r(\zeta, t)$) удовлетворяет оценке (3.7).

ТЕОРЕМА 3. В области D_ρ^+ имеет место асимптотическая формула

$$v_2(\zeta, t) = \sum_{m=0}^N t^m S_{2,m}(\zeta) + O(|t|^{\gamma N + \lambda}), \quad t \rightarrow -0, \quad (3.11)$$

где $\gamma > 0$, $S_{2,m} \in C^\infty(0, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с формулами (3.4), (3.5) представим функцию $v_2(\zeta, t)$ в виде суммы решения $z(\zeta, t)$ однородного уравнения $Lz = 0$ с начальной функцией $-a\Theta(-\zeta)\zeta^2$ и решения $w(\zeta, t)$ неоднородного уравнения с нулевыми начальными данными:

$$\begin{aligned} z(\zeta, t) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{h(\zeta, t)}{\Psi(\zeta, t)} \right], \\ h(\zeta, t) &= -\frac{a}{6\sqrt{\pi(1+t)}} \int_{-\infty}^0 \eta^3 \exp\left[\frac{\eta^2}{4} - \frac{(\eta-\zeta)^2}{4(1+t)}\right] d\eta, \\ w(\zeta, t) &= -\frac{\varphi'''(0)}{6} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g(\zeta, t)}{\Psi(\zeta, t)} \right], \\ g(\zeta, t) &= \int_{-1}^t \int_{-\infty}^\infty G(\eta - \zeta, t - s) \Psi(\eta, s) v_1^3(\eta, s) d\eta ds. \end{aligned}$$

После замены $-t\eta = \zeta + 2\sigma\sqrt{-t(1+t)}$ для функции $h(\zeta, t)$ получается выражение

$$h(\zeta, t) = -\frac{a}{3\sqrt{\pi}t^2} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4t}\right) \int_{-\infty}^{-\frac{\zeta}{2\sqrt{-t(1+t)}}} e^{-\sigma^2} \left[2\sigma\sqrt{1+t} + \frac{\zeta}{\sqrt{-t}}\right]^3 d\sigma.$$

Используя известную асимптотику интеграла $\int_x^\infty \sigma^l e^{-\sigma^2} d\sigma$ при $x \rightarrow \infty$, находим, что в области D_ρ^+

$$h(\zeta, t) = \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4}\right) \sum_{m=-3}^{N-1} t^m \zeta^{-2m-4} P_{4m}(\zeta) + O(|t|^{(1-2\rho)N-4\rho}), \quad t \rightarrow -0. \quad (3.12)$$

Однако из исходного выражения для $h(\zeta, t)$ легко вытекает оценка $h(\zeta, t) = O(\zeta^{-4})$ при $\zeta > 0$. Поэтому ряд в правой части (3.12) не содержит слагаемых с $m < 0$. Отсюда с учетом формул (2.18) и (2.19) получаем разложение вида (3.11) для $z(\zeta, t)$.

Для функции $g(\zeta, t)$ также имеет место разложение вида (3.11). Чтобы это доказать, представим $g(\zeta, t)$ в виде

$$g(\zeta, t) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{t^m}{m!} \lim_{\tau \rightarrow -0} \frac{\partial^m g(\zeta, \tau)}{\partial \tau^m} + \frac{t^N}{N!} \frac{\partial^N g(\zeta, \omega(\zeta, t))}{\partial t^N}, \quad t \leq \omega(\zeta, t) \leq 0. \quad (3.13)$$

Покажем существование пределов, входящих в это выражение, и оценим остаточный член. Дифференцируя выражение для $g(\zeta, t)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m g(\zeta, t)}{\partial t^m} &= \int_{-\infty}^\infty \sum_{p=0}^{m-1} \frac{\partial^p G(\eta - \zeta, 1+t)}{\partial t^p} \frac{\partial^{m-p} R(\eta, -1)}{\partial t^{m-p}} d\eta \\ &\quad + \int_{-1}^t \int_{-\infty}^\infty G(\eta - \zeta, t-s) \frac{\partial^m R(\eta, s)}{\partial s^m} d\eta ds, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $R(\eta, s) = \Psi(\eta, s)v_1^3(\eta, s)$.

Оценим сначала первое слагаемое в правой части этого выражения. Легко проверить, что

$$\frac{\partial^p G(\eta, s)}{\partial s^p} = \exp\left(-\frac{\eta^2}{4s}\right) \sum_{j=0}^p c_j \frac{\eta^{2j}}{s^{p+j+1/2}}.$$

Продифференцируем теперь $R(\eta, s)$, выражая производные функций $\Psi(\eta, s)$ и $v_1(\eta, s)$ по s через производные по η с помощью уравнений (2.7) и (2.2). В результате получим

$$\frac{\partial^m R(\eta, s)}{\partial s^m} = \sum_{b_{m,\mu,\{n\}}} \frac{\partial^\mu \Psi(\eta, s)}{\partial \eta^\mu} \prod_{q=0}^{2m} \left[\frac{\partial^q v_1(\eta, s)}{\partial \eta^q} \right]^{n_q}, \quad (3.15)$$

где суммирование производится по индексу μ и всем наборам чисел n_q таким, что $\mu + \sum_{q=0}^{2m} (q+1)n_q = 2m+3$. Если теперь в (3.15) положить $s = -1$, то из вида начальных значений $\Psi(\eta, -1)$ и $v_1(\eta, -1)$ вытекает, что

$$\frac{\partial^m R(\eta, -1)}{\partial s^m} = \Theta(-\eta) P_{2m+3}(\eta) \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right).$$

Тогда для первого слагаемого в (3.14) мы имеем следующее выражение:

$$\int_{-\infty}^0 \exp\left[\frac{t\eta^2 + 2\eta\zeta - \zeta^2}{4(1+t)}\right] \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{j=0}^p \frac{(\eta - \zeta)^{2j} P_{2m-2p+3}(\eta)}{(1+t)^{p+j+1/2}} d\eta.$$

Очевидно, что если $\zeta > 0$, то это выражение имеет конечный предел при $t \rightarrow -0$. Нетрудно также проверить, что при $m = N$ для этого интеграла справедлива оценка $O(\zeta^{-2N-4})$ в области D_ρ^+ . После умножения на t^N все произведение будет иметь порядок $O(|t|^{(1-2\rho)N-4\rho})$.

Теперь займемся оценкой второго слагаемого в (3.14). Из формул (2.13)–(2.19) и замечания 1 вытекает справедливость оценок

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} &= O\left(\frac{1 + |\eta|^\mu}{|s|^{\mu+1/2}} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{4s}\right\}\right), & \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} &= O\left(\frac{\Phi_\mu(\eta/\sqrt{-s})}{|s|^{(\mu+1)/2}}\right), \\ \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} &= O\left(\frac{1}{\eta^{\mu+1}}\right) \end{aligned}$$

в областях D_ρ^- , D_δ^0 и D_ρ^+ соответственно. Аналогично для производных функции $v_1(\eta, s)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} &= O\left(\frac{1}{s}\right), & \frac{\partial^\mu v_1}{\partial \eta^\mu} &= O\left(|s|^\mu \exp\left\{-\frac{\eta^2}{4s}\right\}\right) \text{ в области } D_\rho^-, \\ \frac{\partial^\mu v_1}{\partial \eta^\mu} &= O\left(\frac{\tilde{\Phi}_\mu(\eta/\sqrt{-s})}{|s|^{(\mu+1)/2}}\right) \text{ в } D_\delta^0, & \frac{\partial^\mu v_1}{\partial \eta^\mu} &= O\left(\frac{1}{\eta^{\mu+1}}\right) \text{ в } D_\rho^+, \end{aligned}$$

где Φ_μ и $\tilde{\Phi}_\mu$ — гладкие функции. Из полученных оценок и выражения (3.15) вытекает неравенство

$$\left| \frac{\partial^m R(\eta, s)}{\partial s^m} \right| \leq \frac{M_1(1 + |\eta|^{2m+3})\Theta(-\eta)}{|s|^{2m+7/2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4s}\right) + \frac{M_2\Theta(\eta)}{|s|^{m+2} + \eta^{2m+4}},$$

с помощью которого, а также с учетом того, что $t < 0$, мы получаем

$$\begin{aligned} I &\equiv \left| \int_{-1}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta - \zeta, t - s) \frac{\partial^m R(\eta, s)}{\partial \eta^m} d\eta ds \right| \\ &\leq \int_{-1}^0 \frac{M}{\sqrt{t-s}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(\eta - \zeta)^2}{4|s|}\right\} \left| \frac{\partial^m R(\eta, s)}{\partial \eta^m} \right| d\eta ds \\ &\leq \int_{-1}^0 \frac{M}{|s|^{2m+7/2}\sqrt{t-s}} \exp\left\{-\frac{\zeta^2}{4|s|}\right\} \int_{-\infty}^0 (1 + \eta^{2m+3}) \exp\left\{\frac{\eta\zeta}{2|s|}\right\} d\eta ds \\ &\quad + \int_{-1}^0 \frac{M}{\sqrt{t-s}} \int_0^{\infty} \frac{1}{|s|^{m+2} + \eta^{2m+4}} \exp\left\{-\frac{(\eta - \zeta)^2}{4|s|}\right\} d\eta ds. \end{aligned}$$

Интеграл от $-\infty$ до 0 вычислим явно; а интеграл от 0 до ∞ разобьем на два: от 0 до $\zeta/2$ и от $\zeta/2$ до ∞ , оставляя в знаменателях подынтегральных выражений

$|s|^{m+2}$ и η^{2m+4} соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{M}{\zeta} \int_{-1}^0 \frac{\exp\left\{-\frac{\zeta^2}{4|s|}\right\} ds}{|s|^{2m+5/2} \sqrt{t-s}} + \frac{M}{\zeta^{2m+4}} \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{-s} \exp\left\{-\frac{\zeta^2}{4|s|}\right\} ds}{\sqrt{t-s}} \\ &+ \int_{-1}^0 \frac{M}{|s|^{m+2} \sqrt{t-s}} \int_0^{\zeta/2} \exp\left\{-\frac{(\eta-\zeta)^2}{4|s|}\right\} d\eta ds \\ &+ \int_{-1}^0 \frac{M}{\sqrt{t-s}} \int_{\zeta/2}^\infty \eta^{-2m-4} \exp\left\{-\frac{(\eta-\zeta)^2}{4|s|}\right\} d\eta ds. \end{aligned}$$

Посредством I_l обозначим l -е слагаемое в правой части последнего неравенства. В выражении I_1 один раз выполним интегрирование по частям, воспользуемся оценкой $\sqrt{t-s} \leq 1$, после чего сделаем замену $s = \sigma\zeta^2$:

$$I_1 \leq \frac{M}{\zeta} \left[1 + \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{t-s}}{|s|^{2m+7/2}} \exp\left\{-\frac{\zeta^2}{4|s|}\right\} \left(\frac{\zeta^2}{|s|} + 1\right) ds \right] \leq \frac{P_{4m+5}(\zeta)}{\zeta^{4m+6}}.$$

В I_2 числитель подынтегрального выражения оценим сверху единицей:

$$I_2 \leq \frac{M}{\zeta^{2m+4}} \int_{-1}^0 \frac{ds}{\sqrt{t-s}} \leq \frac{M}{\zeta^{2m+4}}.$$

Экспоненту в I_3 оценим сверху ее максимальным (на промежутке интегрирования) значением, которое достигается при $\eta = \zeta/2$; а затем сделаем замену $s = \sigma\zeta^2$:

$$I_3 \leq M \int_{-1}^0 \frac{\exp\left\{-\frac{\zeta^2}{16|s|}\right\}}{|s|^{m+2} \sqrt{t-s}} ds \leq \frac{P_{2m+5}(\zeta)}{\zeta^{2m+5}}.$$

Наконец, в выражении I_4 заменим η^{-2m-4} максимальным значением, достигающимся на нижнем пределе, распространяя после этого интегрирование на всю вещественную ось:

$$I_4 \leq \frac{M}{\zeta^{2m+4}} \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-\frac{(\eta-\zeta)^2}{4|s|}\right\} d\eta ds \leq \frac{M}{\zeta^{2m+4}}.$$

Собирая вместе эти оценки, мы приходим к утверждению теоремы.

Формула (3.9) из теоремы 2, записанная в переменных θ и t , показывает, что асимптотика функции $v_2(\zeta, t)$ содержит члены вида $P(\theta)/t^2$, $P(\theta)/t$, $(\ln t)/t$. Поэтому асимптотику функции $v_2(\zeta, t)$ в области D_δ^0 будем искать в виде ряда

$$v_2(\zeta, t) = \sum_{s=0}^1 \ln^s |t| \sum_{m=0}^\infty |t|^{-2+s+m/2} R_{2,s,m}(\theta). \quad (3.16)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (2.3), получаем рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $R_{2,s,m}$:

$$\begin{aligned} T_{m-4} R_{2,0,m} &= -4R_{2,1,m-2} + 2 \sum_{p=0}^{m-1} (R_{1,0,m-p} R_{2,0,p})' \\ &+ \frac{\varphi'''(0)}{3} \sum_{p_1+p_2+p_3=m-2} (R_{1,0,p_1} R_{1,0,p_2} R_{1,0,p_3})', \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$T_{m-2} R_{2,1,m} = 2 \sum_{p=0}^{m-1} (R_{1,0,m-p} R_{2,1,p})', \quad (3.18)$$

где оператор T_n определен следующим образом:

$$T_n R = R'' - 2(\theta + Z_0(\theta))R' - 2(Z_0'(\theta) - n)R.$$

ЛЕММА 2. Пусть непрерывная на всей вещественной оси функция F удовлетворяет следующей оценке:

$$|F(\theta)| \leq M_1(1 + |\theta|^{m_1}) \exp(-\theta^2) \quad \text{при } \theta < 0. \quad (3.19)$$

Тогда уравнение

$$R'' - 2(\theta + Z_0(\theta))R' - 2(Z_0'(\theta) - \nu)R = F(\theta) \quad (3.20)$$

при любом вещественном ν имеет решение, удовлетворяющее оценке

$$|R(\theta)| + \left| \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right| \leq M_2(1 + |\theta|^{m_2}) \exp(-\theta^2) \quad \text{при } \theta < 0. \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала найдем линейно независимые решения однородного уравнения (3.20). Заметим, что любое решение этого уравнения имеет вид $R = w'$, где w удовлетворяет уравнению

$$w'' - 2(\theta + Z_0(\theta))w' + 2(1 + \nu)w = 0,$$

которое, в свою очередь, приводится к уравнению

$$H'' - 2\theta H' + 2\nu H = 0 \quad (3.22)$$

с помощью замены $w = H\Lambda(\theta)$. Как известно (см. [5]), существуют два линейно независимых решения этого уравнения такие, что при $\theta \rightarrow -\infty$ одно из них — функция медленного роста, а другое представляет собой произведение функции медленного роста на $\exp(\theta^2)$. Обозначим эти решения через H^- и H^+ соответственно. Тогда в качестве решений однородного уравнения (3.20) возьмем функции $R^- = (H^- \Lambda)'$ и $R^+ = (H^+ \Lambda)'$, которые при $\theta < -1$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|R^-(\theta)| \leq M|\theta|^{m_1} \exp(-\theta^2), \quad |R^+(\theta)| \leq M|\theta|^{m_2}, \quad (3.23)$$

причем производные этих функций удовлетворяют аналогичным оценкам. Введем обозначение $Y(\theta) = F(\theta)W^{-1}(\theta)$, где

$$W(\theta) = R^+(\theta) \frac{dR^-(\theta)}{d\theta} - R^-(\theta) \frac{dR^+(\theta)}{d\theta} = W_0 \Lambda^2(\theta) \exp(\theta^2)$$

обозначает вронскиан. Тогда из вида $W(\theta)$ и оценки (3.19) следует, что $Y(\theta)$ является функцией медленного роста на $-\infty$. В качестве решения неоднородного уравнения (3.20) возьмем функцию вида

$$R(\theta) = R^-(\theta) \int_0^\theta R^+(s)Y(s) ds - R^+(\theta) \int_{-\infty}^\theta R^-(s)Y(s) ds.$$

Осталось заметить, что из неравенств (3.23) вытекает оценка (3.21).

Интересно отметить, что при целом $\nu = n$ решения H^- и H^+ уравнения (3.22) можно записать в явном виде. А именно при $n \geq 0$

$$H^-(\theta) = H_n(\theta), \quad H^+(\theta) = H_n(\theta) \int_0^\theta \exp(z^2) dz - S_{n-1}(\theta) \exp(\theta^2),$$

а при $n \leq -1$

$$\begin{aligned} H^-(\theta) &= \tilde{H}_{-n-1}(\theta) \exp(\theta^2) \int_{-\infty}^\theta \exp(-z^2) dz + \tilde{S}_{-n-2}(\theta), \\ H^+(\theta) &= \tilde{H}_{-n-1}(\theta) \exp(\theta^2), \end{aligned}$$

где H_n и $\tilde{H}_n$ — полиномы Эрмита вещественного и мнимого аргументов

$$H_n(\theta) = (-1)^n \exp(\theta^2) \frac{d^n \exp(-\theta^2)}{d\theta^n}, \quad \tilde{H}_n(\theta) = \exp(-\theta^2) \frac{d^n \exp(\theta^2)}{d\theta^n},$$

а полиномы S_n определяются следующим образом (для $\tilde{S}_n$ формулы те же, если вместо H подставить $\tilde{H}$):

$$S_{-1}(\theta) = 0, \quad S_n(\theta) = \sum_{m=0}^n (-1)^m H_{n-m}^{(m)}(\theta), \quad n \geq 0.$$

С учетом этого замечания решения уравнения (3.17) при $m = 0, 1$ и уравнения (3.18) при $m = 0$ удастся записать в сравнительно простой форме:

$$R_{2,0,0}(\theta) = -b \left[4\theta^2 + 2 + \frac{8\theta^3}{3\sqrt{\pi}} \Lambda(\theta) - \frac{8(\theta^2 + 1)}{3\pi} \Lambda^2(\theta) \right], \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} R_{2,0,1}(\theta) &= \frac{b}{6} \left[(-16\theta^4 + 12) \Lambda(\theta) + \frac{(48\theta^3 + 40\theta)}{\sqrt{\pi}} \Lambda^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{32(\theta^2 + 1)}{\pi} \Lambda^3(\theta) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$R_{2,1,0}(\theta) = \varphi'''(0) \left[1 + \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \Lambda(\theta) - \frac{2}{\pi} \Lambda^2(\theta) \right]. \quad (3.26)$$

Произвол, связанный с возможностью добавить решение однородного уравнения, устраняется условием согласования асимптотик функции $v_2(\zeta, t)$ в областях D_ρ^- и D_δ^0 .

Из формул (3.17), (3.24)–(3.26) вытекает, что функция $R_{2,0,2}(\theta) + 2\varphi'''(0)\theta^2 - 2b$ удовлетворяет линейному уравнению с оператором T_{-2} из левой части (3.17) и неоднородностью порядка $O(\theta^6 e^{-\theta^2})$ при $\theta \rightarrow -\infty$. Следовательно, уравнение (3.17) при $m = 2$ имеет единственное решение, для которого выполняется асимптотическое соотношение

$$R_{2,0,2}(\theta) = -2\varphi'''(0)\theta^2 + 2b + O(\theta^\mu e^{-\theta^2}), \quad \theta \rightarrow -\infty. \quad (3.27)$$

Это вытекает из леммы 2 и из того, что к решению неоднородного уравнения нельзя добавлять решения соответствующего однородного уравнения, одно из которых

$$1 + \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \Lambda(\theta) - \frac{2}{\pi} \Lambda^2(\theta)$$

имеет конечный ненулевой предел при $\theta \rightarrow -\infty$, а другое

$$\left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}} \Lambda(\theta)\right) / \int_{\theta}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

имеет порядок $O(\theta^3 \exp(\theta^2))$ при $\theta \rightarrow +\infty$.

Отметим, что каждая из оставшихся функций $R_{2,s,m}(\theta)$ определена с произвольном в одну константу, так как к этим функциям можно добавить экспоненциально убывающее при $\theta \rightarrow -\infty$ решение соответствующего однородного уравнения.

Прежде чем обосновывать асимптотику функции $v_2(\zeta, t)$ в области D_{δ}^0 , докажем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть для достаточно большого N гладкая в полосе $-1 \leq t \leq 0$ функция $F(\zeta, t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\left| \frac{\partial^m F(\zeta, t)}{\partial t^m} \right| \leq M |t|^N (1 + \zeta^{2l}), \quad m \leq N. \quad (3.28)$$

Тогда для $|\zeta| \leq \text{const}$ справедливо разложение

$$\int_{-1}^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(\eta - \zeta, t - s) F(\eta, s) d\eta ds = \sum_{m=0}^{N-1} t^m Q_m(\zeta) + O(|t|^N), \quad t \rightarrow -0, \quad (3.29)$$

где Q_m — гладкие функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левую часть формулы (3.29) обозначим через $g(\zeta, t)$. Представим функцию $g(\zeta, t)$ в виде (3.13). Производные, входящие в это выражение, оценим с помощью формулы (3.14). Из (3.28) легко вытекает, что каждое слагаемое в (3.14) ограничено, если ограничена величина ζ . Следовательно, все пределы в формуле (3.13) имеют смысл и справедливо разложение (3.29).

ТЕОРЕМА 4. В области D_{δ}^0 имеет место асимптотическая формула

$$v_2(\zeta, t) = \sum_{s=0}^1 \ln^s |t| \sum_{m=0}^N |t|^{-2+s+m/2} R_{2,s,m}(\theta) + O(|t|^{\delta N + \sigma}), \quad t \rightarrow -0, \quad (3.30)$$

где $R_{2,s,m} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим частичную сумму ряда (3.16)

$$\widehat{v}_{2N}(\zeta, t) = \sum_{s=0}^1 \ln^s |t| \sum_{m=0}^{2N} |t|^{-2+s+m/2} R_{2,s,m}(\theta)$$

с определенными выше коэффициентами $R_{2,s,m}(\theta)$. Тогда из (2.3) следует, что разность $r_N(\zeta, t) = v_2(\zeta, t) - \widehat{v}_{2N}(\zeta, t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$Lr_N = f, \quad r_N(\zeta, -1) = R(\zeta),$$

где $f = -\frac{\varphi'''(0)}{6} \frac{\partial v_1^3}{\partial \zeta} - L\hat{v}_{2N}$, $R(\zeta) = -a\zeta^2\Theta(-\zeta) - \sum_{m=0}^{2N} R_{2,0,m}(\zeta/2)$. Решение этой задачи запишем в виде суммы решения $z(\zeta, t)$ однородного уравнения $Lz = 0$ с начальной функцией $R(\zeta)$:

$$z(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{h(\zeta, t)}{\Psi(\zeta, t)} \right], \quad h(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta - \zeta, 1 + t) \Psi(\eta, -1) \int_{-\infty}^{\eta} R(z) dz d\eta,$$

и решения $w(\zeta, t)$ неоднородного уравнения $Lw = f$ с начальной функцией, тождественно равной нулю. Из формул (3.24)–(3.27) вытекает неравенство

$$|R(\zeta)| \leq M(1 + \zeta^{2\mu}) \exp \left\{ -\Theta(-\zeta) \frac{\zeta^2}{4} \right\},$$

комбинируя которое с формулой (2.7) мы заключаем, что $h(\zeta, t)$ представляет собой свертку функции Грина с функцией медленного роста. А значит, имеет место равномерная сходимость со всеми частными производными по ζ и t . Следовательно, $h(\zeta, t)$ можно разложить по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} h(\zeta, t) &= \sum_{m+p \leq N} h_{m,p} \zeta^m t^p + O(|t|^{(N+1)\delta}) \\ &= \sum_{m=0}^N |t|^{m/2} P_m(\theta) + O(|t|^{(N+1)\delta}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Приведенная в этой формуле оценка остаточного члена справедлива в области D_δ^0 .

Функцию $w(\zeta, t)$ можно представить в виде $w(\zeta, t) = \frac{\partial(g\Psi^{-1})}{\partial \zeta}$, где $g(\zeta, t)$ – решение неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными данными, определяющееся по формуле

$$g(\zeta, t) = \int_{-1}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta - \zeta, t - s) F(\eta, s) d\eta ds, \quad F(\eta, s) = \Psi(\eta, s) \int_{-\infty}^{\eta} f(z, s) dz.$$

Из (2.3), рекуррентной системы (3.17), (3.18), определения функции $f(z, s)$ и оценок для $\Psi(\eta, s)$, полученных в теореме 1, вытекает, что $F(\eta, s)$ удовлетворяет условиям леммы 3. Следовательно, для $g(\zeta, t)$ имеет место разложение (3.29), которое легко переписать в виде (3.31). Учитывая формулы (2.16), (2.17), (3.31) и определение функции $r_N(\zeta, t)$, приходим к утверждению теоремы.

§ 4. Асимптотика остальных коэффициентов

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого $k \geq 1$ при $t \rightarrow -0$ имеют место асимптотические формулы*

$$v_k(\zeta, t) = V_k^-(\zeta, t) + O \left(|t|^{\lambda_k} \exp \left\{ -\frac{1}{4} |t|^{2\rho-1} \right\} \right), \quad (4.1)$$

$$v_k(\zeta, t) = \sum_{s=0}^{[k/2]} \ln^s |t| \sum_{m=0}^N |t|^{-3k/2+s+1+m/2} R_{k,s,m}(\theta) + O(|t|^{N_1}), \quad (4.2)$$

$$v_k(\zeta, t) = \sum_{m=0}^N t^m S_{k,m}(\zeta) + O(|t|^{N_2}) \quad (4.3)$$

в областях D_ρ^- , D_δ^0 и D_ρ^+ соответственно, где $R_{k,s,m} \in C^\infty(\mathbb{R})$, $S_{k,m} \in C^\infty(0, +\infty)$, $N_1 \rightarrow \infty$ и $N_2 \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводим индукцию по индексу k . База индукции установлена теоремой 1. Шаг индукции, по существу, повторяет рассуждения, приведенные в доказательствах теорем 2, 4 и 3. В этих теоремах формулы (4.1)–(4.3) доказаны при $k = 2$, поэтому далее мы считаем, что $k \geq 3$.

1. Область D_ρ^- . Прежде всего заметим, что функции $V_k^-(\zeta, t)$ удовлетворяют точно такой же рекуррентной системе, что и система (2.2)–(2.4). В частности,

$$LV_k^- = \frac{\partial}{\partial \zeta} [J_k(V_1^-, V_2^-, \dots, V_{k-1}^-)], \quad k \geq 3.$$

Обозначая $r = v_k - V_k^-$, мы получаем для r следующую задачу Коши:

$$Lr = Lv_k - LV_k^- = \frac{\partial}{\partial \zeta} [J_k(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) - J_k(V_1^-, V_2^-, \dots, V_{k-1}^-)],$$

$$r(\zeta, -1) = -V_k^-(\zeta, -1) = \sum_{n=0}^{[k/2]} \alpha_{k,n} \zeta^{k-2n}.$$

Функцию r представим в виде суммы $z + w$, где z и w имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 2. Тогда

$$z(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left([\Psi(\zeta, t)]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{k+1}(\eta)}{\sqrt{1+t}} \exp \left\{ -\frac{(\eta - \zeta)^2}{4(1+t)} \right\} d\eta \right).$$

Дословно повторяя рассуждения из той же теоремы, мы заключаем, что $z(\zeta, t)$ экспоненциально мала в области D_ρ^- (в смысле оценки (3.7)).

Из индуктивного предположения вытекает, что правая часть уравнения для r удовлетворяет условиям леммы 1. По этой лемме $w(\zeta, t)$ также экспоненциально мала в области D_ρ^- . Тем самым доказана формула (4.1).

2. Область D_δ^0 . Здесь наиболее трудная часть работы состоит в построении формального разложения вида (4.2) такого, которое было бы согласовано с асимптотикой функции $v_k(\zeta, t)$ в области D_ρ^- . Для того чтобы это сделать, сначала перепишем выражение для $V_k^-(\zeta, t)$ через переменную θ :

$$V_k^- = \sum_{s=0}^{[k/2]} \ln^s |t| \sum_{m=0}^{k+[k/2]-s-2} |t|^{-3k/2+s+m+1} P_{k-2s}(\theta).$$

Таким образом, при $\theta \rightarrow -\infty$ функции $R_{k,s,m}(\theta)$ должны асимптотически совпадать с некоторыми полиномами, которые мы обозначим через $A_{k,s,m}(\theta)$. Эти полиномы, как и сами функции $R_{k,s,m}(\theta)$, удовлетворяют рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (оператор T_n определялся выше)

$$T_n R_{k,s,m} = Q[R_{k,\sigma,\mu}], \quad T_n A_{k,s,m} = Q[A_{k,\sigma,\mu}], \quad n = -3k + 2s + m + 2,$$

которая получается после подстановки разложения (4.2) в уравнение (2.4). Далее доказательство продолжаем индукцией по совокупности индексов s и m , множество пар которых естественным образом упорядочено рекуррентной структурой системы уравнений. Делая предположение индукции и вычитая одно из другого предыдущие уравнения, для разности $R_{k,s,m} - A_{k,s,m}$ получаем уравнение с

экспоненциально малой (при $\theta \rightarrow -\infty$) правой частью. Существование экспоненциально малого (при $\theta \rightarrow -\infty$) решения этого уравнения обеспечено леммой 2.

Когда формальный ряд построен, остается рассмотреть разность между функцией $v_k(\zeta, t)$ и частичной суммой этого ряда и разложить эту разность в ряд по степеням $|t|^{1/2}$. Доказательство повторяет рассуждения, которые подробно приводились для случая $k = 2$ (теорема 4).

3. Область D_ρ^+ . Функцию $v_k(\zeta, t)$ как решение задачи (2.4) представим в виде

$$v_k(\zeta, t) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g_k(\zeta, t)}{\Psi(\zeta, t)} \right], \quad g_k(\zeta, t) = \int_{-1}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta - \zeta, t - s) R_k(\eta, s) d\eta ds,$$

где $R_k(\eta, s) = \Psi(\eta, s) J_k(\eta, s)$, а функция $J_k(\eta, s)$ определяется выражением (2.5), если вместо v_i подставить решения соответствующих начальных задач. Из структуры правой части выражения (2.5) вытекает формула

$$R_k(\eta, s) = \Psi(\eta, s) \sum j(k, \{n\}) \prod_{\alpha=1}^{k-1} v_\alpha^{n_\alpha},$$

где суммирование проводится так, что $\sum_{\alpha=1}^{k-1} \alpha n_\alpha = k+1$. Дифференцируя $R_k(\eta, s)$ по s и выражая с помощью уравнений для Ψ и v_α все производные по s через производные по η , имеем

$$\frac{\partial^m R_k(\eta, s)}{\partial s^m} = \sum b(k, m, \{n\}) \frac{\partial^\mu \Psi(\eta, s)}{\partial \eta^\mu} \prod_{\alpha=1}^{k-1} \prod_{q_\alpha=0}^{2m} \left[\frac{\partial^{q_\alpha} v_\alpha}{\partial \eta^{q_\alpha}} \right]^{n_\alpha(q_\alpha)},$$

где

$$\mu + \sum_{\alpha=1}^{k-1} \sum_{q_\alpha=0}^{2m} (\alpha + q_\alpha) n_\alpha(q_\alpha) = 2m + k + 1.$$

В частности, при $s = -1$

$$\frac{\partial^m R(\eta, -1)}{\partial s^m} = \Theta(-\eta) P_{2m+k+1}(\eta) \exp \left\{ \frac{\eta^2}{4} \right\}.$$

Действуя далее по схеме доказательства теоремы 3, мы приходим к формуле (4.3).

Список литературы

1. Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. Сушко В. Г. Об асимптотических разложениях решений одного параболического уравнения с малым параметром // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1794–1798.
3. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
4. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
5. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.

Институт математики и механики УрО РАН,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию
25.01.2001