Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Корнев, А. П. Хромов, О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 10, 33–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm601>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:39:36

УДК 513.88

В. В. Корнев, А. П. Хромов

**О равносходимости разложений по собственным
функциям интегральных операторов с ядрами,
допускающими разрывы производных на диагоналях**

В статье найдены простые условия, при которых имеет место равносходимость разложений Фурье функции $f(x)$ из $L[0, 1]$ по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора вида

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt + \alpha \int_0^x A(x, t)f(t) dt$$

и функций $f(x)$, $f(1-x)$ по обычной тригонометрической системе.

Библиография: 4 названия.

Введение

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt + \alpha \int_0^x A(x, t)f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где ядро $A(x, t)$ n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t при $0 \leq t \leq x \leq 1$ и

$$\left. \frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x, t) \right|_{t=x} = \delta_{n-1, j} \quad (j = 0, \dots, n), \quad (2)$$

$\delta_{i, j}$ – символ Кронекера, α – произвольное число такое, что $\alpha^2 \neq 1$.

Оператор (1) является одним из простейших операторов вида

$$Af = \int_0^1 A(x, t)f(t) dt,$$

некоторые производные ядер которых допускают разрывы первого рода на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. Другим важным достоинством оператора (1) является то, что в условиях получаемой теоремы равносходимости (в отличие от соответствующего результата из [1]) не требуется проверки труднопроверяемого условия регулярности по Биркгофу линейных форм в естественных граничных условиях. При $n = 1$ и $\alpha = 0$ равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) и разложений в тригонометрические ряды Фурье установлена в [2]. Метод, примененный в нашей статье, является дальнейшим существенным развитием

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00075) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96123).

метода статьи [2]. Мы используем иное представление резольвенты простейшего оператора, и получение необходимых оценок компонент резольвенты является существенно более сложным делом. Кроме того, пришлось отдельно рассматривать вопрос о равносходимости для случая простейшего оператора (в [2] этот момент является тривиальным), и еще следует отметить, что основное соотношение в теореме равносходимости имеет иной вид, не встречавшийся ранее. Есть основание ожидать, что требования гладкости на $A(x, t)$ ослабить нельзя, однако соответствующие контрпримеры (в отличие от [1]) построить не удалось.

§1. Резольвента простейшего оператора

Обозначим через $R_\lambda^0 = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ резольвенту Фредгольма простейшего оператора A_0 вида (1), для которого $A(x, t)$ есть

$$A_0(x, t) = \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Для определенности будем считать, что n четное (случай нечетного n рассматривается аналогично). Рассмотрим следующую краевую задачу в пространстве двумерных вектор-функций:

$$z^{(n)}(x) - \lambda B_1 z(x) = B_1 F(x), \quad (3)$$

$$P_1 z^{(j)}(0) + Q_1 z^{(j)}(1) = 0 \quad (j = 0, \dots, n-1), \quad (4)$$

где

$$B_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$, $F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = f(1-x)$ (T – знак транспонирования).

ЛЕММА 1. *Если λ таково, что R_λ^0 существует, то $z(x)$, где $z_1(x) = R_\lambda^0 f(x)$, $z_2(x) = z_1(1-x)$, удовлетворяет (3)–(4). Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (3)–(4) и соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение, то R_λ^0 существует, $R_\lambda^0 f(x) = z_1(x)$ и $z_2(x) = z_1(1-x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R_λ^0 существует и $z_1(x) = R_\lambda^0 f(x)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} z_1(x) - \lambda \left(\int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} z_1(t) dt + \alpha \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} z_1(t) dt \right) \\ = \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt + \alpha \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференцируя последовательно (5) до n -го порядка включительно, получаем

$$\begin{aligned} z_1^{(k)}(x) - \lambda \left((-1)^k \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} z_1(t) dt + \alpha \int_0^x \frac{(x-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} z_1(t) dt \right) \\ = (-1)^k \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f(t) dt + \alpha \int_0^x \frac{(x-t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} f(t) dt; \end{aligned} \quad (6)$$

$$z_1^{(k)}(1) = (-1)^k \alpha z_1^{(k)}(0) \quad (k = 0, \dots, n-1); \quad (7)$$

$$z_1^{(n)}(x) - \lambda(z_1(1-x) + \alpha z_1(x)) = f(1-x) + \alpha f(x). \quad (8)$$

Если положить $z_2(x) = z_1(1 - x)$, то из (6)–(8) следует (3)–(4).

Обратно, пусть $z(x)$ удовлетворяет (3)–(4) и соответствующая однородная задача имеет только нулевое решение. Тогда $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$, где $u_1(x) = z_2(1 - x)$ и $u_2(x) = z_1(1 - x)$, также удовлетворяет (3)–(4). Поэтому $z(x) = u(x)$ и, значит, $z_2(x) = z_1(1 - x)$. Покажем теперь, что $z_1(x)$ удовлетворяет (5). Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$y'(x) = g(x), \quad y(1) = \beta y(0). \quad (9)$$

Эта задача имеет и притом единственное решение при любой $g(x) \in L[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\beta \neq 1$, и это решение дается формулой:

$$y(x) = \int_0^x g(t) dt + \frac{1}{\beta - 1} \int_0^1 g(t) dt. \quad (10)$$

Перепишем (8) в виде

$$(z_1^{(n-1)}(x))' = \lambda(z_1(1 - x) + \alpha z_1(x)) + f(1 - x) + \alpha f(x) \quad (11)$$

и добавим к нему последнее из соотношений (7):

$$z_1^{(n-1)}(1) = -\alpha z_1^{(n-1)}(0). \quad (12)$$

Рассматривая (11)–(12) как задачу (9), по формуле (10) после несложных преобразований приходим к (6) при $k = n - 1$. Теперь, представляя (6) при $k = n - 1$ и (7) при $k = n - 2$ в виде (9), по формуле (10) приходим к (6) при $k = n - 2$ и т. д. В конце концов получаем (5). Оператор $E - \lambda A_0$ обратим. В самом деле, если $v_1(x) - \lambda A_0 v_1(x) = 0$, то, как показано выше, $v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T$, где $v_2(x) = v_1(1 - x)$, удовлетворяет (3)–(4) при $F(x) = 0$. Значит, $v_1(x) = 0$ и, тем самым, $E - \lambda A_0$ обратим. Поэтому из (5) получаем $z_1(x) = R_\lambda^0 f(x)$. Лемма доказана.

Таким образом, задача нахождения R_λ^0 сводится к решению краевой задачи (3)–(4). В свою очередь, используя подстановку:

$$z(x) = \Gamma v(x), \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

преобразуем задачу (3)–(4) к

$$v^{(n)}(x) - \lambda \mathcal{D}v(x) = BF(x), \quad (14)$$

$$Pv^{(j)}(0) + Qv^{(j)}(1) = 0 \quad (j = 0, \dots, n - 1), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \alpha + 1, \quad d_2 = \alpha - 1, \\ P &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} p_1 & -p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = 1 - \alpha, \quad p_2 = -\alpha - 1, \\ B &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \alpha + 1 \\ \alpha - 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Займемся задачей (14)–(15). Обозначим через $V_j(x, \lambda)$ ($j = 1, \dots, n$) матрицы размера 2×2 , которые образуют фундаментальную систему решений матричного уравнения $V^{(n)} - \lambda \mathcal{D}V = 0$, а через $W(x, \lambda)$ их вронскиан, т.е. матрицу $W(x, \lambda) = (V_j^{(n-i)}(x, \lambda))_{i,j=1}^n$ размера $2n \times 2n$. Матрица $W(x, \lambda)$ неособая, и, значит, $W^{-1}(x, \lambda)$ существует. Первые два столбца матрицы $W^{-1}(x, \lambda)$ разобьем сверху вниз на n квадратных матриц $W_{j1}(x, \lambda)$ ($j = 1, \dots, n$) и через $W_j(x, t, \lambda)$ ($j = 1, \dots, n$) обозначим матрицы размера 2×2 , элементы которых $(W_j(x, t, \lambda))_{kl}$ ($k, l = 1, 2$) определяются через соответствующие элементы матриц W_{j1} следующим образом:

$$(W_j(x, t, \lambda))_{kl} = \begin{cases} (W_{j1}(t, \lambda))_{kl}, & t \leq x, \\ 0, & t > x, \end{cases} \quad (16)$$

или

$$(W_j(x, t, \lambda))_{kl} = \begin{cases} 0, & t \leq x, \\ -(W_{j1}(t, \lambda))_{kl}, & t > x. \end{cases} \quad (17)$$

В дальнейшем будет указано правило выбора одной из этих формул для каждого $(W_j(x, t, \lambda))_{kl}$.

ЛЕММА 2. *Общее решение системы (14) имеет вид:*

$$v(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n V_j(x, \lambda) c_j + \int_0^1 g(x, t, \lambda) BF(t) dt, \quad (18)$$

где

$$g(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^n V_j(x, \lambda) W_j(x, t, \lambda) \quad (19)$$

и c_j – произвольные постоянные векторы размерности 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общее решение соответствующей однородной системы имеет вид:

$$v(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n V_j(x, \lambda) c_j. \quad (20)$$

Общее решение системы (14) ищем методом вариации произвольных постоянных и получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^n V_j^{(n-1)}(x, \lambda) c'_j = BF(x), \quad \sum_{j=1}^n V_j^{(i)}(x, \lambda) c'_j = 0 \quad (i = 0, \dots, n-2). \quad (21)$$

Решениями системы (21) будут

$$c'_j = W_{j1}(x, \lambda) BF(x) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (22)$$

Интегрируя каждую скалярную компоненту системы (22) либо от 0 до x , либо от x до 1 (как именно, об этом позже) и подставляя в (20), приходим к (18). Лемма доказана.

Введем матрицу $\Delta(\lambda)$ размера $2n \times 2n$:

$$\Delta(\lambda) = (U_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n, \quad (23)$$

где $U_{ij}(\lambda) = U_i(V_j(x, \lambda))$, $U_i(V) = PV^{(i-1)}(0) + QV^{(i-1)}(1)$.

ТЕОРЕМА 1. Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то краевая задача (14)–(15) имеет единственное решение и это решение дается формулой:

$$v(x, \lambda) = -(V_1(x, \lambda), \dots, V_n(x, \lambda))\Delta^{-1}(\lambda) \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda))BF(t) dt + \int_0^1 g(x, t, \lambda)BF(t) dt, \quad (24)$$

где $U_x(g) = (U_1^T(g), \dots, U_n^T(g))^T$ (U_x означает, что U_j применяются по переменной x).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (18) в силу (16), (17) и (19) имеем

$$v'(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n V_j'(x, \lambda)c_j + \int_0^1 g'_x(x, t, \lambda)BF(t) dt + \sum_{j=1}^n V_j(x, \lambda)W_{j1}(x, \lambda)BF(x).$$

Последняя сумма в правой части представляет собой произведение двух последних строк матрицы $W(x, \lambda)$ и двух первых столбцов матрицы $W^{-1}(x, \lambda)$, и так как $W(x, \lambda)W^{-1}(x, \lambda)$ – единичная матрица, то эта сумма равна нулю. Аналогично обстоит дело и с другими производными $v^{(i)}(x, \lambda)$ ($i = 2, \dots, n-1$). Таким образом, получаем

$$v^{(i)}(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n V_j^{(i)}(x, \lambda)c_j + \int_0^1 g_{x^i}(x, t, \lambda)BF(t) dt \quad (i = 0, \dots, n-1). \quad (25)$$

Подставляя теперь (25) в краевые условия (15), для нахождения c_j получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\Delta(\lambda)c + \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda))BF(t) dt = 0,$$

где $c = (c_1^T, \dots, c_n^T)^T$. Отсюда получим c и, подставив его в (18), придем к (24). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, то R_λ^0 существует и имеет место формула:

$$R_\lambda^0 f(x) = v_1(x, \lambda) + v_2(x, \lambda), \quad (26)$$

где $v(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda))^T$ определяется по формуле (24).

Это утверждение вытекает из доказанной теоремы, соотношения (13) и леммы 1.

§ 2. Оценки резольвенты простейшего оператора

Займемся получением необходимых оценок R_λ^0 при больших значениях $|\lambda|$.

Для упрощения выкладок в (14) перейдем от параметра λ к $\mu = \lambda(\alpha + 1)$ (и μ снова обозначим через λ). Тогда в системе (14) матрица $\mathcal{D}$ станет такой $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, где $d_2 = (\alpha - 1)/(\alpha + 1)$.

Положим $\lambda = \rho^n$ ($0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n$), $\omega_j = \exp(2\pi i(j-1)/n)$ ($j = 1, \dots, n$), $d = |d_2|^{1/n} \exp(i \arg d_2/n)$ ($0 \leq \arg d_2 < 2\pi$). Разобьем сектор $0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n$ на секторы $\gamma_{s-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_s$ ($s = 1, \dots, m$; $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_m = 2\pi/n$) таким образом, чтобы каждый сектор обладал следующим свойством: числа $\omega_1, \dots, \omega_n, d\omega_1, \dots, d\omega_n$ можно перенумеровать в таком порядке $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_{2n}$, чтобы при любом ρ из рассматриваемого сектора выполнялись неравенства:

$$\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \leq 0 \quad (j = n+1, \dots, 2n), \quad (27)$$

причем на одной из границ сектора $\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_n = \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{n+1} = 0$, а в случае $\arg d_2 = 0$ на этой же границе и $\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{n-1} = \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{n+2} = 0$. Нетрудно видеть, что $m = 4$ в случае $\arg d_2 > 0$ и $m = 2$ в случае $\arg d_2 = 0$.

Для определенности рассмотрим сектор

$$0 \leq \arg \rho \leq \gamma_1 \quad (28)$$

(другие секторы рассматриваются аналогично).

В качестве $V_j(x, \lambda)$ возьмем

$$V_j(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \exp \rho \omega_j x & 0 \\ 0 & \exp \rho d \omega_j x \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (29)$$

ЛЕММА 3. Для определителя матрицы $\Delta(\lambda)$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} \det \Delta(\lambda) = (1 - \alpha^2)^n \rho^{n(n-1)} [a_0 + a_1 \exp(-2\rho \tilde{\omega}_n) + a_2 \exp(-\rho(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{n-1})) \\ + a_3 \exp(-2\rho \tilde{\omega}_{n-1}) + a_4 \exp(-2\rho(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{n-1})) + o(1)] \exp\left(\rho \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_j\right), \end{aligned} \quad (30)$$

причем $a_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (23) и (29) нечетные строки $\Delta(\lambda)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} p_1(\rho \omega_1)^{i-1} \exp \rho \omega_1, -p_2(\rho d \omega_1)^{i-1} \exp \rho d \omega_1, \dots, \\ p_1(\rho \omega_n)^{i-1} \exp \rho \omega_n, -p_2(\rho d \omega_n)^{i-1} \exp \rho d \omega_n, \end{aligned}$$

а четные:

$$p_1(\rho \omega_1)^{i-1}, p_2(\rho d \omega_1)^{i-1}, \dots, p_1(\rho \omega_n)^{i-1}, p_2(\rho d \omega_n)^{i-1}.$$

Разлагая определитель этой матрицы по теореме Лапласа относительно строк с четными номерами, получаем, что

$$\det \Delta(\lambda) = (1 - \alpha^2)^n \rho^{n(n-1)} \sum_{j_1 < \dots < j_n} \gamma \exp \rho(\tilde{\omega}_{j_1} + \dots + \tilde{\omega}_{j_n}), \quad (31)$$

где через γ обозначены постоянные числа, вообще говоря, различные. Из (31) и (27) в силу соотношений

$$\tilde{\omega}_n = -\tilde{\omega}_{n+1}, \quad \tilde{\omega}_{n-1} = -\tilde{\omega}_{n+2}, \quad \exp(-\rho\tilde{\omega}_j) = o(1) \quad (j = 1, \dots, n-2)$$

следует представление (30). Далее, a_0 с точностью до знака равняется произведению определителей Вандермонда n -го порядка из наборов различных чисел $\tilde{\omega}_j$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Удалим из сектора (28) все нули функции $a_0 + a_1 \exp(-2\rho\tilde{\omega}_n) + a_2 \exp(-\rho(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{n-1})) + a_3 \exp(-2\rho\tilde{\omega}_{n-1}) + a_4 \exp(-2\rho(\tilde{\omega}_n + \tilde{\omega}_{n-1}))$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0 и получившуюся область обозначим через S_{δ_0} . Тогда в области S_{δ_0} при достаточно больших $|\rho|$

$$|\det \Delta(\lambda)| \geq c|\rho|^{n(n-1)} \left| \exp\left(\rho \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_j\right) \right|, \quad (32)$$

где $c > 0$ и не зависит от ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\arg d_2 > 0$, то рассматриваемая функция имеет вид:

$$a_0 + a_1 \exp(-2\rho\tilde{\omega}_n) + o(1)$$

и утверждение (32) легко следует из (30) (см. [3; § 4]). Если $\arg d_2 = 0$, то $\tilde{\omega}_{n-1} = k\tilde{\omega}_n$ (k — положительное число и $k \neq 1$) и заменой $\tilde{\rho} = -\rho\tilde{\omega}_n$ рассматриваемая функция приводится к квазимногочлену

$$a_0 + a_1 \exp 2\tilde{\rho} + a_2 \exp(k+1)\tilde{\rho} + a_3 \exp 2k\tilde{\rho} + a_4 \exp 2(k+1)\tilde{\rho},$$

где $\operatorname{Im} \tilde{\rho} \leq 0$ и $\tilde{\rho}$ меняется в угловом секторе, прилегающем к мнимой оси. В этом случае утверждение (32) следует из представления (30) и оценки снизу модуля квазиполинома в области S_{δ_0} (см. [4; § 12.5]). Лемма доказана.

Зафиксируем одно из чисел $\tilde{\omega}_j$ и обозначим

$$\varphi(x, \rho; f) = \begin{cases} \int_0^x f(t) \exp \rho\tilde{\omega}_j(x-t) dt, & \text{если } \operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_j \leq 0, \\ \int_x^1 f(t) \exp \rho\tilde{\omega}_j(x-t) dt, & \text{если } \operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_j \geq 0. \end{cases} \quad (33)$$

ЛЕММА 5. Справедливы оценки:

$$\|\varphi(x, \rho; f)\|_\infty = O(1)\|f\|_1, \quad (34)$$

$$\|\varphi(x, \rho; f)\|_\infty = O(\varkappa(|\operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_j|))\|f\|_\infty, \quad (35)$$

$$\|\varphi(x, \rho; f)\|_1 = O(\varkappa(|\operatorname{Re} \rho\tilde{\omega}_j|))\|f\|_1, \quad (36)$$

$$\|\varphi(x, \rho; \chi)\|_\infty = O\left(\frac{1}{|\rho|}\right), \quad (37)$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ — нормы пространств $L_\infty[0, 1]$ и $L[0, 1]$, $\chi(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\eta_0, \eta_1] \subset (0, 1)$, $\varkappa(y) = (1 - \exp(-y))/y$ при $y \geq 0$. Оценки $O(\cdot)$ равномерны по $\arg \rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (34) вытекает из неположительности вещественной части показателя экспоненты в (33). Оценка (35) следует из того, что

$$\begin{aligned} \int_0^x |\exp \rho \tilde{\omega}_j(x-t)| dt &= -\frac{1}{\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j} (1 - \exp \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j x) \leq \varkappa(|\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j|), \quad \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \leq 0, \\ \int_x^1 |\exp \rho \tilde{\omega}_j(x-t)| dt &= \frac{1 - \exp(-\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j(1-x))}{\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j} \leq \varkappa(|\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j|), \quad \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \geq 0. \end{aligned}$$

Докажем оценку (36). Для определенности рассмотрим верхнюю строку (33) (нижняя – аналогично). Имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi(x, \rho; f)\|_1 &\leq \int_0^1 dx \int_0^x |f(t)| \exp \rho \tilde{\omega}_j(x-t) dt \\ &= \int_0^1 |f(t)| \frac{1 - \exp((1-t) \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j)}{-\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j} dt \leq \varkappa(|\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j|) \|f\|_1. \end{aligned}$$

Наконец, при $f(t) = \chi(t)$ сначала вычисляем правую часть (33), а затем уже легко получаем (37). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы остается в силе, если $f(t)$ заменить на $f(1-t)$.

ЛЕММА 6. Для элементов $\eta_{i,j}(x, \lambda)$ ($i = 1, 2; j = 1, \dots, 2n$) матрицы $(V_1(x, \lambda), \dots, V_n(x, \lambda)) \Delta^{-1}(\lambda)$ в области S_{δ_0} справедливы оценки:

$$\sum_{j=1}^n |\rho|^{j-1} (\|D^m \eta_{i,2j-1}(x, \lambda)\|_\infty + \|D^m \eta_{i,2j}(x, \lambda)\|_\infty) = O(|\rho|^m), \quad (38)$$

$$\sum_{j=1}^n |\rho|^{j-1} (\|D^m \eta_{i,2j-1}(x, \lambda)\|_1 + \|D^m \eta_{i,2j}(x, \lambda)\|_1) = O(|\rho|^m \psi(\rho)) \quad (39)$$

$$(i = 1, 2; \quad j = 0, 1, \dots, n-1),$$

где $\psi(\rho) = \sum_{j=1}^n \varkappa(\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j)$, $D = d/dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (29) имеем

$$\begin{aligned} \eta_{1,j}(x, \lambda) &= \sum_{k=1}^n A_{j,2k-1}(\rho) (\det \Delta(\lambda))^{-1} \exp \rho \tilde{\omega}_{2k-1} x, \\ \eta_{2,j}(x, \lambda) &= \sum_{k=1}^n A_{j,2k}(\rho) (\det \Delta(\lambda))^{-1} \exp \rho \tilde{\omega}_{2k} x, \end{aligned} \quad (40)$$

где $A_{j,k}(\rho)$ – алгебраическое дополнение элемента с номером (j, k) матрицы $\Delta(\lambda)$.

Рассмотрим $\eta_{2,2l}(x, \lambda)$ (остальные функции рассматриваются аналогично). Запишем каждое слагаемое во второй формуле (40) в виде:

$$\begin{aligned} [A_{2l,2k}(\rho) (\det \Delta(\lambda))^{-1} \exp \rho \tilde{\omega}_{2k}] \exp \rho \tilde{\omega}_{2k}(x-1), & \text{ если } \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{2k} \geq 0, \\ [A_{2l,2k}(\rho) (\det \Delta(\lambda))^{-1}] \exp \rho \tilde{\omega}_{2k} x, & \text{ если } \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_{2k} \leq 0. \end{aligned}$$

Из структуры $\Delta(\lambda)$ следует, что алгебраическое дополнение $A_{2l,2k}(\rho)$ не содержит $\exp \rho \tilde{\omega}_{2k}$. Поэтому по лемме 4 каждая из квадратных скобок имеет оценку $O(\rho^{1-l})$ и, значит,

$$D^m \eta_{2,2l}(x, \lambda) = O(\rho^{1-l+m}) \quad (l = 1, \dots, n; \quad m = 0, 1, \dots, n-1). \quad (41)$$

Аналогично оценка (41) получается для $\eta_{1,2l}$, $\eta_{1,2l-1}$ и $\eta_{2,2l-1}$. Тем самым получена оценка (38) при $m = 0$. Что касается остальных оценок (38) и (39), то они следуют из вышеприведенного рассуждения и равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\exp \rho \tilde{\omega}_k(x-1)| dx &= \varkappa(\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_k), \quad \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_k \geq 0, \\ \int_0^1 |\exp \rho \tilde{\omega}_k x| dx &= \varkappa(-\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_k), \quad \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_k \leq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В дальнейшем определимся с выбором матрицы $g(x, t, \lambda)$. Именно будем считать, что

$$g(x, t, \lambda) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \omega_j (\gamma_{1,j} \varepsilon(x, t) + \gamma_{2,j} \varepsilon(t, x)) \exp \rho \omega_j (x-t); & 0 \\ 0; & \frac{d}{d_2} \sum_{j=1}^n \omega_j (\tilde{\gamma}_{1,j} \varepsilon(x, t) + \tilde{\gamma}_{2,j} \varepsilon(t, x)) \exp \rho d \omega_j (x-t) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где $\varepsilon(x, t) = 1$ при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$ при $t > x$; $\gamma_{1,j} = 1$, $\gamma_{2,j} = 0$, если $\operatorname{Re} \rho \omega_j \leq 0$; $\gamma_{1,j} = 0$, $\gamma_{2,j} = -1$, если $\operatorname{Re} \rho \omega_j \geq 0$; $\tilde{\gamma}_{1,j} = 1$, $\tilde{\gamma}_{2,j} = 0$, если $\operatorname{Re} \rho d \omega_j \leq 0$; $\tilde{\gamma}_{1,j} = 0$, $\tilde{\gamma}_{2,j} = -1$, если $\operatorname{Re} \rho d \omega_j \geq 0$.

Убедимся, что такой выбор $g(x, t, \lambda)$ возможен. Рассуждаем следующим образом. Матрицы $W_{j1}(x, \lambda)$ определяются из системы:

$$\sum_{j=1}^n V_j^{(i)}(x, \lambda) W_{j1}(x, \lambda) = \delta_{n-1,i} E \quad (i = 0, \dots, n-1) \quad (43)$$

(E – единичная матрица). В то же время непосредственно легко видеть, что матрицы

$$\frac{\omega_j}{n\rho^{n-1}} \begin{pmatrix} \exp(-\rho \omega_j x) & 0 \\ 0 & \frac{d}{d_2} \exp(-\rho d \omega_j x) \end{pmatrix}, \quad (44)$$

если их брать в качестве $W_{j1}(x, \lambda)$, удовлетворяют (43). Поэтому $W_{j1}(x, \lambda)$ равны (44) и матрицы $V_j(x, \lambda) W_j(x, t, \lambda)$ также диагональны, причем

$$(V_j(x, \lambda) W_j(x, t, \lambda))_{1,1} = \frac{\omega_j}{n\rho^{n-1}} (\gamma_1 \varepsilon(x, t) + \gamma_2 \varepsilon(t, x)) \exp \rho \omega_j (x-t), \quad (45)$$

где $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, если используется (16); $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -1$, если используется (17). Для $(V_j(x, \lambda) W_j(x, t, \lambda))_{2,2}$ справедлива формула (45) с добавлением множителя d/d_2 и множителя d в показателе экспоненты. Теперь мы будем считать, что в случае $\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \leq 0$ используется (16), а в случае $\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \geq 0$ используется (17), и тем самым приходим к (42).

Представление (42) замечательно тем, что матрица $n\rho^{n-1}g(x, t, \lambda)$ при $t \leq x$ и $t \geq x$ представляет собой линейные комбинации $\exp \rho \tilde{\omega}_j(x-t)$ с неположительными вещественными частями.

ТЕОРЕМА 2. В области S_{δ_0} при больших $|\rho|$ справедливы оценки:

$$\|R_\lambda^0 f\|_\infty = O(|\rho|^{1-n})\|f\|_1, \quad (46)$$

$$\|R_\lambda^0 f\|_\infty = O(|\rho|^{1-n}\psi(\rho))\|f\|_\infty, \quad (47)$$

$$\|D^m R_\lambda^0 f\|_1 = O(|\rho|^{1-n+m}\psi(\rho))\|f\|_1 \quad (m = 0, \dots, n-1), \quad (48)$$

$$\|D^m R_\lambda^0 \chi\|_\infty = O(|\rho|^{-n+m}) \quad (m = 0, \dots, n-1), \quad (49)$$

где D , $\chi(x)$ и $\psi(\rho)$ те же, что и в леммах 5 и 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы 1 было установлено, что

$$D^m \int_0^1 g(x, t, \lambda) BF(t) dt = \int_0^1 D^m g(x, \rho; f) BF(t) dt \quad (m = 0, \dots, n-1).$$

Поэтому в силу (42) имеем

$$D^m \int_0^1 g(x, t, \lambda) BF(t) dt = \rho^{1-n+m} (g_1(x, \rho; f), g_2(x, \rho; f))^T, \quad (50)$$

где $g_i(x, \rho; f)$ представляют собой линейные комбинации функций вида (33) с не зависящими от ρ коэффициентами, причем в (33) берутся как $f(t)$, так и $f(1-t)$. Тогда по лемме 5 и замечанию к ней получаем оценки:

$$\|g_i(x, \rho; f)\|_\infty = O(1)\|f\|_1, \quad (51)$$

$$\|g_i(x, \rho; f)\|_\infty = O(\psi(\rho))\|f\|_\infty, \quad (52)$$

$$\|g_i(x, \rho; f)\|_1 = O(\psi(\rho))\|f\|_1, \quad (53)$$

$$\|g_i(x, \rho; \chi)\|_\infty = O\left(\frac{1}{|\rho|}\right) \quad (i = 1, 2). \quad (54)$$

Из определения матрицы $U_x(g)$ в силу (42) получаем представление:

$$\begin{aligned} \int_0^1 U_x(g(x, t, \lambda)) BF(t) dt &= (\rho^{1-n}\psi_1(\rho; f), \rho^{1-n}\psi_2(\rho; f), \\ &\rho^{2-n}\psi_3(\rho; f), \rho^{2-n}\psi_4(\rho; f), \dots, \psi_{2n-1}(\rho; f), \psi_{2n}(\rho; f))^T, \end{aligned} \quad (55)$$

где каждая из $\psi_j(\rho; f)$ есть линейная комбинация с не зависящими от ρ коэффициентами функций вида (33) в точках $x = 0$ и $x = 1$, причем в (33) берутся как $f(t)$, так и $f(1-t)$. Поэтому по лемме 5 и замечанию к ней имеем оценки:

$$\psi_j(\rho; f) = O(1)\|f\|_1, \quad (56)$$

$$\psi_j(\rho; f) = O(\psi(\rho))\|f\|_\infty, \quad (57)$$

$$\psi_j(\rho; \chi) = O\left(\frac{1}{|\rho|}\right) \quad (j = 1, \dots, 2n). \quad (58)$$

Далее, в силу (24), (26), (50) и (55) имеем

$$\begin{aligned} D^m R_\lambda^0 f(x) = & \sum_{i=1}^2 \left[\rho^{1-n+m} g_i(x, \rho; f) \right. \\ & - \rho^{1-n} \sum_{j=1}^n \rho^{1-j} (D^m \eta_{i,2j-1}(x, \lambda) \psi_{2j-1}(\rho; f) \\ & \left. + D^m \eta_{i,2j}(x, \lambda) \psi_{2j}(\rho; f)) \right] \quad (m = 0, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (59)$$

При $m = 0$ из этого представления и оценок (51), (56) и (38) вытекает оценка (46), а из (52), (57) и (38) следует (47). Для получения (48) надо воспользоваться оценками (53), (56) и (39). Наконец, оценки (49) есть следствия представления (59), оценок (54), (58) и (38). Теорема доказана.

§ 3. Равносходимость спектральных разложений исходного и простейшего операторов

Перейдем к изучению оператора (1). Введем в рассмотрение операторы:

$$T_1 f(x) = \int_0^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} A(x, t) f(t) dt, \quad T = (E + T_1)^{-1} - E.$$

Из соотношения для ядер $T_1(x, t)$ и $T(x, t)$ операторов T_1 и T

$$T_1(x, t) + T(x, t) + \int_t^x T(x, \tau) T_1(\tau, t) d\tau = 0$$

и (2) следует, что $T(x, t)$ непрерывно дифференцируемо по t и $T(x, x) = 0$. Введем еще операторы:

$$T'_t f(x) = \int_0^x T'_t(x, t) f(t) dt, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad S f(x) = f(1-x).$$

ЛЕММА 7. Для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ имеет место формула

$$R_\lambda = R_\lambda^0 + \frac{1}{1 - \alpha^2} R_\lambda^0 T'_t D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y(x) = R_\lambda f(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} y(x) - \lambda \left[\int_0^{1-x} A(1-x, t) y(t) dt + \alpha \int_0^x A(x, t) y(t) dt \right] \\ = \int_0^{1-x} A(1-x, t) f(t) dt + \alpha \int_0^x A(x, t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (61)$$

Дифференцируя (61) n раз с учетом (2), получаем¹

$$\begin{aligned} D^i y(x) - \lambda \left[(-1)^i \int_0^{1-x} A_{x^i}(1-x, t) y(t) dt + \alpha \int_0^x A_{x^i}(x, t) y(t) dt \right] \\ = (-1)^i \int_0^{1-x} A_{x^i}(1-x, t) f(t) dt + \alpha \int_0^x A_{x^i}(x, t) f(t) dt \quad (i = 0, \dots, n-1); \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} D^n y(x) - \lambda \left[y(1-x) + \int_0^{1-x} A_{x^n}(1-x, t) y(t) dt + \alpha y(x) + \alpha \int_0^x A_{x^n}(x, t) y(t) dt \right] \\ = f(1-x) + \int_0^{1-x} A_{x^n}(1-x, t) f(t) dt + \alpha f(x) + \alpha \int_0^x A_{x^n}(x, t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (63)$$

Из соотношений (62) следует, что

$$y^{(i)}(1) = (-1)^i \alpha y^{(i)}(0) \quad (i = 0, \dots, n-1). \quad (64)$$

Перепишем (63) в виде:

$$D^n y(x) - \lambda(S + \alpha E)(E + T_1)y(x) = (S + \alpha E)(E + T_1)f(x). \quad (65)$$

Применяя к обеим частям (65) оператор S и учитывая, что n четное, получаем

$$D^n S y(x) - \lambda(E + \alpha S)(E + T_1)y(x) = (E + \alpha S)(E + T_1)f(x). \quad (66)$$

Из (65) и (66) следует, что

$$\frac{1}{1-\alpha^2} D^n (S - \alpha E)y(x) - \lambda(E + T_1)y(x) = (E + T_1)f(x). \quad (67)$$

В свою очередь, из (67) получаем

$$\frac{1}{1-\alpha^2} D^n (S - \alpha E)y(x) - \lambda y(x) = f(x) - \frac{1}{1-\alpha^2} T D^n (S - \alpha E)y(x).$$

Отсюда на основании (64) и формулы $A_0^{-1} = (1 - \alpha^2)^{-1} D^n (S - \alpha E)$ заключаем, что

$$y(x) = R_\lambda^0 f(x) - \frac{1}{1-\alpha^2} R_\lambda^0 T D^n (S - \alpha E)y(x). \quad (68)$$

Так как $T D^n (S - \alpha E) = -T'_t D^{n-1} (S - \alpha E)$, то из (68) вытекает (60). Лемма доказана.

ЛЕММА 8. В области S_{δ_0} ядро интегрального оператора $D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda^0 T'_t$ есть $o(1)$ при $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно по остальным переменным.

¹Считаем, что $A_{x^i}(1-x, t) = \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} A(\xi, t) \Big|_{\xi=1-x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, утверждение леммы достаточно доказать для оператора $D^{n-1}R_\lambda^0 T'_t$. По формуле (59) при $m = n - 1$ имеем

$$\begin{aligned} D^{n-1}R_\lambda^0 T'_t f(x) = & \sum_{i=1}^2 \left[g_i(x, \rho; T'_t f) \right. \\ & - \rho^{1-n} \sum_{j=1}^n \rho^{1-j} (D^{n-1} \eta_{i,2j-1}(x, \lambda) \psi_{2j-1}(\rho; T'_t f) \\ & \left. + D^{n-1} \eta_{i,2j}(x, \lambda) \psi_{2j}(\rho; T'_t f)) \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

Подставляя в (33) вместо $T'_t f$ ее явное выражение и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\varphi(x, \rho; T'_t f) = \begin{cases} \int_0^x f(\tau) d\tau \int_\tau^x T'_\tau(t, \tau) \exp \rho \tilde{\omega}_j(x-t) dt, & \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \leq 0, \\ \int_0^x f(\tau) d\tau \int_x^1 T'_\tau(t, \tau) \exp \rho \tilde{\omega}_j(x-t) dt \\ + \int_x^1 f(\tau) d\tau \int_\tau^1 T'_\tau(t, \tau) \exp \rho \tilde{\omega}_j(x-t) dt, & \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j \geq 0. \end{cases} \quad (70)$$

Применяя лемму 4 из [1] к внутренним интегралам в (70), заключаем, что

$$\varphi(x, \rho; T'_t f) = \int_0^1 o(1) f(t) dt.$$

Поэтому такое же представление имеют $g_i(x, \rho; T'_t f)$ ($i = 1, 2$) и $\psi_j(\rho; T'_t f)$ ($j = 1, \dots, n$), и утверждение леммы следует из (69) и (38).

ЛЕММА 9. В области S_{δ_0} справедливы оценки:

$$\|(R_\lambda - R_\lambda^0) f\|_\infty = O(|\rho|^{1-n} \psi^2(\rho)) \|f\|_1, \quad (71)$$

$$\|(R_\lambda - R_\lambda^0) \chi\|_\infty = O(|\rho|^{-n} \psi(\rho)), \quad (72)$$

где $\chi(x)$ и $\psi(\rho)$ те же, что и в леммах 5 и 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8 оператор $E - (1 - \alpha^2)^{-1} D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda^0 T'_t$ при достаточно больших $|\rho|$ обратим и этот обратный ограничен по $|\rho|$. Поэтому из (60) получаем

$$R_\lambda = R_\lambda^0 + \frac{1}{1 - \alpha^2} R_\lambda^0 T'_t \left(E - \frac{1}{1 - \alpha^2} D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda^0 T'_t \right)^{-1} D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda^0.$$

Отсюда в силу (47) и (48) при $m = n - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|(R_\lambda - R_\lambda^0) f\|_\infty &= O(|\rho|^{1-n} \psi(\rho)) \\ &\times \left\| T'_t \left(E - \frac{1}{1 - \alpha^2} D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda^0 T'_t \right)^{-1} D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda^0 f \right\|_\infty \\ &= O(|\rho|^{1-n} \psi(\rho)) \|D^{n-1} (S - \alpha E) R_\lambda^0 f\|_1 = O(|\rho|^{1-n} \psi^2(\rho)) \|f\|_1, \end{aligned}$$

что доказывает (71). Для доказательства (72) вместо (48) надо воспользоваться (49) при $m = n - 1$. Лемма доказана.

Все предыдущие оценки получены в случае (28). В остальных секторах $\gamma_{s-1} \leq \arg \rho \leq \gamma_s$ аналогичными рассуждениями эти оценки получаются в соответствующих областях S_{δ_0} . Теперь, не меняя обозначений, будем считать, что S_{δ_0} есть объединение всех этих областей.

ТЕОРЕМА 3. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Omega_r f\|_\infty = 0,$$

где

$$\Omega_r f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda - R_\lambda^0) f(x) d\lambda \quad (73)$$

и r таково, что $\{\rho : |\rho| = r^{1/n}, 0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n\} \subset S_{\delta_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (73) выполним замену: $\lambda = \rho^n$, $\rho = |\rho| \exp i\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi/n$. Тогда имеем

$$\Omega_r f = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} \rho^n (R_\lambda - R_\lambda^0) f d\varphi = \frac{n}{2\pi} \left(\int_0^{\gamma_1} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} + \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} + \int_{\gamma_3}^{2\pi/n} \right). \quad (74)$$

Рассмотрим первый интеграл в (74). По лемме 9 имеем

$$\int_0^{\gamma_1} = O \left(|\rho| \int_0^{\gamma_1} \psi^2(\rho) d\varphi \right) \|f\|_1.$$

Покажем, что

$$|\rho| \int_0^{\gamma_1} \psi^2(\rho) d\varphi = O(1). \quad (75)$$

Предположим, что $\arg d_2 > 0$ (случай $\arg d_2 = 0$ рассматривается аналогично). Очевидно, что

$$\varkappa(\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j) = O \left(\frac{1}{|\rho|} \right) \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad \varkappa(\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_n) = O(1).$$

Поэтому

$$|\rho| \int_0^{\gamma_1} \psi^2(\rho) d\varphi = O(1) + |\rho| \int_0^{\gamma_1} \varkappa^2(\operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_n) d\varphi. \quad (76)$$

Для последнего слагаемого в правой части (76) имеем оценку:

$$\begin{aligned} |\rho| \int_0^{\gamma_1} &= |\rho| \int_0^{\gamma_1} \left(\frac{1 - \exp(-|\rho \tilde{\omega}_n| \sin \varphi)}{|\rho \tilde{\omega}_n| \sin \varphi} \right)^2 d\varphi \\ &\leq \frac{\pi}{2|\tilde{\omega}_n|} \int_0^\infty \left(\frac{1 - \exp(-x)}{x} \right)^2 dx < \infty, \end{aligned}$$

и тем самым оценка (75) установлена. Аналогично оцениваются и остальные интегралы в (74). Значит,

$$\|\Omega_r f\|_\infty = O(1) \|f\|_1. \quad (77)$$

Пусть теперь в (74) $f(x) = \chi(x)$. Тогда по лемме 9 первый интеграл в (74) имеет оценку

$$\int_0^{\gamma_1} = O \left(\int_0^{\gamma_1} \psi(\rho) d\varphi \right). \quad (78)$$

Из (78) и (75), используя неравенство Коши–Буняковского, получаем, что $\int_0^{\gamma_1} = O(|\rho|^{-1/2})$. Эта оценка аналогично устанавливается и для других интегралов в (74). Таким образом, утверждение теоремы получено для $f(x) = \chi(x)$. А тогда в силу (77) и теоремы Банаха–Штейнгауза оно имеет место и для произвольной функции $f(x) \in L[0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $\Omega_r f$ равняется разности частных сумм разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) операторов A_0 и A для тех характеристических значений, которые попадают в круг $|\lambda| < r$, то теорема 3 дает нам равносходимость спектральных разложений для A и A_0 .

§ 4. Основная теорема

Приступаем, наконец, к вопросу о равносходимости разложений по с.п.ф. оператора A и разложений в тригонометрические ряды Фурье.

Введем следующую краевую задачу:

$$u^{(n)} - \lambda \mathcal{D}u = BF(x), \quad (79)$$

$$u^{(i)}(0) = u^{(i)}(1) \quad (i = 0, \dots, n-1), \quad (80)$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T$; $\mathcal{D}$, B , $F(x)$ — те же, что и в задаче (14)–(15).

ЛЕММА 10. Пусть λ таково, что $\Delta^{-1}(\lambda)$ существует, $v(x, \lambda)$ — решение (14)–(15), $u(x, \lambda)$ — решение (79)–(80). Тогда

$$v(x, \lambda) - u(x, \lambda) = -(V_1(x, \lambda), \dots, V_n(x, \lambda)) \Delta^{-1}(\lambda) U(u(x, \lambda)), \quad (81)$$

где $U(u) = (U_1^T(u), \dots, U_n^T(u))^T$, $U_i(u) = Pu^{(i-1)}(0, \lambda) + Qu^{(i-1)}(1, \lambda)$ ($i = 1, \dots, n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор-функция $v(x, \lambda) - u(x, \lambda)$ является решением однородной системы $v^{(n)} - \lambda \mathcal{D}v = 0$ и поэтому

$$v(x, \lambda) - u(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n V_j(x, \lambda) c_j. \quad (82)$$

Постоянные векторы c_j удовлетворяют системе

$$\sum_{j=1}^n U_{ij}(\lambda) c_j = -U_i(u(x, \lambda)) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Находя отсюда c_j и подставляя в (82), приходим к (81). Лемма доказана.

Удалим из S_{δ_0} еще точки ρ_k ($k = 1, 2, \dots$) вместе с круговыми окрестностями радиуса δ_0 , для которых $(\alpha + 1)\rho_k^n$ или $(\alpha - 1)\rho_k^n$ являются собственными значениями краевой задачи:

$$y^{(n)}(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y^{(i)}(0) = y^{(i)}(1) \quad (i = 0, \dots, n-1), \quad (83)$$

где $y(x)$ — скалярная функция, и для оставшейся области сохраним обозначение S_{δ_0} .

ЛЕММА 11. В области S_{δ_0} справедливы оценки

$$U_j(u(x, \lambda)) = (O(|\rho|^{j-n}), O(|\rho|^{j-n}))^T \|f\|_1 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (84)$$

Если же в (79) $F(x) = (\chi(x), \chi(1-x))^T$, то

$$U_j(u(x, \lambda)) = (O(|\rho|^{j-n-1}), O(|\rho|^{j-n-1}))^T \quad (j = 1, \dots, n). \quad (85)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$u_i(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, t, \lambda d_i) (BF(t))_i dt \quad (i = 1, 2), \quad (86)$$

где $G(x, t, \lambda)$ – функция Грина краевой задачи (83), $(BF(t))_i$ – компоненты вектор-функции

$$BF(t) = \frac{1}{2}((\alpha + 1)(f(t) + f(1 - t)), (\alpha - 1)(f(t) - f(1 - t)))^T. \quad (87)$$

Из (86) и известных [3; § 5] оценок

$$\frac{\partial^k G(x, t, \lambda)}{\partial x^k} = O(\rho^{1-n+k}) \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

получаем оценки (84). Если же $f(t) = \chi(t)$, то интегралы в (86) вычисляются и это приводит к оценкам (85). Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Для любого $\delta \in (0, 1/2)$ в области S_{δ_0} справедливы оценки:

$$\|v_i(x, \lambda) - u_i(x, \lambda)\|_{C[\delta, 1-\delta]} = \|f\|_1 O\left(|\rho|^{1-n} \sum_{j=1}^n \exp(-\delta \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j)\right), \quad (88)$$

$$\|v_i(x, \lambda) - u_i(x, \lambda)\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O\left(|\rho|^{-n} \sum_{j=1}^n \exp(-\delta \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j)\right), \quad (89)$$

если $f(x) = \chi(x)$ ($i = 1, 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 10 в силу оценок (84) (см. также лемму 6) имеем

$$v_i(x, \lambda) - u_i(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n (\eta_{i, 2j-1}(x, \lambda) O(|\rho|^{j-n}) + \eta_{i, 2j}(x, \lambda) O(|\rho|^{j-n})) \|f\|_1 \quad (i = 1, 2). \quad (90)$$

Из представлений (40) следует, что

$$\|\eta_{i, l}(x, \lambda)\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O\left(|\rho|^{1-j} \sum_{k=1}^n \exp(-\delta \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_k)\right) \quad (i = 1, 2), \quad (91)$$

где $l = 2j$ или $l = 2j - 1$ ($j = 1, \dots, n$). Из (90) и (91) получаем (88). Оценки (89) получаются аналогично, только вместо (84) надо воспользоваться оценками (85).

ЛЕММА 13. Для любой $f(x) \in L[0, 1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Omega_r^0 f\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0, \quad (92)$$

где

$$\Omega_r^0 f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \sum_{i=1}^2 (v_i(x, \lambda) - u_i(x, \lambda)) d\lambda \quad (93)$$

и r таково, что $\{\rho : |\rho| = r^{1/n}, 0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n\} \subset S_{\delta_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (93) выполним замену: $\lambda = \rho^n$, $\rho = |\rho| \exp i\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi/n$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\Omega_r^0 f &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} \rho^n \sum_{i=1}^2 (v_i(x, \lambda) - u_i(x, \lambda)) d\varphi \\ &= \frac{n}{2\pi} \left(\int_0^{\gamma_1} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} + \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} + \int_{\gamma_3}^{2\pi/n} \right).\end{aligned}\quad (94)$$

Рассмотрим первый интеграл в (94). По лемме 12

$$\left\| \int_0^{\gamma_1} \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = \|f\|_1 O\left(\sum_{j=1}^n \int_0^{\gamma_1} |\rho| \exp(-\delta \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j) d\varphi\right). \quad (95)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\int_0^{\gamma_1} \exp(-\delta \operatorname{Re} \rho \tilde{\omega}_j) d\varphi &= \int_0^{\gamma_1} \exp(-\delta |\rho \tilde{\omega}_j| \sin \varphi) d\varphi \\ &\leq \frac{1}{\delta |\rho \tilde{\omega}_j|} \int_0^\infty \exp(-x) dx < \infty,\end{aligned}$$

закключаем, что правая часть (95) есть $O(1)\|f\|_1$. Аналогично оцениваются и остальные интегралы в (94). Тем самым получена оценка:

$$\|\Omega_r^0 f\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O(1)\|f\|_1. \quad (96)$$

Если $f(x) = \chi(x)$, то, воспользовавшись в предыдущих рассуждениях оценками (89) вместо (88), получим

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\Omega_r^0 \chi\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0. \quad (97)$$

Из (96) и (97) по теореме Банаха–Штейнгауза вытекает утверждение леммы.

Получим теперь основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 4. Пусть ядро оператора A n раз непрерывно дифференцируемо по x и один раз по t при $0 \leq t \leq x \leq 1$, выполняется условие (2) и $\alpha^2 \neq 1$. Тогда для любой $f(x) \in L[0, 1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ имеет место соотношение:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} \left| S_r(f, x) - \frac{1}{2} \sigma_{r|d_1|}(f+g, x) - \frac{1}{2} \sigma_{r|d_2|}(f-g, x) \right| = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f, x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k , для которых $(2k\pi)^n < r$; $g(x) = f(1-x)$; $d_1 = \alpha + 1$, $d_2 = \alpha - 1$; r таково, что $\{\rho : |\rho| = r^{1/n}, 0 \leq \arg \rho \leq 2\pi/n\} \subset S_{\delta_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $R_\lambda^0 f = v_1(x, \lambda) + v_2(x, \lambda)$ по следствию теоремы 1, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda)) d\lambda = \Omega_r f + \Omega_r^0 f. \quad (98)$$

Но $-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda = S_r(f, x)$ и в силу (86), (87)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} u_1(x, \lambda) d\lambda &= \frac{1}{2} \sigma_{r|d_1|}(f + g, x), \\ -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} u_2(x, \lambda) d\lambda &= \frac{1}{2} \sigma_{r|d_2|}(f - g, x). \end{aligned}$$

Поэтому утверждение теоремы вытекает из (98) и (92) по теореме 3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f(x) \in L[0, 1]$ и $f(x) = f(1 - x)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} |S_r(f, x) - \sigma_{r|d_1|}(f, x)| = 0.$$

Если $f(x) \in L[0, 1]$ и $f(x) = -f(1 - x)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} |S_r(f, x) - \sigma_{r|d_2|}(f, x)| = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) \in C[0, 1]$ сходится равномерно на замкнутом множестве $e \subset (0, 1)$, симметричном относительно $x = 1/2$ (т.е. если $x \in e$, то и $1 - x \in e$), то ее ряд Фурье по с.п.ф. сходится равномерно на e .

В самом деле, ряд Фурье функции $g(x) = f(1 - x)$ сходится равномерно на e . Поэтому $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r(f, x) = f(x)$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_r(g, x) = g(x)$ равномерно на e . Поэтому

$$\frac{1}{2} \sigma_{r|d_1|}(f + g, x) + \frac{1}{2} \sigma_{r|d_2|}(f - g, x)$$

сходится равномерно на e к $f(x)$ и тогда по теореме 4

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{x \in e} |S_r(f, x) - f(x)| = 0.$$

Список литературы

1. Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156). № 3. С. 378–405.
2. Хромов А. П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. Сборник статей, посвященный 70-летию П. Л. Ульянова. М.: Изд-во АФЦ, 1999. С. 255–266.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
4. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Поступила в редакцию
29.01.2001