Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Лаптев, Отсутствие решений полулинейных параболических дифференциальных неравенств в конусах, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 10, 51–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm602>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:07:34

УДК 517.9

Г. Г. Лаптев

Отсутствие решений полулинейных параболических дифференциальных неравенств в конусах

Исследуются вопросы отсутствия глобальных нетривиальных решений полулинейных параболических дифференциальных неравенств и систем второго порядка в конусах. Доказательство основано на методе пробных функций без использования теорем сравнения и принципа максимума.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Работа посвящена нахождению условий отсутствия нетривиальных глобальных решений полулинейных дифференциальных неравенств параболического типа в конических областях. Постановка задачи предполагает неограниченность области и существование неотрицательного локального решения задачи. Проблема возникает при попытке продолжить решение до глобального, т.е. найти решение задачи Коши, определенное на всей рассматриваемой области. При этом даже для полулинейных задач вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= u^q && \text{в } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0 && \text{в } \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

существует так называемый критический показатель нелинейности (в данном случае показатель Фужиты $q^* = 1 + 2/N$) такой, что при $1 < q \leq q^*$ любое локальное по переменной t решение нельзя продолжить до глобального (под словом “продолжить” понимается, естественно, продолжение с сохранением принадлежности некоторому локальному функциональному пространству). Такого рода утверждения формулируются также в виде теорем об отсутствии глобального решения. Удивительным фактом здесь является то, что при этом не делается каких-либо предположений о росте глобального решения на бесконечности. Более детальная постановка задачи и обзор литературы имеются в [1].

Вместо приведенного выше уравнения можно рассматривать дифференциальное неравенство в локальном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 971-30551), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96047) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00045).

функций без начальных условий

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &\geq u^q \quad \text{в } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, t) &\geq 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u &\not\equiv 0.\end{aligned}$$

При этом также возникает критический показатель, совпадающий с аналогичным показателем для уравнения (что часто не имеет места для эллиптических и гиперболических неравенств). Интересной особенностью неравенств является возможность в некоторых случаях явно построить решения для суперкритической нелинейности ($q > q^*$) и таким образом легко установить неулучшаемость полученных результатов.

В настоящей статье рассматривается выписанное выше неравенство (и различные обобщения) в случае, когда вместо всего пространства $\mathbb{R}^N$ берется конус K . При этом критический показатель зависит от характеристики конуса, которая выражается через первое собственное значение соответствующей эллиптической задачи на единичной сфере.

Теория линейных краевых задач в конических областях берет свое начало с фундаментальной работы В. А. Кондратьева [2] по эллиптическим уравнениям. Вопросы отсутствия решений соответствующих полулинейных и нелинейных эллиптических и параболических задач изучаются, главным образом, путем сведения к интегральному уравнению и с использованием утверждений типа теорем сравнения и принципа максимума. Для случая параболических уравнений отметим работы [3], [4] и ставшую уже классической книгу [5]. Современное состояние исследований отражено в обзорах [6], [7].

Для эллиптических уравнений и неравенств основанные на теоремах сравнения результаты для различных областей см. в [8]–[11]. Следствием этих оценок является, в частности, отсутствие нетривиального решения при некоторых дополнительных условиях.

В настоящей работе для доказательства отсутствия решения применяется метод пробных функций [12]–[18] без использования характерных для теории уравнений второго порядка принципов сравнения. Этот метод дает возможность с использованием техники Э. Митидиери и С. И. Похожаева [14] практически сразу получать отсутствие решения для критического показателя нелинейности (что раньше вызывало существенные затруднения), а также рассматривать системы дифференциальных неравенств и другие классы задач, для которых принцип максимума не имеет места. Основной задачей становится выбор пробной функции и оценка соответствующих интегралов от нее. Отсутствие решений эллиптических неравенств в неограниченных конических областях методом пробных функций изучалось в работе автора [19].

Пусть K_ω – область на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, с кусочно гладкой границей ∂K_ω . *Конусом* K называется множество, которое в сферической системе координат (r, ω) , $0 \leq r < \infty$, $\omega \in S^{N-1}$, имеет вид

$$K = \{x = (r, \omega) : 0 < r < +\infty, \omega \in K_\omega\}.$$

Боковую поверхность конуса обозначаем через ∂K .

Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}^{N+1}$ с кусочно гладкой границей. Далее используются анизотропные пространства С. Л. Соболева $W_q^{2,1}(\Omega)$, а также локальное пространство $L_{q,\text{loc}}(\Omega)$, элементы которого принадлежат $L_q(\Omega')$ для любого компактного подмножества $\Omega': \bar{\Omega}' \subset \Omega$. Через $C(\bar{\Omega})$ обозначается пространство непрерывных функций, через $C^m(\bar{\Omega})$ – пространство гладких функций на замкнутой области $\bar{\Omega}$. Символ Δ обозначает оператор Лапласа, вектор из частных производных обозначаем через $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$. Для двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $\varphi(x)$ полагаем $Du D\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$.

Выражение $\frac{\partial u}{\partial n}$ обозначает производную функции u по направлению внешней нормали n к границе конуса ∂K . Через c и C с индексами будем обозначать постоянные.

Напомним, что оператор Лапласа Δ в сферических координатах (r, ω) имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega,$$

где Δ_ω – оператор Бельтрами–Лапласа на единичной сфере $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

В дальнейшем постоянно используются наименьшее (первое) собственное значение $\lambda_\omega \equiv \lambda_1(K_\omega) > 0$ и соответствующая собственная функция $\Phi(\omega)$ оператора Δ_ω , являющиеся решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta_\omega \Phi + \lambda \Phi &= 0 \quad \text{в } K_\omega, \\ \Phi|_{\partial K_\omega} &= 0. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что $\Phi(\omega) > 0$ для $\omega \in K_\omega$. Предполагается, что $\Phi(\omega) \leq 1$.

§ 2. Оценки некоторых интегралов емкостного типа

Как было упомянуто во введении, главным моментом в используемом методе является подходящий выбор пробных функций и оценка интегралов специального вида. В настоящем параграфе мы проводим соответствующие построения, которые применяются во всех последующих утверждениях.

Пробные функции мы строим методом разделения переменных, поэтому сначала рассмотрим соответствующую функцию по переменной t , а затем по x .

Напомним хорошо известный факт существования бесконечно дифференцируемой функции $\zeta(y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ (так называемой “стандартной срезающей функции”) со следующими свойствами:

$$0 \leq \zeta(y) \leq 1, \quad \zeta(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{если } y \geq 2. \end{cases}$$

Такого рода функции широко используются в теории функций в процедурах усреднения [20].

Следующим шагом является построение функции $\eta(y)$ такой, чтобы при фиксированном p_0 для всех $1 < p \leq p_0$ были выполнены поточечные неравенства

$$|\eta'(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y), \quad |\eta''(y)|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y)$$

с некоторой постоянной c_η . Достаточно взять

$$\eta(y) = (\zeta(y))^{2p_0}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \eta'(y) &= 2p_0 \zeta^{2p_0-1} \zeta', \quad |\eta'(y)|^p = (2p_0)^p \zeta^{2p_0(p-1)} \zeta^{2p_0-p} |\zeta'|^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y), \\ \eta''(y) &= 2p_0((2p_0-1)\zeta^{2p_0-2} |\zeta'|^2 + \zeta^{2p_0-1} \zeta''), \\ |\eta''(y)|^p &\leq (2p_0)^p \zeta^{2p_0(p-1)} \zeta^{2p_0-2p} ((2p_0-1)|\zeta'|^2 + \zeta |\zeta''|)^p \leq c_\eta \eta^{p-1}(y). \end{aligned}$$

Введем параметр ρ , который в последующих построениях будет неограниченно возрастать, и положительную степень θ . Введем также функцию $\eta(t/\rho^\theta)$ переменной $t \geq 0$. Для используемого в дальнейшем интеграла с помощью замены переменных получаем оценку

$$\int_{\text{supp} \left| \frac{d\eta(t/\rho^\theta)}{dt} \right|} \frac{\left| \frac{d\eta(t/\rho^\theta)}{dt} \right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)} dt \leq c_\eta \rho^{-\theta(p-1)}. \quad (2.1)$$

При этом

$$\text{supp} \left| \eta \left(\frac{t}{\rho^\theta} \right) \right| = \{t < 2\rho^\theta\}, \quad \text{supp} \left| \frac{d\eta(t/\rho^\theta)}{dt} \right| = \{\rho^\theta < t < 2\rho^\theta\}.$$

Аналогичные построения проведем и для пробной функции по переменной x . Однако в данном случае в силу того, что мы рассматриваем коническую область, возникает произведение двух функций:

$$r^s \eta \left(\frac{r}{\rho} \right) \quad (2.2)$$

с некоторым положительным s . Отсюда

$$\frac{\partial(r^s \eta(r/\rho))}{\partial r} = s r^{s-1} \eta \left(\frac{r}{\rho} \right) + r^s \eta' \left(\frac{r}{\rho} \right) \frac{1}{\rho}$$

и

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(r^s \eta(r/\rho))}{\partial r} \right|^p &\leq c_p s^p r^{p(s-1)} \eta^p \left(\frac{r}{\rho} \right) + c_p r^{ps} \left| \eta' \left(\frac{r}{\rho} \right) \right|^p \frac{1}{\rho^p} \\ &\leq c_{ps} \eta^{p-1} \left(\frac{r}{\rho} \right) r^{p(s-1)} \left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} \right) \end{aligned}$$

с не зависящей от ρ и r постоянной $c_{ps\eta}$. Такого же рода оценку можно установить и для второй производной:

$$\frac{\partial^2(r^s\eta(r/\rho))}{\partial r^2} = r^{s-2} \left(s(s-1)\eta\left(\frac{r}{\rho}\right) + 2s\eta'\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{r}{\rho} + \eta''\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{r^2}{\rho^2} \right)$$

и

$$\left| \frac{\partial^2(r^s\eta(r/\rho))}{\partial r^2} \right|^p \leq c_{ps\eta}\eta^{p-1}\left(\frac{r}{\rho}\right)r^{p(s-2)}\left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}}\right).$$

Теперь проясним смысл проведенных оценок. Для этого обратимся уже непосредственно к рассматриваемому нами конусу и оператору Лапласа Δ . Введем функцию $r^s\Phi(\omega)$. Вычисляя $\Delta(r^s\Phi(\omega))$, с учетом равенства $\Delta_\omega\Phi = -\lambda_\omega\Phi$ приходим к выражению

$$\Delta(r^s\Phi(\omega)) = r^{s-2}\Phi(\omega)\{s(s-1) + s(N-1) - \lambda_\omega\}.$$

Введем параметры

$$s^* = \frac{N-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}, \quad s_* = -\frac{N-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}. \quad (2.3)$$

Числа s_* и $-s^*$ являются корнями многочлена в фигурных скобках в предыдущем выражении для $\Delta(r^s\Phi(\omega))$. Заметим, что $s^* - s_* = N - 2$. Введем функцию

$$\xi(x) \equiv \xi(r, \omega) = r^{s_*}\Phi(\omega). \quad (2.4)$$

Главным ее свойством является тождество $\Delta\xi = 0$ в K . Очевидно также, что она обращается в нуль на ∂K . Еще одним используемым далее свойством функции (2.4) является неположительность производной $\frac{\partial\xi}{\partial n}$ по внешней нормали к границе конуса ∂K . Действительно,

$$\frac{\partial\xi}{\partial n} = r^{s_*}\frac{\partial\Phi(\omega)}{\partial n_\omega} \leq 0,$$

где n_ω — внешняя нормаль к границе области K_ω , а неположительность производной $\frac{\partial\Phi(\omega)}{\partial n_\omega}$ следует из леммы Хопфа (так как сама функция $\Phi(\omega)$ положительна в K_ω и обращается в нуль на границе).

Теперь установим аналогичную (2.1) оценку для “срезанной” функции

$$\psi_\rho(x) = \xi(x)\eta\left(\frac{|x|}{\rho}\right) = r^{s_*}\eta\left(\frac{r}{\rho}\right)\Phi(\omega).$$

Для этого сначала заметим, что в сферических координатах получаем:

$$\Delta\psi_\rho = \frac{\partial^2\psi_\rho}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r}\frac{\partial\psi_\rho}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\omega\psi_\rho,$$

где

$$\Delta_\omega\psi_\rho = r^{s_*}\eta\left(\frac{|x|}{\rho}\right)(-\lambda_\omega\Phi) = -\lambda_\omega\psi_\rho.$$

С учетом установленных выше оценок для производных от произведения $r^s \eta(r/\rho)$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\Delta \psi_\rho(x)|^p &= \left| \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\lambda_\omega}{r^2} \right) \left(r^{s_*} \eta \left(\frac{r}{\rho} \right) \right) \right|^p \Phi^p(\omega) \\ &\leq c \eta^{p-1} \left(\frac{r}{\rho} \right) \Phi^p(\omega) \frac{r^{(p-1)s_*}}{r^{2p-s_*}} \left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \right) \\ &\leq c \psi_\rho^{p-1}(x) \frac{1}{r^{2p-s_*}} \left(1 + \frac{r^p}{\rho^p} + \frac{r^{2p}}{\rho^{2p}} \right). \end{aligned}$$

По построению $\eta(|x|/\rho) \equiv 1$ при $|x| \leq \rho$, поэтому $\Delta \psi_\rho(x) = \Delta \xi(x) = 0$ и $\text{supp } |\Delta \psi_\rho(x)| = \{K \cap \{\rho < |x| < 2\rho\}\}$. Отсюда следует, что на множестве $\text{supp } |\Delta \psi_\rho(x)|$ в приведенной выше оценке выражение в круглых скобках ограничено. Далее, на этом множестве $r^{s_*-2p} \leq C \rho^{s_*-2p}$ (независимо от знака $s_* - 2p$), поэтому

$$|\Delta \psi_\rho(x)|^p \leq c \psi_\rho^{p-1}(x) \rho^{s_*-2p}.$$

Теперь можем окончательно записать

$$\int_{\text{supp } |\Delta \psi_\rho|} \frac{|\Delta \psi_\rho(x)|^p}{\psi_\rho^{p-1}(x)} dx \leq c \int_\rho^{2\rho} \int_{K_\omega} \frac{\psi_\rho^{p-1}(x)}{\psi_\rho^{p-1}(x)} \frac{r^{N-1}}{\rho^{2p-s_*}} dr d\omega \leq c \psi \rho^{-2p+s_*+N}. \quad (2.5)$$

Общую пробную функцию выбираем в виде произведения

$$\varphi_\rho(x, t) = \eta \left(\frac{t}{\rho^\theta} \right) \psi_\rho(x). \quad (2.6)$$

С учетом изложенного выше очевидны оценки

$$\begin{aligned} \iint_{\text{supp } \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho(x, t)}{\partial t} \right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x, t)} dx dt &\leq \int_{K \cap \{r < 2\rho\}} \psi_\rho(x) dx \int_{\text{supp } \left| \frac{d\eta(t/\rho^\theta)}{dt} \right|} \frac{\left| \frac{d\eta(t/\rho^\theta)}{dt} \right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)} dt \\ &\leq c_\varphi \rho^{s_*+N-\theta(p-1)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\text{supp } |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho(x, t)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x, t)} dx dt &\leq \int_0^{2\rho^\theta} \eta \left(\frac{t}{\rho^\theta} \right) dt \int_{\text{supp } |\Delta \psi_\rho|} \frac{|\Delta \psi_\rho|^p}{\psi_\rho^{p-1}} dx \\ &\leq c_\varphi \rho^{\theta-2p+s_*+N}. \end{aligned}$$

При $\theta = 2$ степени в правых частях неравенств (2.7) уравниваются, поэтому окончательно получаем оценку

$$\iint_{\text{supp } \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} dx dt \leq c_0 \rho^{-2p+s_*+N+2}. \quad (2.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведенные построения можно провести различными способами. Основная идея состоит в “срезании” функций, на которых рассматриваемый

оператор обращается в нуль, таким образом, чтобы они становились финитными и в дальнейшем при интегрировании по частям не порождали граничных интегралов.

В простейшем случае одной производной, который мы и имеем по переменной t , в качестве такой срезаемой функции берется тождественная единица. Для оператора Лапласа (в данном контексте) мы вынуждены использовать уже более сложные функции типа фундаментальных решений.

Само построение в виде умножения на стандартную срезающую функцию придает некоторую наглядность дальнейшим оценкам, однако можно и явно построить требуемую функцию в виде степеней некоторого многочлена второго порядка и оценить все получаемые интегралы, как это проделано в работе автора [19].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Такого рода оценки для случая всего пространства $\mathbb{R}^N$ применяются в работах [13]–[16] и по существу являются строгим подходом к широко используемой для предварительного определения критических показателей технике замены переменных (“scaling”) [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Параметр θ , который в данном построении взят равным 2, в дальнейшем будет варьироваться в зависимости от главного оператора. Мы будем делать соответствующие замечания по ходу изложения, не останавливаясь детально на построении соответствующих функций и оценках интегралов вида (2.8).

§ 3. Модельная задача: отсутствие глобального решения

Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &\geq u^q \quad \text{в } K \times (0, \infty), \\ u &\geq 0, \quad u \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее слабое решение будет пониматься в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $u(x, t) \in C(\overline{K} \times [0, \infty))$. Неотрицательная функция $u(x, t)$ называется *слабым решением задачи* (3.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_{\infty}^{2,1}(K \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial K \times (0, \infty)} = 0$, финитной по переменным $r = |x|$ и t , выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\partial K} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx dt - \int_0^\infty \int_K u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta \varphi \right) dx dt \\ \geq \int_0^\infty \int_K u^q \varphi dx dt + \int_K u(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Приведенное определение обобщенного решения может быть расширено, в частности, рассмотрением пространства локально суммируемых функций $L_{q, \text{loc}}(K)$ вместо пространства непрерывных функций. При этом нужно делать дополнительные предположения о следе функции $u(x, t)$ на границе конуса и при $t = 0$, однако в общем случае это не отразится на получаемом критическом показателе.

ТЕОРЕМА 1. *При*

$$1 < q \leq q^* = 1 + \frac{2}{s^* + 2}$$

задача (3.1) не имеет нетривиального глобального решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Параметры s_* и s^* возникают при построении фундаментальных решений эллиптического оператора Δ в конусе K . Как будет видно ниже, фундаментальных решений эллиптического оператора достаточно для получения неулучшаемого критического показателя q^* , т.е. нет необходимости переходить к существенно более сложному фундаментальному решению оператора теплопроводности $\partial/\partial t - \Delta$ (см. также [18]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. От противного. Пусть $u(x, t)$ – нетривиальное решение задачи (3.1) с $1 < q \leq q^*$. Согласно определению 1 с пробной функцией $\varphi(x, t) = \varphi_\rho(x, t)$, введенной по формуле (2.6) с $p = q' > 1$ и $\theta = 2$, это означает

$$\begin{aligned} & \int_K u(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_K u^q \varphi_\rho dx dt \\ & \leq \int_0^\infty \int_{\partial K} u \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial n} dx dt - \iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} u \left(\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right) dx dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Как уже отмечалось ранее, производная функции ξ , а следовательно, и φ_ρ по нормали к границе конуса будет неположительна, и поскольку функции u и $\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial n}$ непрерывны на границе $\partial K \times [0, \infty)$, включая вершину $x = 0$, то первый интеграл в правой части (по границе) не будет иметь особенностей и будет неположительным.

Для оценки второго интеграла применим неравенство Гёльдера. Получим:

$$\begin{aligned} & \int_K u(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_K u^q \varphi_\rho dx dt \\ & = \int_K u(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} u^q \varphi_\rho dx dt \\ & \quad + \iint_{\varphi_\rho(x, t) = \xi(x)} u^q \xi(x) dx dt \\ & \leq \iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} u \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right| dx dt \\ & \leq \left(\iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} u^q \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q} \\ & \quad \times \left(\iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx dt \right)^{1/q'}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

откуда, отбрасывая неотрицательные начальные условия (т.е. первый интеграл в левой части), с учетом оценки (2.8) (при $p = q'$) для последнего интеграла справа

будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} u^q \xi(x) dx dt &\leq \iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx dt \\ &\leq c_0 \rho^{-2q' + s_* + N + 2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как подынтегральное выражение в левой части не зависит от ρ , можем перейти к пределу по $\rho \rightarrow \infty$. В случае

$$-2q' + s_* + N + 2 \leq 0$$

это приводит к соотношению

$$\int_0^\infty \int_K u^q \xi dx dt \leq c_0.$$

Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега по мере и ввиду оценки $\varphi_\rho \leq \xi$

$$\iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} u^q \varphi_\rho dx dt \leq \iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + \Delta \varphi_\rho \right|} u^q \xi dx dt = \varepsilon(\rho) \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow \infty$.

Возвращаясь теперь к неравенству (3.3), получаем

$$\iint_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} u^q \xi dx dt \leq \varepsilon^{1/q}(\rho) c_0^{1/q'} \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow \infty$, т.е. в пределе

$$\int_0^\infty \int_K u^q \xi dx dt = 0,$$

откуда в силу положительности ξ в K следует $u \equiv 0$, что противоречит нашему предположению о существовании нетривиального решения (техника исследования критического случая $-2q' + s_* + N + 2 = 0$ заимствована из работы [14]).

Элементарными преобразованиями из неравенства

$$-2q' + s_* + N + 2 \leq 0$$

получаем условие отсутствия нетривиального решения: $1 < q \leq q^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Полученный критический показатель является неулучшаемым, т.е. в случае $q > q^*$ существуют глобальные нетривиальные положительные решения рассматриваемой задачи и даже соответствующего уравнения.

§ 4. Задачи с переменными коэффициентами

В настоящем параграфе приведем пример применения описанного метода к исследованию отсутствия решения параболических задач с переменными коэффициентами.

Рассмотрим проблему отсутствия слабых решений задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^\alpha Du) &\geq u^q \quad \text{в } K \times (0, \infty), \\ u &\geq 0, \quad u \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $2 > \alpha > 1 - N$. Далее слабое решение будет пониматься в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $u(x, t) \in C(\overline{K} \times [0, \infty))$. Неотрицательная функция $u(x, t)$ называется *слабым решением задачи (4.1)*, если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_\infty^{2,1}(K \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial K \times (0, \infty)} = 0$, финитной по переменным $r = |x|$ и t , выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_K u |x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt - \int_0^\infty \int_K u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(|x|^\alpha D\varphi) \right) dx dt \\ \geq \int_0^\infty \int_K u^q \varphi dx dt + \int_K u(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Введем параметры

$$\begin{aligned} s_\alpha^* &= \frac{\alpha + N - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + N - 2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}, \\ s_{*\alpha} &= -\frac{\alpha + N - 2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + N - 2}{2}\right)^2 + \lambda_\omega}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

ТЕОРЕМА 2. При

$$1 < q \leq q^* = 1 + \frac{2 - \alpha}{s_\alpha^* + 2 - \alpha}$$

задача (4.1) не имеет нетривиального глобального решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u — нетривиальное слабое решение задачи (4.1). Выберем пробную функцию в виде, аналогичном модельной задаче, однако в качестве функции ξ вместо (2.4) возьмем

$$\xi_\alpha(x) \equiv \xi_\alpha(r, \omega) = r^{s_{*\alpha}} \Phi(\omega).$$

Тогда функции $\psi_\rho(x)$ и $\varphi_\rho(x, t)$ принимают вид

$$\psi_\rho(x) = \xi_\alpha(x) \eta\left(\frac{|x|}{\rho}\right), \quad \varphi_\rho(x, t) = \psi_\rho(x) \eta\left(\frac{t}{\rho^\theta}\right).$$

В данном случае вместо оператора Лапласа мы имеем оператор

$$A_\alpha \equiv \operatorname{div}(|x|^\alpha D) = r^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\alpha + N - 1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega \right).$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что

$$A_\alpha \xi_\alpha \equiv \operatorname{div}(|x|^\alpha D \xi_\alpha) = r^\alpha r^{s_{*\alpha}-2} (s_{*\alpha}(s_{*\alpha}-1) + s_{*\alpha}(\alpha + N - 1) - \lambda_\omega) \Phi(\omega) \equiv 0 \text{ в } K.$$

Действуя как в § 2, можно получить аналоги оценок (2.7):

$$\begin{aligned} & \iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho(x, t)}{\partial t} \right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x, t)} dx dt \\ & \leq \int_{K \cap \{r < 2\rho\}} \psi_\rho(x) dx \int_{\operatorname{supp} \left| \frac{d\eta(t/\rho^\theta)}{dt} \right|} \frac{\left| \frac{d\eta(t/\rho^\theta)}{dt} \right|^p}{\eta^{p-1}(t/\rho^\theta)} dt \\ & \leq c \rho^{s_{*\alpha} + N - \theta(p-1)}, \\ & \iint_{\operatorname{supp} |A_\alpha \varphi_\rho|} \frac{|A_\alpha \varphi_\rho(x, t)|^p}{\varphi_\rho^{p-1}(x, t)} dx dt \\ & \leq \int_0^{2\rho^\theta} \eta \left(\frac{t}{\rho^\theta} \right) dt \int_{\operatorname{supp} |A_\alpha \psi_\rho|} \frac{|A_\alpha \psi_\rho|^p}{\psi_\rho^{p-1}} dx \\ & \leq c \rho^{\theta - (2-\alpha)p + s_{*\alpha} + N}. \end{aligned}$$

При $\theta = 2 - \alpha > 0$ степени в правых частях оценок совпадают и тогда

$$\iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|^p}{\varphi_\rho^{p-1}} dx dt \leq c_0 \rho^{-(2-\alpha)p + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha}. \quad (4.3)$$

Далее действуем по схеме доказательства теоремы 1. Из определения слабого решения

$$\begin{aligned} & \int_K u(x, 0) \psi_\rho(x) dx + \int_0^\infty \int_K u^q \varphi_\rho dx dt \\ & \leq \int_0^\infty \int_{\partial K} u |x|^\alpha \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial n} dx dt + \iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} u \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right| dx dt, \end{aligned} \quad (4.4)$$

откуда (с учетом неположительности первого интеграла в правой части) после применения неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{\varphi_\rho(x, t) = \xi_\alpha(x)} u^q \xi_\alpha dx dt \leq \iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx dt \\ & \leq c_0 \rho^{-(2-\alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

что дает условие отсутствия нетривиального решения

$$-(2 - \alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha \leq 0.$$

Отсюда $q \leq 1 + \frac{2 - \alpha}{N + s_{*\alpha}}$. Так как $N + s_{*\alpha} = s_\alpha^* + 2 - \alpha$, то приходим к утверждению теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Существенно более общие классы параболических неравенств для случая всего пространства $\mathbb{R}^N$ рассмотрены, например, в работах [15] и [16]. Схожий с использованным способ выбора пробной функции в виде фундаментального решения эллиптического оператора (для всего пространства $\mathbb{R}^N$) использован в [17].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Мы не рассмотрели случай $\alpha \geq 2$, когда на отсутствие решения начинает оказывать влияние вырождение оператора при $x = 0$. Данное явление получило название “полного разрушения решения”. Одновременно можно ставить вопрос о времени существования решения и на этом пути получать утверждения о “мгновенном разрушении”, т.е. об отсутствии даже локальных решений рассматриваемых задач [16], [18].

§ 5. Зависимость критического показателя от начальных данных

В предыдущем параграфе в процессе доказательства теоремы 2 при получении неравенства (4.4) была установлена по сути априорная оценка роста возможного решения задачи. Сформулируем ее в виде отдельного утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (4.1). Тогда при достаточно больших ρ и при любом $q > 1$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{K \cap \{|x| < \rho\}} u(x, 0) \xi_\alpha(x) dx + \iint_{(K \times (0, \infty)) \cap \{|x| < \rho\} \cap \{t < \rho^{2-\alpha}\}} u^q \xi_\alpha dx dt \\ \leq c_1 \rho^{-(2-\alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуем аналогично доказательству теоремы 2, однако при переходе от формулы (4.4) к (4.5) учтем наличие в левой части интеграла от начального значения $u(x, 0)$ и приведем явное выражение для множества $\{(x, t) : \varphi_\rho(x, t) = \xi_\alpha(x)\}$.

Эта лемма позволяет исследовать вопрос о разрушении локального решения в зависимости от скорости роста при $|x| \rightarrow \infty$ значений функции $u(x, 0)$ (что соответствует в случае уравнения начальным данным). Приведем некоторые результаты в этом направлении.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(x, 0) \geq c_\gamma / |x|^\gamma$ при достаточно больших $|x|$, где $\gamma > 0$, c_γ – постоянная. Тогда при

$$1 - N < \alpha < 2, \quad 1 < q < q_c(\gamma), \quad \text{где } q_c(\gamma) = \max \left\{ 1 + \frac{2 - \alpha}{\gamma}, 1 + \frac{2 - \alpha}{s_\alpha^* + 2 - \alpha} \right\},$$

задача (4.1) не имеет глобального нетривиального решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \geq s_\alpha^* + 2 - \alpha = s_{*\alpha} + N$. Тогда $q_c(\gamma) = 1 + \frac{2 - \alpha}{s_\alpha^* + 2 - \alpha}$ и задача (4.1) не имеет глобального нетривиального решения по теореме 2. Поэтому рассмотрим оставшийся вариант: $0 < \gamma < s_{*\alpha} + N$, когда $q_c = 1 + (2 - \alpha)/\gamma$.

Пусть u – глобальное решение, удовлетворяющее условиям теоремы. Для определенности считаем, что $u(x, 0) \geq c_\gamma/|x|^\gamma$ при $|x| > R$. Применяя лемму 1, получаем при $\rho > 2R$

$$\begin{aligned} c_1 \rho^{-(2-\alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha} &\geq \int_{K \cap \{\rho/2 < |x| < \rho\}} u(x, 0) \xi_\alpha dx \\ &\quad + \iint_{(K \times (0, \infty)) \cap \{|x| < \rho\} \cap \{t < \rho^{2-\alpha}\}} u^q \xi_\alpha dx dt \\ &\geq c_\gamma \int_{\rho/2}^{\rho} r^{N-1} \frac{r^{s_{*\alpha}}}{r^\gamma} dr \int_{K_\omega} \Phi(\omega) d\omega \geq c_\gamma c_2 \rho^{s_{*\alpha} - \gamma + N}. \end{aligned}$$

Из приведенной оценки следует неравенство

$$c_\gamma c_2 \rho^{(2-\alpha)(q'-1) - \gamma} \leq c_1, \quad (5.1)$$

которое в условиях теоремы не может удовлетворяться при $\rho \rightarrow \infty$, так как если $q < 1 + (2-\alpha)/\gamma$, то $(2-\alpha)(q'-1) - \gamma > 0$.

Случай $\gamma = 0$ выделим отдельно.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u(x, 0) \geq c > 0$ для $|x| \rightarrow \infty$. Тогда задача (4.1) не имеет решения для всех $q > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 1, вместо (5.1) получаем неравенство $c c_2 \rho^{(2-\alpha)(q'-1)} \leq c_1$, которое не может выполняться в условиях теоремы, так как $\alpha < 2$ и $q' > 1$.

Теорему 3 с использованием оценки (5.1) можно сформулировать также и в виде условия на рост начальных данных.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $u(x, 0) \geq c_\gamma/|x|^\gamma$ при достаточно больших $|x|$. Тогда при

$$1 - N < \alpha < 2, \quad q > 1, \quad 0 < \gamma < \frac{2-\alpha}{q-1}$$

задача (4.1) не имеет глобального нетривиального решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. В работе [21] для задачи $u_t - \Delta u = |x|^\sigma u^q$ установлено, что в предельном случае $\gamma = \frac{2+\sigma}{q-1}$ задача также не имеет нетривиального решения. В нашем доказательстве при достаточно больших значениях c_γ отсутствие решения в предельном случае очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Используемый способ в случае задач в $\mathbb{R}^{N+1}$ изложен в [16].

§ 6. Неоднородная задача

Следуя статье [22], введем в систему (4.1) дополнительное слагаемое $w(x) \geq 0$, $w(x) \in L_{1,\text{loc}}(K)$, т.е. рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^\alpha Du) &\geq u^q + w(x) \quad \text{в } K \times (0, \infty), \quad w(x) \not\equiv 0, \\ u &\geq 0, \quad u \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь, как и ранее, $2 > \alpha > 1 - N$.

Нас интересует вопрос о том, как повлияет введение неоднородности на критический показатель отсутствия решения.

Слабое решение этой задачи понимается в смысле определения 2, т.е. предполагается выполненным интегральное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\partial K} u |x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx dt - \int_0^\infty \int_K u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(|x|^\alpha D\varphi) \right) dx dt \\ & \geq \int_0^\infty \int_K u^q \varphi dx dt + \int_0^\infty \int_K w(x) \varphi dx dt + \int_K u(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6. *При*

$$1 < q < q^* = 1 + \frac{2 - \alpha}{s_\alpha^*}$$

задача (6.1) не имеет нетривиального глобального решения, каким бы малым ни было $w(x) \not\equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству теоремы 2 и леммы 1, получаем оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^{\rho^{2-\alpha}} \int_{K \cap \{|x| < \rho\}} w(x) \xi_\alpha(x) dx dt + \int_{K \cap \{|x| < \rho\}} u(x, 0) \xi_\alpha(x) dx \\ & + \iint_{\varphi_\rho(x, t) = \xi_\alpha(x)} u^q \xi_\alpha dx dt \leq c_1 \rho^{-(2-\alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha}, \end{aligned}$$

откуда

$$c_1 \rho^{-(2-\alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha} \geq \int_0^{\rho^{2-\alpha}} \int_{K \cap \{|x| < \rho\}} w(x) \xi_\alpha(x) dx dt \geq \rho^{2-\alpha} c_w \quad (6.2)$$

при ρ таких, что

$$\int_{K \cap \{|x| < \rho\}} w(x) \xi_\alpha(x) dx \geq c_w \equiv \operatorname{const} > 0.$$

Для получения противоречия при $\rho \rightarrow \infty$ достаточно предполагать, что

$$-(2 - \alpha)q' + s_{*\alpha} + N < 0,$$

т.е.

$$q < 1 + \frac{2 - \alpha}{s_\alpha^*}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Сравнение с теоремой 2 показывает, что при введении в неравенство возмущения $w(x) \geq 0$ критический показатель изменяется в сторону увеличения. Интересным моментом в данном утверждении является отсутствие предположений о росте и носителе функции $w(x)$, требуется только положительность интеграла по некоторой достаточно большой сфере в $\mathbb{R}^N$. Объяснение этому кроется в интегрировании функции $w(x)$ по переменной t в пределах от 0 до $\rho^{2-\alpha}$, за счет чего для любой сколь угодно малой функции $w(x)$ все равно получается стремящийся к бесконечности интеграл (при $\rho \rightarrow \infty$).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $w(x) \geq c_\gamma/|x|^\gamma$, где $\gamma > 2 - \alpha > 0$. Тогда задача (6.1) не имеет глобального нетривиального решения при $1 - N < \alpha < 2$ и $1 < q < \gamma/(\gamma + \alpha - 2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы неравенство (6.2) принимает вид

$$c_1 \rho^{-(2-\alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha} \geq \rho^{2-\alpha} \rho^{s_{*\alpha} + N - \gamma} c_w,$$

откуда $c_1 \geq c_w \rho^{(2-\alpha)q' - \gamma}$. Неравенство невозможно, если $(2 - \alpha)q' - \gamma > 0$, т.е. $q < \gamma/(\gamma + \alpha - 2)$.

Можно рассмотреть неоднородную задачу с возмущением $w(t) \geq 0$, зависящим только от переменной t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^\alpha Du) &\geq u^q + w(t) \quad \text{в } K \times (0, \infty), \\ u &\geq 0, \quad u \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

ТЕОРЕМА 8. При всех $q > 1$ и $2 > \alpha > 1 - N$ задача (6.3) не имеет нетривиального глобального решения, каким бы малым ни было $w(t) \not\equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 6 получим оценку

$$c_1 \rho^{-(2-\alpha)q' + s_{*\alpha} + N + 2 - \alpha} \geq \int_{K \cap \{|x| < \rho\}} \xi_\alpha(x) dx \int_0^{\rho^{2-\alpha}} w(t) dt \geq \rho^{s_{*\alpha} + N} c_w \quad (6.4)$$

для ρ таких, что

$$\int_0^{\rho^{2-\alpha}} w(t) dt \geq c_w \equiv \text{const} > 0.$$

В условиях теоремы справедливо неравенство $-(2 - \alpha)(q' - 1) < 0$, которое показывает, что соотношение (6.4) не может выполняться, следовательно, задача (6.3) не имеет нетривиального решения.

§ 7. Квазилинейное неравенство типа медленной диффузии

В последнее время большой интерес вызывают дифференциальные неравенства вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^m &\geq u^q \quad \text{в } K \times (0, \infty), \quad m > 1, \quad q > m, \\ u &\geq 0, \quad u \not\equiv 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

При внешне нелинейной структуре к их исследованию часто можно применить методы, разработанные для полулинейных задач.

Далее слабое решение будет пониматься в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $u(x, t) \in C(\overline{K} \times [0, \infty))$. Неотрицательная функция $u(x, t)$ называется *слабым решением задачи* (7.1), если для любой неотрицательной пробной функции $\varphi(x, t) \in W_{\infty}^{2,1}(K \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial K \times (0, \infty)} = 0$, финитной по переменным $r = |x|$ и t , выполнено интегральное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\partial K} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx dt - \int_0^\infty \int_K u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt - \int_0^\infty \int_K u^m \Delta \varphi dx dt \\ & \geq \int_0^\infty \int_K u^q \varphi dx dt + \int_K u(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (7.2)$$

ТЕОРЕМА 9. *При*

$$1 < m < q \leq q^* = m + \frac{2}{s^* + 2}$$

задача (7.1) не имеет нетривиального глобального решения. Число s^ определено в (2.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1. Выбор пробной функции естественным образом обобщает предыдущее построение: по переменной t вводится некоторый вес $\theta > 0$, который уточним позднее (аналогично работе [17]), т.е. берем пробную функцию (2.6).

Пусть $u(x, t)$ – нетривиальное решение задачи (7.1) с $1 < q \leq q^*$. Рассмотрим неравенство (7.2) из определения 3 обобщенного решения с пробной функцией φ_ρ . Первый интеграл в левой части (по границе ∂K) неположителен в силу приведенных в доказательстве теоремы 1 аргументов. Применяя неравенство Гёльдера ко второму и третьему интегралам из левой части (7.2), получаем

$$\begin{aligned} & \int_K u(x, 0) \psi_\rho(x) dx + \int_0^\infty \int_K u^q \varphi_\rho dx dt \\ & \leq \left(\iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} \right|} u^q \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q} \left(\iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx dt \right)^{1/q'} \\ & + \left(\iint_{\text{supp} |\Delta \varphi_\rho|} u^q \varphi_\rho dx dt \right)^{m/q} \left(\iint_{\text{supp} |\Delta \varphi_\rho|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q/(q-m)}}{\varphi_\rho^{m/(q-m)}} dx dt \right)^{(q-m)/q}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Оценки (2.7) в этом случае (заметим, что в первом неравенстве из (2.7) надо брать $p = q'$, тогда как во втором $p = q/(q - m)$) принимают вид

$$\begin{aligned} & \iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho(x, t)}{\partial t} \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho(x, t)}{\partial t} \right|^{q'}}{\varphi_\rho^{q'-1}} dx dt \leq c \rho^{-\theta q' + s_* + \theta + N}, \\ & \iint_{\text{supp} |\Delta \varphi_\rho(x, t)|} \frac{|\Delta \varphi_\rho|^{q/(q-m)}}{\varphi_\rho^{m/(q-m)}} dx dt \leq c \rho^{-2q/(q-m) + s_* + \theta + N}. \end{aligned}$$

Теперь подбираем параметр θ таким образом, чтобы показатели сравнялись [17]:

$$-\theta q' + s_* + \theta + N = -\frac{2q}{q-m} + s_* + \theta + N, \quad \text{т.е.} \quad \theta = \frac{2(q-1)}{q-m}.$$

Заметим, что $\theta > 0$. При таком выборе θ из неравенства (7.3) будем иметь

$$\iint_{\varphi_\rho(x,t)=\xi(x)} u^q \xi dx dt \leq c_0 \rho^{-2/(q-m)+s_*+N}. \quad (7.4)$$

В случае

$$-\frac{2}{q-m} + s_* + N \leq 0$$

с использованием аналогичных предыдущим рассуждений это означает отсутствие нетривиального решения при $1 < m < q \leq q^* = m + \frac{2}{s_* + N} = m + \frac{2}{s^* + 2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Для всего пространства $\mathbb{R}^N$ (т.е. $s^* = N - 2$) получаем известный результат об отсутствии нетривиального решения при $m < q \leq m + 2/N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Сделав замену $u^m = v$, от (7.1) приходим к задаче

$$\frac{\partial v^{1/m}}{\partial t} - \Delta v \geq v^{q/m},$$

для которой легко переформулировать полученное выше утверждение.

Можно обобщить представленную теорему на неравенства с переменными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^\alpha D(u^m)) \geq u^q,$$

а также установить зависимость критического показателя от поведения начальных данных (методами §5) и изменение критического показателя при введении в задачу неоднородности (методами §6).

§ 8. Системы неравенств

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^\alpha Du) \geq v^{q_1} & \text{в } K \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \operatorname{div}(|x|^\alpha Dv) \geq u^{q_2} & \text{в } K \times (0, \infty), \\ u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad u \not\equiv 0, \quad v \not\equiv 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

где $2 > \alpha > 1 - N$. Такого рода системы часто называют *слабо связанными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пара неотрицательных функций $u, v \in C(\overline{K} \times [0, \infty))$ называется *слабым решением задачи* (8.1), если для любой неотрицательной пробной

функции $\varphi(x, t) \in W_{\infty}^{2,1}(K \times (0, \infty))$ такой, что $\varphi|_{\partial K \times (0, \infty)} = 0$, финитной по переменным $r = |x|$ и t , выполнены интегральные неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\partial K} u|x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx dt - \int_0^\infty \int_K u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(|x|^\alpha D\varphi) \right) dx dt \\ & \geq \int_0^\infty \int_K v^{q_1} \varphi dx dt + \int_K u(x, 0) \varphi(x, 0) dx, \\ & \int_0^\infty \int_{\partial K} v|x|^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} dx dt - \int_0^\infty \int_K v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(|x|^\alpha D\varphi) \right) dx dt \\ & \geq \int_0^\infty \int_K u^{q_2} \varphi dx dt + \int_K v(x, 0) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 10. *Задача (8.1) не имеет слабого решения, если*

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{s_\alpha^* + 2 - \alpha}{2 - \alpha},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{q_1 + 1}{q_1 q_2 - 1}, \quad \gamma_2 = \frac{q_2 + 1}{q_1 q_2 - 1},$$

s_α^* определяется формулой (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u, v – слабое решение задачи (8.1). Выберем пробную функцию как в доказательстве теоремы 2 и будем использовать соответствующие обозначения. В частности, справедлива оценка (4.3).

Применяя в определении слабого решения неравенство Гёльдера, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} & \int_K u(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_K v^{q_1} \varphi_\rho dx dt \\ & \leq \left(\iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} u^{q_2} \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q_2} \\ & \quad \times \left(\iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|^{q_2'}}{\varphi_\rho^{q_2' - 1}} dx dt \right)^{1/q_2'} \\ & \equiv \left(\iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} u^{q_2} \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q_2} J_1^{1/q_2'}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} & \int_K v(x, 0) \varphi_\rho(x, 0) dx + \int_0^\infty \int_K u^{q_2} \varphi_\rho dx dt \\ & \leq \left(\iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} v^{q_1} \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q_1} \\ & \quad \times \left(\iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|^{q_1'}}{\varphi_\rho^{q_1' - 1}} dx dt \right)^{1/q_1'} \\ & \equiv \left(\iint_{\operatorname{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} v^{q_1} \varphi_\rho dx dt \right)^{1/q_1} J_2^{1/q_1'}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

причем согласно (4.3)

$$J_1 \leq c_0 \rho^{-(2-\alpha)q'_2 + s^*_{*\alpha} + N + 2 - \alpha}, \quad J_2 \leq c_0 \rho^{-(2-\alpha)q'_1 + s^*_{*\alpha} + N + 2 - \alpha}.$$

Подставим неравенство (8.3) в (8.2). Тогда

$$\begin{aligned} & \int_K u(x, 0) \psi_\rho(x) dx + \int_0^\infty \int_K v^{q_1} \varphi_\rho dx dt \\ & \leq \left(\iint_{\text{supp} \left| \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial t} + A_\alpha \varphi_\rho \right|} v^{q_1} \varphi_\rho dx dt \right)^{1/(q_1 q_2)} J_2^{1/(q'_1 q_2)} J_1^{1/q'_2}, \end{aligned}$$

откуда после упрощения степеней получаем

$$\int_0^\infty \int_K v^{q_1} \varphi_\rho dx dt \leq (J_2^{q_1-1} J_1^{q_1(q_2-1)})^{1/(q_1 q_2-1)} \leq C \rho^{s^*_{\alpha} + 2 - \alpha - \gamma_1(2-\alpha)}.$$

Отсюда, рассуждая как и раньше, выводим отсутствие нетривиального $v(x, t)$ в случае

$$s^*_{\alpha} + 2 - \alpha - \gamma_1(2 - \alpha) \leq 0.$$

Аналогично, подставляя (8.2) в (8.3), приходим к оценке

$$\int_0^\infty \int_K u^{q_2} \varphi_\rho dx dt \leq (J_1^{q_2-1} J_2^{q_2(q_1-1)})^{1/(q_1 q_2-1)} \leq C \rho^{s^*_{\alpha} + 2 - \alpha - \gamma_2(2-\alpha)},$$

т.е. нетривиальное решение $u(x, t)$ отсутствует при

$$s^*_{\alpha} + 2 - \alpha - \gamma_2(2 - \alpha) \leq 0.$$

Очевидно, что если хотя бы одна из функций $u(x, t)$ или $v(x, t)$ тождественно равна нулю, то равна нулю и другая. Таким образом, условие отсутствия нетривиального решения принимает вид

$$\max\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{s^*_{\alpha} + 2 - \alpha}{2 - \alpha}.$$

Теорема доказана.

При $\alpha = 0$ получаем известные условия

$$\max\left\{ \frac{q_1 + 1}{q_1 q_2 - 1}, \frac{q_2 + 1}{q_1 q_2 - 1} \right\} \geq \frac{s^* + 2}{2},$$

которые для всего пространства $\mathbb{R}^N$ принимают вид (полагаем $s^* = N - 2$)

$$\max\left\{ \frac{q_1 + 1}{q_1 q_2 - 1}, \frac{q_2 + 1}{q_1 q_2 - 1} \right\} \geq \frac{N}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Возможно применить предлагаемый метод к более общим системам. В частности, не вызывает проблем изучение систем с постоянными положительными коэффициентами вида

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial u}{\partial t} - a_{12} \operatorname{div}(|x|^\alpha Du) \geq v^{q_1}, \\ a_{21} \frac{\partial v}{\partial t} - a_{22} \operatorname{div}(|x|^\alpha Dv) \geq u^{q_2} \end{cases} \quad \text{в } K \times (0, \infty).$$

Результат теоремы 10 остается верен и для этой системы (с ненулевыми коэффициентами).

В заключение автор выражает благодарность С. И. Похожаеву за постановку задачи и В. В. Курте за полезное обсуждение результатов.

Список литературы

1. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations // Preprint. Univ. Bath. (UK), 2000. Math. 00/04.
2. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292.
3. Bandle C., Levine H. A. On the existence and nonexistence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 316. P. 595–622.
4. Levine H. A., Meier P. The value of the critical exponent for reaction-diffusion equations in cones // Arch. Rational Mech. Anal. 1990. V. 109. P. 73–80.
5. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
6. Levine H. A. The role of critical exponents in blow-up theorems // SIAM Rev. 1990. V. 32. P. 371–386.
7. Deng K., Levine H. A. The role of critical exponent in blow-up theorems: the sequel // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243. P. 85–126.
8. Коньков А. А. О неотрицательных решениях квазилинейных эллиптических неравенств // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 2. С. 41–127.
9. Kon'kov A. A. Behavior of solutions of nonlinear second-order elliptic inequalities // Nonlinear Anal. 2000. V. 42. № 7. P. 1253–1270.
10. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135. № 3. С. 346–360.
11. Нгуен Мань Хунг. Об отсутствии положительных решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в конических областях // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 4. С. 533–539.
12. Курта В. В. Об отсутствии положительных решений у полулинейных эллиптических уравнений // Труды МИАН. 1999. Т. 227. С. 162–169.
13. Курта В. В. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МИАН, 1994.
14. Митидиери Э., Похожаев С. И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Труды МИАН. 1999. Т. 227. С. 192–222.
15. Pohozaev S., Tesei A. Blow-up of nonnegative solutions to quasilinear parabolic inequalities // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 2000. V. 11. № 2. P. 99–109.
16. Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений дифференциальных неравенств в частных производных // Труды МИАН. 2001. Т. 234 (в печати).
17. Mitidieri E., Pohozaev S. I. Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on $\mathbb{R}^n$ // J. Evolution Equat. (to appear).
18. Лаптев Г. Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Труды МИАН. 2001. Т. 232. С. 223–235.
19. Лаптев Г. Г. Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 6. С. 107–124.
20. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1996.
21. Hamada T. On the existence and nonexistence of global solutions of semilinear parabolic equations with slowly decaying initial data // Tsukuba J. Math. 1997. V. 21. P. 505–514.
22. Zhang Q. A new critical phenomenon for semilinear parabolic problems // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 219. P. 125–139.