Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Миклюков, Граничные свойства решений уравнений типа минимальных поверхностей, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 10, 71–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:04:15

УДК 517.54+517.947

В. М. Миклюков

Граничные свойства решений уравнений типа минимальных поверхностей

Изучаются обобщенные решения уравнений типа минимальных поверхностей. Устанавливается, что всякое решение имеет на границе не более счетного числа скачков. В частности, всякое решение, определенное во внешности круга, продолжимо по непрерывности всюду на граничную окружность, за возможным исключением некоторого счетного множества точек. Приводится оценка суммы некоторых нелокальных характеристик скачков решения на границе. Доказывается теорема типа теоремы Фату об угловых граничных значениях.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Основные результаты

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и $E \subset D$ – некоторое множество нулевой линейной меры Хаусдорфа.

Пусть

$$A = (A_1(x, \xi), A_2(x, \xi)): (D \setminus E) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

– непрерывная вектор-функция. Предположим, что для всякой точки $x = (x_1, x_2) \in D \setminus E$ и всякого $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ выполнены следующие структурные условия:

$$\nu_1 \frac{|\xi|^2}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \leq \sum_{i=1}^2 \xi_i A_i(x, \xi), \quad (1.1)$$

$$|A(x, \xi)| \leq \nu_2(x), \quad (1.2)$$

где ν_1 – положительная постоянная и $\nu_2(x)$ – положительная непрерывная функция.

Ниже мы будем предполагать, что функция $\nu_2(x)$ подчинена следующему ограничению:

$$\liminf_{\{D_n\}} \int_{\partial D_n} \nu_2(x) |dx| = \nu_2^* < \infty, \quad (1.3)$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям $\{D_n\}$ подобластей области D со спрямляемыми границами, для которых $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D_n} = D$. (Здесь и ниже символом $\overline{H}$ обозначается замыкание множества $H \subset \mathbb{R}^2$ в топологии $\mathbb{R}^2$.)

Множество точек разрыва вектор-функции A имеет нулевую линейную меру Хаусдорфа, и тем самым контурные интегралы в (1.3) существуют.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 10170).

Для произвольной подобласти $\Delta \subset D$ обозначим через $\text{Lip } \Delta$ множество всех функций f , удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x'') - f(x')| \leq C |x'' - x'| \quad \text{для всех } x', x'' \in \Delta$$

с некоторой постоянной $C = C(f, \Delta)$.

Функция f удовлетворяет условию Липшица локально в области D , если $f \in \text{Lip } \Delta$ на всякой ограниченной подобласти $\Delta, \overline{\Delta} \subset D$.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^2 \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla f) = 0. \quad (1.4)$$

В силу некоторых технических соображений удобно использовать следующее определение обобщенного решения уравнений типа минимальных поверхностей. Под *обобщенным решением* уравнения (1.4) будем понимать произвольную локально липшицеву функцию f такую, что для произвольной ограниченной подобласти $\Delta, \overline{\Delta} \subset D$, со спрямляемой границей $\partial\Delta$ и произвольной функции $\varphi \in \text{Lip } \overline{\Delta}$ имеет место соотношение

$$\int_{\Delta} \sum_{i=1}^2 \varphi'_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Delta} \varphi \sum_{i=1}^2 A_i(x, \nabla f) n_i |dx|. \quad (1.5)$$

Здесь и ниже $n = (n_1(x), n_2(x))$ есть единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Delta$.

Предположим, что вектор-функция $A(x, \xi) \in C^1$ и что C^2 -функция f удовлетворяет уравнению (1.4) всюду на D поточечно. По формуле Грина для произвольной ограниченной подобласти $\Delta, \overline{\Delta} \subset D$, со спрямляемой границей и произвольной функции $\varphi \in \text{Lip } \overline{\Delta}$ можем записать

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \varphi \sum_{i=1}^2 \frac{d}{dx_i} A_i(x, \nabla f) dx_1 dx_2 + \int_{\Delta} \sum_{i=1}^2 \varphi'_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx_1 dx_2 \\ = \int_{\partial\Delta} \varphi \sum_{i=1}^2 A_i(x, \nabla f) n_i |dx|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_{\Delta} \sum_{i=1}^2 \varphi'_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Delta} \varphi \sum_{i=1}^2 A_i(x, \nabla f) n_i |dx|$$

для произвольной $\varphi \in \text{Lip } \overline{\Delta}$ и f есть решение (1.4) в обобщенном смысле.

Пусть f — непрерывная функция, определенная в области $D \subset \mathbb{R}^2$, имеющей спрямляемую границу.

Говорят, что функция f имеет *конечное* (или *бесконечное*) *угловое граничное значение* α в точке $a = (a_1, a_2) \in \partial D$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

вдоль любого угла C с вершиной в точке a , лежащего внутри D .

Следующая теорема является версией классической теоремы Фату.

ТЕОРЕМА. *Всякая ограниченная гармоническая в единичном круге B функция f имеет угловые граничные значения почти всюду на окружности ∂B .*

Более того, существуют примеры неограниченных гармонических функций, не имеющих угловых граничных значений на множествах $H \subset \partial B$ линейной меры $\text{mes}_1 H > 0$ [1; гл. 2, § 10].

ЗАДАЧА (И. С. С. Ниче [2; гл. VII, п. 4]). Справедливы ли утверждения типа теоремы Фату для решений f уравнения минимальных поверхностей

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f'_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = 0? \quad (1.6)$$

Следующий результат в данном направлении был получен автором в [3]:

А) *всякое решение уравнения минимальных поверхностей (1.6) имеет конечные или бесконечные угловые граничные значения почти всюду на ∂B .*

Подчеркнем, что никаких дополнительных ограничений на решение не предполагается.

Вместе с тем необходимо заметить, что поведение решений уравнения (1.6) зависит от специфики строения области, в которой эти решения определены. А именно для решений, определенных во внешности круга B , имеет место [3]

В) *всякое решение уравнения минимальных поверхностей (1.6), определенное на $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}$, продолжимо по непрерывности почти всюду на границу, т.е. почти всюду на окружности ∂B существует конечный предел*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}.$$

В настоящей статье мы доказываем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область с жордановой спрямляемой границей. Всякое обобщенное решение уравнения (1.4) со структурными условиями (1.1)–(1.3) имеет конечные или бесконечные угловые граничные значения почти всюду на ∂D .*

ПРИМЕР 1.1. Решение уравнения (1.6) может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры. В качестве примера рассмотрим поверхность Шерка

$$f(x_1, x_2) = \log \frac{\cos x_2}{\cos x_1},$$

определенную на квадрате $-\pi/2 < x_i < \pi/2$ ($i = 1, 2$). Эта поверхность минимальна, а функция f равна $\pm\infty$ на горизонтальных и вертикальных участках границы квадрата. В вершинах квадрата вдоль его границы функция f имеет скачки.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область с жордановой границей ∂D и $O \in D$ – фиксированная точка. Пусть $U \subset D$ – открытое множество. Мы обозначаем: $[U] = \overline{U} \setminus \partial D$, $\partial' U = [U] \setminus U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть f – непрерывная в области D функция. Будем называть $a \in \partial D$ *точкой квазинепрерывности* f , если существует последовательность подобластей $\{D_k\}_{k=1}^\infty \subset D$ со свойствами:

- (α) каждая из $\partial' D_k$ отделяет¹ a от фиксированной точки O ;
- (β) $\bigcap_k [D_k] = \emptyset$; $\text{diam } \partial' D_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$;
- (γ) $\liminf_{k \rightarrow \infty} \text{osc}(\partial' D_k, f) = 0$, где $\text{osc}(A, f) = \sup_{x \in A} f - \inf_{x \in A} f$ – колебание функции f на множестве A .

Все остальные точки ∂D будем называть *точками скачка* функции f .

Введем следующую нелокальную характеристику граничной точки $a \in \partial D$. Положим

$$\delta(a, f, O) = \inf_{\gamma} \max\{\text{osc}(\gamma, f), \text{length } \gamma\},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным дугам $\gamma \subset D$, $\overline{\gamma} \cap \partial D \neq \emptyset$, разделяющим точки a и O в D .

Ясно, что точка $a \in \partial D$ является точкой квазинепрерывности f тогда и только тогда, когда $\delta(a, f, O) > 0$.

Строение решений уравнения (1.6) в точках скачка исследовалось Ланкастером [4]. Мы докажем, что граничные точки квазинепрерывности решений f уравнения типа минимальной поверхности являются типичными.

Рассмотрим множество $\mathcal{H}$ всех кусочно непрерывных функций $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

- (i) $0 \leq h(t) \leq 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \leq h_0 < \infty$, $h_0 = \text{const}$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, ограниченная простой спрямляемой жордановой кривой ∂D , $O \in D$. Пусть f – произвольное решение в D уравнения (1.4) со структурными ограничениями (1.1)–(1.3). Тогда для произвольной $h \in \mathcal{H}$ функция

$$w(x) = \int_{-\infty}^{f(x)} h(t) dt$$

квазинепрерывна во всех точках $a \in \partial D$, за исключением разве лишь счетного множества.

Более того, если $a_1, a_2, \dots$ – точки скачка f , то

$$\sum_{i=1}^3 \max\left\{\pi - \frac{K^2}{\pi \delta^2(a_i, w, O)}, 0\right\} + 2 \sum_{i=4}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{K^2}{\delta^2(a_i, w, O)}\right\}\right) \leq \pi, \quad (1.7)$$

где

$$K = 2\sqrt{\pi}(\nu h_0 + 2 \text{area } D)^{1/2}, \quad \nu = \frac{\nu_2^*}{\nu_1}.$$

¹ Дуга $\gamma \subset D$ отделяет точку $a \in D$ от точки $b \in D$, если $\overline{\gamma} \cap \partial D \neq \emptyset$ и для всякого пути $l \subset D$, соединяющего в D точки a и b , выполнено $l \cap \gamma \neq \emptyset$.

ПРИМЕР 1.2. Предположим, что $|f| < 1$ всюду в D . Выберем

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [-1, 1], \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

Тогда

$$w(x) = \int_{-\infty}^{f(x)} h(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ f(x) + 1 & \text{при } -1 < x < 1, \\ 2 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Точки квазинепрерывности функции $f(x) + 1$ суть точки квазинепрерывности $f(x)$, при этом

$$\delta(a_k, w, O) = \delta(a_k, f, O) \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots$$

ПРИМЕР 1.3. В общем случае неограниченной функции $f(x)$ можем положить

$$h(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Тогда

$$w(x) = \int_{-\infty}^{f(x)} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} f(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Здесь теорема 1.2 гарантирует квазинепрерывность функции $\operatorname{arctg} f(x)$. Ясно, что в общем случае квазинепрерывность этой функции не влечет квазинепрерывности $f(x)$. Функция $f(x)$ из примера 1.1 не является квазинепрерывной ни в одной граничной точке, однако функция $\operatorname{arctg} f(x)$ квазинепрерывна всюду на границе квадрата, за исключением его вершин.

Из теоремы 1.2 следует

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\mathcal{E} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ – внешность единичной окружности C . Пусть $D \subset \mathcal{E}$ – область и $\Gamma \subset C \cap \partial D$ – некоторая граничная дуга.

Тогда всякое решение f уравнения (1.6) в D продолжимо по непрерывности в любую точку $a \in \Gamma$, исключая, самое большее, счетное множество.

Результаты работы докладывались на семинарах А. А. Гончара (МИРАН им. В. А. Стеклова) и А. Т. Фоменко (МГУ) в ноябре 2000 года. Автор глубоко благодарен руководителям и участникам этих семинаров за внимание.

Автор хотел бы также выразить искреннюю признательность доценту В. А. Клячину, прочитавшему работу в рукописи и сделавшему ряд полезных замечаний.

§ 2. Относительное расстояние

(а) Пусть F – график локально липшицевой в области $D \subset \mathbb{R}^2$ функции $x_3 = f(x_1, x_2)$ и

$$ds_F^2 = (1 + f_{x_1}'^2) dx_1^2 + 2f_{x_1}' f_{x_2}' dx_1 dx_2 + (1 + f_{x_2}'^2) dx_2^2 \quad (2.1)$$

– квадрат длины линейного элемента на F .

Выберем произвольно точку $a \in D$, в которой f имеет полный дифференциал. Функция $f \in \text{Lip } D$, а потому по теореме Радемахера [5; теорема 3.1.6] имеет полный дифференциал почти всюду в D .

Квадратичная форма ds_F^2 положительно определена, и бесконечно малая окружность в метрике ds_F^2 с центром в точке a есть бесконечно малый эллипс в евклидовой метрике. Пусть $\theta(a)$, $0 \leq \theta < \pi$, и $p(a)$, $p \geq 1$, — характеристики этого эллипса, т.е. угол между его наибольшей осью и осью $0x_1$ и отношение его большей оси к меньшей соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$\theta(a) = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{f'_{x_2}(a)}{f'_{x_1}(a)}, \quad p(a) = \sqrt{1 + |\nabla f(a)|^2}.$$

Рассмотрим квазиконформное отображение $u = u(x)$ области D в плоскость переменных $u = (u_1, u_2)$ с характеристиками, почти всюду в D совпадающими с $\theta(x)$ и $p(x)$. Поскольку $\text{ess sup}_D p(x) < \infty$ для произвольной ограниченной подобласти $D', \overline{D'} \subset D$, такое отображение существует и определено с точностью до конформного отображения в u -плоскости (см. [6; теорема 9]).

Мы будем предполагать известными следующие свойства квазиконформного отображения $u: D \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1) Отображение $u = u(x)$ имеет полный дифференциал почти всюду в D и в каждой точке дифференцируемости преобразует бесконечно малый эллипс с характеристиками $\theta(x)$, $p(x)$ в бесконечно малые круги (см. [6; § 1]).

2) Отображение $u = u(x)$ имеет обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева, суммируемые с квадратом локально в D , т.е. принадлежит классу $W_{2,\text{loc}}^1(D)$ (см. [6; § 4]).

3) Обозначим через $G = u(D)$ образ области D при отображении $u = u(x)$, через $x = x(u) = (x_1(u), x_2(u))$ — обратное отображение. Характеристика $p(u)$ обратного отображения $x: G \rightarrow D$ локально ограничена в области G (см. [6; § 1]), и в силу свойства 2) отображение $x = x(u)$ также принадлежит классу $W_{2,\text{loc}}^1(G)$.

Положим $x_3(u) = f(x(u))$. Так как функция f локально липшицева в D , то в силу 3) функция $x_3(u) \in W_{2,\text{loc}}^1(G)$.

Из 2) вытекает, что вектор-функция $\chi(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ также принадлежит классу $W_{2,\text{loc}}^1(G)$. Ясно, что $\chi(u)$ имеет дифференциал почти всюду.

Вектор-функция $\chi: G \rightarrow F$ осуществляет взаимно однозначное отображение области $G = u(D)$ на поверхность F . Пусть $a \in G$ — точка дифференцируемости χ . Обозначим через $j: F \rightarrow D$ проекцию поверхности F на область D . Отображение $\chi: G \rightarrow F$ является композицией отображений j^{-1} и $x(u)$, а потому преобразует бесконечно малый круг с центром в точке a сначала в бесконечно малый эллипс в x -плоскости (по свойству 1)) и далее в бесконечно малый круг на поверхности F (по определению характеристики $p(x)$).

Тем самым, $\chi: G \rightarrow F$ конформно почти всюду и почти всюду на G обладает следующими свойствами:

$$\left| \frac{\partial \chi}{\partial u_1} \right| = \left| \frac{\partial \chi}{\partial u_2} \right|, \quad \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u_1}, \frac{\partial \chi}{\partial u_2} \right\rangle = 0. \quad (2.2)$$

Здесь символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Переменные (u_1, u_2) называются *изотермическими координатами* на F .

(б) Пусть $F \subset \mathbb{R}^3$ – график локально липшицевой функции f , определенной на односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, и $O' \in F$ – фиксированная точка.

Для произвольной пары точек $p, q \in F \setminus \{O'\}$ полагаем

$$\rho(p, q; O', F) = \min\{\rho_1(p, q), \rho_2(p, q)\}, \quad (2.3)$$

где ρ_1 есть точная нижняя грань диаметров дуг $\gamma \subset F \setminus \{O'\}$, соединяющих точки p, q , и ρ_2 – точная нижняя грань диаметров дуг $\gamma \subset F \setminus \{O'\}$, $\overline{\gamma} \cap \partial F \neq \emptyset$, отделяющих p, q от O' на F .

Величина ρ удовлетворяет аксиомам метрики (см. лемму 2.4) и называется *относительным расстоянием* между точками $p, q \in F \setminus \{O'\}$. Относительное расстояние между точкой $p \in F \setminus \{O'\}$ и точкой O' есть

$$\rho(p, O'; O', F) = \lim_{q \rightarrow O'} \rho(p, q; O', F).$$

Символом $\partial_\rho F$ далее обозначаем *границу* F в метрике ρ , т.е. множество всевозможных последовательностей $\{p_n\}$ точек на F , фундаментальных по относительной метрике ρ и не имеющих точек накопления на F .

Если F – график постоянной функции $x_3 \equiv \text{const}$ над областью $D \subset \mathbb{R}^2$, то мы идентифицируем F с D и относительная граница $\partial_\rho F$ совпадает с границей Каратеодори области D .

Для плоских областей определение и свойства относительного расстояния можно найти в [7] и модифицированный вариант – в [8; часть I, § 4].

(с) Предположим, что область D односвязна, а ее образ $G = u(D)$ отличен от целой плоскости $\mathbb{R}^2$. Так как соотношения (2.2) инвариантны относительно конформных преобразований в плоскости переменной $u = (u_1, u_2)$, то, не уменьшая общности, можем считать область G ограниченной.

Рассмотрим описанное выше конформное отображение

$$\chi(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u)): G \rightarrow F, \quad u = (u_1, u_2). \quad (2.4)$$

Положим $O'' = \chi^{-1}(O')$ и обозначим через $r(G)$ евклидово расстояние от O'' до ∂G .

ТЕОРЕМА 2.1. *Если локально липшицева функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна в смысле Лебега² и площадь $\text{area } F < \infty$, то для произвольной пары точек $p, q \in G$, удовлетворяющих условию*

$$\rho(p, q; O'', G) < \min\left\{1, \frac{1}{16} r^4(G)\right\}, \quad (2.5)$$

справедлива следующая оценка относительного расстояния

$$\rho(\chi(p), \chi(q); O', F) \leq K_1 \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p, q; O'', G)}. \quad (2.6)$$

²Функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *монотонной в смысле Лебега*, если для произвольной ограниченной подобласти $\Delta, \overline{\Delta} \subset D$, выполнено $\text{osc}(\Delta, f) = \text{osc}(\partial\Delta, f)$.

Здесь

$$K_1 = 2\sqrt{\pi \operatorname{area} F}.$$

Соответствующий результат для квазиконформных отображений плоских областей можно найти в [8; часть I, § 8].

(d) Оценка (2.6) влечет, что всякая фундаментальная по относительному расстоянию $\rho(p, q; O'', G)$ последовательность точек $\{a_n\} \subset G$ преобразуется в фундаментальную в метрике $\rho(\chi(p), \chi(q); O', F)$ последовательность $\{\chi(a_n)\} \subset F$. Тем самым, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.2. В условиях теоремы 2.1 конформное отображение (2.4) продолжимо до непрерывного отображения “относительной границы” $\partial_\rho G$ на “относительную границу” $\partial_\rho F$.

(e) Отметим следующее важное свойство проекции $j: F \rightarrow D$.

ЛЕММА 2.3. Пусть F – график локально липшицевой функции, определенной на односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, и проекция $j(O') = O$.

Тогда для произвольной пары точек $p, q \in F$ выполнено

$$\rho(j(p), j(q); O, D) \leq \rho(p, q; O', F). \quad (2.7)$$

Для доказательства достаточно заметить, что проекция $j: F \rightarrow D$ не увеличивает диаметров кривых.

(f) Покажем, что функция ρ удовлетворяет аксиомам метрики. Именно имеет место следующий результат

ЛЕММА 2.4. Относительное расстояние ρ обладает свойствами:

$$\begin{aligned} \rho(p, q; O', F) &= \rho(q, p; O', F) \quad \text{для любых } p, q \in F, \\ \rho(p, q; O', F) &= 0 \quad \text{тогда и только тогда, когда } p = q, \\ \rho(p, q; O', F) &\leq \rho(p, r; O', F) + \rho(r, q; O', F) \quad \text{для любых } p, q, r \in F. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать это утверждение в предположении, что точки p, q, r принадлежат $F \setminus \{O'\}$. Первые два свойства тривиальны. Докажем последнее свойство. Рассмотрим три случая.

В первом случае мы предположим, что

$$\rho(p, r; O', F) = \rho_1(p, r), \quad \rho(r, q; O', F) = \rho_1(r, q).$$

Выберем дуги γ_1, γ_2 , связывающие точки p, r соответственно с точками r, q , так, чтобы

$$\operatorname{diam} \gamma_1 \leq \rho_1(p, r) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \operatorname{diam} \gamma_2 \leq \rho_1(r, q) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как дуга $\gamma_1 \cup \gamma_2$ соединяет p и q , мы имеем

$$\rho(p, q) \leq \operatorname{diam} \gamma_1 + \operatorname{diam} \gamma_2 \leq \rho_1(p, r) + \rho_1(r, q) + \varepsilon.$$

В силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$ получаем

$$\rho(p, q; O', F) \leq \rho_1(p, q) \leq \rho_1(p, r) + \rho_1(r, q) \leq \rho(p, r; O', F) + \rho(r, q; O', F).$$

Во втором случае пусть

$$\rho(p, r; O', F) = \rho_2(p, r), \quad \rho(r, q; O', F) = \rho_2(r, q).$$

Выберем дуги γ_1, γ_2 , отделяющие соответственно p, r и r, q от O' на F , так, чтобы для наперед заданного $\varepsilon > 0$

$$\text{diam } \gamma_1 \leq \rho_2(p, r) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{diam } \gamma_2 \leq \rho_2(r, q) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поверхность F односвязна, и если дуга $\gamma_1 \cup \gamma_2$ связна, то она отделяет точки p и q от O' . Следовательно,

$$\rho_2(p, q) \leq \text{diam } \gamma_1 + \text{diam } \gamma_2 \leq \rho_2(p, r) + \rho_2(r, q) + \varepsilon.$$

Если множество $\gamma_1 \cup \gamma_2$ не связно, то хотя бы одна из дуг γ_1 или γ_2 отделяет p и q от O' . Тогда имеем

$$\rho_2(p, q) \leq \max\{\text{diam } \gamma_1, \text{diam } \gamma_2\} \leq \rho_2(p, r) + \rho_2(r, q) + \varepsilon.$$

В обеих ситуациях, учитывая произвол в выборе $\varepsilon > 0$, можем заключить, что

$$\rho(p, q; O', F) \leq \rho_2(p, q) \leq \rho(p, r; O', F) + \rho(r, q; O', F).$$

В третьем, последнем случае мы полагаем

$$\rho(p, r; O', F) = \rho_1(p, r), \quad \rho(r, q; O', F) = \rho_2(r, q).$$

Выберем дугу γ_1 , соединяющую точки p и r на F , так, что

$$\text{diam } \gamma_1 \leq \rho_1(p, r) + \frac{\varepsilon}{2},$$

а также некоторую дугу γ_2 , отделяющую точки r и q от O' на F и обладающую свойством

$$\text{diam } \gamma_2 \leq \rho_2(r, q) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если γ_2 отделяет p от O' , то

$$\rho(p, q; O', F) \leq \rho_2(p, q) \leq \text{diam } \gamma_2 \leq \rho_2(r, q) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \rho(p, r; O', F) + \rho(r, q; O', F) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если γ_2 не отделяет p от O' , то $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. Дуга $\gamma_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2$ связна и отделяет точки r и q от O' , а потому

$$\begin{aligned} \rho(p, q; O', F) &\leq \text{diam } \gamma_3 \leq \text{diam } \gamma_1 + \text{diam } \gamma_2 \\ &\leq \rho_1(p, r) + \rho_2(r, q) + \varepsilon \leq \rho(p, r; O', F) + \rho(r, q; O', F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Произвол в выборе $\varepsilon > 0$ влечет справедливость неравенства треугольника в третьем случае, что завершает доказательство леммы.

(g) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Фиксируем произвольно точки $p, q \in G \setminus \{O''\}$ со свойством (2.5). Пусть $\gamma \subset G \setminus \{O''\}$ – дуга, для которой

$$\text{diam } \gamma < \rho(p, q; O'', G) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Выберем точку $\xi \in \gamma$ и рассмотрим семейство окружностей

$$L_\tau = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - \xi| = \tau\}, \quad r < \tau < R, \quad (2.8)$$

где

$$r = \rho(p, q; O'', G) + \varepsilon, \quad R = \sqrt{\rho(p, q; O'', G)}.$$

В силу (2.5) имеем

$$\rho(p, q; O'', G) < \sqrt{\rho(p, q; O'', G)} < 1,$$

и потому данное семейство непусто для достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Каждая окружность L_τ содержит внутри дугу γ .

Далее рассмотрим два случая.

Первый случай. Предположим, что

$$\text{dist}(\xi, \partial G) \leq \sqrt{\text{diam } \gamma}, \quad (2.9)$$

где $\text{dist}(a, B)$ – евклидово расстояние от точки a до множества B .

Тогда имеем

$$\sqrt{\rho(p, q; O'', G)} < |\xi - O''|, \quad (2.10)$$

т.е. каждая из L_τ отделяет p, q от O'' .

Действительно, предположим противное. Пусть

$$|\xi - O''| \leq \sqrt{\rho(p, q; O'', G)}.$$

Для произвольной точки $x \in \partial G$ такой, что $|x - \xi| = \text{dist}(\xi, \partial G)$, имеем

$$|x - O''| \leq |x - \xi| + |\xi - O''|.$$

Тем самым в силу (2.9)

$$\begin{aligned} r(G) &\leq |x - O''| \leq \sqrt{\text{diam } \gamma} + \sqrt{\rho(p, q; O'', G)} \\ &\leq \sqrt{\rho(p, q; O'', G) + \varepsilon} + \sqrt{\rho(p, q; O'', G)}. \end{aligned}$$

Соотношение (2.8) между r и R теперь влечет

$$r(G) \leq \rho^{1/4}(p, q; O'', G) + \rho^{1/2}(p, q; O'', G) \leq 2 \rho^{1/4}(p, q; O'', G),$$

или

$$\frac{1}{16} r^4(G) \leq \rho(p, q; O'', G).$$

Это противоречит (2.5), и неравенство (2.10) действительно справедливо.

Для произвольного τ , $r \leq \tau \leq R$, пусть C_τ означает компоненту связности множества $L_\tau \cap G$, отделяющую точки p, q от O'' . Существование такой компоненты связности следует из (2.10).

Пусть $\Delta_{r,R}$ — подобласть области G , содержащаяся между C_τ и C_R .

Отображение $\chi(u): G \rightarrow \mathbb{R}^3$ принадлежит классу $W_{2,\text{loc}}^1(G)$ и потому абсолютно непрерывно на почти всех дугах C_τ , $r < \tau < R$.

Пусть $u(s)$, $0 \leq s \leq l(C_\tau)$, — естественная параметризация дуги C_τ (здесь $l(C_\tau)$ — длина C_τ). Тогда

$$l(\chi(C_\tau)) = \int_{C_\tau} \left| \frac{d\chi}{ds}(u(s)) \right| ds \leq \int_{C_\tau} \sqrt{\sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2} |du|.$$

Несложно показать, что функция $l(\chi(C_\tau))$ измерима по Лебегу как функция параметра $\tau \in [r, R]$. В силу интегрального неравенства Коши находим

$$l^2(\chi(C_\tau)) \leq l(C_\tau) \int_{C_\tau} \sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2 |du|$$

и далее

$$\int_r^R \frac{l^2(\chi(C_\tau))}{\tau} d\tau \leq 2\pi \int_{\Delta_{r,R}} \sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2 du_1 du_2. \quad (2.11)$$

Рассмотрим конформное отображение (2.4). На основании (2.2) в каждой точке дифференцируемости отображения $\chi: G \rightarrow F$ имеем

$$\sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2 = \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial \chi}{\partial u_k} \right|^2 = 2 \left| \frac{\partial \chi}{\partial u_1} \right|^2 = 2 \sqrt{\left| \frac{\partial \chi}{\partial u_1} \right|^2 \left| \frac{\partial \chi}{\partial u_2} \right|^2}.$$

Таким образом, мы получаем

$$\sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2 = 2 I(\chi, u) \quad \text{почти всюду на } G, \quad (2.12)$$

где

$$I(\chi, u) = \sqrt{\left| \frac{\partial \chi}{\partial u_1} \right|^2 \left| \frac{\partial \chi}{\partial u_1} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial u_1}, \frac{\partial \chi}{\partial u_1} \right\rangle^2}.$$

Поскольку площадь F ограничена и вектор-функция $\chi: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ принадлежит классу $W_{2,\text{loc}}^1$ в области G , то соотношение (2.12) влечет

$$\int_G \sum_{i=1}^3 |\nabla x_i|^2 du_1 du_2 = 2 \text{area } F < \infty.$$

Поэтому на основании неравенства (2.11) приходим к оценке

$$\inf_{r \leq \tau \leq R} l^2(\chi(C_\tau)) \leq 2\pi \log^{-1} \frac{\sqrt{\rho(p, q; O'', G)}}{\rho(p, q; O'', G) + \varepsilon} \int_G \sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2 du_1 du_2. \quad (2.13)$$

Из (2.13), учитывая произвол в выборе $\varepsilon > 0$, выводим

$$\inf_{r \leq \tau \leq R} l(\chi(C_\tau)) \leq \sqrt{4\pi \operatorname{area} F} \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p, q; O'', G)}.$$

Так как каждая из дуг C_τ отделяет точки p, q от O'' в G , то каждая из дуг $\chi(C_\tau)$ отделяет $\chi(p), \chi(q)$ от O' на F . Таким образом, мы получаем

$$\rho_2(\chi(p), \chi(q); O', F) \leq K_1 \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p, q; O'', G)}.$$

Последнее неравенство обеспечивает справедливость (2.6).

Второй случай. Предположим, что $\operatorname{dist}(\xi, \partial G) > \sqrt{\operatorname{diam} \gamma}$. Тогда мы имеем

$$\operatorname{dist}(\xi, \partial G) > \sqrt{\rho(p, q; O'', G)} = R$$

и, следовательно, ни одна из окружностей C_τ семейства (2.8) не пересекает границу ∂G .

Как и выше, устанавливаем оценку (2.13).

Отображение $\chi: G \rightarrow F$ гомеоморфно, а потому каждая из кривых $\chi(C_\tau)$, $r \leq \tau \leq R$, отделяет точки $\chi(p), \chi(q)$ от границы ∂F на F . Функция f монотонна в смысле Лебега, и для любого $\tau \in [r, R]$ выполнено

$$\rho_1(\chi(p), \chi(q); O', F) \leq \operatorname{diam} \chi(C_\tau) \leq l(\chi(C_\tau)).$$

Отсюда в силу (2.13) получаем

$$\rho_1(\chi(p), \chi(q); O', F) \leq K_1 \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p, q; O'', G)},$$

что влечет (2.6). Теорема доказана полностью.

(h) Пусть $x(u) = (x_1(u), x_2(u)): G \rightarrow D$ — отображение, осуществляемое компонентами $x_1(u), x_2(u)$ вектор-функции (2.4).

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Если локально липшицева функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ монотонна в смысле Лебега и $\operatorname{area} F < \infty$, то для произвольной пары точек $p, q \in G$ со свойством (2.5) выполняется*

$$\rho(x(p), x(q); O, D) \leq K_1 \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p, q; O'', G)},$$

где K_1 — постоянная из теоремы 2.1.

Доказательство следует из теоремы 2.1 и леммы 2.3.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

(а) Заметим сначала, что утверждение тривиально, если $f \equiv \text{const}$. Так что мы можем считать $f \not\equiv \text{const}$.

Пусть f – локально липшицево решение уравнения (1.4) со структурными условиями (1.1)–(1.3).

Будем предполагать область D односвязной и ограниченной простой жордановой спрямляемой кривой.

Фиксируем произвольно функцию $h \in \mathcal{H}$. Обозначим через W график функции

$$w(x) = \int_{-\infty}^{f(x)} h(t) dt.$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. В описанных предположениях выполнено

$$\text{area } W \leq h_0 \nu + 2 \text{ area } D. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем последовательность областей D_k , $k = 1, 2, \dots$, так, чтобы

$$\overline{D}_k \subset D_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D.$$

Функция $w(x)$ принадлежит классу $\text{Lip } \overline{D}_k$, $k = 1, 2, \dots$. Выбирая $\varphi = w(x)$ в (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_k} \sum_{i=1}^2 f'_{x_i} A_i(x, \nabla f) h(f(x)) dx_1 dx_2 &= \int_{\partial D_k} w(x) \sum_{i=1}^2 A_i(x, \nabla f) n_i |dx| \\ &\leq \int_{\partial D_k} w(x) |A(x, \nabla f)| |dx|. \end{aligned}$$

Так как $0 < w(x) \leq h_0 < \infty$, то

$$\int_{D_k} \sum_{i=1}^2 f'_{x_i} A_i(x, \nabla f) h(f(x)) dx_1 dx_2 \leq h_0 \int_{\partial D_k} |A(x, \nabla f)| |dx|.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и пользуясь структурными ограничениями (1.1)–(1.3), находим

$$\nu_1 \int_D \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} h(f(x)) dx_1 dx_2 \leq h_0 \nu_2^*. \quad (3.2)$$

Из (3.2) выводим

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} h(f(x)) dx_1 dx_2 \leq h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1} + \int_D \frac{h(f(x))}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx_1 dx_2.$$

Отсюда, вспоминая, что $0 \leq h(f(x)) \leq 1$, приходим к оценке

$$\int_D |\nabla w(x)| dx_1 dx_2 = \int_D |\nabla f(x)| h(f(x)) dx_1 dx_2 \leq h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1} + \text{area } D.$$

Поскольку

$$\sqrt{1 + |\nabla w(x)|^2} < 1 + |\nabla w(x)|,$$

окончательно находим

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla w|^2} dx_1 dx_2 \leq h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1} + 2 \text{ area } D,$$

что эквивалентно (3.1).

(b) Квадрат элемента длины на поверхности W дается выражением

$$ds_W^2 = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(x) dx_i dx_j, \quad g_{ij}(x) = \delta_{ij} + w'_{x_i} w'_{x_j} \quad (i, j = 1, 2),$$

где δ_{ij} ($i, j = 1, 2$) – символ Кронекера.

Пусть $(g^{ij}(x)) = (g_{ij})^{-1}(x)$ – матрица, обратная к матрице (g_{ij}) . Простые вычисления влекут

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{w'_{x_i} w'_{x_j}}{1 + |\nabla w|^2}.$$

Для произвольного $\xi \in \mathbb{R}^2$ полагаем

$$|\xi|_W^2 = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

Легко проверяется, что

$$|\nabla w|_W^2 = \frac{1 + w'^2_{x_2}}{1 + |\nabla w|^2} w'^2_{x_1} - 2 \frac{w'_{x_1} w'_{x_2}}{1 + |\nabla w|^2} w'_{x_1} w'_{x_2} + \frac{1 + w'^2_{x_1}}{1 + |\nabla w|^2} w'^2_{x_2} = \frac{|\nabla w|^2}{1 + |\nabla w|^2}.$$

Поскольку $\nabla w(x) = h(f(x)) \nabla f(x)$, соотношение (3.2) дает

$$\int_D \frac{|\nabla w|^2}{\sqrt{h^2(f) + |\nabla w|^2}} dx_1 dx_2 = \int_D \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} h(f(x)) dx_1 dx_2 \leq h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1}.$$

Отсюда, учитывая, что $h(f(x)) \leq 1$, приходим к неравенству

$$\int_D \frac{|\nabla w|^2}{\sqrt{1 + |\nabla w|^2}} dx_1 dx_2 \leq h_0 \frac{\nu_2^*}{\nu_1},$$

или

$$\int_D |\nabla w|_W^2 \sqrt{1 + |\nabla w|^2} dx_1 dx_2 \leq h_0 \nu. \quad (3.3)$$

(c) Нам потребуется

ЛЕММА 3.2. *Всякое обобщенное решение f уравнения (1.4) со структурными условиями (1.1)–(1.3) является монотонным в смысле Лебега.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим, что $a \in D$ есть, например, точка строгого локального максимума. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ множество $\{x \in D : f(x) > f(a) - \varepsilon\}$ содержит предкомпактную компоненту связности $U \subset D$, $a \in U$.

На границе области U мы имеем $f(x) - f(a) + \varepsilon = 0$. Для почти всех $\varepsilon > 0$ кривые ∂U спрямляемы. Выбирая в (1.5) функцию $\varphi = f(x) - f(a) + \varepsilon$, для почти всех $\varepsilon > 0$ можем записать

$$\int_U \sum_{i=1}^2 f'_{x_i} A_i(x, \nabla f) dx_1 dx_2 = \int_{\partial U} (f(x) - f(a) + \varepsilon) \sum_{i=1}^2 A_i(x, \nabla f) n_i |dx| = 0.$$

Тем самым, из структурного предположения (1.1) вытекает

$$\int_U \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} dx_1 dx_2 = 0,$$

т.е. $\nabla f \equiv 0$ и $f \equiv \text{const}$ в U . Противоречие с предположением, что a — точка локального максимума в строгом смысле.

(d) Как и выше (см. § 2, п. (a)), посредством вспомогательного квазиконформного отображения $u = u(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ вводим изотермические координаты (u_1, u_2) на поверхности W .

Рассмотрим отображение $x = x(u) = (x_1(u), x_2(u))$, обратное к $u = u(x)$, и функцию $x_3(u) = w(x(u))$. Векторнозначная функция $\chi(u) = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ осуществляет взаимно однозначное конформное отображение области $G = u(D)$ на поверхность W .

Покажем, что образом области D в плоскости изотермических координат (u_1, u_2) является область $G \neq \mathbb{R}^2$, т.е. справедлива

ЛЕММА 3.3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область, ограниченная простой жордановой спрямляемой кривой. Если f есть обобщенное решение уравнения (1.4) в D со структурными ограничениями (1.1)–(1.3), то для любой $h \in \mathcal{H}$ график W функции $x_3 = w(x)$ имеет гиперболический конформный тип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы заметим, что по лемме 3.2 функция $w(x)$ монотонна в D , и поскольку отображение $x(u) : D \rightarrow G$ гомеоморфно, функция $w^*(u) = w(x(u))$ также монотонна в G . Так как отображение $x(u)$ квазиконформно и функция f локально липшицева, то $w^* \in W_{2, \text{loc}}^1(G)$.

Предположим, что функция w^* определена на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Зафиксируем произвольно $R > 0$ и $t > 1$. Пусть $B(\tau)$ и $S(\tau)$ — соответственно круг и окружность с центром в точке $u = 0$ и радиусом τ .

Как и соотношение (2.13), устанавливаем

$$\inf_{R \leq \tau \leq tR} \text{osc}(S(\tau), w^*) \leq \left(\frac{2\pi I(R)}{\log t} \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

где

$$I(R) = \int_{|u| < tR} |\nabla w^*|^2 du_1 du_2.$$

Функция w^* монотонна, и потому для любого $t > 1$ выполнено

$$\operatorname{osc}(B(R), w^*) \leq \operatorname{osc}(S(R), w^*) \leq \inf_{R \leq \tau \leq tR} \operatorname{osc}(S(\tau), w^*).$$

Следовательно,

$$\operatorname{osc}(B(R), w^*) \leq \left(\frac{2\pi I(\infty)}{\log t} \right)^{1/2}.$$

Учитывая неравенство (3.3), находим

$$I(\infty) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w^*|^2 du_1 du_2 = \int_D |\nabla w|_W^2 \sqrt{1 + |\nabla w|^2} dx_1 dx_2 \leq h_0 \nu,$$

а потому

$$\operatorname{osc}(B(R), w^*) \leq \left(\frac{2\pi h_0 \nu}{\log t} \right)^{1/2}.$$

Полагая теперь $t \rightarrow \infty$, заключаем, что $w^* \equiv \text{const}$ на $B(R)$. Но $R > 0$ произвольно, а потому $w^* \equiv \text{const}$ во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Отсюда вытекает, что $w \equiv \text{const}$ в D .

Однако если $w \equiv \text{const}$ в области D , то отображение $u = u(x): D \rightarrow \mathbb{R}^2$ есть конформное отображение в евклидовой метрике и образом ограниченной области D не может быть вся плоскость $\mathbb{R}^2$. Противоречие.

(е) Так как односвязная область $G \neq \mathbb{R}^2$, а отображение $u(x): D \rightarrow G$ определено с точностью до конформного преобразования в u -плоскости, мы вправе предполагать, что область G является единичным кругом с центром в точке O'' .

Покажем, что *все точки ∂G суть точки квазинепрерывности w^** .

Фиксируем произвольно точку $a \in \partial G$. Пусть $S(a, \tau)$ – компонента связности множества $\{u \in G : |u - a| = \tau\}$, разделяющая точку $a \in \partial G$ и начало координат O'' , $0 < \tau < 1$.

Как и (3.4), устанавливаем, что для всякого $R \in (0, 1)$ и любого $t \in (0, 1)$ существует $\tau_0 \in (tR, R)$ такое, что

$$\inf_{tR < \tau < R} \operatorname{osc}(S(a, \tau), w^*) \leq \left(\frac{2\pi I}{\log(1/t)} \right)^{1/2},$$

где

$$I = \int_G |\nabla w^*|^2 du_1 du_2.$$

Выбирая теперь $t_n \rightarrow 0$, находим последовательность $\tau_n \rightarrow 0$, вдоль которой

$$\operatorname{osc}(S(a, \tau_n), w^*) \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Это означает, что a есть точка квазинепрерывности функции w^* в точке $a \in \partial G$.

(f) По лемме 3.1

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla w|^2} dx_1 dx_2 < \infty.$$

Пользуясь теоремой 2.1 и леммой 2.3, заключаем, что отображение

$$x(u) = j \circ \chi(u): G \rightarrow D$$

непрерывно вплоть до границы единичного круга ∂G .

Обозначим через $\tilde{x}(u): \overline{G} \rightarrow \overline{D}$, $\tilde{x}(u)|_G = x(u)$, соответствующее отображение замкнутых областей, полученное продолжением по непрерывности на границу ∂G отображения $x(u): G \rightarrow D$.

Согласно следствию 2.5 для любых точек $p, q \in \overline{G}$ таких, что $\rho(p, q; O'', G) < 1/16$, справедлива оценка относительного расстояния

$$\rho(\tilde{x}(p), \tilde{x}(q); O, D) \leq K_1 \log^{-1/2} \frac{1}{\rho(p, q; O'', G)}$$

с постоянной

$$K_1 = 2\sqrt{\pi \text{ area } W}.$$

Согласно лемме 3.1

$$K_1 \leq 2\sqrt{\pi} (\nu h_0 + 2 \text{ area } D)^{1/2} = K.$$

В частности, если точки p и q лежат на граничной окружности и $|p - q| < 1/16$, то $\rho(p, q; O'', G) = |p - q|$. Поэтому найденная оценка принимает вид

$$\rho(\tilde{x}(p), \tilde{x}(q); O, D) \leq K \log^{-1/2} \frac{1}{|p - q|} \quad \text{при } |p - q| < \frac{1}{16}. \quad (3.6)$$

Так как отображение $\tilde{x}(u): \overline{G} \rightarrow \overline{D}$ непрерывно, то прообразом $\tilde{x}^{-1}(a)$ всякой точки $a \in \partial D$ является замкнутое множество на единичной окружности ∂G . При этом для любых двух точек $a \neq b$ на ∂D

$$\tilde{x}^{-1}(a) \cap \tilde{x}^{-1}(b) = \emptyset.$$

Множество $\tilde{x}^{-1}(a)$ связно. Действительно, поскольку граница ∂D является простой жордановой кривой, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ множество $U_\varepsilon = \{x \in D : |x - a| < \varepsilon\}$ связно. Отображение $x(u): G \rightarrow D$ гомеоморфно, а потому прообразы $x^{-1}(U_\varepsilon)$ связны для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно малое число. Тем самым, множество

$$\tilde{x}^{-1}(a) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{U}_\varepsilon$$

также связно.

Итак, для произвольной точки $a \in \partial D$ множество $\tilde{x}^{-1}(a)$ может быть или изолированной точкой, или замкнутой связной дугой.

Поскольку количество попарно непересекающихся дуг на окружности может быть разве лишь счетным, то обратное отображение $\tilde{x}^{-1}(x)$ однозначным образом определено всюду на границе ∂D , исключая, самое большее, некоторое счетное множество $E \subset \partial G$.

(g) Покажем, что *всякая точка* $a \in \partial D \setminus E$ *есть точка квазинепрерывности функции* $w(x)$.

Пусть $b = \tilde{x}^{-1}(a)$ — прообраз точки $a \in \partial D \setminus E$. Согласно (3.5) существует последовательность подобластей $\{G_n\}$, $\partial' G_n = S(b, \tau_n)$, со свойствами:

- 1) каждая из дуг $\partial' G_n$ отделяет точку b от начала координат O ;
- 2) $\text{diam } \partial' G_n \rightarrow 0$ и $\text{osc}(\partial' G_n, w^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- 3) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [G_n] = \emptyset$.

Положим $D_n = x(G_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Так как отображение $x(u): G \rightarrow D$ гомеоморфно, то каждая из дуг $\partial D_n = x(S(b, \tau_n))$ отделяет точку $a \in \partial D$ от O .

Отображение $\tilde{x}(u): \overline{G} \rightarrow \overline{D}$ непрерывно и потому $\text{diam } \partial' D_n \rightarrow 0$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [D_n] = \emptyset$.

Наконец, $\text{osc}(\partial' D_n, w) = \text{osc}(S(b, \tau_n), w^*)$, а потому $\text{osc}(\partial' D_n, w) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тем самым, точка $a \in \partial D \setminus E$ обладает всеми свойствами, определяющими точки квазинепрерывности функции $w(x)$.

(h) Зададим произвольно точку скачка $a \in E$. Ее прообраз $\tilde{x}^{-1}(a)$ есть некоторая дуга β окружности $|u| = 1$. Оценим длину $l(\beta)$.

Пусть $\xi \in \beta$ — середина дуги. Легко вычисляется, что расстояние от ξ до концов дуги есть

$$r = 2 \sin \frac{l(\beta)}{4}.$$

Предположим, что $r < 1$, т.е. $l(\beta) < \frac{2}{3}\pi$. Рассмотрим семейство окружностей $\{S(\xi, \tau)\}$ с центром в точке ξ и радиусами τ , $r < \tau < 1$. Положим $C_\tau = G \cap S(\xi, \tau)$.

На основании неравенства (2.11) имеем

$$\int_r^1 \frac{l^2(\chi(C_\tau))}{\tau} d\tau \leq 2\pi \int_{\Delta_{r,1}} \sum_{i=1}^3 |\nabla x_i(u)|^2 du_1 du_2.$$

Заметим теперь, что при всяком $\tau \in [r, 1]$ выполнено

$$l(\chi(C_\tau)) \geq \max\{\text{osc}(x(C_\tau), w), \text{length } x(C_\tau)\} \geq \delta(a, w, O),$$

а потому

$$\delta^2(a, w, O) \leq 4\pi \log^{-1} \left(\frac{1}{r} \right) \text{area } W.$$

Тем самым, учитывая оценку (3.1), приходим к неравенству

$$\delta^2(a, w, O) \leq \frac{K^2}{\log(1/r)},$$

где K — постоянная из теоремы 1.2.

Отсюда

$$r = 2 \sin \frac{l(\beta)}{4} \geq \exp \left\{ -\frac{K^2}{\delta^2(a, w, O)} \right\}$$

и мы приходим к следующей оценке величины $l(\beta)$ для “малых” $\delta(a, w, O)$:

$$l(\beta) \geq 4 \arcsin \left(\frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{K^2}{\delta^2(a, w, O)} \right\} \right) \quad \text{при } l(\beta) < \frac{2}{3}\pi. \quad (3.7)$$

(i) Приступим к оценке величины $l(\beta)$ для “больших” $\delta(a, w, O)$.

Пусть $a \in \partial D \cap E$ – точка скачка, в которой $\frac{2}{3}\pi \leq l(\beta) \leq 2\pi$. Не ограничивая общности, можем считать, что дуга $\beta = \tilde{x}^{-1}(a)$ описывается неравенствами

$$\beta = \left\{ u = (u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 = 1, -\frac{l(\beta)}{2} \leq \arctg \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{l(\beta)}{2} \right\}.$$

Зададим отрезок

$$\gamma = \{u = (u_1, u_2) : 0 \leq u_1 \leq 1, u_2 = 0\}$$

и обозначим через p_1 и p_2 граничные точки единичного круга с разрезом γ , лежащие на пересечении окружности $|u| = 1$ с верхним и нижним краями разреза γ соответственно.

Пусть $T: G \rightarrow V$ – конформное отображение круга $|u| < 1$ с разрезом γ на полукруг $V = \{v = (v_1, v_2) : v_1^2 + v_2^2 < 1, v_2 > 0\}$ такое, что $T(p_1) = (1, 0)$, $T(p_2) = (-1, 0)$ и $T(0, 0) = (0, 0)$.

При отображении T дуге $\beta \subset \partial G$ соответствует дуга

$$\eta = \left\{ v = (v_1, v_2) : \frac{l(\beta)}{4} \leq \arctg \frac{v_2}{v_1} \leq \pi - \frac{l(\beta)}{4} \right\}.$$

При всяком $0 < k < \cos \frac{l(\beta)}{4}$ прямолинейный отрезок

$$\zeta(k) = \{v = (v_1, v_2) : -\sqrt{1-k^2} < v_1 < \sqrt{1-k^2}, v_2 = k\}$$

отделяет в области V дугу η от точки $(0, 0)$. Ее образ $\zeta^*(k) = \tilde{x} \circ T^{-1}(\zeta(k))$ есть дуга, разделяющая в D точки a и O . Поэтому при всяком $k \in \left(0, \cos \frac{l(\beta)}{4}\right)$ выполнено

$$l^2(\zeta^*(k)) \leq \left(\int_{\zeta(k)} \left| \frac{\partial \chi^*}{\partial v_1} \right| dv_1 \right)^2 \leq 2\sqrt{1-k^2} \int_{\zeta(k)} \left| \frac{\partial \chi^*}{\partial v_1} \right|^2 dv_1,$$

где $\chi^* = \chi \circ T^{-1}$.

Далее,

$$\int_0^{\cos(l(\beta)/4)} \frac{l^2(\zeta^*(k))}{\sqrt{1-k^2}} dk \leq 2 \int_V \left| \frac{\partial \chi^*}{\partial v_1} \right|^2 dv_1 dv_2 \leq 2 \text{ area } W.$$

Учитывая, что

$$l(\zeta^*(k)) \geq \delta(a, w, O) \quad \text{при всех } k \in \left(0, \cos \frac{l(\beta)}{4}\right),$$

отсюда получаем

$$\delta^2(a, w, O) \int_0^{\cos(l(\beta)/4)} \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} dk \leq 2 \text{ area } W,$$

или

$$\delta^2(a, w, O) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{l(\beta)}{4} \right) \leq \frac{K^2}{2\pi}$$

(K — постоянная из теоремы 1.2).

Тем самым, находим оценку

$$l(\beta) \geq \max \left\{ 2\pi - \frac{2K^2}{\pi\delta^2(a, w, O)}, 0 \right\}. \quad (3.8)$$

(j) Пусть a_k — точки скачка функции $w(x)$ и β_k — соответствующие им замкнутые дуги на окружности $|u| = 1$, $k = 1, 2, \dots$. Мы вправе предполагать, что

$$l(\beta_1) \geq l(\beta_2) \geq \dots \geq l(\beta_k) \geq \dots$$

Так как $\beta_i \cap \beta_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(\beta_k) \leq 2\pi.$$

Начиная по крайней мере с $k = 4$ выполнено $l(\beta_k) < \frac{2}{3}\pi$, и мы можем воспользоваться оценкой (3.7). Мы имеем

$$4 \sum_{k=4}^{\infty} \arcsin \left(\frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{K^2}{\delta^2(a, w, O)} \right\} \right) \leq \sum_{k=4}^{\infty} l(\beta_k). \quad (3.9)$$

Для каждой из точек a_1, a_2, a_3 воспользуемся оценкой (3.8). Тогда

$$\sum_{k=1}^3 \max \left\{ 2\pi - \frac{2K^2}{\pi\delta^2(a, w, O)}, 0 \right\} \leq \sum_{k=1}^3 l(\beta_k). \quad (3.10)$$

Объединяя (3.9) и (3.10), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \max \left\{ 2\pi - \frac{2K^2}{\pi\delta^2(a, w, O)}, 0 \right\} + 4 \sum_{k=4}^{\infty} \arcsin \left(\frac{1}{2} \exp \left\{ -\frac{K^2}{\delta^2(a, w, O)} \right\} \right) \\ \leq \sum_{k=1}^3 l(\beta_k) + \sum_{k=4}^{\infty} l(\beta_k) \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Тем самым, теорема 1.2 доказана полностью.

§ 4. Доказательство теоремы 1.1

(а) Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонная в смысле Лебега функция и $a \in \partial D$ — некоторая точка. Будем говорить, что f обладает в точке a свойством Линделёфа, если из существования конечных пределов f вдоль любых двух путей Γ_1 и Γ_2 , ведущих в данную точку, следует существование предела f вдоль любого пути, ведущего в a и лежащего между Γ_1 и Γ_2 .

Доказательство теоремы 1.1 опирается на следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. Если монотонная в смысле Лебега функция квазинепрерывна в некоторой граничной точке, то данная функция обладает также свойством Линделёфа в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку квазинепрерывности $a \in \partial D$ и некоторую последовательность подобластей $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ области D со свойствами (α) , (β) и (γ) определения 1.1.

Пусть Γ_1 и Γ_2 — произвольные пути, ведущие в точку a , вдоль которых f имеет пределы α_1 и α_2 соответственно. Обозначим через U_k подобласть области D_k , заключенную между Γ_1 , Γ_2 , ∂D_k и ∂D_{k+1} . Не ограничивая общности, можем считать, что такая подобласть однозначным образом определена при всяком $k = 1, 2, \dots$.

Мы полагаем

$$\gamma_{1k} = \partial U_k \cap \Gamma_1, \quad \gamma_{2k} = \partial U_k \cap \Gamma_2, \quad \gamma_{3k} = \partial U_k \cap \partial D_k, \quad \gamma_{4k} = \partial U_k \cap \partial D_{k+1},$$

$k = 1, 2, \dots$. Заметим, что поскольку функция f имеет конечные пределы вдоль Γ_1 и Γ_2 , то

$$\text{osc}(\gamma_{ik}, f) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad \text{для любого } i = 1, 2.$$

Кроме того, в силу свойства (γ) определения 1.1 мы имеем

$$\text{osc}(\gamma_{ik}, f) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad \text{для любого } i = 3, 4.$$

Таким образом, учитывая, что

$$\partial U_k = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_{ik},$$

мы можем заключить, что

$$\text{osc}(\partial U_k, f) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Однако функция f монотонна в смысле Лебега, а потому

$$\text{osc}(U_k, f) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Это означает, что функция f имеет предел вдоль последовательности $\{U_k\}$ и, в частности, $\alpha_1 = \alpha_2$. Тем самым, f обладает свойством Линделёфа в точке a .

(b) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть f – произвольное решение уравнения (1.4) со структурными ограничениями (1.1)–(1.3) в области D . Положим $\Phi(x) = \operatorname{arctg} f(x)$.

Выберем $h(t)$ как в примере 1.3. В силу оценки (3.1) имеем

$$\int_D |\nabla \Phi(x)| dx_1 dx_2 < \infty.$$

Обозначим через D_c пересечение D с прямой линией $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = c\}$, а через Γ_c – пересечение ∂D с той же самой прямой. Пользуясь теоремой Фубини, заключаем, что для почти всех c , принадлежащих проекции D на ось переменной x_2 , справедливо следующее соотношение

$$\int_{D_c} |\nabla \Phi(c, x_2)| dx_2 < \infty.$$

Отсюда для любой пары точек $(c, x'_2), (c, x''_2)$, принадлежащих одной и той же компоненте связности множества D_c , получаем

$$|\Phi(c, x''_2) - \Phi(c, x'_2)| \leq \int_{x'_2}^{x''_2} |\nabla \Phi(c, x_2)| dx_2 \quad (x'_2 < x''_2).$$

Так что $\Phi(c, x_2)$ равномерно непрерывна на каждой компоненте связности множества D_c и, следовательно, в каждой точке $a \in \Gamma_c$ имеет предел вдоль D_c .

Будем поворачивать систему координат в (x_1, x_2) -плоскости на угол $\alpha \in F$, где F есть счетное всюду плотное на $(0, 2\pi)$ множество, и рассуждать каждый раз как и выше. Тем самым, почти всякой точки $a \in \partial D$ можно коснуться углом раствора сколь угодно близкого к π и таким, что функция Φ имеет пределы вдоль каждой из сторон этого угла.

Предположим, что точка $a \in \partial D$ – произвольная точка описанного вида. По теореме 1.2 функция $\Phi = \operatorname{arctg} f$ квазинепрерывна всюду на границе ∂D , за возможным исключением некоторого счетного множества точек (см. пример 1.3), и, не ограничивая общности, мы вправе предполагать, что a – точка квазинепрерывности f . По лемме 3.2 функция f (и, следовательно, $\Phi = \operatorname{arctg} f$) является монотонной в смысле Лебега. Тем самым, согласно лемме 4.1 данная функция обладает свойством Линделёфа в a .

Выберем произвольно угол, вдоль которого Φ имеет пределы. Тогда эти пределы равны некоторому числу α , $|\alpha| \leq \pi/2$, и постоянная α есть также и предел функции Φ вдоль угловой области. Но раствор этого угла может быть выбран сколь угодно близким к π , а потому Φ имеет угловое граничное значение α .

Отсюда функция $f = \operatorname{tg} \Phi$ имеет конечное или бесконечное угловое граничное значение $\operatorname{tg} \alpha$ в этой точке.

§ 5. Доказательство теоремы 1.3

(а) Нам будет нужен один специальный случай леммы Финна [9]. В форме, необходимой ниже, это утверждение содержится в [10; лемма 10.2].

ЛЕММА 5.1. Пусть Δ — область, расположенная в кольце $1 < |x| < b$, и γ — множество граничных точек области Δ , не лежащих на единичной окружности. Пусть f — решение уравнения (1.6) в Δ такое, что для всех точек $x \in \gamma$ выполнено

$$m \leq f(x) \leq M,$$

где m и M — некоторые постоянные.

Тогда всюду в области Δ справедливо неравенство

$$m - \operatorname{arccosh} b \leq f(x) \leq M + \operatorname{arccosh} b. \quad (5.1)$$

(б) ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Функция f не может обращаться тождественно в $\pm\infty$ ни на какой дуге $\Gamma_1 \subset \Gamma$ (см. [10; §10]). Поэтому существует всюду плотное множество на Γ , каждой точки которого можно коснуться изнутри области D дугой, вдоль которой f ограничена. Пользуясь леммой 5.1, отсюда заключаем, что на любой строго внутренней поддуге $\Gamma_1 \subset \Gamma$ предельные значения f ограничены. Тем самым, утверждение достаточно доказать в случае, когда область D односвязна и ограничена простой жордановой спрямляемой кривой, а функция f ограничена в D .

Как показано в примере 1.2, всюду на границе ∂D , за возможным исключением некоторого счетного множества, функция f квазинепрерывна.

Фиксируем произвольно точку $a \in \partial D$ квазинепрерывности f и некоторую внутреннюю точку $O \in D$. Существует последовательность $\{\gamma_k\}$, $\gamma_k \subset D$, $k = 1, 2, \dots$, дуг с концами на Γ , отделяющих точку a от O и таких, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{osc}(\gamma_k, f) = 0. \quad (5.2)$$

Обозначим через D_k подобласть области D , отделяемую дугой γ_k от точки O . Неравенство (5.1) влечет

$$\operatorname{osc}(D_k, f) \leq \operatorname{osc}(\gamma_k, f) + 2 \operatorname{arccosh}(1 + \operatorname{diam} \gamma_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поэтому на основании (5.2) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{osc}(D_k, f) = 0$$

и функция f продолжима по непрерывности в точку квазинепрерывности $a \in \Gamma$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971.
2. Ниче И. С. С. О новых результатах в теории минимальных поверхностей // Математика. 1967. Т. 11. №3. С. 37–100.

3. Миклюков В. М. Две теоремы о граничных свойствах минимальных поверхностей в непараметрической форме // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 4. С. 551–556.
4. Lancaster K. Nonparametric minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ whose boundaries have a jump discontinuity // Internat. J. Math. Math. Sci. 1988. V. 11. № 4. P. 651–656.
5. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
6. Белинский П. П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
7. Лаврентьев М. А. О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях // Докл. АН СССР. 1936. Т. 4. С. 207–210.
8. Суворов Г. Д. Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965.
9. Finn R. Remarks relevant to minimal surfaces, and to surfaces of prescribed mean curvature // J. Anal. Math. 1965. V. 14. P. 139–160.
10. Оссерман Р. Минимальные поверхности // УМН. 1967. Т. 22. № 4. С. 55–135.

Волгоград
E-mail: miklyuk@vlink.ru

Поступила в редакцию
12.03.2001