Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Соболев, Об одной серии бирационально жестких многообразий с пучком гиперповерхностей Фано, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 10, 123–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 09:28:35

УДК 512.6

И. В. Соболев

Об одной серии бирационально жестких многообразий с пучком гиперповерхностей Фано

В работе доказывается, что общий дивизор бистепени $(2, M)$ в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$ при $M \geq 4$ является бирационально жестким многообразием и группа его бирациональных автоморфизмов состоит из двух элементов.

Библиография: 11 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе исследуются бирациональные свойства многообразия V , которое задается в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$ уравнением

$$A(x_0, \dots, x_M)u^2 + B(x_0, \dots, x_M)uv + C(x_0, \dots, x_M)v^2 = 0,$$

где A, B, C — однородные многочлены степени $M \geq 4$.

Геометрия многообразия V представляется интересной в силу нескольких причин. Многие важные результаты, относящиеся к проблеме рациональности многомерных алгебраических многообразий, были получены с помощью метода максимальных особенностей, созданного В. А. Исковских и Ю. И. Маниным (см. [1]) и усовершенствованного А. В. Пухликовым. Нерациональность многообразий, к которым применяется этот метод, является следствием их бирациональной (сверх)жесткости. В работах [2], [3] доказано, что при $m \geq 3$ и $M \geq 4$ общее многообразие V_m , которое является дивизором бистепени (m, M) в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$, бирационально сверхжестко и обладает единственной структурой Фано-расслоения. С другой стороны, V_1 рационально при всех M . Поэтому на примере многообразия $V = V_2$ можно проследить, как происходит переход от сверхжесткости к рациональности. Отметим, что нерациональность многообразия V_2 при $M = 3$ доказана в работе [4] другим методом.

В настоящее время очень важным является также вопрос о границах применимости метода максимальных особенностей. В серии работ [2], [3], [5] установлена бирациональная жесткость некоторых классов Фано-расслоений, удовлетворяющих так называемому K^2 -условию. Для определения наибольшей возможной области применения метода максимальных особенностей полезно рассматривать примеры многообразий, для которых это условие не выполнено. Такие примеры исследуются в работах [6], [7]. Многообразие V доставляет еще один пример подобного рода.

Автор благодарит А. В. Пухликова за постановку и обсуждение проблемы.

§ 2. Формулировка результата

Прежде чем сформулировать наш основной результат, дадим некоторые определения и напомним основные понятия метода максимальных особенностей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01132) и фонда INTAS-OPEN (грант № 97/2072).

Фиксируем отображения $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\sigma: V \rightarrow \mathbb{P}^M$, которые являются ограничениями проекций $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$ на первый и второй множители соответственно. Проекция π задает структуру расслоения Фано на V .

Пусть F — гиперповерхность степени M в $\mathbb{P}^M$. Пусть $p \in F$ — произвольная точка и в аффинной системе координат с центром в p уравнение F имеет вид $q_1 + \dots + q_M = 0$, где q_i — однородный многочлен степени i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гладкую точку $p \in F$ назовем *регулярной*, если последовательность $(q_1, \dots, q_{M-1})$ регулярна. Будем говорить, что особая точка $p \in F$ *регулярна*, если последовательность $(q_2, \dots, q_M)$ регулярна, квадрика в $\mathbb{P}^{M-1}$, заданная уравнением $q_2 = 0$, является гладкой и система уравнений $q_2 = \dots = q_M = 0$ определяет в $\mathbb{P}^{M-1}$ ровно $M!$ различных точек, каждые M из которых линейно независимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многообразие V будем называть *регулярным*, если

- 1) для любого $t \in \mathbb{P}^1$ гиперповерхность $\pi^{-1}(t)$ является $\mathbb{Q}$ -факториальным многообразием, каждая точка которого регулярна в смысле определения 1,
- 2) многообразие $W \subset \mathbb{P}^M$, заданное уравнениями $A = B = C = 0$, является гладким неприводимым многообразием размерности $M - 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Общее многообразие V является регулярным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 2), очевидно, выполняется для общего V . С помощью счета констант в работе [3] доказано, что условие 1) тоже выполнено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Порогом* канонического присоединения дивизора D на Фано-расслоении $\rho: V \rightarrow S$ называется число

$$c(D, V) = \sup \left\{ \frac{b}{a} : a, b \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}, |aD + bK_V| \neq \emptyset \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Фано-расслоение $\rho: V \rightarrow S$ называется *бirationально жестким*, если для любого Фано-расслоения $\rho': V' \rightarrow S'$, $\dim V' = \dim V$, бирационального отображения $\chi: V \dashrightarrow V'$ и линейной системы $|D'|$ на V' , свободной в коразмерности 1, существует бирациональный автоморфизм χ' многообразия V такой, что $c(D, V) \leq c(D', V')$, где $|D| = (\chi \circ \chi')_*^{-1} |D'|$.

Многообразие V имеет вторую структуру Фано-расслоения. Рассмотрим отображение $\tau: V \dashrightarrow V$, которое переставляет точки в слоях σ . Оно определено вне подмножества $\sigma^{-1}(W)$ и является бирациональной инволюцией. Вторая структура получается действием τ на первую.

Мы докажем следующий результат:

ТЕОРЕМА. *Регулярное многообразие V бирационально жестко при всех $M \geq 4$. Группа $\text{Bir } V$ для общего V изоморфна $\mathbb{Z}_2$ и порождается τ .*

СЛЕДСТВИЕ. 1) *Многообразие V обладает лишь двумя структурами Фано-расслоения; V не имеет структур расслоения на многообразия Фано, размерность которых меньше $M - 1$.*

2) *Многообразие V не рационально.*

§ 3. Максимальные особенности

Пусть теперь $\rho: V' \rightarrow S$ — некоторое Фано-расслоение, $|D'|$ — линейная система на V' и $\chi: V \dashrightarrow V'$ — бирациональное отображение, для которого $c(D, V) > c(D', V')$. Пусть $|D| = \chi_*^{-1}(|D'|)$. Группа $\text{Pic } V$ порождается каноническим классом K_V и классом F слоя проекции π , поэтому $D \sim -nK_V + lF$, где $n \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Дискретное нормирование ν поля рациональных функций многообразия V называется *максимальной особенностью* бирационального отображения χ , если выполняется неравенство Нётера–Фано–Исковских $e(\nu) = \nu(|\chi|) - nK(\nu, V) > 0$, где $K(\nu, V)$ – каноническая кратность ν по отношению к V (см. [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если для бирационального отображения χ верны неравенства $c(D, V) > c(D', V')$, $l \geq 0$, то центры всех максимальных особенностей χ лежат в слоях π и существует конечное множество максимальных особенностей $\mathcal{M}$ такое, что выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \max_{\{\nu \in \mathcal{M} : \text{centre}(\nu) \subset F_t\}} \frac{e(\nu)}{\nu(F_t)} > l,$$

где $F_t = \pi^{-1}(t)$.

Доказательство см. в [3].

Пусть $D_i \in |D|$ – общие дивизоры и $Z = (D_1 \circ D_2)$ – цикл коразмерности 2, $Z = Z^v + Z^h$, где Z^h накрывает $\mathbb{P}^1$, а компоненты Z^v лежат в слоях проекции π :

$$Z = Z^h + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v, \quad \text{supp } Z_t^v \subset F_t. \quad (1)$$

Под степенью цикла Z_t^v мы понимаем его степень как подмногообразия проективного пространства. Степенью цикла Z^h будем называть степень его пересечения с общим слоем π . Степень цикла Y обозначим через $\deg Y$.

Группа $\text{Pic } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$ порождена классом тавтологического пучка H и классом G слоя проекции на $\mathbb{P}^1$. Пусть $H_V = H|_V$, $F = G|_V$. Имеем $K_V = -H_V$, $H_V^M = 2$, $H_V^{M-1}F = M$, $F^2 = 0$. Из равенства (1) получим

$$(Z^h \cdot H_V^{M-2}) + \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v = 2n^2 + 2Mnl. \quad (2)$$

Так как отображение τ определено вне подмножества коразмерности 2, то оно действует на группе $\text{Pic } V$. Имеем

$$\tau^* K_V = K_V, \quad \tau^* F = \sigma^{-1}(\sigma(F)) - F = MH_V - F = -MK_V - F. \quad (3)$$

Из предложения 2 и равенств (2), (3) получаем, что одно из отображений χ , $\chi \circ \tau$ имеет максимальную особенность ν такую, что $\text{centre}(\nu) \subset F = F_t$ и

$$\deg Z_t^v < \frac{2Mne(\nu)}{\nu(F_t)} + 2n^2 - (Z^h \cdot H_V^{M-2}).$$

Бирациональная жесткость V будет доказана, если мы приведем к противоречию предположение о существовании такой максимальной особенности. Это будет сделано в § 5. В § 4 получаются необходимые для дальнейшего оценки кратностей циклов коразмерности 2 на V .

Пусть теперь χ – бирациональный автоморфизм V . Положим $V' = V$, $|D'| = |F|$. Тогда $c(D', V') = 0$. Если мы докажем, что χ не имеет максимальных особенностей, то из предыдущих рассуждений следует, что либо $c(\chi_*^{-1}(F), V) = 0$, либо $c((\chi \circ \tau)_*^{-1}(F), V) = 0$, т.е. одно из отображений χ , $\chi \circ \tau$ является послынным. Из основного результата работы [9] теперь следует, что группа $\text{Bir } V / \text{Aut } V$ порождается τ . Но для общего многообразия V группа $\text{Aut } V$ тривиальна, и мы получаем второе утверждение теоремы.

§4. Оценки кратностей циклов

Во всех леммах этого раздела используется элементарная теория пересечений (см., например, [10]). Всюду в дальнейшем F будет обозначать слой проекции π . Кратность цикла Z вдоль многообразия Y обозначим через $\text{mult}_Y Z$.

ЛЕММА 1. Пусть p – гладкая точка регулярной гиперповерхности F и $Z \subset F$ – эффективный неприводимый цикл коразмерности 2. Тогда при $M \geq 5$ верно неравенство

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z} \leq \max \left\{ \frac{3}{M}, \frac{8}{3(M-1)} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T_p F$ – касательная гиперплоскость к F в p .

Рассмотрим два случая.

1) Z не содержится в $T_p F \cap F = T$. Тогда $(Z \circ T)$ – эффективный цикл коразмерности 3 на F и по доказанному в [9]

$$\frac{5}{2M} \geq \frac{1}{2} \frac{\text{mult}_p(Z \circ T)}{\deg(Z \circ T)} \geq \frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z}.$$

2) $Z \subset T$. Пусть Q – проективизация квадратичного касательного конуса к T в точке p и $S = Q \cap T$. Предположим сначала, что цикл Z не является компонентой S . Рассмотрим линейные системы $\Lambda_k = |kL - (k+1)E|$, $k = 2, \dots, M-1$, где L – гиперплоское сечение T , а E – исключительный дивизор раздутия точки p (см. [3], [9]). Так как p – регулярная точка F , то коразмерность базисного множества линейной системы Λ_k в T не меньше $k-1$ (см. [9]), следовательно, для общих дивизоров $D_k \in \Lambda_k$ одномерный цикл $Z^* = (Z \circ S \circ D_4 \circ \dots \circ D_{M-2})$ эффективен. Имеем

$$1 \geq \frac{\text{mult}_p Z^*}{\deg Z^*} \geq \frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \dots \frac{M-1}{M-2} = \frac{3(M-1) \text{mult}_p Z}{8 \deg Z}.$$

Пусть теперь Z – компонента S и $M \geq 6$. Если многообразие T имеет особенность вдоль кривой C , то C содержит особую точку F . Однако легко показать, что пересечение F с любой гиперплоскостью, проходящей через регулярную особую точку, имеет в этой точке изолированную особенность. Таким образом, по теореме Гротендика (см. [11]) точка p является факториальной особой точкой многообразия T , поэтому Z высекается в T компонентой конуса Q и выполняется равенство

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z} = \frac{3}{M},$$

т.е. утверждение леммы верно.

Пусть, наконец, $M = 5$ и Z является компонентой S . Если $Z = S$, то $\text{mult}_p Z = 6$, $\deg Z = 10$ и утверждение леммы выполнено, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $Z \neq S$. Обозначим $\text{mult}_p Z = k$, $\deg Z = d$, $k < 6$, $d < 10$. Для общего дивизора $D_3 \in \Lambda_3$ цикл $Z' = (Z \circ D_3)$ эффективен и

$$1 \geq \frac{\text{mult}_p Z'}{\deg Z'} \geq \frac{4 \text{mult}_p Z}{3 \deg Z},$$

откуда следует, что $k \leq \frac{3}{4}d$.

Так как гиперповерхность F регулярна, то для любой точки $q \in F$ и для любого цикла $W \subset F$ коразмерности 2 выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_q W}{\deg W} \leq \frac{4}{5}$$

(см. [3]), в частности F не содержит двумерных плоскостей.

Докажем теперь, что выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z} \leq \frac{2}{3}.$$

Если $k \leq d - 3$, то

$$\frac{k}{d} \leq \frac{d-3}{d} \leq \frac{2}{3}.$$

При $k \geq d - 2$ имеются только две возможности, для которых $2/3 < k/d \leq 3/4$: $k = 3, d = 4$ и $k = 5, d = 7$. Докажем, что они не реализуются.

Рассмотрим два случая.

а) Конус Q неприводим и приведен. Если $k = 3, d = 4$, то Z содержится в трехмерной гиперплоскости H , т.е. $Z \subset H \cap Q$, что невозможно. Если $k = 5, d = 7$, то $S = Z \cup W$, где $\text{mult}_p W = 1, \deg W = 3$. Так как F не содержит плоскостей, то цикл W неприводим. Но в этом случае W не может содержаться в Q .

б) Конус Q распадается на две гиперплоскости или не приведен. Тогда Z является компонентой поверхности пятой степени в $\mathbb{P}^3$, поэтому $\deg Z \leq 5$. Случай $d = 4$ невозможен, так как F не содержит плоскостей.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если p – регулярная особая точка F , Z – эффективный цикл коразмерности 2 на V , не содержащийся в F , то

$$\frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z} \leq \frac{2}{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По доказанному в [3] имеем

$$\frac{4}{M} \geq \frac{\text{mult}_p(Z \circ F)}{\deg(Z \circ F)} \geq 2 \frac{\text{mult}_p Z}{\deg Z}.$$

ЛЕММА 3. Для любого простого дивизора $Y \subset F$ и регулярной неособой точки $p \in F$ верно неравенство

$$\frac{\text{mult}_p Y}{\deg Y} \leq \frac{2}{M}.$$

ЛЕММА 4. Если p – регулярная особая точка F , Y – дивизор на F , то

$$\frac{\text{mult}_p Y}{\deg Y} \leq \frac{3}{M}.$$

ЛЕММА 5. Пусть p – регулярная особая точка F , Y – дивизор на F , $\tilde{Y}$ – его собственный прообраз при раздутии точки p , x – точка исключительного дивизора раздутия. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\text{mult}_x \tilde{Y}}{\deg Y} \leq \frac{2}{M}.$$

Доказательство лемм 3–5 см. в [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Горизонтальной прямой* на V назовем одномерный цикл, имеющий вид $\sigma^{-1}(x)$ для некоторой точки $x \in \mathbb{P}^M$.

ЛЕММА 6. *Пусть L – горизонтальная прямая на V . Тогда верно одно из двух утверждений:*

- 1) $\text{mult}_L Z^h \leq \frac{1}{2} \deg Z^h$,
- 2) $(Z^h \cdot H_V^{M-2}) \geq \deg Z^h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in L$ – произвольная точка, F_p – слой, содержащий p , и $T_p F_p$ – касательная гиперплоскость к F_p в p . Если цикл $Z_p^h = (Z^h \circ F_p)$ не содержится в $T_p = T_p F_p \cap F_p$, то

$$\text{mult}_L Z^h \leq \text{mult}_p Z_p^h \leq \frac{1}{2} \text{mult}_p (Z_p^h \circ T_p) \leq \frac{1}{2} \deg Z^h.$$

Поэтому либо верно первое утверждение, либо цикл Z^h содержится в многообразии $T = \bigcup_{p \in L} T_p F_p$; T задается в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$ уравнением $Qu^2 + Ruv + Sv^2 = 0$, где Q, R, S – линейные формы.

Рассмотрим бирациональную инволюцию $\tilde{\tau}: T \dashrightarrow T$, которая переставляет точки в слоях проекции $\tilde{\sigma}: T \rightarrow \mathbb{P}^M$. Пусть K – подмногообразие в $\mathbb{P}^M$, определенное уравнениями $Q = R = S = 0$. Легко видеть, что K – касательная гиперплоскость к W в точке $\tilde{\sigma}(L)$. Отображение $\tilde{\tau}$ является бирегулярной инволюцией вне $\tilde{\sigma}^{-1}(K)$. Пусть $H_T = H|_T$ и $F_T = G|_T$ – образующие группы $\text{Pic } T$. Так как линейная система $|F_T|$ не имеет базисных точек и $\tilde{\tau}(|F_T|) = |H_T - F_T|$, то базисное множество линейной системы $|H_T - F_T|$ содержится в $\tilde{\sigma}^{-1}(K)$. Поскольку W гладко и неприводимо, K не содержится в W и размерность K равна $M - 3$, поэтому $\tilde{\sigma}^{-1}(K)$ не содержится в V и $\dim(V \cap \tilde{\sigma}^{-1}(K)) \leq M - 3$. Отсюда следует, что неприводимые компоненты цикла Z^h не содержатся в базисном множестве линейной системы $|H_T - F_T|$, значит, для общего дивизора $D \in |H_T - F_T|$ цикл $(Z^h \circ D)$ эффективен. Так как линейная система $|H_T|$ свободна, то

$$\begin{aligned} (Z^h \cdot H_V^{M-2}) &= (Z^h \cdot H_T^{M-2}) = (Z^h \cdot H_T^{M-3} \cdot (H_T - F_T)) + (Z^h \cdot H_T^{M-3} \cdot F_T) \\ &\geq (Z^h \cdot H_T^{M-3} \cdot F_T) = \deg Z^h. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 5. Исключение максимальной особенности

Пусть $\varphi_{i,i-1}: V_i \rightarrow V_{i-1}$, $i = 1, \dots, K$, – разрешение дискретного нормирования ν (подробности см. в [2], [8]), где $\varphi_{i,i-1}$ – раздутие с центром $B_{i-1} \subset V_{i-1}$ и исключительным дивизором $E_i \subset V_i$, причем первые $L \leq K$ раздутий соответствуют циклам B_{i-1} коразмерности ≥ 3 , а первые $N \leq L$ – циклам $B_{i-1} \subset F^{i-1}$ (верхний индекс обозначает собственный прообраз относительно соответствующего раздутия). На множестве индексов $\{1, \dots, K\}$ введем структуру ориентированного графа: j и i соединяются стрелкой, если $j > i$ и $B_{j-1} \subset E_i^{j-1}$. Пусть p_i – число путей в этом графе, ведущих из вершины K в вершину i . Обозначим

$$\begin{aligned} \Sigma_l &= \sum_{i=1}^L p_i, \quad \Sigma_u = \sum_{i=L+1}^K p_i, \quad \Sigma_f = \sum_{i=1}^N p_i, \quad d_h = \deg Z^h, \quad d_v = \deg Z_t^v, \\ m_i^h &= \text{mult}_{B_{i-1}} (Z^h)^{i-1}, \quad m_i^v = \text{mult}_{B_{i-1}} (Z_t^v)^{i-1}, \\ m_i^h &\leq m_1^h = m^h, \quad m_i^v \leq m_1^v = m^v. \end{aligned}$$

Так же как в [2], мы получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v \geq 4n^2 \Sigma_l + 4ne.$$

Рассмотрим два случая.

1) $B_0 = \text{centre}(\nu)$ – особая точка F . Положим $\Sigma'_f = 2p_1 + \sum_{i=2}^N p_i$. Тогда $\Sigma'_f \leq 2\Sigma_l$, $\nu(F) \geq \Sigma'_f$.

В силу лемм 2, 4, 5 имеем

$$m^h \leq \frac{2}{M} d_h = 2n^2, \quad m_1^v \leq \frac{3}{M} d_v < \frac{4}{M} d_v, \quad m_i^v \leq \frac{2}{M} d_v, \quad i \geq 2.$$

Учитывая неравенство

$$d_v < 2n^2 + \frac{2Mne}{\nu(F)} \leq 2n^2 + \frac{2Mne}{\Sigma'_f},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^N p_i m_i^v &\leq m^h \Sigma_l + p_1 m_1^v + \sum_{i=2}^N p_i m_i^v < 2n^2 \Sigma_l + \frac{4n^2}{M} \Sigma'_f + 4ne, \\ \frac{4n^2}{M} \Sigma'_f &> 2n^2 \Sigma_l. \end{aligned}$$

Противоречие при $M \geq 4$.

2) Общая точка цикла $B_0 = \text{centre}(\nu)$ неособа на F . В этом случае имеем неравенство

$$m^h \Sigma_l + m^v \Sigma_f \geq 4n^2 \Sigma_l + 4ne. \quad (4)$$

При $M \geq 5$, используя леммы 1 и 3, получаем

$$m^h \leq \max \left\{ 3n^2, \frac{8M}{3(M-1)} n^2 \right\}, \quad m^v \leq \frac{2}{M} d_v.$$

Так как

$$d_v < \frac{2Mne}{\nu(F)} + 2n^2 - (Z^h \cdot H_V^{M-2})$$

и $\nu(F) \geq \Sigma_f$, $\Sigma_f \leq \Sigma_l$, то из неравенства (4) $(Z^h \cdot H_V^{M-2}) < 0$ при $M \geq 6$, что невозможно, поскольку линейная система $|H_V|$ свободна, а цикл Z^h эффективен. При $M = 5$ получаем

$$(Z^h \cdot H_V^3) \leq \frac{n^2}{3}. \quad (5)$$

При $M = 4$, воспользовавшись неравенством $m^h \leq d_h$, получим оценку

$$(Z^h \cdot H_V^2) \leq 2n^2. \quad (6)$$

Итак, основная теорема доказана при $M \geq 6$, а при $M = 4, 5$ реализуется только первый случай леммы 6.

Пусть $p \in B_0$ – произвольная точка и H_p – элемент линейной системы $|H_V|$, содержащий p . Цикл H_p имеет вид $\sigma^{-1}(H)$, где H – гиперплоскость в $\mathbb{P}^M$, проходящая через точку $\sigma(p)$. Пусть $(Z^h \circ H_p^{M-3}) = kL + Z_1$, где L – горизонтальная

прямая, проходящая через p , а цикл Z_1 не содержит L . Общий дивизор H_p не содержит компонент цикла Z_1 , поэтому верно неравенство

$$\text{mult}_p Z_1 \leq (Z_1 \cdot H_p) = (Z^h \cdot H_V^{M-2}).$$

В силу леммы 6 имеем

$$\text{mult}_p Z^h \leq k + \text{mult}_p Z_1 \leq \frac{M}{2}n^2 + (Z^h \cdot H_V^{M-2}). \quad (7)$$

Из неравенства

$$m^v \leq \frac{2}{M}d_v < \frac{4ne}{\Sigma_f} + \frac{2}{M}(2n^2 - (Z^h \cdot H_V^{M-2}))$$

и неравенств (4), (7) будем иметь

$$\left(\frac{M}{2} + \frac{4}{M}\right)n^2 + \left(1 - \frac{2}{M}\right)(Z^h \cdot H_V^{M-2}) > 4n^2.$$

С помощью оценок (5) и (6) получаем противоречие при $M = 4, 5$.

Доказательство основной теоремы закончено.

Список литературы

1. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные кватрики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
2. *Пузлик А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей Дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
3. *Пузлик А. В.* Бирационально жесткие расслоения Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 3. С. 131–150.
4. *Bardelli F.* Polarized mixed Hodge structures: On irrationality of threefolds via degeneration // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1984. V. 137. P. 287–369.
5. *Pukhlikov A. V.* Certain examples of birationally rigid varieties with a pencil of double quadrics // J. Math. Sci. 1999. V. 94. № 1. P. 986–995.
6. *Гриненко М. М.* Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 7. С. 37–52.
7. *Гриненко М. М.* Бирациональные свойства пучков поверхностей Дель Пеццо степени 1 и 2 // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 17–38.
8. *Pukhlikov A. V.* Essentials of method of maximal singularities // Explicit birational geometry of 3-folds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 73–100.
9. *Pukhlikov A. V.* Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. P. 401–426.
10. *Фултон У.* Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
11. *Call F., Lyubeznik G.* A simple proof of Grothendieck's theorem on the parafactoriality of local rings // Commutative algebra: syzygies, multiplicities, and birational algebra: AMS-IMS-SIAM summer research conference on commutative algebra, held July 4–10, 1992, Mount Holyoke College, South Hadley, MA, USA / ed. W. J. Heinzer et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. P. 15–18. (Contemp. Math. V. 159.)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
10.04.2001