Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Шапошникова, Усреднение краевой задачи для бигармонического уравнения в области, содержащей тонкие каналы малой длины, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 10, 131–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm606>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:31:04

УДК 517.9

Т. А. Шапошникова

Усреднение краевой задачи для бигармонического уравнения в области, содержащей тонкие каналы малой длины

Настоящая статья посвящена усреднению краевой задачи для бигармонического уравнения в плоской области, содержащей тонкие каналы ширины a_ε и малой длины ε^q ($q > 0$), расположенные ε -периодически вдоль одной из координатных осей.

Библиография: 3 названия.

В работе изучено асимптотическое поведение решений краевой задачи для бигармонического уравнения в области, содержащей тонкие полоски ширины a_ε , длины ε^q , $q > 0$, при условии, что расстояние между соседними полосками равно ε , где ε — малый параметр, $a_\varepsilon \rightarrow 0$, если $\varepsilon \rightarrow 0$, и количество этих полосок равно $N_\varepsilon \cong \varepsilon^{-1}d$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $d = \text{const} > 0$.

Рассмотренная здесь задача является модельной задачей о движении нескольких пластин, скрепленных тонкими конструкциями. Аналогичная задача для уравнения Пуассона рассмотрена в [1], [2].

§ 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\gamma_0 = \Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \emptyset$, $\Omega^+ = \Omega \cap \{x_1 > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x_1 < 0\}$,

$$T_0(\varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < \varepsilon^q, |x_2| < a_\varepsilon\},$$

$$T(\varepsilon) = \bigcup_{z=(0, z_2), z \in \mathbb{Z}_2} (T_0(\varepsilon) + \varepsilon z) \cap \Omega,$$

здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $q > 0$, a_ε — ширина одной полоски. Обозначим через T_ε подмножество $T(\varepsilon)$, состоящее из полосок $\{T_j(\varepsilon), j = 1, \dots, N_\varepsilon\}$, лежащих в Ω и не пересекающихся с границей $\partial\Omega$, $T_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} T_j(\varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon N_\varepsilon = d = \text{const} > 0$, $\mathbb{Z}_2$ — множество векторов $z = (z_1, z_2)$ с целочисленными координатами z_j ($j = 1, 2$).

Положим (см. рис. 1)

$$\Omega_\varepsilon^+ = \{x \in \Omega^+ : x_1 > \varepsilon^q\}, \quad \gamma_\varepsilon = \{x_1 = \varepsilon^q\} \cap \Omega^+,$$

$$\sigma_\varepsilon^0 = \gamma_0 \cap \partial T_\varepsilon, \quad \gamma_\varepsilon^0 = \gamma_0 \setminus \sigma_\varepsilon^0, \quad \sigma_\varepsilon^1 = \gamma_\varepsilon \cap \partial T_\varepsilon,$$

$$\gamma_\varepsilon^1 = \gamma_\varepsilon \setminus \sigma_\varepsilon^1, \quad S_\varepsilon = \partial T_\varepsilon \setminus (\sigma_\varepsilon^0 \cup \sigma_\varepsilon^1),$$

$$\Omega_\varepsilon = \Omega^- \cup \Omega_\varepsilon^+ \cup T_\varepsilon \cup \sigma_\varepsilon^0 \cup \sigma_\varepsilon^1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-15-96045).

Рис. 1

ЗАМЕЧАНИЕ. Кроме области, изображенной на рис. 1, можно рассмотреть и другие объединения областей (см. рис. 2), для которых аналогичным способом исследуется асимптотическое поведение решений различных краевых задач, когда малый параметр $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рис. 2

В области Ω_ε рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 u_\varepsilon &= f \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \\
 u_\varepsilon &= \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \Gamma^- \cup \Gamma_\varepsilon^+, \\
 M(u_\varepsilon) &\equiv \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \nu^2} = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^0 \cup \gamma_\varepsilon^1, \\
 N(u_\varepsilon) &\equiv \frac{\partial}{\partial \nu} \Delta u_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial \nu \partial \tau} = 0 \quad \text{на } S_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon^0 \cup \gamma_\varepsilon^1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где f — гладкая в $\overline{\Omega}$ функция, ν — вектор единичной внешней нормали к границе области, τ — единичный касательный вектор к границе, полученный поворотом вектора ν на угол $\pi/2$, $\Gamma^- = \partial\Omega^- \setminus \gamma_0$, $\Gamma^+ = \partial\Omega^+ \setminus \gamma_0$, $\Gamma_\varepsilon^+ = \partial\Omega_\varepsilon^+ \setminus \gamma_\varepsilon$. Изучим поведение u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Функцию $u_\varepsilon \in H_2(\Omega_\varepsilon, \Gamma^- \cup \Gamma_\varepsilon^+)$ назовем *обобщенным решением* задачи (1), если для произвольной функции $\varphi \in H_2(\Omega_\varepsilon, \Gamma^- \cup \Gamma_\varepsilon^+)$ справедливо равенство:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} f \varphi dx_1 dx_2. \tag{2}$$

Как обычно, через $H_2(\omega, \Gamma)$ мы обозначили пополнение по норме $H_2(\omega)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{\omega}$ функций, обращающихся в нуль в окрестности Γ .

В зависимости от геометрических параметров области Ω_ε имеют место пять различных типов асимптотического поведения решения u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы приведем сначала формулировки результатов по мере увеличения ширины a_ε полосок $T_j(\varepsilon)$ ($j = 1, \dots, N_\varepsilon$).

I. Предположим, что область Ω_ε такова, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q} = 0. \quad (3)$$

Введем функции u_0^- и u_0^+ как решения задач:

$$\Delta^2 u_0^- = f \text{ в } \Omega^-, \quad u_0^- = \frac{\partial u_0^-}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma^-, \quad (4)$$

$$M(u_0^-) = N(u_0^-) = 0 \text{ на } \gamma_0,$$

$$\Delta^2 u_0^+ = f \text{ в } \Omega^+, \quad u_0^+ = \frac{\partial u_0^+}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma^+, \quad (5)$$

$$M(u_0^+) = N(u_0^+) = 0 \text{ на } \gamma_0.$$

Под решением задачи (4) или (5) понимаем обобщенное решение $u_0^- \in H_2(\Omega^-, \Gamma^-)$ или $u_0^+ \in H_2(\Omega^+, \Gamma^+)$ соответственно.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть u_ε — обобщенное решение задачи (1), u_0^- — решение задачи (4), $u_0^- \in C^4(\overline{\Omega}^-)$, и u_0^+ — решение задачи (5), $u_0^+ \in C^4(\overline{\Omega}^+)$. Предположим, что выполнено условие (3). Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon - u_0^-\|_{H_2(\Omega^-)}^2 + \|u_\varepsilon - u_0^+\|_{H_2(\Omega^+)}^2 \\ & + \left\| \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha \left(u_\varepsilon - u_0^+ + (2\varepsilon^{-3q}x_1^3 - 3\varepsilon^{-2q}x_1^2 + 1)(u_0^+(+0, x_2) - u_0^-(-0, x_2)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\varepsilon^{-2q}x_1^3 - 2\varepsilon^{-q}x_1^2 + x_1) \left(\frac{\partial u_0^+}{\partial x_1}(+0, x_2) - \frac{\partial u_0^-}{\partial x_1}(-0, x_2) \right) \right) \right\|_{L_2(T_\varepsilon)}^2 \\ & \leq \tilde{K}_0 \{ \varepsilon^q + \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q}} \}, \end{aligned}$$

где постоянная $\tilde{K}_0$ не зависит от ε .

II. Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q} = C_1 = \text{const} > 0. \quad (6)$$

Пусть u_0 — решение задачи

$$\Delta^2 u_0 = f \text{ в } \Omega^- \cup \Omega^+,$$

$$u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$

$$M(u_0) \equiv \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} = 0 \text{ на } \gamma_0, \quad (7)$$

$$[N(u_0)]|_{\gamma_0} \equiv \left[\frac{\partial^3 u_0}{\partial x_1^3} + 2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right] \Big|_{\gamma_0} = 0,$$

$$N(u_0)|_{\gamma_0} = -12C_1[u_0]|_{\gamma_0}.$$

Здесь $[\varphi]_{\gamma_0} \equiv \varphi(+0, x_2) - \varphi(-0, x_2)$. Под решением задачи (7) понимаем функцию $u_0 \in H_2(\Omega^-, \Gamma^-) \cap H_2(\Omega^+, \Gamma^+)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 \\ & + 12C_1 \int_{\gamma_0} [u_0]_{x_1=0} [\varphi]_{x_1=0} dx_2 = \int_{\Omega} f \varphi dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

для произвольной функции $\varphi \in H_2(\Omega^-, \Gamma^-) \cap H_2(\Omega^+, \Gamma^+)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть u_ε — обобщенное решение задачи (1), u_0 — решение задачи (7) и $u_0 \in C^4(\overline{\Omega^-}) \cap C^4(\overline{\Omega^+})$. Предположим, что справедливо равенство (6). Тогда

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_2(\Omega^-)}^2 + \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_2(\Omega^+)}^2 \\ & + \left\| \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha \left(u_\varepsilon - u_0 - \frac{1}{12C_1} (2\varepsilon^{-3q} x_1^3 - 3\varepsilon^{-2q} x_1^2 + 1) N(u_0) \right) \right\|_{\gamma_0}^2 \\ & + \left(\varepsilon^{-2q} x_1^3 - 2\varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1 \right) \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right\|_{x_1=0}^2 \Big|_{L_2(T_\varepsilon)}^2 \\ & \leq \tilde{K}_1 \{ \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} + |C_1 - a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q}| + \varepsilon^{q/2} \}, \end{aligned}$$

где $\tilde{K}_1$ — постоянная, не зависящая от ε .

III. Предположим, что при некотором $t \in (1, 3)$

$$a_\varepsilon = C_2 \varepsilon^{1+tq}, \quad C_2 = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Введем функцию u_0 как решение задачи

$$\begin{aligned} & \Delta^2 u_0 = f \quad \text{в } \Omega^- \cup \Omega^+, \\ & u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ & M(u_0) = 0 \quad \text{на } \gamma_0, \quad [u_0]_{\gamma_0} = [N(u_0)]_{\gamma_0} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Под решением задачи (9) понимаем функцию $u_0 \in H_1(\Omega) \cap H_2(\Omega^-, \Gamma^-) \cap H_2(\Omega^+, \Gamma^+)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f \varphi dx_1 dx_2$$

для произвольной функции $\varphi \in H_1(\Omega) \cap H_2(\Omega^-, \Gamma^-) \cap H_2(\Omega^+, \Gamma^+)$.

Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (1), u_0 – решение задачи (9) и $u_0 \in C^4(\bar{\Omega}^-) \cap C^4(\bar{\Omega}^+)$. Предположим, что выполнено условие (8) при некотором $t \in (1, 3)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_2(\Omega^-)}^2 + \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_2(\Omega_\varepsilon^+)}^2 \\ & + \left\| \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha \left(u_\varepsilon - u_0 + (\varepsilon^{-2q} x_1^3 - 2\varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_\gamma \right) \right\|_{L_2(T_\varepsilon)}^2 \\ & \leq \tilde{K}_2 \{ \varepsilon^{(3-t)q/2} + \varepsilon^{(t-1)q/2} + \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \}, \end{aligned}$$

где $\tilde{K}_2$ – постоянная, не зависящая от ε .

IV. Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = C_3 = \text{const} > 0. \quad (10)$$

Определим функцию u_0 как решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_0 &= f \quad \text{в } \Omega^- \cup \Omega^+, \\ u_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ [u_0] \Big|_{\gamma_0} &= [N(u_0)] \Big|_{\gamma_0} = [M(u_0)] \Big|_{\gamma_0}, \\ M(u_0) \Big|_{\gamma_0} &= (\sqrt{13} - 1) C_3 \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{\gamma_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Под решением задачи (11) понимаем функцию $u_0 \in H_1(\Omega) \cap H_2(\Omega^-, \Gamma^-) \cap H_2(\Omega^+, \Gamma^+)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 \\ & + C_3 (\sqrt{13} - 1) \int_{\gamma_0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} dx_2 = \int_{\Omega} f \varphi dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

для произвольной функции $\varphi \in H_1(\Omega) \cap H_2(\Omega^-, \Gamma^-) \cap H_2(\Omega^+, \Gamma^+)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (1), u_0 – решение задачи (11) и $u_0 \in C^4(\bar{\Omega}^-) \cap C^4(\bar{\Omega}^+)$. Предположим, что выполнено условие (10). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_2(\Omega^-)}^2 + \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_2(\Omega_\varepsilon^+)}^2 \\ & + \left\| \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_3} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{-2q} x_1^3 - \frac{\sqrt{13}-5}{8(\sqrt{13}-1)} \varepsilon^{-q} x_1^2 \right) M(u_0) \Big|_{x_1=0} \right) \right\|_{L_2(T_\varepsilon)}^2 \\ & \leq \tilde{K}_3 \{ |C_3 - a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}| + \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|} + \varepsilon^{q/2} \}, \end{aligned}$$

где $\tilde{K}_3$ – постоянная, не зависящая от ε .

V. Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = \infty. \quad (12)$$

Пусть u_0 – решение задачи

$$\Delta^2 u_0 = f \quad \text{в } \Omega, \quad u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (13)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть u_ε – обобщенное решение задачи (1), u_0 – решение задачи (13), $u_0 \in C^4(\overline{\Omega})$. Предположим, что выполнено условие (12). Тогда имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \tilde{K}_4 \left\{ \sqrt{a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q}} + \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|} \right\},$$

где $\tilde{K}_4$ – постоянная, не зависящая от ε .

§ 2. Доказательство теорем 1–5. Вспомогательные оценки

Заметим, что из (2) следует неравенство

$$\|D^2 u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \leq \tilde{C}_1 = \text{const}, \quad (14)$$

где

$$\|D^2 u\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \equiv \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|^2 \right) dx_1 dx_2;$$

$\tilde{C}_j$ здесь и далее не зависят от ε . Кроме того, применяя неравенство Фридрихса к $u_\varepsilon \in H_2(\Omega^-, \Gamma^-) \cap H_2(\Omega_\varepsilon^+, \Gamma_\varepsilon^+)$, получаем

$$\begin{cases} \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^-)} + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leq \tilde{C}_2, \\ \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^-)} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^+)} \leq \tilde{C}_3, \\ \|u_\varepsilon\|_{L_2(T_\varepsilon)} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(T_\varepsilon)} \leq \tilde{C}_4. \end{cases} \quad (15)$$

Итак, имеем

$$\|u_\varepsilon\|_{H_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \equiv \|D^2 u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \tilde{C}_5. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Введем вспомогательную функцию:

$$W_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega^-, \\ u_\varepsilon - u_0 + P_1^\varepsilon(x_1)N(u_0)|_{x_1=0} + P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, & (x_1, x_2) \in T_\varepsilon, \\ u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon^+, \end{cases} \quad (17)$$

$$C_1^* = -12C_1, P_1^\varepsilon(x_1) = \frac{1}{C_1^*} (2\varepsilon^{-3q}x_1^3 - 3\varepsilon^{-2q}x_1^2 + 1), P_2^\varepsilon(x_1) = \varepsilon^{-2q}x_1^3 - 2\varepsilon^{-q}x_1^2 + x_1.$$

Заметим, что $W_\varepsilon \in H_2(\Omega_\varepsilon, \Gamma^- \cup \Gamma^+)$. Действительно,

$$[W_\varepsilon]|_{\sigma_\varepsilon^0} = -[u_0]|_{\sigma_\varepsilon^0} + \frac{1}{C_1^*} N(u_0)|_{\sigma_\varepsilon^0} = 0, \quad (18)$$

$$[W_\varepsilon]|_{\sigma_\varepsilon^1} = 0, \quad \left[\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_1} \right] \Big|_{\sigma_\varepsilon^0} = - \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{\sigma_\varepsilon^0} + \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{\sigma_\varepsilon^0} = 0, \quad (19)$$

$$\left[\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x_1} \right] \Big|_{\sigma_\varepsilon^1} = 0. \quad (20)$$

Для любых двух функций u и φ из $H_2(\omega)$ введем билинейную форму:

$$a_\omega(u, \varphi) \equiv \int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2. \quad (21)$$

Из соотношений (17)–(21) следует, что

$$\begin{aligned} a_{\Omega_\varepsilon}(W_\varepsilon, W_\varepsilon) &= \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon dx_1 dx_2 - a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon) + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &\quad + \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &\quad - \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &\quad - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &\quad + 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &\quad - 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &\quad + \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0) \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\ &\quad + \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0) \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\ &\quad + 4\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\ &\quad + 2\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\ &\quad + \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\ &\quad - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\ &\quad + \widehat{a}_{T_\varepsilon}(P_1^\varepsilon(x_1) N(u_0) \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon) \\ &\quad + \widehat{a}_{T_\varepsilon} \left(P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\widehat{a}_\omega(h, g) \equiv \int_\omega \left(2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2.$$

Обозначим

$$J_1^\varepsilon \equiv \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon dx_1 dx_2, \quad (23)$$

$$J_2^\varepsilon \equiv \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2, \quad (24)$$

$$J_3^\varepsilon \equiv - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2, \quad (25)$$

$$J_4^\varepsilon \equiv 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 - 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2, \quad (26)$$

$$J_5^\varepsilon \equiv a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon), \quad (27)$$

$$J_6^\varepsilon \equiv \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 + \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0)|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 + 4\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 + 2\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2, \quad (28)$$

$$J_7^\varepsilon \equiv \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2, \quad (29)$$

$$J_8^\varepsilon \equiv \widehat{a}_{T_\varepsilon}(P_1^\varepsilon(x_1)N(u_0)|_{x_1=0}, W_\varepsilon) + \widehat{a}_{T_\varepsilon}\left(P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon\right). \quad (30)$$

Оценим каждое J_j^ε . Рассмотрим сначала J_2^ε и J_3^ε . Для оценки J_2^ε введем вспомогательную функцию $\theta_\varepsilon(x)$ как решение задачи:

$$\begin{aligned} \Delta \theta_\varepsilon &= 0, \quad x \in Q_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_j < \varepsilon, j = 1, 2\}, \\ \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_1} &= 1, \quad x \in \sigma^\varepsilon, \quad \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial x_1} = \mu_\varepsilon, \quad x \in S_\varepsilon^0, \\ \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{на остальной границе } \partial Q_\varepsilon, \quad \int_{Q_\varepsilon} \theta_\varepsilon dx_1 dx_2 = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где ν — внешняя единичная нормаль к границе квадрата Q_ε , $\mu_\varepsilon = a_\varepsilon \varepsilon^{-1}$ (см. рис. 3).

Пусть $g(x) \in H_1(Q_\varepsilon)$. В силу определения θ_ε имеем

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} \operatorname{div}(g \nabla \theta_\varepsilon) dx_1 dx_2 &= \int_{Q_\varepsilon} (\nabla g, \nabla \theta_\varepsilon) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\sigma^\varepsilon} g(x) dx_2 - \mu_\varepsilon \int_{S_\varepsilon^0} g(x) dx_2. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \left| \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma^\varepsilon} g(x) dx_2 - \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{C_1^*} \int_{S_\varepsilon^0} g(x) dx_2 \right| \\ \leq K_1 \varepsilon^{-3q} \|\nabla g\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (33)$$

где постоянные K_j здесь и далее не зависят от ε .

Рис. 3

Получим оценку для $\|\nabla\theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}$. Из интегрального тождества для задачи (32) следует

$$\int_{Q_\varepsilon} |\nabla\theta_\varepsilon|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\sigma^\varepsilon} \theta_\varepsilon dx_2 - \mu_\varepsilon \int_{S_\varepsilon^0} \theta_\varepsilon dx_2. \quad (34)$$

Воспользуемся далее утверждениями, доказательство которых можно найти в [3].

ЛЕММА 1. Если $u \in H_1(Q_\varepsilon)$ и $\int_{Q_\varepsilon} u dx = 0$, то

$$\|u\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq K_2 \varepsilon \|\nabla u\|_{L_2(Q_\varepsilon)}. \quad (35)$$

ЛЕММА 2. Пусть $Y_\varepsilon = Q_\varepsilon \setminus a_\varepsilon \overline{G_0}$, где $\overline{G_0} \subset \varepsilon^{-1}Q_\varepsilon$, $a_\varepsilon < \varepsilon$, G_0 — некоторая подобласть Q_ε , диффеоморфная кругу. Тогда при $n = 2$

$$\|u\|_{L_2(a_\varepsilon \partial G_0)}^2 \leq K_3 \left\{ a_\varepsilon \varepsilon^{-2} \|u\|_{L_2(Y_\varepsilon)}^2 + a_\varepsilon \left| \ln \frac{\varepsilon}{a_\varepsilon} \right| \|\nabla u\|_{L_2(Y_\varepsilon)}^2 \right\}. \quad (36)$$

Кроме того, нам потребуется следующее неравенство. Пусть $T_{a_\varepsilon/2}^+ \subset Q_\varepsilon$ — полукруг радиуса $a_\varepsilon/2$, диаметр которого совпадает с σ^ε , $S_{a_\varepsilon/2}^+$ — дуга полуокружности, ограничивающая этот полукруг. Тогда

$$\left| \int_{\sigma^\varepsilon} g dx_2 \right| \leq K_4 \left\{ \left| \int_{S_{a_\varepsilon/2}^+} g ds \right| + a_\varepsilon \|\nabla g\|_{L_2(T_{a_\varepsilon/2}^+)} \right\}. \quad (37)$$

Неравенство (37) легко доказать. Для этого введем функцию $\eta(y)$ ($y = a_\varepsilon^{-1}x$) как решение задачи:

$$\begin{aligned} \Delta_y \eta &= 0, \quad y \in T_{1/2}^+ = a_\varepsilon^{-1}T_{a_\varepsilon/2}^+, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y_1} &= 1, \quad y \in \sigma^0 = a_\varepsilon^{-1}\sigma^\varepsilon, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \nu} &= -\pi, \quad y \in S_{1/2}^+ = a_\varepsilon^{-1}S_{a_\varepsilon/2}^+. \end{aligned}$$

Эта задача имеет единственное с точностью до постоянной решение $\eta(y)$. Положим: $\eta_\varepsilon(x) = a_\varepsilon \eta(x/a_\varepsilon)$. Легко видеть, что $\eta_\varepsilon(x)$ является решением задачи:

$$\begin{aligned}\Delta_x \eta_\varepsilon &= 0, \quad x \in T_{a_\varepsilon/2}^+, \\ \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_1} &= 1, \quad x \in \sigma^\varepsilon, \\ \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial \nu} &= -\pi, \quad x \in S_{a_\varepsilon/2}^+.\end{aligned}$$

Кроме того, справедливо равенство:

$$\int_{\sigma^\varepsilon} g \, dx_2 - \pi \int_{S_{a_\varepsilon/2}^+} g \, ds = \int_{T_{a_\varepsilon/2}^+} (\nabla \eta_\varepsilon, \nabla g) \, dx_1 \, dx_2,$$

из которого, учитывая, что $\|\nabla_x \eta_\varepsilon\|_{L_2(T_{a_\varepsilon/2}^+)}^2 \leq K_5 a_\varepsilon^2$, получаем (37).

Из неравенства (37) и лемм 1 и 2 выводим

$$\begin{aligned}\left| \int_{\sigma^\varepsilon} \theta_\varepsilon \, dx_2 \right| &\leq K_6 \left\{ \left| \int_{S_{a_\varepsilon/2}^+} \theta_\varepsilon \, ds \right| + a_\varepsilon \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \right\} \\ &\leq K_7 a_\varepsilon \sqrt{\left| \ln \frac{\varepsilon}{a_\varepsilon} \right|} \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}.\end{aligned}\tag{38}$$

Принимая во внимание очевидное неравенство

$$\left| \int_{S_\varepsilon^0} \theta_\varepsilon \, dx_2 \right| \leq K_8 \varepsilon \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)},$$

а также (38) и (34), получаем

$$\|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq K_9 \left\{ a_\varepsilon \sqrt{\left| \ln \frac{\varepsilon}{a_\varepsilon} \right|} + \varepsilon \mu_\varepsilon \right\} \leq K_{10} a_\varepsilon \sqrt{\left| \ln \frac{\varepsilon}{a_\varepsilon} \right|}.\tag{39}$$

Из оценки (39) следует неравенство

$$\begin{aligned}\left| \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma_{\varepsilon,j}^0} g(x) \, dx_2 - \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{C_1^*} \int_{\gamma_{\varepsilon,j}} g(x) \, dx_2 \right| \\ \leq K_{11} \varepsilon^{-3q} \|\nabla g\|_{L_2(Q_{\varepsilon,j})} \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_{\varepsilon,j})} \\ \leq K_{12} \varepsilon^{-3q} a_\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|\nabla g\|_{L_2(Q_{\varepsilon,j})} \\ \leq K_{13} \{ \varepsilon^{-6q} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \delta^{-1} + \delta \|\nabla g\|_{L_2(Q_{\varepsilon,j})}^2 \},\end{aligned}\tag{40}$$

где $\sigma_\varepsilon^0 = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \sigma_{\varepsilon,j}^0$, $\gamma_0 = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} \gamma_{\varepsilon,j}$. Просуммировав неравенства (40) по j , получим

$$\begin{aligned}A_\varepsilon \equiv \left| \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} g(x) \, dx_2 - \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{C_1^*} \int_{\gamma_0} g \, dx_2 \right| \\ \leq K_{14} \{ \varepsilon^{-6q} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \varepsilon^{-1} \delta^{-1} + \delta \|\nabla g\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)}^2 \},\end{aligned}$$

где $\Pi_\varepsilon = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} Q_{\varepsilon,j}$. Полагая $\delta = \sqrt{|\ln \varepsilon|}$ и учитывая, что $\|\nabla g\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)}^2 \leq K_{15} \varepsilon \|D^2 g\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2$, если $g \in H_2(\Omega^-) \cap H_2(\Omega_\varepsilon^+)$, получаем

$$A_\varepsilon \leq K_{16} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} (\|D^2 g\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 + 1). \quad (41)$$

Итак, из неравенства (41) следует оценка

$$\begin{aligned} |J_2^\varepsilon| &= \left| \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{C_1^*} \int_{\gamma_0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{12\varepsilon^{-3q}}{C_1^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{C_1^*} \int_{\gamma_0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right| \\ &\leq K_{17} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \left| 1 + \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{C_1^*} \right| \int_{\gamma_0} |N(u_0)(u_\varepsilon - u_0)| dx_2. \end{aligned} \quad (42)$$

Учитывая, что $C_1^* = -12 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon \varepsilon^{-3q} = -12C_1$, выводим из (42)

$$|J_2^\varepsilon| \leq K_{18} \left\{ \left| 1 - \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{|C_1^*|} \right| + \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \right\}. \quad (43)$$

Аналогично получаем оценку

$$|J_3^\varepsilon| \leq K_{19} \left\{ \left| 1 - \frac{12\varepsilon^{-3q}\mu_\varepsilon}{|C_1^*|} \right| + \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1}} \right\}. \quad (44)$$

Оценим оставшиеся выражения J_j^ε . Имеем

$$\begin{aligned} J_4^\varepsilon &= 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon(0, x_2) - u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2)) dx_2 \\ &\quad + 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_0(\varepsilon^q, x_2) - u_0(0, x_2)) dx_2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |J_4^\varepsilon| &\leq K_{20} \left\{ \varepsilon^{-2q} \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} \right| dx_1 dx_2 + \varepsilon^{-2q} \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right| dx_1 dx_2 \right\} \\ &\leq K_{21} \varepsilon^{-2q} \left\{ \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) \right| dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^q \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) \right| dx_2 + \varepsilon^q a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \right\} \\ &\leq K_{22} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Очевидно, что

$$|J_5^\varepsilon| \leq K_{23} \{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} + a_\varepsilon \varepsilon^{-1}\}. \quad (46)$$

Предположим, что $u_0 \in C^4(\overline{\Omega^-}) \cap C^4(\overline{\Omega^+})$. Учитывая, что $M(u_0)|_{\gamma_0} = 0$, имеем $|M(u_0)(\varepsilon^q, x_2) - M(u_0)(0, x_2)| \leq K_{24} \varepsilon^q$. Поэтому

$$|J_7^\varepsilon| \equiv \left| \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \right| \leq K_{25} \varepsilon^q. \quad (47)$$

Осталось оценить J_j^ε , $j = 1, 6, 8$. Для оценки J_6^ε достаточно рассмотреть первое слагаемое в (28):

$$\begin{aligned} & \frac{6\varepsilon^{-2q}}{|C_1^*|} \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\ &= \frac{6\varepsilon^q}{|C_1^*|} \left(\varepsilon^{-3q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \varepsilon^{-3q} \mu_\varepsilon \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right) \\ &+ \frac{6\varepsilon^{-2q} \mu_\varepsilon}{|C_1^*|} \int_{\gamma_0} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \equiv J_1^* + J_2^*. \end{aligned} \quad (48)$$

В силу условия (6) имеем:

$$|J_2^*| \leq K_{26} \varepsilon^q. \quad (49)$$

Учитывая оценку (43), получаем:

$$|J_1^*| \leq K_{27} \varepsilon^{1+q} |\ln \varepsilon|^{1/2}. \quad (50)$$

Итак,

$$|J_6^\varepsilon| \leq K_{28} \varepsilon^q. \quad (51)$$

Оценим J_1^ε :

$$|J_1^\varepsilon| \leq K_{29} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{q-1}}. \quad (52)$$

Осталось получить оценку для J_8^ε . Имеем:

$$|\widehat{a}_{T_\varepsilon}(P_1^\varepsilon(x_1)N(u_0))|_{x_1=0}, W_\varepsilon| \leq K_{30} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}} \quad (53)$$

и аналогично

$$\left| \widehat{a}_{T_\varepsilon} \left(P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon \right) \right| \leq K_{31} \sqrt{|T_\varepsilon|} \leq K_{32} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{q-1}}. \quad (54)$$

Принимая во внимание оценки (43)–(47), (52)–(54), получаем утверждение теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Предположим, что $a_\varepsilon = C\varepsilon^{1+tq}$, $t \in (1, 3)$. Пусть u_0 – решение задачи (9), $u_0 \in C^4(\overline{\Omega^-}) \cap C^4(\overline{\Omega^+})$.

Введем функцию

$$W_\varepsilon^1 \equiv \begin{cases} u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega^-, \\ u_\varepsilon - u_0 + P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, & (x_1, x_2) \in T_\varepsilon, \\ u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon^+, \end{cases} \quad (55)$$

где $P_2^\varepsilon(x_1)$ определено сразу после формулы (17). В силу определения u_0 очевидно, что $W_\varepsilon^1 \in H_2(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$. В силу (22) имеем:

$$\begin{aligned}
a_{\Omega_\varepsilon}(W_\varepsilon^1, W_\varepsilon^1) &= \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon^1 dx_1 dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\
&\quad + 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\
&\quad - 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\
&\quad + 4\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\
&\quad + 2\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\
&\quad - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\
&\quad - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \\
&\quad + a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon) + \widehat{a}_{T_\varepsilon} \left(P_2^\varepsilon \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon^1 \right). \tag{56}
\end{aligned}$$

Оценим правую часть (56). Положим

$$A_\varepsilon^1 \equiv 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 - 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2.$$

Имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
|A_\varepsilon^1| &= \left| 6\varepsilon^{-2q} \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) \right) dx_1 dx_2 \right| \\
&= \left| 6\varepsilon^{-2q} \int_{T_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \right| \equiv |K_\varepsilon^1 - K_\varepsilon^2|,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon^1 &\equiv 6\varepsilon^{-2q} \int_{T_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} dx_1 dx_2, \\
K_\varepsilon^2 &\equiv 6\varepsilon^{-2q} \int_{T_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial u_0}{\partial x_1} dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Запишем K_ε^1 в следующем виде:

$$\begin{aligned}
K_\varepsilon^1 &= 6\varepsilon^{-2q} \int_{T_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) \right) dx_1 dx_2 \\
&\quad + 6\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_2 \equiv F_\varepsilon^1 + F_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Оценим F_ε^j :

$$\begin{aligned}
|F_\varepsilon^1| &\leq K_{33}\varepsilon^{-q} \int_{T_\varepsilon} \left| \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \right|_{x_1=0} \cdot \left| \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1^2} \right| dx_1 dx_2 \\
&\leq K_{34}\varepsilon^{-q} |T_\varepsilon|^{-1/2} \|D^2 u_\varepsilon\|_{L_2(T_\varepsilon)} \leq K_{35} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}} = K_{36} \sqrt{\varepsilon^{(t-1)q}}, \quad (57) \\
|F_\varepsilon^2| &\equiv \left| 6\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \right|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_2 \\
&\quad - 6\varepsilon^{-q} a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \right|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_2 \\
&\quad + 6\varepsilon^{-q} a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \right|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_2 \Big| \\
&\leq 6a_\varepsilon \varepsilon^{-q-1} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \right|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} dx_2 \Big| \\
&\quad + 6\varepsilon^{-q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \right|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_2 \\
&\quad - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \right|_{x_1=0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_2 \Big| \equiv Q_1^\varepsilon + Q_2^\varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу определения θ_ε и оценки (39) имеем

$$Q_2^\varepsilon \leq K_{37} \{ \varepsilon^{-2q} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \varepsilon^{-1} \delta^{-1} + \delta \|D^2 u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \}. \quad (58)$$

Учитывая, что $a_\varepsilon = C\varepsilon^{1+tq}$, $t \in (1, 3)$, получаем:

$$Q_2^\varepsilon \leq K_{38} \{ \delta^{-1} \varepsilon^{2q(t-1)} |\ln \varepsilon| \varepsilon + \delta \}.$$

Полагая $\delta = \varepsilon^{q(t-1)} \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|}$, выводим

$$Q_2^\varepsilon \leq K_{39} \varepsilon^{q(t-1)} \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|}. \quad (59)$$

Для Q_1^ε имеем:

$$Q_1^\varepsilon \leq K_{40} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} \leq K_{40} \varepsilon^{q(t-1)}. \quad (60)$$

Итак,

$$|F_\varepsilon^2| \leq K_{41} \varepsilon^{q(t-1)}. \quad (61)$$

Следовательно, из оценок (57)–(61) имеем

$$|K_\varepsilon^1| \leq K_{42} \sqrt{\varepsilon^{q(t-1)}}. \quad (62)$$

Для K_ε^2 справедливо неравенство

$$|K_\varepsilon^2| \leq K_{43} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = K_{44} \varepsilon^{q(t-1)}. \quad (63)$$

Оценим теперь

$$J_1^\varepsilon \equiv \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} J_1^\varepsilon &= \left(\int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \tau_\varepsilon \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right) \\ &\quad - \left(\int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \tau_\varepsilon \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right) \\ &\quad + \tau_\varepsilon \left(\int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right) \equiv \sum_{j=1}^3 H_\varepsilon^j, \end{aligned}$$

где $\tau_\varepsilon = a_\varepsilon^{-1}\varepsilon - 1$.

Преобразуем H_ε^3 :

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^3 &= (a_\varepsilon^{-1}\varepsilon - 1) \left\{ \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} (u_\varepsilon - u_0) dx_1 dx_2 + \int_{T_\varepsilon} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \right\} \\ &= (a_\varepsilon^{-1}\varepsilon - 1) \left\{ \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} (u_\varepsilon(x_1, x_2) - u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2)) dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad + \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_0 dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{T_\varepsilon} N(u_0) \left(\frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} - \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) \right) dx_1 dx_2 \\ &\quad \left. + \int_{T_\varepsilon} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 \right\} \\ &= (a_\varepsilon^{-1}\varepsilon - 1) \left\{ \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} \left(\int_{\varepsilon^q}^{x_1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau}(\tau, x_2) d\tau \right) dx_1 dx_2 \right. \\ &\quad + \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 - \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_0 dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{T_\varepsilon} N(u_0) \left(\int_{\varepsilon^q}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (u_\varepsilon - u_0)(\tau, x_2) d\tau \right) dx_1 dx_2 \\ &\quad \left. + \int_{T_\varepsilon} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Оценим правую часть (64). Имеем

$$\begin{aligned} &a_\varepsilon^{-1}\varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} N(u_0) \left(\int_{\varepsilon^q}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (u_\varepsilon - u_0)(\tau, x_2) d\tau \right) dx_1 dx_2 \right| \\ &\leq K_{45} \varepsilon^{q+1} a_\varepsilon^{-1} \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (u_\varepsilon - u_0) \right| dx_1 dx_2 \\ &\leq K_{46} \varepsilon^{q+1} a_\varepsilon^{-1} |T_\varepsilon|^{1/2} \leq K_{47} \varepsilon^{q+1} a_\varepsilon^{-1} a_\varepsilon^{1/2} \varepsilon^{q/2} \varepsilon^{-1/2} \\ &= K_{48} \varepsilon^{(3-t)q/2}. \end{aligned} \quad (65)$$

Аналогично имеем

$$a_\varepsilon^{-1}\varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} \left(\int_{\varepsilon^q}^{x_1} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau}(\tau, x_2) d\tau \right) dx_1 dx_2 \right| \leq K_{49} \varepsilon^{(3-t)q/2}, \quad (66)$$

$$\begin{aligned}
& a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_0 dx_1 dx_2 \right| \leq K_{50} \varepsilon^q, \quad (67) \\
& a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 \right| \\
& \leq a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} \left(\frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) \right) u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 \right| \\
& \quad + a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{q+1} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon dx_2 \right| \\
& \leq K_{51} \varepsilon^{(3-t)q/2} \\
& \quad + a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2) dx_2 - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon dx_2 \right| \\
& \quad + \varepsilon^q \int_{\gamma_\varepsilon} \left| \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon \right| dx_2 \\
& \leq K_{52} (\varepsilon^{(3-t)q/2} + \varepsilon^q) \\
& \quad + a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon dx_2 - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon dx_2 \right| \\
& \equiv K_{53} (\varepsilon^{(3-t)q/2} + \varepsilon^q) + a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q} L_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Оценим L_ε , используя оценку (39), полученную для θ_ε , где θ_ε – решения задачи (31):

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon & \leq K_{54} \{ \varepsilon^{-1} \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 \delta^{-1} + \delta \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)}^2 \} \\
& \leq K_{55} \{ \varepsilon^{-1} \delta^{-1} \|\nabla \theta_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 + \delta \varepsilon \|D^2 u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \} \\
& \leq K_{56} \{ \varepsilon^{-1} \delta^{-1} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + \delta \varepsilon \|D^2 u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \}.
\end{aligned}$$

Полагая $\delta = a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \sqrt{|\ln \varepsilon|}$, получаем

$$L_\varepsilon \leq K_{57} a_\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}$$

и, следовательно, имеем неравенство

$$a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial N(u_0)}{\partial x_1} u_\varepsilon(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 \right| \leq K_{58} \{ \varepsilon^{(3-t)q/2} + \varepsilon^q \}. \quad (68)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (64):

$$\begin{aligned}
& a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 \right| \\
& \leq a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} (N(u_0)(x_1, x_2) - N(u_0)(\varepsilon^q, x_2)) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_1 dx_2 \right| \\
& \quad + a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{q+1} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \\
& \leq K_{59} \varepsilon^{2q+1/2} a_\varepsilon^{-1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \\
& + \varepsilon^q \int_{\gamma_\varepsilon} \left| N(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} \right| dx_2 \\
& \leq K_{60} \{ \varepsilon^{(4-t)q/2} + \varepsilon^q + a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q} (\varepsilon^{-1} \delta^{-1} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + \delta) \} \\
& \leq K_{61} (\varepsilon^q + \varepsilon^{(4-t)q/2} + \varepsilon^{1/2+q} \sqrt{|\ln \varepsilon|}).
\end{aligned}$$

Итак,

$$|H_\varepsilon^3| \leq K_{62} \varepsilon^{(3-t)q/2}. \quad (69)$$

Для оценки H_ε^1 и H_ε^2 введем вспомогательную функцию φ_ε как решение задачи:

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_\varepsilon &= 0, \quad x \in Q_\varepsilon, \\
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_1} &= d_\varepsilon, \quad x \in \sigma^\varepsilon, \\
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_1} &= -1, \quad x \in S_\varepsilon^0, \\
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{на остальной границе } \partial Q_\varepsilon,
\end{aligned} \quad (70)$$

где $d_\varepsilon = a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1$ (см. рис. 3).

В силу того, что

$$\int_{Q_\varepsilon} |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 dx_1 dx_2 = d_\varepsilon \int_{\sigma^\varepsilon} \varphi_\varepsilon dx_2 - \int_{S_\varepsilon^0} \varphi_\varepsilon dx_2,$$

и согласно оценке $\left| \int_{\sigma^\varepsilon} \varphi_\varepsilon dx_2 \right| \leq K_{63} a_\varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}$ имеем

$$\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)} \leq K_{64} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \quad (71)$$

Воспользуемся неравенством (71) для оценки H_ε^1 и H_ε^2 :

$$\begin{aligned}
|H_\varepsilon^1| &= \left| \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0) (u_\varepsilon - u_0) dx_2 - (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0) (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right| \\
&\leq K_{65} (\varepsilon^{-1} \delta^{-1} \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + \delta \varepsilon) \leq K_{66} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|},
\end{aligned} \quad (72)$$

где $\delta = \sqrt{|\ln \varepsilon|}$.

Аналогично

$$|H_\varepsilon^2| \leq K_{67} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \quad (73)$$

Из оценок (69), (72) и (73) следует неравенство

$$|J_1^\varepsilon| \leq K_{68} \{ \varepsilon^{(3-t)q/2} + \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \}. \quad (74)$$

Оценим теперь оставшиеся в правой части (56) члены. Принимая во внимание, что $M(u_0) = 0$ на γ_0 , получаем

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \right| \leq K_{69} \varepsilon^q. \quad (75)$$

Кроме того,

$$|a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon^1)| \leq K_{70} \varepsilon^{tq}. \quad (76)$$

Проведем некоторые преобразования с оставшимися в правой части (56) членами:

$$\begin{aligned} & \left| 4\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \\ & \leq 4\varepsilon^{-q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \\ & \quad + 4a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} \left| \int_{\gamma_0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \equiv B_1^\varepsilon + B_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$B_2^\varepsilon \leq K_{71} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = K_{72} \varepsilon^{(t-1)q}. \quad (77)$$

Для B_1^ε имеем:

$$\begin{aligned} B_1^\varepsilon & \leq K_{73} (\varepsilon^{-2q} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \delta^{-1} \varepsilon^{-1} + \delta) \leq K_{74} \varepsilon^{(t-1)q} \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|}, \\ \delta & = a_\varepsilon \varepsilon^{-q} \sqrt{|\ln \varepsilon|} \varepsilon^{-1/2}. \end{aligned} \quad (78)$$

Итак, из (77) и (78) следует неравенство

$$4\varepsilon^{-q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \leq K_{75} \varepsilon^{(t-1)q}. \quad (79)$$

Аналогично

$$2\varepsilon^{-q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \leq K_{76} \varepsilon^{(t-1)q}. \quad (80)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (56):

$$\left| \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon^1 dx_1 dx_2 \right| \leq K_{77} \varepsilon^{(t+q)/2}. \quad (81)$$

Аналогично тому, как была получена оценка (54), выводим

$$\left| \widehat{a}_{T_\varepsilon} \left(P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon^1 \right) \right| \leq K_{78} \varepsilon^{(t+q)/2}. \quad (82)$$

Из равенства (56) и оценок (62), (63), (74)–(79), (80)–(82) следует утверждение теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть u_0 – решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_0 &= f, \quad x \in \Omega^- \cup \Omega^+, \\ u_0 &= \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma^- \cup \Gamma^+ = (\partial\Omega^- \cup \partial\Omega^+) \setminus \gamma_0, \\ [u_0]|_{x_1=0} &= [N(u_0)]|_{x_1=0} = [M(u_0)]|_{x_1=0} = 0, \\ M(u_0)|_{x_1=0} &= C_2^* \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, \end{aligned} \quad (83)$$

где $C_2^* = (\sqrt{13} - 1)C_2$; C_2 находим из условия

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = C_2 = \text{const} > 0. \quad (84)$$

Введем функцию

$$W_\varepsilon^2 \equiv \begin{cases} u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega^-, \\ u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} M(u_0)(0, x_2) P_2^\varepsilon(x_1), & (x_1, x_2) \in T_\varepsilon, \\ u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega_\varepsilon^+. \end{cases} \quad (85)$$

Заметим, что $W_\varepsilon^2 \in H_2(\Omega_\varepsilon, \Gamma^- \cup \Gamma^+)$. В силу определения W_ε^2 имеем

$$\begin{aligned} a_{\Omega_\varepsilon}(W_\varepsilon^2, W_\varepsilon^2) &= \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon^2 dx_1 dx_2 \\ &+ \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &+ \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &- \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &+ \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\ &+ \frac{2\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\ &+ \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\ &- a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon^2) + \widehat{a}_{T_\varepsilon} \left(P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon^2 \right). \end{aligned} \quad (86)$$

Преобразуем правую часть (86). Прежде всего, заметим, что

$$\begin{aligned} &\frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_0^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\ &= \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{T_\varepsilon} M(u_0)(0, x_2) x_1 \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 \\ &- \frac{6\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)(0, x_2) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1}(\varepsilon^q, x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (87)$$

В соответствии с (87) перепишем выражение (86):

$$\begin{aligned}
& a_{\Omega^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{T_\varepsilon}(W_\varepsilon^2, W_\varepsilon^2) \\
&= \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{T_\varepsilon} M(u_0)(0, x_2) x_1 \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 \\
&+ \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
&- \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
&- \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\
&- \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon^2 dx_1 dx_2 - a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon^2) \\
&+ \widehat{a}_{T_\varepsilon} \left(\frac{1}{C_2^*} P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon^2 \right). \tag{88}
\end{aligned}$$

Преобразуем теперь левую часть (88):

$$\begin{aligned}
& a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \\
&+ \int_{T_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} P_2^\varepsilon(x_1) M(u_0)|_{x_1=0} \right) \right)^2 dx_1 dx_2 \\
&+ 2 \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} P_2^\varepsilon M(u_0)|_{x_1=0} \right) \right|^2 dx_1 dx_2 \\
&+ \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} P_2^\varepsilon M(u_0)|_{x_1=0} \right) \right|^2 dx_1 dx_2 \\
&= a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \\
&+ \int_{T_\varepsilon} \left(\frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{C_2^*} M(u_0)(0, x_2) (6\varepsilon^{-2q} x_1 - 4\varepsilon^{-q}) \right)^2 dx_1 dx_2 \\
&+ 2 \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} M(u_0)|_{x_1=0} (\varepsilon^{-2q} x_1^3 - 2\varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1) \right) \right|^2 dx_1 dx_2 \\
&+ \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} M(u_0)|_{x_1=0} (\varepsilon^{-2q} x_1^3 - 2\varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1) \right) \right|^2 dx_1 dx_2 \\
&= a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \\
&+ \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \\
&+ \int_{T_\varepsilon} \frac{2}{C_2^*} M(u_0)(0, x_2) \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} (6\varepsilon^{-2q} x_1 - 4\varepsilon^{-q}) dx_1 dx_2 \\
&+ \int_{T_\varepsilon} \frac{M^2(u_0)(0, x_2)}{|C_2^*|^2} (6\varepsilon^{-2q} x_1 - 4\varepsilon^{-q})^2 dx_1 dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \\
&= a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} \right|^2 dx_1 dx_2 + \frac{12\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{T_\varepsilon} M(u_0)|_{x_1=0} x_1 \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 \\
& - \frac{8\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{T_\varepsilon} M(u_0)(0, x_2) \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 \\
& + \frac{1}{|C_2^*|^2} \int_0^{\varepsilon^q} (36\varepsilon^{-4q} x_1^2 - 48\varepsilon^{-3q} x_1 + 16\varepsilon^{-2q}) dx_1 \int_{\sigma_\varepsilon^0} M^2(u_0) dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \\
& \equiv R_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{89}$$

где

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon^1 &= 2 \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} M(u_0)|_{x_1=0} (\varepsilon^{-2q} x_1^3 - 2\varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1) \right) \right|^2 dx_1 dx_2, \\
I_\varepsilon^2 &= \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{C_2^*} M(u_0)|_{x_1=0} (\varepsilon^{-2q} x_1^3 - 2\varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1) \right) \right|^2 dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Воспользуемся соотношениями (88) и (89):

$$\begin{aligned}
R_\varepsilon &= \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{T_\varepsilon} M(u_0)|_{x_1=0} x_1 \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 \\
&+ \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)(0, x_2) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
&- \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
&- \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \\
&- \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + P_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{90}$$

где

$$P_\varepsilon \equiv \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon^2 dx_1 dx_2 - a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon^2) + \widehat{a}_{T_\varepsilon} \left(\frac{1}{C_2^*} P_2^\varepsilon \left[\frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W_\varepsilon^2 \right).$$

В силу (90) имеем

$$\begin{aligned}
& a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega_\varepsilon^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} \right|^2 dx_1 dx_2 \\
& + \frac{6\varepsilon^{-2q}}{C_2^*} \int_{T_\varepsilon} M(u_0)|_{x_1=0} x_1 \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 \\
& - \frac{8\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + \frac{8\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\varepsilon^{-q}}{|C_2^*|^2} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M^2(u_0)|_{x_1=0} dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \\
& = \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + P_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{91}$$

Преобразуем выражение (91):

$$\begin{aligned}
& a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega_\varepsilon^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \\
& + \int_{T_\varepsilon} \left(\left| \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} \right|^2 + \frac{2}{C_2^*} M(u_0)|_{x_1=0} (3\varepsilon^{-2q} x_1 - 4\varepsilon^{-q}) \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} \right) dx_1 dx_2 \\
& + \frac{4\varepsilon^{-q}}{|C_2^*|^2} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M^2(u_0) dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \\
& = \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + P_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{92}$$

Из (92) следует

$$\begin{aligned}
& a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega_\varepsilon^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \\
& + \int_{T_\varepsilon} \left(\left| \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} \right|^2 + \frac{2}{C_2^*} (3\varepsilon^{-2q} x_1 - (4-a)\varepsilon^{-q}) M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} \right. \\
& + \left. \frac{M^2(u_0)}{|C_2^*|^2} (3\varepsilon^{-2q} x_1 - (4-a)\varepsilon^{-q})^2 \right) dx_1 dx_2 \\
& - \frac{2a\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{T_\varepsilon} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1^2} dx_1 dx_2 \\
& - \int_{T_\varepsilon} \frac{M^2(u_0)}{|C_2^*|^2} (3\varepsilon^{-2q} x_1 - (4-a)\varepsilon^{-q})^2 dx_1 dx_2 \\
& + \frac{4\varepsilon^{-q}}{|C_2^*|^2} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M^2(u_0)|_{x_1=0} dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \\
& = \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \frac{4\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + P_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{93}$$

После очевидных преобразований выводим из (93):

$$\begin{aligned}
& a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \\
& + \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{M(u_0)|_{x_1=0}}{2C_2^*} (\varepsilon^{-2q} x_1^3 - (4-a)\varepsilon^{-q} x_1^2) \right) \right|^2 dx_1 dx_2 \\
& - \frac{1}{|C_2^*|^2} \int_0^{\varepsilon^q} (3\varepsilon^{-2q} x_1 - (4-a)\varepsilon^{-q})^2 dx_1 \int_{\sigma_\varepsilon^0} M^2(u_0) dx_2 \\
& + \frac{4\varepsilon^{-q}}{|C_2^*|^2} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M^2(u_0) dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \\
& = \left\{ \frac{(4-2a)\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\
& + \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \frac{(4-2a)\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + P_\varepsilon. \tag{94}
\end{aligned}$$

В равенстве (94) выберем a так, чтобы

$$a < 2 \quad \text{и} \quad \int_0^{\varepsilon^q} (3\varepsilon^{-2q} x_1 - (4-a)\varepsilon^{-q})^2 dx_1 = 4\varepsilon^{-q},$$

т.е.

$$a = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}. \tag{95}$$

Следовательно, выбрав a как указано в (95), можем преобразовать (94) к виду:

$$\begin{aligned}
& a_{\Omega^-}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) + a_{\Omega^+}(u_\varepsilon - u_0, u_\varepsilon - u_0) \\
& + \int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{2C_2^*} M(u_0)|_{x_1=0} \tilde{P}_2^\varepsilon(x_1) \right) \right|^2 dx_1 dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 \\
& = \left\{ \frac{(\sqrt{13}-1)\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\
& + \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \frac{(\sqrt{13}-1)\varepsilon^q}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\
& + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + P_\varepsilon, \tag{96}
\end{aligned}$$

где $\tilde{P}_2^\varepsilon(x_1) = \varepsilon^{-2q} x_1^3 - (4-a)\varepsilon^{-q} x_1^2$.

Заметим, что

$$\int_{T_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{2C_2^*} M(u_0)|_{x_1=0} \tilde{P}_2^\varepsilon(x_1) \right) \right|^2 dx_1 dx_2 + I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2 = a_{T_\varepsilon}(\tilde{W}_\varepsilon^2, \tilde{W}_\varepsilon^2) + V_\varepsilon, \tag{97}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_\varepsilon^2 &= \begin{cases} u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega^-, \\ u_\varepsilon - u_0 + \frac{1}{2C_2^*} \widetilde{P}_2^\varepsilon(x_1) M(u_0)(0, x_2), & (x_1, x_2) \in T_\varepsilon, \\ u_\varepsilon - u_0, & (x_1, x_2) \in \Omega^+, \end{cases} \\ V_\varepsilon &\equiv 2 \int_{T_\varepsilon} \left\{ \frac{2}{C_2^*} \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial M(u_0)}{\partial x_2}(0, x_2) \left(\frac{3}{2} \varepsilon^{-2q} x_1^2 - a \varepsilon^{-q} x_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|C_2^*|^2} \left| \frac{\partial M(u_0)}{\partial x_2}(0, x_2) \right|^2 \left(\frac{3}{2} \varepsilon^{-2q} x_1^2 - a \varepsilon^{-q} x_1 \right)^2 \right\} dx_1 dx_2 \\ &\quad + 2 \int_{T_\varepsilon} \left\{ \frac{1}{C_2^*} \frac{\partial^2(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2(M(u_0)|_{x_1=0})}{\partial x_2^2} (\varepsilon^{-2q} x_1^3 - a \varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|C_2^*|^2} \left| \frac{\partial^2(M(u_0)|_{x_1=0})}{\partial x_2^2} \right|^2 \left(\frac{\varepsilon^{-2q}}{2} x_1^3 - \frac{a}{2} \varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1 \right)^2 \right\} dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (98)$$

где a задано в (95).

Итак,

$$\begin{aligned} &a_{\Omega^-}(\widetilde{W}_\varepsilon^2, \widetilde{W}_\varepsilon^2) + a_{\Omega^+}(\widetilde{W}_\varepsilon^2, \widetilde{W}_\varepsilon^2) + a_{T_\varepsilon}(\widetilde{W}_\varepsilon^2, \widetilde{W}_\varepsilon^2) \\ &= \left\{ \frac{(\sqrt{13}-1)}{C_2^*} \varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \frac{(\sqrt{13}-1)}{C_2^*} \varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0)|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\ &\quad + \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 + P_\varepsilon - V_\varepsilon. \end{aligned} \quad (99)$$

Оценим правую часть (99). Имеем

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^1 &\equiv \frac{(\sqrt{13}-1)\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \\ &= \frac{(\sqrt{13}-1)\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \left\{ \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{(\sqrt{13}-1)a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}}{C_2^*} \int_{\gamma_0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\ &\equiv \sum_{j=1}^2 l_\varepsilon^j. \end{aligned} \quad (100)$$

Оценим l_ε^j , $j = 1, 2$. Имеем

$$|l_\varepsilon^1| \leq K_{79} \{ \varepsilon^{-2q} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \varepsilon^{-1} \delta^{-1} + \delta \} \leq K_{80} \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|}, \quad (101)$$

здесь $\delta = a_\varepsilon \varepsilon^{-q-1/2} \sqrt{|\ln \varepsilon|}$.

В силу определения C_2^* получим

$$|l_\varepsilon^2| \leq K_{81} |a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} - C_2|. \quad (102)$$

Итак, из оценок (101), (102) выводим

$$|L_\varepsilon^1| \leq K_{82} \{ |a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} - C_2| + \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|} \}. \quad (103)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} |L_\varepsilon^2| &\equiv \left| \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \frac{(\sqrt{13} - 1)\varepsilon^{-q}}{C_2^*} \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \\ &\leq K_{83} \{ |a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} - C_2| + \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|} \}. \end{aligned} \quad (104)$$

Оценим оставшиеся члены в правой части (99). Имеем

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right| \leq K_{84} \{ \varepsilon^q + \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \}. \quad (105)$$

Для V_ε получим

$$|V_\varepsilon| \leq K_{85} \sqrt{|T_\varepsilon|} \leq K_{86} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1+q}} \leq K_{87} \varepsilon^q. \quad (106)$$

Для P_ε имеет место оценка

$$|P_\varepsilon| \leq K_{88} \varepsilon^q. \quad (107)$$

Из оценок (103)–(107) следует теорема 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Предположим, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = \infty$. Пусть u_0 – гладкое решение задачи

$$\Delta^2 u_0 = f, \quad x \in \Omega, \quad u_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (108)$$

Положим $W_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0 \in H_2(\Omega_\varepsilon, \Gamma^- \cup \Gamma_\varepsilon^+)$. Легко видеть, что W_ε является решением задачи:

$$\begin{aligned} \Delta^2 W_\varepsilon &= 0, \quad \text{если } x \in \Omega_\varepsilon, \\ W_\varepsilon &= \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad \text{если } x \in \partial\Omega_\varepsilon \cap \partial\Omega, \\ M(W_\varepsilon) &= -M(u_0), \quad N(W_\varepsilon) = -N(u_0), \quad \text{если } x \in \gamma_\varepsilon^0 \cup \gamma_\varepsilon^1 \cup S_\varepsilon. \end{aligned} \quad (109)$$

Покажем, что $\|W_\varepsilon\|_{H_2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$.

В силу соотношений (109) имеем

$$\begin{aligned} a_{\Omega_\varepsilon}(W_\varepsilon, W_\varepsilon) &= \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial x_1} \right) dx_2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \int_{T_\varepsilon} f W_\varepsilon dx_1 dx_2 - a_{T_\varepsilon}(u_0, W_\varepsilon) \right\} \equiv J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2 + J_\varepsilon^3. \end{aligned} \quad (110)$$

Покажем, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^j = 0$, $j = 1, 2, 3$. Имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^2 &= \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\ &\quad + (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \left\{ \int_{\sigma_\varepsilon^0} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right\} \\ &\equiv \sum_{l=1}^3 J_\varepsilon^{2,l}. \end{aligned}$$

Для $J_\varepsilon^{2,1}$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon^{2,1}| &\equiv \left| (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \int_{\sigma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} dx_2 \right| \\ &\leq K_{89} \{ \delta^{-1} \varepsilon^{-1} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 + \delta \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 \}, \end{aligned} \quad (111)$$

где φ_ε — решение задачи (70). Учитывая оценку (71) и полагая $\delta = \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|}$, получаем

$$|J_\varepsilon^{2,1}| \leq K_{90} \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|}. \quad (112)$$

Аналогично имеем

$$|J_\varepsilon^{2,2}| \leq K_{91} \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|}. \quad (113)$$

Оценим теперь $J_\varepsilon^{2,3}$:

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon^{2,3}| &\leq K_{92} a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(M(u_0) \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0)}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 \right| \\ &\leq K_{93} a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{q-1}} \leq K_{94} \sqrt{a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q}} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак,

$$|J_\varepsilon^2| \leq K_{95} \left\{ \sqrt{a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q}} + \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|} \right\}. \quad (114)$$

Получим оценку $|J_\varepsilon^1|$. Имеем

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^1 &= \left\{ \int_{\gamma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right\} \\ &\quad + \left\{ (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right\} \\ &\quad + (a_\varepsilon^{-1} \varepsilon - 1) \left\{ \int_{\sigma_\varepsilon^0} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 - \int_{\sigma_\varepsilon^1} N(u_0)(u_\varepsilon - u_0) dx_2 \right\} \\ &\equiv \sum_{j=1}^3 J_\varepsilon^{1,j}. \end{aligned}$$

Получим оценки $|J_\varepsilon^{1,j}|$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon^{1,1}| &\leq K_{96} \{ \delta^{-1} \varepsilon^{-1} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 + \delta \|\nabla(u_\varepsilon - u_0)\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)}^2 \} \\ &\leq K_{97} \{ \delta^{-1} \varepsilon^{-1} \varepsilon^2 |\ln \varepsilon| + \delta \varepsilon \} \leq K_{98} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}, \quad \delta = \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \end{aligned} \quad (115)$$

Аналогичную оценку имеем для $|J_\varepsilon^{1,2}|$:

$$|J_\varepsilon^{1,2}| \leq K_{99} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}. \quad (116)$$

Для $|J_\varepsilon^{1,3}|$ имеем:

$$|J_\varepsilon^{1,3}| \leq K_{100} a_\varepsilon^{-1} \varepsilon \left| \int_{T_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} (N(u_0)(u_\varepsilon - u_0)) dx_1 dx_2 \right| \leq K_{101} \sqrt{a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q}}. \quad (117)$$

Легко видеть, что для J_ε^3 справедливо неравенство:

$$|J_\varepsilon^3| \leq K_{102} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{q-1}} \leq K_{103} \sqrt{a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q}}. \quad (118)$$

Из равенства (110) и оценок (111)–(118) выводим

$$a_{\Omega_\varepsilon}(W_\varepsilon, W_\varepsilon) \leq K_{104} \left\{ \sqrt{a_\varepsilon^{-1} \varepsilon^{1+q}} + \sqrt{\varepsilon |\ln \varepsilon|} \right\}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon^{-1-3q} = 0$. Пусть $u_0^\mp$ – решения задач (4), (5) соответственно. Введем функцию

$$W^\varepsilon \equiv \begin{cases} u_\varepsilon - u_0^-, & (x_1, x_2) \in \Omega^-, \\ u_\varepsilon - u_0^+ + (2\varepsilon^{-3q} x_1^3 - 3\varepsilon^{-2q} x_1^2 + 1) [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \\ \quad + (\varepsilon^{-3q} x_1^3 - 2\varepsilon^{-q} x_1^2 + x_1) \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \\ \quad \equiv u_\varepsilon - u_0^+ + P_1^\varepsilon(x_1) [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + P_2^\varepsilon(x_1) \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, & (x_1, x_2) \in T_\varepsilon, \\ u_\varepsilon - u_0^+, & (x_1, x_2) \in \Omega^+, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} &\equiv u_0^+(+0, x_2) - u_0^-(-0, x_2), \\ \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} &\equiv \frac{\partial u_0^+}{\partial x_1}(+0, x_2) - \frac{\partial u_0^-}{\partial x_1}(-0, x_2). \end{aligned}$$

Легко видеть, что $W^\varepsilon \in H_2(\Omega_\varepsilon)$. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned}
a_{\Omega_\varepsilon}(W^\varepsilon, W^\varepsilon) &= \int_{\Omega_\varepsilon} f W^\varepsilon dx_1 dx_2 + \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(W^\varepsilon) W^\varepsilon(\varepsilon^q, x_2) dx_2 \\
&\quad + \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left(12\varepsilon^{-3q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 6\varepsilon^{-2q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) W^\varepsilon dx_2 \\
&\quad + \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left(6\varepsilon^{-2q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 4\varepsilon^{-q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_1} dx_2 \\
&\quad - \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(W^\varepsilon) \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_1} dx_2 \\
&\quad - \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left(12\varepsilon^{-3q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 6\varepsilon^{-2q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) W^\varepsilon dx_2 \\
&\quad + \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left(6\varepsilon^{-2q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 2\varepsilon^{-q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_1} dx_2 \\
&\quad + a_{T_\varepsilon}(u_0^+, W^\varepsilon) + \widehat{a}_{T_\varepsilon}(P_1^\varepsilon[u_0^\pm] \Big|_{x_1=0}, W^\varepsilon) \\
&\quad + \widehat{a}_{T_\varepsilon}\left(P_2^\varepsilon \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W^\varepsilon\right) \\
&\equiv \sum_{j=0}^3 J_\varepsilon^j,
\end{aligned} \tag{119}$$

где

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon^0 &\equiv \int_{T_\varepsilon} f W^\varepsilon dx_1 dx_2, \\
J_\varepsilon^1 &\equiv \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left(12\varepsilon^{-3q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 6\varepsilon^{-2q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) W^\varepsilon dx_2 \\
&\quad - \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left(12\varepsilon^{-3q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 6\varepsilon^{-2q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) W^\varepsilon dx_2, \\
J_\varepsilon^2 &\equiv \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left(6\varepsilon^{-2q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 4\varepsilon^{-q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_1} dx_2 \\
&\quad + \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left(6\varepsilon^{-2q} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} + 2\varepsilon^{-q} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \right) \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_1} dx_2, \\
J_\varepsilon^3 &\equiv \int_{\gamma_\varepsilon^1} N(W^\varepsilon) W^\varepsilon dx_2 - \int_{\gamma_\varepsilon^1} M(W^\varepsilon) \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial x_1} dx_2 \\
&\quad + a_{T_\varepsilon}(u_0^+, W^\varepsilon) + \widehat{a}_{T_\varepsilon}(P_1^\varepsilon[u_0^\pm] \Big|_{x_1=0}, W^\varepsilon) + \widehat{a}_{T_\varepsilon}\left(P_2^\varepsilon \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0}, W^\varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Оценим каждое J_ε^l , $l = 0, 1, 2, 3$. Имеем

$$|J_\varepsilon^1| = \left| 12\varepsilon^{-3q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^-) dx_2 \right|$$

$$\begin{aligned}
& -12\varepsilon^{-3q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^+) dx_2 \\
& + 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^-) dx_2 \\
& - 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^+) dx_2 \Big| \\
\leq & K_{105} \left\{ \varepsilon^{-3q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^-) dx_2 \right. \\
& - a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q} \int_{\gamma_\varepsilon} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^-) dx_2 \Big| \\
& + a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q} \left| \int_{\gamma_0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^-) dx_2 \right| \\
& + a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^+) dx_2 \right| \\
& + \left| \varepsilon^{-3q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^+) dx_2 \right. \\
& \left. - a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q} \int_{\gamma_\varepsilon} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} (u_\varepsilon - u_0^+) dx_2 \right| + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}} \Big\} \\
\leq & K_{106} \{ a_\varepsilon \varepsilon^{-1-3q} + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}} + \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \}. \tag{120}
\end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon^2| = & \left| 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^-)}{\partial x_1} dx_2 \right. \\
& + 4\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^-)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^+)}{\partial x_1} dx_2 \\
& + 2\varepsilon^{-q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} \left[\frac{\partial u_0^\pm}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^+)}{\partial x_1} dx_2 \Big| \\
\leq & \left| 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^-)}{\partial x_1} dx_2 \right. \\
& - 6a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q} \int_{\gamma_0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^-)}{\partial x_1} dx_2 \Big| \\
& + \left| 6\varepsilon^{-2q} \int_{\sigma_\varepsilon^1} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^+)}{\partial x_1} dx_2 \right. \\
& \left. - 6a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q} \int_{\gamma_\varepsilon} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^+)}{\partial x_1} dx_2 \right| \\
& + K_{107} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq K_{108} \left\{ \varepsilon^{-2q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^-)}{\partial x_1} dx_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_0} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^-)}{\partial x_1} dx_2 \right| \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^{-2q} \left| \int_{\sigma_\varepsilon^1} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^+)}{\partial x_1} dx_2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_\varepsilon \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_\varepsilon} [u_0^\pm] \Big|_{x_1=0} \frac{\partial(u_\varepsilon - u_0^+)}{\partial x_1} dx_2 \right| + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}} \right\} \\
& \leq K_{109} \{ \varepsilon^{-4q} a_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| \varepsilon^{-1} \delta^{-1} + \delta + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}} \} \\
& \leq K_{110} \{ a_\varepsilon \varepsilon^{-2q-1/2} |\ln \varepsilon|^{1/2} + \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}} \} \\
& \leq K_{111} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-2q}}.
\end{aligned} \tag{121}$$

Для оставшихся членов имеем оценки:

$$|J_\varepsilon^0| \leq K_{112} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{q-1}}, \tag{122}$$

$$|J_\varepsilon^3| \leq K_{113} \sqrt{a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}}. \tag{123}$$

Из неравенств (121)–(123) следует теорема 1.

Список литературы

1. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев, 1974.
2. Шапошникова Т. А. Об усреднении задачи Неймана в области, часть которой представляет собой совокупность каналов // Дифференц. уравнения. 2001 (в печати).
3. Oleinik O. A., Shaposhnikova T. A. On the homogenization of the Poisson equation in partially perforated domains with arbitrary density of cavities and mixed type conditions on their boundary // Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 1996. V. 7. № 3. P. 129–146.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
05.03.2001