Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Буланов, Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 11, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm607>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:47:37

УДК 517.521.2+517.537

А. П. Буланов

Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения

Пусть

$$f(z) = z^{\beta} \cdot z^{z^{\beta}} \cdot z^{z^{z^{\beta}}} \cdot z^{\dots}$$

– бесконечная цепная степень, где $\beta \in \mathbb{C}$ и $|\beta| > 1$. Тогда функция $f(z)$ голоморфна в некоторой области $U \supset e^K \cap \{z : |\arg z| < \pi\}$, где e^K – образ круга $K = \{w : |w| < R\}$, радиус которого определяется по формуле $1/R = \sqrt{|\beta|} \cdot \exp((1+t^2)/(1-t^2))$, где $t = t(\sqrt{|\beta|}) \in [0, 1)$ – решение уравнения $\sqrt{|\beta|} = \frac{1+t}{1-t} \cdot \exp(2t/(1-t^2))$.

Библиография: 19 названий.

Введение

Элементарную функцию

$$f_s(x) = a_0 \cdot x^{a_1} \cdot x^{a_2} \cdot x^{\dots a_{s-1}} \cdot x^{a_s}, \quad x > 0, \quad (1)$$

где $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, s$, будем называть *цепной степенью кратности s* и для удобства записывать в виде

$$f_s(x) = a_0 \cdot \langle x; a_1, a_2, \dots, a_s \rangle, \quad x > 0. \quad (2)$$

Формальное выражение

$$a_0 \cdot x^{a_1} \cdot x^{a_2} \cdot x^{\dots} = a_0 \cdot \langle x; a_1, a_2, \dots \rangle, \quad x > 0, \quad (3)$$

соответствующее бесконечной последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, условимся называть *бесконечной цепной* или *бесконечнократной* степенью.

В дальнейшем (где это не будет нарушать общности) полагаем $a_0 = 1$.

Л. Эйлер в работе [1] весьма подробно рассмотрел последовательность цепных степеней ($\alpha > 0$, $r > 0$): α , $r^\alpha = \beta$, $r^\beta = \gamma$, $r^\gamma = \delta$, $\dots$. Он заметил, что при $r = \sqrt{2}$ и $\alpha = 2$ все элементы этой последовательности равны 2, поэтому она сходится к числу 2, а при таком же r и $\alpha = 4$ все элементы равны 4 и предел ее равен 4. Однако при $\alpha = 6$ последовательность резко возрастает и расходится.

Численным экспериментом он показывает, что при $r = \frac{3}{2}$ и $\alpha = \frac{3}{2}$ она возрастает медленно, и неясно: сходится она или расходится. Еще он заметил, что если $r = \frac{1}{16}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, то последовательность будет расходящейся, так как элементы поочередно принимают два различных значения: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{4}$, $\dots$. В связи с этими числовыми примерами он ставит и решает проблему (для большей ясности возьмем либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$, либо $\alpha = r$): на каком множестве значений r последовательность $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ сходится? Л. Эйлер доказал, что эта последовательность сходится на отрезке $[e^{-e}, e^{1/e}]$, причем предел ее в левой граничной точке этого отрезка равен $1/e$, а в правой он равен e . Заметим, что $\sqrt{2} = 1.41421\dots < e^{1/e} = 1.44466\dots$; $\frac{1}{16} = 0.0625 < e^{-e} = 0.065988\dots$.

В статье [2] по цепным степеням и экспонентам А. Кноубел приводит обширную библиографию (125 наименований). В частности, он отмечает, что упомянутый результат Л. Эйлера передоказывали Г. Эйзенштейн (1844 г.), Л. Зейдель (1873 г.) и др.

Для эйлеровской последовательности Г. Маурер в 1901 году [3] ввел обозначение

$$^1z := z, \quad ^2z := z^z, \quad ^3z := z^{z^z}, \quad \dots, \quad ^kz := \underbrace{z^{z^{z^{\dots z}}}}_{k \text{ раз}}, \quad \dots,$$

которое использовал в работе [2] А. Кноубел.

В работе [4] Д. Бэрроу использовал символы

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1^{a_2^{\dots a_n}}, \quad \prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1^{a_2^{a_3^{\dots}}} \quad (4)$$

Выражения (1) и (3) при помощи таких символов запишутся в виде

$$f_s(x) = a_0 \cdot \prod_{k=1}^s x^{a_k}, \quad a_0 \cdot x^{a_1} \cdot x^{a_2} \cdot x^{\dots} = a_0 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} x^{a_k}, \quad x > 0. \quad (5)$$

Числа a_k в последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ могут быть комплексными. В дальнейшем, если мы не обращаемся к римановой поверхности логарифма, а ограничиваемся ее проекцией, будем брать от многозначного логарифма $\text{Ln } z$ лишь главное значение $\ln z$, которому соответствует значение $\ln 1 = 0$. Функция (z^{a_s}) – главное значение функции $z^{a_s} = \exp(a_s \cdot \text{Ln } z)$, отвечающее главному значению логарифма, – регулярна в области $P = \{z : |\arg z| < \pi\}$. Из регулярности (z^{a_s}) в P следует регулярность функции $a_{s-1}(z^{a_s}) \cdot \ln z$ в той же области P , а значит, и регулярность в P главного значения $(z^{a_{s-1} \cdot (z^{a_s})})$. Полученное по индукции главное значение

$$f_s(z) = (z_0), \quad \text{где } z_{k-1} = z^{a_k \cdot (z_k)}, \quad k = s, s-1, \dots, 2, 1, \quad \text{и } z_s = 1, \quad (6)$$

будет также регулярным в области P . Условимся в дальнейшем опускать скобки в правой части равенств (6), не забывая о том, что (если мы не обращаемся к римановой поверхности) вместо многозначного логарифма $\text{Ln } z$ мы рассматриваем лишь его главное значение $\ln z$. Поэтому к функции

$$f_s(z) = (z_0) = z_0 = z^{a_1 \cdot z^{\dots a_{s-1} \cdot z^{a_s}}}, \quad z \in P,$$

будем применять угловые скобки и символ $\mathbf{E}$, введенные выше (см. (2) и (5)):

$$f_s(z) = \langle z; a_1, a_2, \dots, a_s \rangle \quad \text{или} \quad f_s(z) = \mathbf{E}_{k=1}^s z^{a_k}, \quad z \in P.$$

В связи с последовательностью $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ поставим в соответствие каждому номеру $n = 1, 2, \dots$ регулярную функцию $f_n(z) = \langle z; a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. Тогда получим бесконечную последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ функций, регулярных в одной и той же области P . Если окажется, что эта последовательность равномерно сходится в некоторой области $U \subset P$, то в этой области предельная функция $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ будет регулярной (см. [5; часть 1, гл. 3]).

Если в последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ коэффициент a_m окажется равным нулю, то предельная функция $f(z)$ окажется степенью конечной кратности и будет регулярной во всей области $P = \{z : |\arg z| < \pi\}$, поэтому в дальнейшем этот не совсем интересный случай (в смысле оценки области сходимости) будем исключать.

Положим далее $\bar{a} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|$.

Прежде чем формулировать основной результат работы (см. ниже теорему 2), следует сказать о многозначности предельной функции

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \quad \text{при} \quad \bar{a} < \frac{1}{e \cdot \pi}.$$

§ 1. О многозначности предельной функции

В работе [6] доказана теорема, которую мы будем дальше именовать теоремой 1А. Так как от многозначного логарифма $\operatorname{Ln} z$ мы здесь берем лишь главную ветвь $\ln z$, то фигурирующая в формулировке теоремы 1А область e^K на плоскости переменного z есть проекция лежащего на римановой поверхности логарифма образа круга $K = \{w : |w| < 1/(e \cdot \bar{a})\}$ при отображении $z = e^w$ (для $\bar{a} < 1/(e \cdot \pi)$) это отображение будет многолистным как отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$).

ТЕОРЕМА 1А. *Если последовательность $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ такова, что $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \bar{a} < \infty$, то функция $f(z) = a_0 \cdot \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle$ регулярна в области U , причем $U \supset P \cap e^K$, где e^K — образ круга $K = \{w : |w| < 1/(e \cdot \bar{a})\}$ при отображении $z = e^w$.*

Если не ограничиваться лишь главным значением $\operatorname{Ln} z$ многозначного логарифма $\operatorname{Ln} z$, то теорему 1А следует сформулировать несколько иначе.

ТЕОРЕМА 1Б. *Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ такова, что $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \bar{a} < \infty$. Тогда функция $f(z) = a_0 \cdot \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle$ регулярна в области U , причем $U \supset e^K$, где e^K — лежащий на римановой поверхности логарифма образ круга $K = \{w : |w| < 1/(e \cdot \bar{a})\}$ при отображении $z = e^w$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В частном случае, если $\bar{a} \geq 1/(\pi \cdot e)$, то отображение круга K функцией $z = e^w$ будет однолистным и его образ e^K будет односвязной областью на плоскости z .

Если $0 < \bar{a} < 1/(\pi \cdot e)$, то образ e^K будет располагаться на конечном числе листов римановой поверхности логарифма.

Если $\bar{a} = 0$, то круг K совпадает со всей конечной плоскостью W ($|w| < \infty$), а образ e^K совпадает со всей римановой поверхностью логарифма при многолистном отображении плоскости W функцией $z = e^w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1Б. Функция $z = e^w$ является бесконечнолистной во всей плоскости w , но любая открытая полоса ширины 2π , параллельная действительной оси, является областью однолистности этой функции. Разделим всю плоскость W на совокупность полос

$$B_k = \{w : (2k-1)\pi < \operatorname{Im} w < (2k+1)\pi\}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Так как $(e^w)' = e^w$, то каждая из полос B_k как область однолистности функции $z = e^w$ конформно отображается на область P , представляющую собой плоскость z с разрезом вдоль луча $z \leq 0$. Прямые $\operatorname{Im} w = (2k-1)\pi$ и $\operatorname{Im} w = (2k+1)\pi$, образующие границу области B_k , переходят соответственно в лучи $\arg z = (2k-1)\pi$ и $\arg z = (2k+1)\pi$, представляющие собой края разреза P . Сама риманова поверхность логарифма состоит при таком подходе из бесконечного множества листов (экземпляров) $P: \dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots$, “наложенных” друг на друга и “склеенных” таким образом, что нижний край разреза k -го экземпляра приклеивается к верхнему краю разреза $(k-1)$ -го экземпляра ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

При доказательстве теоремы 1А в работе [6] (с заменой многозначного логарифма $\operatorname{Ln} z$ на главное значение $(\operatorname{Ln} z) = \ln z = w$) было представлено разложение предельной функции

$$f(z) = a_0 \cdot \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle = F(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle \quad (7)$$

в степенной ряд (см. [6; равенство (73) в формулировке леммы 10 и формулы (83)–(86) в §2]; поскольку там $L_0(w) = F(w)$, в формуле (85) следует взять $r = 0$ и тогда $H_r^{(n)} = H_0^{(n)} = H^{(n)}(f) = H^{(n)}$:

$$F(w) = H^{(0)} + \frac{H^{(1)}}{1!} \cdot w + \frac{H^{(2)}}{2!} \cdot w^2 + \dots + \frac{H^{(n)}}{n!} \cdot w^n + \dots, \quad (8)$$

где $H^{(n)}$ есть форма порядка n от n коэффициентов:

$$H^{(n)} = H^{(n)}(f) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_k!} \cdot i_1^{i_2} \cdot i_2^{i_3} \dots i_{k-1}^{i_k} \cdot a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k}. \quad (9)$$

Радиус круга сходимости степенного ряда (8) оценивается снизу неравенством:

$$R = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|H^{(n)}|}{n!}} \right)^{-1} \geq \frac{1}{e \cdot \bar{a}}. \quad (10)$$

Рассмотрим совокупность областей

$$K_k = K \cap B_k, \quad \text{где } K = \left\{ w : |w| < \frac{1}{e \cdot \bar{a}} \right\}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Если $\bar{a} = 0$, то область K совпадает со всей конечной плоскостью w и тогда $K_k = B_k$, а количество областей K_k будет бесконечным; если же $\bar{a} > 0$, то количество областей K_k будет конечным.

Обратимся вначале к случаю, когда $\bar{a} \geq 1/(e \cdot \pi)$. Радиус круга K в этом случае будет не больше чем π , а сам круг K будет областью однолиственности функции $z = e^w$; при этом его образ e^K помещается на одном, нулевом листе P_0 римановой поверхности и проекция этого образа является односвязной областью на плоскости z . Поскольку значения, принимаемые многозначной аналитической функцией $\text{Ln } z$ в этой области e^K , лежат в круге K , а сам круг K является областью, в которой степенной ряд (8) сходится, то предельная функция

$$f(z) = F(\text{Ln } z) = F(\text{Ln } z) = H_0^{(0)} + \frac{H_0^{(1)}}{1!} \cdot \text{Ln } z + \frac{H_0^{(2)}}{2!} \cdot (\text{Ln } z)^2 + \dots + \frac{H_0^{(n)}}{n!} \cdot (\text{Ln } z)^n + \dots$$

является регулярной в области e^K (здесь $\text{Ln } z = \ln z$, $z \in e^K$, где $\ln z$ — главная ветвь, отвечающая значению $\ln 1 = 0$).

Теперь рассмотрим случай, когда $0 < \bar{a} < 1/(e \cdot \pi)$. Открытый круг K не будет тогда помещаться на одной полосе B_0 , а будет налегать и на другие полосы. Пусть m — натуральное число, связанное с параметром $\bar{a}$ так, что выполняются неравенства

$$m - \frac{1}{2} < \frac{1}{2\pi e \cdot \bar{a}} \leq m + \frac{1}{2}.$$

Тогда радиус $R = 1/(e \cdot \bar{a})$ круга K удовлетворяет неравенствам:

$$(2m - 1)\pi < R \leq (2m + 1)\pi.$$

Это означает, что открытый круг K пересекает полосы

$$B_{-m}, B_{-m+1}, \dots, B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_{m-1}, B_m$$

плоскости w и пересечения $K_j = K \cap B_j$ имеют при отображении $z = e^w$ на римановой поверхности логарифма соответствующие образы

$$e^{K_j} = e^K \cap P_j, \quad j = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, m-1, m.$$

При этом хорды

$$h_\alpha^{(w)} \stackrel{\text{def}}{=} (-\sqrt{R^2 - (\alpha\pi)^2} + i\alpha\pi, \sqrt{R^2 - (\alpha\pi)^2} + i\alpha\pi)$$

круга K , параллельные действительной оси плоскости $w = u + iv$ и удаленные от этой оси на расстояние $\alpha\pi$, где $\alpha \in (-R/\pi, R/\pi)$, переходят в интервалы

$$h_\alpha^{(z)} \stackrel{\text{def}}{=} (e^{-\sqrt{R^2 - (\alpha\pi)^2}} \cdot e^{i\alpha\pi}, e^{\sqrt{R^2 - (\alpha\pi)^2}} \cdot e^{i\alpha\pi}),$$

расположенные на лучах римановой поверхности логарифма, исходящих из точки ветвления $z = 0$. В частности, хорды

$$h_{2j-1}^{(w)}, \quad j = -m+1, -m+2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, m-1, m,$$

переходят в интервалы $h_{2j-1}^{(z)}$, расположенные на римановой поверхности как раз на лучах “склейки” двух соседних экземпляров (листов) P_j и P_{j+1} ($j = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, m-1$) этой поверхности, а проекции всех этих интервалов $h_{2j-1}^{(z)}$ располагаются на отрицательной части действительной оси плоскости z .

Совокупность всех интервалов

$$h_{\alpha}^{(z)}, \quad \alpha \in \left(-\frac{1}{\pi e \cdot \bar{a}}, \frac{1}{\pi e \cdot \bar{a}} \right),$$

представляет собой расположенный на римановой поверхности логарифма образ e^K круга $K = \{w : |w| < 1/(e \cdot \bar{a})\}$ при отображении $z = e^w$.

Этот образ мы можем представить в виде компактного множества

$$\begin{aligned} e^K = & e^{K-m} \cup h_{-2m+1}^{(z)} \cup e^{K-m+1} \cup h_{-2m+3}^{(z)} \cup \dots \cup e^{K-1} \cup h_{-1}^{(z)} \cup e^{K_0} \\ & \cup h_1^{(z)} \cup e^{K_1} \cup h_3^{(z)} \cup \dots \cup h_{2m-3}^{(z)} \cup e^{K_{m-1}} \cup h_{2m-1}^{(z)} \cup e^{K_m}, \end{aligned}$$

которое можно разбить на конечное число однолистных частей.

Если теперь рассмотреть аналитическую функцию $w = \text{Ln } z$, то на этом компактном множестве она будет однозначной и все ее значения заполнят круг K на плоскости w . Так как этот круг является областью сходимости степенного ряда (8), то функция

$$f(z) = F(\text{Ln } z) = H_0^{(0)} + \frac{H_0^{(1)}}{1!} \cdot \text{Ln } z + \frac{H_0^{(2)}}{2!} \cdot (\text{Ln } z)^2 + \dots + \frac{H_0^{(n)}}{n!} \cdot (\text{Ln } z)^n + \dots,$$

так же как и функция $w = \text{Ln } z$, будет на компактном множестве e^K римановой поверхности логарифма однозначной и регулярной. Теорема 1Б доказана.

Таким образом, здесь (в теореме 1Б) мы не ограничиваемся лишь главной ветвью $\text{Ln } z$ (соответствующей значению $\ln 1 = 0$) многозначного логарифма $\text{Ln } z$. Здесь мы пользуемся тем, что на компактном множестве e^K римановой поверхности логарифма функции $\text{Ln } z$ и $f(z)$ однозначны и регулярны.

Если же независимый аргумент z брать на плоскости z в той области, которая является проекцией e^K , то в этом случае от многозначного логарифма $\text{Ln } z$ следует брать лишь главную ветвь (теорема 1А).

§ 2. Нелинейные дифференциальные уравнения, решения которых представимы в виде сходящихся бесконечных цепных степеней и экспонент

Теорема 1 (в виде теоремы 1А или теоремы 1Б) позволяет по коэффициентам конкретной бесконечной цепной степени $\langle z; a_1, a_2, \dots \rangle$ или бесконечной цепной экспоненты $\langle e^t; a_1, a_2, \dots \rangle$ определять или оценивать область сходимости этих бесконечных цепных степеней или экспонент. Например (см. [7]), система нелинейных

дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{x}_k &= x_k \cdot \alpha_{k+1} \cdot x_{k+1} \\
&\times \left[1 + t \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} + t^2 \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdot \alpha_{k+3} \cdot x_{k+3} \right. \\
&\quad + \dots + t^{m-k-1} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdot \dots \cdot \alpha_m \cdot x_m \\
&\quad + t^{m-k} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdot \dots \cdot \alpha_m \cdot x_m \cdot \alpha_1 \cdot x_1 \\
&\quad \left. + \dots + t^{m-1} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdot \dots \cdot \alpha_k \cdot x_k \right] \\
&\times \left[1 - t^m \cdot \alpha_1 \cdot x_1 \cdot \alpha_2 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot \alpha_m \cdot x_m \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{11}$$

с начальными условиями $x_k(0) = 1, k = 1, 2, \dots, m$, имеет решение, представимое системой бесконечных цепных экспонент

$$\begin{aligned}
x_k(t) &= \langle e^t; \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots \rangle, \\
&k = 1, 2, \dots, m.
\end{aligned} \tag{12}$$

Теорема 1 гарантирует, что все эти функции имеют смысл, если

$$t \in \left(-\frac{1}{e \cdot \bar{\alpha}}, \frac{1}{e \cdot \bar{\alpha}} \right), \quad \text{где} \quad \bar{\alpha} = \max_{1 \leq k \leq m} |\alpha_k|. \tag{13}$$

В других работах рассматриваются дифференциальные уравнения 1-го порядка, решения которых представляются в виде цепных степеней бесконечной кратности (см. [8]–[10]). Рассмотрим пример (см. [11]–[14]), родственной приведенной системе нелинейных дифференциальных уравнений, который непосредственно порождает задачу о сходимости цепной степени с чередующимися коэффициентами. Нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = \beta \frac{y}{x} \cdot x^y \cdot \frac{1 + y \ln x}{1 - \beta y x^y (\ln x)^2}, \quad y(1) = \alpha, \tag{14}$$

имеет решение в виде цепной степени бесконечной кратности

$$y = \alpha \cdot \langle x; \beta, \alpha, \beta, \alpha, \dots \rangle, \quad \exp\left(-\frac{1}{e \cdot \bar{a}}\right) < x < \exp\left(\frac{1}{e \cdot \bar{a}}\right), \quad \bar{a} = \max(\alpha, \beta). \tag{15}$$

И здесь теорема 1 гарантирует сходимость этого решения при вещественных α и β в указанном интервале. Если же α и β – комплексные, то сходимость для $y(z)$ гарантирована в области, указанной в формулировках теорем 1А и 1Б. Однако возникает вопрос: можно ли утверждать, что область сходимости (в связи с тем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \bar{a}$) шире, нежели та, о которой говорится в теореме 1?

Разумеется, здесь вопрос принципиально отличается от подобного вопроса при определении области сходимости степенных рядов. Как будет показано в теореме 2, область сходимости бесконечных цепных степеней и экспонент в случае чередующихся значений коэффициентов существенно расширяется при уменьшении $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ по сравнению с $\bar{a} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|$.

Нелишним будет сказать о степенных рядах

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (16)$$

которые имеют конечное число различных коэффициентов. Таким рядам посвятил в 1906 году работу [15] П. Фату. В 1922 году в работе [16] Сегё доказал, что степенной ряд (16), коэффициенты которого принимают лишь конечное число различных значений, либо представляет собой рациональную функцию, либо непродолжим за пределы единичного круга. В случае рациональности суммы ряда коэффициенты, начиная с некоторого номера, образуют периодическую последовательность, а сама функция $f(z)$ представима в форме

$$f(z) = \frac{p(z)}{1 - z^m}$$

(см. об этом также в книге [17; с. 164, 165]).

На сходимость бесконечных цепных степеней, как и на сходимость степенных рядов, не влияют значения коэффициентов с начальными номерами, лишь бы они были отличны от нуля (см. [6]). Так что, если потребуется исследовать на сходимость цепную степень $\langle z; a_1, a_2, \dots, a_m, \alpha, \beta, \alpha, \beta, \dots \rangle$, достаточно исследовать на сходимость бесконечную цепную степень

$$z^\beta \cdot z^\alpha \cdot z^\beta \cdot z^{\dots} = \langle z; \beta, \alpha, \beta, \alpha, \dots \rangle.$$

Еще заметим, что исследование на сходимость такой цепной степени просто сводится к случаю, когда $\alpha = 1$, $|\beta| > 1$. Действительно, не нарушая общности, положим $|\beta| > |\alpha|$ и, обозначая $\beta' = \beta/\alpha$, имеем $|\beta'| > 1$. Тогда вместо круга $K = \{|w| < 1/(e \cdot |\beta|)\}$ в комплексной плоскости W следует взять круг $K_\alpha = \{|w_\alpha| < 1/(e \cdot |\beta'|)\}$ в другой комплексной плоскости $W_\alpha = \alpha \cdot W$ и к преобразованной бесконечной цепной степени $\langle z; \beta, \alpha, \beta, \alpha, \dots \rangle = \langle z^\alpha; \beta/\alpha, 1, \beta/\alpha, 1, \dots \rangle = \langle z; \beta', 1, \beta', 1, \dots \rangle$ с переменной $z' = z^\alpha$ применить теорему 1. Именно, полагая $\alpha = 1$, $|\beta| > 1$, вместо радиуса $1/(e \cdot \bar{\alpha})$ круга K гарантированно можно взять величину $1/(e \cdot |\beta|)$.

§ 3. Теорема о степени бесконечной кратности с чередующимися коэффициентами

Возвращаясь к вопросу о возможности расширения области сходимости в связи с тем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|,$$

сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = \beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $|\beta| > 1$, и пусть

$$q = \sqrt{|\beta|} \cdot \exp\left(\frac{2t^2}{1-t^2}\right), \quad (17)$$

где $t = t(\sqrt{|\beta|}) \in [0, 1)$ – решение уравнения

$$\sqrt{|\beta|} = \frac{1+t}{1-t} \cdot \exp\left(\frac{2t}{1-t^2}\right). \quad (18)$$

Тогда в теореме 1А или 1Б вместо $\bar{a} = |\beta|$ можно взять величину q .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В явном виде величину q при различных $|\beta|$, $1 \leq |\beta| < \infty$, можно оценить так: $q \leq q_i(|\beta|)$, $i = 1, 2, 3$, где

$$\begin{aligned} q_1(|\beta|) &= \sqrt{|\beta|} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(\ln |\beta|) \cdot \frac{\sqrt{|\beta|} - 1}{\sqrt{|\beta|} + 1}\right], & 1 \leq |\beta| \leq 2800, \\ q_2(|\beta|) &= \frac{1}{4} \cdot |\beta|^{7/8}, & 2800 < |\beta| \leq 4 \cdot 10^4, \\ q_3(|\beta|) &= \frac{|\beta|}{e \cdot \ln |\beta|} \cdot \left[1 + 3 \cdot \frac{\ln(\frac{3}{2} \ln |\beta|)}{\ln |\beta|}\right], & 4 \cdot 10^4 < |\beta| < \infty. \end{aligned} \quad (19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для доказательства теоремы 2 были установлены две комбинаторные леммы, имеющие самостоятельный интерес. Поэтому они названы теоремой 3 и теоремой 4. Теорема 3 нужна для доказательства теоремы 4, которая, в свою очередь, при доказательстве теоремы 2 использована в качестве основной леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. В разложении предельной функции (7) в степенной ряд (8) коэффициенты $a_1, a_2, \dots$ фигурируют лишь внутри формы (9), а радиус сходимости этого ряда дается и оценивается формулой (10). Теперь доказательство теоремы 2 сводится к тому, чтобы оценить при $n \rightarrow \infty$ величину

$$\Gamma_n(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{n!} \cdot |H^{(n)}|\right)^{1/n} \quad (20)$$

в случае, когда $a_{2k} = 1$, $a_{2k+1} = \beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Теорема 4 показывает, что в этом частном случае форма $H^{(n)}$ степени n сводится к сравнительно простому полиному $H^{(n)}(\beta)$ тоже степени n от одной переменной β :

$$H^{(n)} = H^{(n)}(\beta) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \beta^k \cdot (n-k+1)^{k-1} \cdot k^{n-k}. \quad (21)$$

В дальнейшем эти полиномы при различных n будем называть *полиномами с большими коэффициентами*.

Пусть в сумме $H^{(n)}(|\beta|)$ при $k = l$ слагаемое $|\beta|^l \cdot \binom{n}{l} \cdot (n-l+1)^{l-1} \cdot l^{n-l}$ является (при $n > n_0$) максимальным среди других слагаемых. Последнее слагаемое (при $k = n$) в этой сумме равно β^n и не будет максимальным, хотя бы по сравнению с предпоследним слагаемым $|\beta|^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot n(n-1)$, поэтому при $n > n_0$ выполняется неравенство $l \leq n-1$. Назовем натуральное l *экстремальным индексом*.

Тогда имеем два неравенства:

$$(\Gamma_n(\beta))^n < \frac{1}{(n-1)!} \cdot |\beta|^l \cdot \binom{n}{l} \cdot (n-l+1)^{l-1} \cdot l^{n-l}, \quad (22)$$

$$(\Gamma_n(|\beta|))^n > \frac{1}{n!} \cdot |\beta|^l \cdot \binom{n}{l} \cdot (n-l+1)^{l-1} \cdot l^{n-l}. \quad (23)$$

Разница между этими двумя оценками состоит в множителе n , но после извлечения корня n -й степени из правых частей обоих неравенств и предельного перехода при $n \rightarrow \infty$ мы получим одно и то же. Если в процессе дальнейшей оценки правой части (22) мы изменим ее лишь постоянным множителем, то полученная оценка для $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(\beta)$ сверху есть в точности величина $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(|\beta|)$.

Ниже будем пользоваться неравенствами

$$\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{e}. \quad (24)$$

Теперь правую часть неравенства (22) представим в виде произведения сомножителей, которые имеют различную скорость изменения при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} (\Gamma_n(\beta))^n &< n \cdot |\beta|^l \cdot \frac{l^{n-l} \cdot (n-l)^l}{l! \cdot (n-l)!} \cdot \frac{(n-l+1)^{l-1}}{(n-l)^l} \\ &< n \cdot \frac{|\beta|^l}{\sqrt{2\pi l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-l)^3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-l}\right)^{l-1} \cdot \frac{l^{n-l} \cdot (n-l)^l}{\left(\frac{l}{e}\right)^l \cdot \left(\frac{n-l}{e}\right)^{n-l}} \\ &= \frac{n}{2\pi \cdot \sqrt{l \cdot (n-l)^3}} \cdot e^n \cdot (|\beta|^{l/n})^n \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-l/n}\right)^{(l-1)/n} \right]^n \cdot \left[\left(\frac{l}{n-l}\right)^{1-2l/n} \right]^n. \end{aligned}$$

Для нахождения предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(|\beta|)$ представим оценки (22) и (23) (изменив их разве лишь постоянным множителем) в форме:

$$\begin{aligned} (\Gamma_n(\beta))^n &< [e \cdot \sqrt{|\beta|}]^n \cdot \left[\left(\frac{n}{2\pi \cdot \sqrt{l \cdot (n-l)^3}} \right)^{1/n} \right]^n \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-l/n}\right)^{(l-1)/n} \right]^n \cdot \left\{ \left[\sqrt{|\beta|} \cdot \left(\frac{1}{l/n} - 1 \right) \right]^{2l/n-1} \right\}^n; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} (\Gamma_n(|\beta|))^n &> [e \cdot \sqrt{|\beta|}]^n \cdot \left[\left(\frac{1}{2\pi \cdot e \cdot \sqrt{l \cdot (n-l)^3}} \right)^{1/n} \right]^n \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-l/n}\right)^{(l-1)/n} \right]^n \cdot \left\{ \left[\sqrt{|\beta|} \cdot \left(\frac{1}{l/n} - 1 \right) \right]^{2l/n-1} \right\}^n. \end{aligned} \quad (26)$$

При нахождении экстремального индекса l будем полагать, что произвольный индекс k в сумме $H^{(n)}(|\beta|)$ (см. (21)), так же как и экстремальный индекс l , не

может быть равным n . Положим $\lambda = k/n$, $1 \leq k \leq n-1$, $\gamma = \sqrt{|\beta|}$ и представим величину

$$A(\gamma, n, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (e \cdot \gamma) \cdot \left(\frac{1}{2\pi n \sqrt{\lambda(1-\lambda)^3}} \right)^{1/n} \\ \times \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\lambda} \right)^{\lambda-1/n} \cdot \left[\gamma \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]^{2\lambda-1}$$

в виде

$$A(\gamma, n, \lambda) = (e \cdot \gamma) \cdot A_1(n, \lambda) \cdot A_2(n, \lambda) \cdot A_3(\gamma, \lambda), \quad (27)$$

где

$$A_1(n, \lambda) = \left(\frac{1}{2\pi n \sqrt{\lambda(1-\lambda)^3}} \right)^{1/n} = \left(\frac{n}{2\pi \sqrt{k(n-k)^3}} \right)^{1/n}; \quad (28)$$

$$A_2(n, \lambda) = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\lambda} \right)^{\lambda-1/n} = \left(1 + \frac{1}{n-k} \right)^{(k-1)/n}; \quad (29)$$

$$A_3(\gamma, \lambda) = \left[\gamma \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]^{2\lambda-1}. \quad (30)$$

Отметим сразу два очевидных факта. Во-первых, из правой части определения (28) следует, что (поскольку $n-k \geq 1$) предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1\left(n, \frac{k}{n}\right) = 1 \quad (31)$$

не зависит от λ . Во-вторых, из правой части определения (29) видно, что величина $A_2(n, \lambda)$ при всех k , $1 \leq k \leq n-1$, остается меньше 2 (максимум достигается при $k = n-1$) и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n-1} A_2\left(n, \frac{k}{n}\right) \right\} = 2. \quad (32)$$

Как видно из правых частей равенств (25) и (26), для оценки $\Gamma_n(\beta)$ вместо экстремального индекса l достаточно использовать экстремальное отношение l/n , которое подчинено условию $1/n \leq l/n \leq (n-1)/n$. Считая далее, что отношение $k/n = \lambda$ может принимать в промежутке $[1/n, (n-1)/n]$ все вещественные значения, будем фиксировать параметр λ в интервале $(0, 1)$ и при различных фиксированных λ находить пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\gamma, n, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\gamma, \lambda). \quad (33)$$

Тем самым будет определена функция $\psi(\gamma, \lambda)$, $0 < \lambda < 1$, причем

$$\sup_{0 < \lambda < 1} \psi(\gamma, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} h(\gamma) = h(\sqrt{|\beta|}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(|\beta|) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(\beta). \quad (34)$$

Покажем, что для экстремального отношения l/n должны выполняться неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{l}{n} < \frac{\gamma}{\gamma+1} \quad (n > n_0). \quad (35)$$

Если фиксировать $\lambda = 1/2$ или $\lambda = \gamma/(\gamma+1)$, то

$$A_3\left(\gamma, \frac{1}{2}\right) = A_3\left(\gamma, \frac{\gamma}{\gamma+1}\right) = 1. \quad (36)$$

Действительно, при $\lambda = 1/2$ содержимое в квадратных скобках равенства (30) возводится в нулевую степень, а при $\lambda = \gamma/(\gamma+1)$ оно равно $\gamma \cdot ((\gamma+1)/\gamma - 1) = 1$.

Если фиксировать λ в интервалах $(0, 1/2)$ и $(\gamma/(\gamma+1), 1)$, то будет выполняться неравенство

$$A_3(\gamma, \lambda) < 1, \quad (37)$$

так как в первом случае величина в квадратных скобках в определении (30) больше единицы, а степень, в которую возводится эта величина, отрицательна; во втором же случае, когда $\lambda \in (\gamma/(\gamma+1), 1)$, содержимое в квадратных скобках меньше единицы и оно возводится в положительную степень. Кроме того, при $\lambda \geq 4\gamma/(4\gamma+1)$ выполняются неравенства

$$A_3(\gamma, \lambda) \leq \left[\gamma \cdot \left(\frac{4\gamma+1}{4\gamma} - 1 \right) \right]^{\frac{4\gamma-1}{4\gamma+1}} < \left(\frac{1}{4} \right)^{3/5} < \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Что касается предела $\lim_{n \rightarrow \infty} A_2(n, \lambda)$ при различных λ , то из равенства (32) следует, что он не превышает 2 при всех $\lambda \in (0, 1)$; но если фиксировать $\lambda \in (0, 4\gamma/(4\gamma+1)]$, то

$$\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\lambda} \right)^{\lambda-1/n} < 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4\gamma}{4\gamma+1}} = 1 + \frac{1}{n} \cdot (4\gamma+1),$$

откуда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_2(n, \lambda) = 1, \quad \lambda \in \left(0, \frac{4\gamma}{4\gamma+1} \right]. \quad (39)$$

Представим интервал $(0, 1)$ в виде объединения четырех промежутков I_1, I_2, I_3 и I_4 , где

$$I_1 = \left(0, \frac{1}{2} \right], \quad I_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{\gamma+1} \right), \quad I_3 = \left[\frac{\gamma}{\gamma+1}, \frac{4\gamma}{4\gamma+1} \right], \quad I_4 = \left(\frac{4\gamma}{4\gamma+1}, 1 \right).$$

Из определения (30) следует, что

$$A_3(\gamma, \lambda) > 1 \quad \text{при} \quad \lambda \in I_2, \quad (40)$$

так как в положительную степень возводится величина

$$\gamma \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) > \gamma \cdot \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} - 1 \right) = 1.$$

Из равенств (31), (32) и неравенств (38) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1(n, \lambda) \cdot A_2(n, \lambda) \cdot A_3(\gamma, \lambda) < 1, \quad \lambda \in I_4;$$

из равенств (31) и (39) следует существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1(n, \lambda) \cdot A_2(n, \lambda) = 1, \quad \lambda \in I_1 \cup I_2 \cup I_3; \quad (41)$$

отсюда, из равенств (36) и неравенства (37) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1(n, \lambda) \cdot A_2(n, \lambda) \cdot A_3(\gamma, \lambda) < 1, \quad \lambda \in I_1 \cup I_3,$$

а из неравенства (40) и равенства (41) последует, напротив,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1(n, \lambda) \cdot A_2(n, \lambda) \cdot A_3(\gamma, \lambda) > 1, \quad \lambda \in I_2.$$

Таким образом, для функции $\psi(\gamma, \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\gamma, n, \lambda)$ установлены неравенства:

$$\begin{aligned} \psi(\gamma, \lambda) &\leq e \cdot \gamma, & \lambda \in I_1 \cup I_3 \cup I_4; \\ \psi(\gamma, \lambda) &> e \cdot \gamma, & \lambda \in I_2; \end{aligned}$$

и тем самым доказаны неравенства (35).

Кроме того, на отрезке $[1/2, \gamma/(\gamma + 1)]$ по переменной λ функция $\psi(\gamma, \lambda)$ определена формулой

$$\psi(\gamma, \lambda) = e \cdot \gamma \cdot \left[\gamma \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]^{2\lambda-1}, \quad \lambda \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{\gamma+1} \right]. \quad (42)$$

Эта функция непрерывна вместе со своей производной

$$\frac{d}{d\lambda}(\psi(\gamma, \lambda)) = e \cdot \gamma \cdot \left[\gamma \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]^{2\lambda-1} \cdot \left\{ 2 \ln \left[\gamma \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right] - \frac{2\lambda-1}{\lambda \cdot (1-\lambda)} \right\}. \quad (43)$$

Теперь вместо определения (34) можно записать соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(\beta) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(|\beta|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(\gamma^2) \leq \max_{\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{\gamma}{\gamma+1}} \psi(\gamma, \lambda) \\ &= h(\gamma) = e \cdot \gamma \cdot \max_{\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{\gamma}{\gamma+1}} \left[\gamma \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right]^{2\lambda-1}. \end{aligned} \quad (44)$$

После линейного преобразования $2\lambda - 1 = \tau$ функция (42) и величина $h(\gamma)$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\psi\left(\gamma, \frac{\tau+1}{2}\right) &= \varphi(\gamma, \tau) = e \cdot \gamma \cdot \left[\gamma \cdot \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\right]^\tau, \quad \tau \in \left[0, \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right], \\ h(\gamma) &= e \cdot \gamma \cdot \max_{0 \leq \tau \leq \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \left[\gamma \cdot \left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\right]^\tau.\end{aligned}\quad (45)$$

Из производной (43) следует, что максимальное значение функции $\varphi(\gamma, \tau)$ на отрезке $\left[0, \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]$ достигается в точке $\tau = t$, удовлетворяющей равенству

$$\ln\left[\gamma \cdot \left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right] = \frac{2t}{1-t^2},$$

что равносильно каждому из двух равенств:

$$\gamma = \frac{1+t}{1-t} \cdot \exp\left(\frac{2t}{1-t^2}\right), \quad (46)$$

$$\left[\gamma \cdot \left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right]^t = \exp\left(\frac{2t^2}{1-t^2}\right). \quad (47)$$

Напомним, что если $\gamma = |\beta| = 1$, то в теореме 1 в этом случае $\bar{a} = |\beta| = 1$. Тогда отрезок $\left[0, \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]$ вырождается в точку $[0, 0] \ni \tau = t = 0$. В данном же случае γ задается как любое $\gamma = \sqrt{|\beta|} \geq 1$, а равенство (46) следует понимать как непрерывную неограниченную на полусегменте $[0, 1)$ монотонную функцию

$$\gamma(t) = \frac{1+t}{1-t} \cdot \exp\left(\frac{2t}{1-t^2}\right) = \sqrt{|\beta|}, \quad t \in [0, 1). \quad (48)$$

Однако аргументом является все же параметр $\gamma = \sqrt{|\beta|}$, а искомой функцией является $h(\gamma)$, при помощи которой по формуле (44) оценивается предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(|\beta|)$ и тем самым в теореме 1 оценивается радиус $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(\beta)}$ круга $K = \{w : |w| < R\}$ по формуле

$$R \geq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(|\beta|)} = \frac{1}{h(\gamma)} = \frac{1}{h(\sqrt{|\beta|})}. \quad (49)$$

Положим

$$q(|\beta|) = \frac{1}{e} \cdot h(\sqrt{|\beta|}). \quad (50)$$

Так как функция $\gamma(t)$ строго возрастает и непрерывна на полусегменте $[0, 1)$, то обратная функция $t = t(\gamma)$, $\gamma \geq 1$, является непрерывной и строго возрастающей

функцией. Подставляя в формулу (45) вместо τ функцию $t(\gamma)$ и упраздняя символ максимума, получаем зависящую от γ функцию

$$h(\gamma) = e \cdot \gamma \cdot \left[\gamma \cdot \left(\frac{1 - t(\gamma)}{1 + t(\gamma)} \right) \right]^{t(\gamma)} = e \cdot q(\gamma^2) = e \cdot q(|\beta|), \quad |\beta| \geq 1.$$

Используя равенства (47) и (50), можно представить функции $h(\gamma)$ и $q(|\beta|)$ соответственно в виде

$$h(\gamma) = e \cdot \gamma \cdot \exp\left(\frac{2(t(\gamma))^2}{1 - (t(\gamma))^2}\right), \quad \gamma \geq 1,$$

$$q(|\beta|) = \sqrt{|\beta|} \cdot \exp\left(\frac{2(t(\sqrt{|\beta|}))^2}{1 - (t(\sqrt{|\beta|}))^2}\right), \quad |\beta| \geq 1,$$

где $t(\gamma) = t(\sqrt{|\beta|})$ — обратная функция по отношению к функции (48).

Теорема 2 доказана.

§ 4. Теорема об одном комбинаторном тождестве с числами Стирлинга 2-го рода

Числа Стирлинга 1-го рода $s(n, k)$ и 2-го рода $S(n, k)$ определяются как коэффициенты из равенств:

$$(t)_0 = t^0 = s(0, 0) = S(0, 0) = 1, \quad (51)$$

$$(t)_n = t(t-1) \cdots (t-n+1) = \sum_{k=1}^n s(n, k) t^k, \quad t^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) \cdot (t)_k, \quad n > 0. \quad (52)$$

При $n > 0$ числа обоих родов отличны от нуля лишь для $k = 1, 2, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо тождество*

$$\begin{aligned} & \sum S(\lambda_0, \rho_0) \cdot S(\lambda_1, \rho_1) \cdots S(\lambda_b, \rho_b) \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdot \lambda_1^{\rho_2} \cdots \lambda_{b-1}^{\rho_b}}{\lambda_0! \cdot \lambda_1! \cdots \lambda_b!} \\ &= S(h, \rho_0 + b) \cdot \binom{\rho_0 + b - 1}{b} \cdot \frac{h^b}{h!}, \end{aligned} \quad (53)$$

где суммирование производится по всем наборам целых неотрицательных чисел $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_b$ и $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_b$ таким, что $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_b = b$ и $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_b = h$; ρ_0 — натуральное число.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. По определению $0^0 = 1$; $0! = 1$. Если в одном из слагаемых, не равных нулю, окажется $\lambda_k = 0$, $k < b$, то $\rho_k = 0$ и все последующие индексы $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_b$ и $\rho_{k+1}, \dots, \rho_b$ должны быть нулевыми. Действительно, в этом слагаемом

$$S(\lambda_0, \rho_0) \cdots S(\lambda_{k-1}, \rho_{k-1}) \cdot S(\lambda_k, \rho_k) \cdot S(\lambda_{k+1}, \rho_{k+1}) \cdots S(\lambda_b, \rho_b) \\ \times \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdots \lambda_{k-1}^{\rho_k} \cdot \lambda_k^{\rho_{k+1}} \cdot \lambda_{k+1}^{\rho_{k+2}} \cdots \lambda_{b-1}^{\rho_b}}{\lambda_0! \cdots \lambda_{k-1}! \cdot \lambda_k! \cdot \lambda_{k+1}! \cdots \lambda_b!}$$

множитель $S(\lambda_k, \rho_k) = S(0, \rho_k) \neq 0$ лишь при $\rho_k = 0$ (см. определения (51) и (52)); неравенство $\lambda_k^{\rho_{k+1}} \neq 0$ может быть только при $\rho_{k+1} = 0$, а это приводит к тому, что число $S(\lambda_{k+1}, \rho_{k+1}) = S(\lambda_{k+1}, 0)$ будет отлично от нуля лишь в том случае, если $\lambda_{k+1} = 0$, и т. д. Таким образом, тождество (53) может быть представлено в виде

$$\sum_{k=0}^b \sum S(\lambda_0, \rho_0) \cdot S(\lambda_1, \rho_1) \cdots S(\lambda_k, \rho_k) \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdot \lambda_1^{\rho_2} \cdots \lambda_{k-1}^{\rho_k}}{\lambda_0! \cdot \lambda_1! \cdots \lambda_k!} \\ = S(h, \rho_0 + b) \cdot \binom{\rho_0 + b - 1}{b} \cdot \frac{h^b}{h!}, \quad (54)$$

где внутреннее суммирование распространяется на всевозможные системы целых положительных чисел $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ и $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, удовлетворяющих условиям $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k = b$, $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Известно тождество (см. [17; с. 627])

$$\binom{m}{r} \cdot S(n, m) = \sum_{k=m-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot S(k, m-r) \quad (n \geq m \geq r). \quad (55)$$

Из него вытекает другое тождество

$$\sum_{k=m-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot S(k+1, m-r+1) = S(n+1, m+1) \cdot \binom{m}{r} \quad (n \geq m \geq r). \quad (56)$$

Действительно, используя свойство чисел Стирлинга 2-го рода

$$S(k+1, m-r+1) = (m-r+1) \cdot S(k, m-r+1) + S(k, m-r), \quad (57)$$

левую часть равенства (56) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot [(m-r+1) \cdot S(k, m-r+1) + S(k, m-r)] \\
&= (m-r+1) \sum_{k=m-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot S(k, m-r+1) \\
&\quad + \sum_{k=m-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot S(k, m-r) \\
&= (m-r+1) \cdot \left[\binom{n}{m-r} \cdot S(n-m+r, r) \cdot S(m-r, m-r+1) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=(m+1)-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot S(k, (m+1)-r) \right] + \binom{m}{r} \cdot S(n, m). \quad (58)
\end{aligned}$$

Так как $S(m-r, m-r+1) = 0$, а по тождеству (55) сумму в квадратных скобках можно представить в виде

$$\sum_{k=(m+1)-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot S(k, (m+1)-r) = \binom{m+1}{r} \cdot S(n, m+1),$$

то после подстановки значения этой суммы в квадратные скобки в правой части равенства (58) и после использования упомянутого свойства (57) получим тождество (56):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=m-r}^{n-r} \binom{n}{k} \cdot S(n-k, r) \cdot S(k+1, m-r+1) \\
&= (m-r+1) \cdot \frac{(m+1) \cdot m!}{(m+1-r) \cdot (m-r)! \cdot r!} \cdot S(n, m+1) + \frac{m!}{(m-r)! \cdot r!} \cdot S(n, m) \\
&= \binom{m}{r} \cdot [(m+1) \cdot S(n, m+1) + S(n, m)] = \binom{m}{r} \cdot S(n+1, m+1).
\end{aligned}$$

При $b = 0$ равенство (53) является тривиальным, так как вместо суммы есть одно слагаемое $S(\lambda_0, \rho_0)/\lambda_0!$, где $\lambda_0 = h$. Проведем доказательство теоремы по индукции, оставляя натуральные ρ_0 и h без изменения (фиксируя их по произволу), а вместо натурального b возьмем переменный индекс i , меняющийся от 1 до b . Если теорема будет доказана для $i = 1$ и предположение о том, что она справедлива при всех $i = 2, 3, \dots, b-1$, приведет к равенству (53), то тем самым это тождество будет установлено.

При $i = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\rho_1=1 \\ \lambda_0+\lambda_1=h}} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot S(\lambda_1, 1) \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_0! \cdot \lambda_1!} \\
&= \frac{1}{(h-1)!} \sum_{\lambda_0=\rho_0}^{h-1} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot \frac{(h-1)!}{(\lambda_0-1)! \cdot (h-\lambda_0)!} \\
&= \frac{1}{(h-1)!} \sum_{k=\rho_0-1}^{(h-1)-1} S(k+1, (\rho_0-1)+1) \cdot S((h-1)-k, 1) \cdot \binom{h-1}{k} \\
&= \frac{1}{(h-1)!} \cdot S(h, \rho_0+1) \cdot \binom{\rho_0}{1}. \tag{59}
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо по тождеству (56), если положить там $r = 1$, $m = \rho_0$, $n = h - 1$.

Таким образом, доказано равенство (53) для частного случая, когда вместо b мы берем $i = 1$. Предположим теперь, что равенство (53) справедливо для всех $i = 2, 3, \dots, b-1$, и покажем, что при $i = b$ равенство (53) также справедливо. Запишем левую часть равенства (53) в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\rho_1+\dots+\rho_b=b \\ \lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_b=h}} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot S(\lambda_1, \rho_1) \cdots S(\lambda_b, \rho_b) \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdot \lambda_1^{\rho_2} \cdots \lambda_{b-1}^{\rho_b}}{\lambda_0! \cdot \lambda_1! \cdots \lambda_b!} \\
&= \sum_{\lambda_0=\rho_0}^{h-b} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot \frac{1}{\lambda_0!} \cdot \sum_{\rho_1=1}^b \lambda_0^{\rho_1} \\
&\quad \times \sum_{\substack{\rho_2+\dots+\rho_b=b-\rho_1 \\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{b-\rho_1}=h-\lambda_0}} S(\lambda_1, \rho_1) \cdots S(\lambda_b, \rho_b) \cdot \frac{\lambda_1^{\rho_1} \cdot \lambda_2^{\rho_2} \cdots \lambda_{b-1}^{\rho_b}}{\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdots \lambda_b!}. \tag{60}
\end{aligned}$$

Зафиксируем натуральное ρ_1 в пределах $1 \leq \rho_1 \leq b-1$ и, переобозначив индексы $\rho_1 = r_0$, $\rho_2 = r_1$, $\dots$, $\rho_b = r_{b-1}$, $\lambda_1 = l_0$, $\lambda_2 = l_1$, $\dots$, $\lambda_b = l_{b-1}$, запишем правую часть равенства (60) в новых обозначениях

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda_0=\rho_0}^{h-b} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot \frac{1}{\lambda_0!} \cdot \sum_{r_0=1}^b \lambda_0^{r_0} \cdot \sum_{\substack{r_1+\dots+r_{b-r_0}=b-r_0 \\ l_0+l_1+\dots+l_{b-r_0}=h-\lambda_0}} S(l_0, r_0) \\
&\quad \times S(l_1, r_1) \cdots S(l_{b-r_0}, r_{b-r_0}) \cdot \frac{l_0^{r_1} \cdot l_1^{r_2} \cdots l_{b-r_0-1}^{r_{b-r_0}}}{l_0! \cdot l_1! \cdots l_{b-r_0}!}. \tag{61}
\end{aligned}$$

Теперь последняя внутренняя сумма этого выражения представляет собой левую часть равенства (53), где вместо ρ_0 берется $\rho_1 = r_0$, вместо h берется $h - \lambda_0$, вместо b берется $b - r_0 \leq b - 1$. Тогда воспользуемся предположением о том, что с изменением индекса b на i равенство (53) справедливо для всех $i = 2, 3, \dots, b-1$.

Для этого применим равенство (53) к внутренней сумме выражения (61), после чего получим равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{r_1 + \dots + r_{b-r_0} = b-r_0 \\ l_0 + l_1 + \dots + l_{b-r_0} = h-\lambda_0}} S(l_0, r_0) \cdot S(l_1, r_1) \cdots S(l_{b-r_0}, r_{b-r_0}) \frac{l_0^{r_1} \cdot l_1^{r_2} \cdots l_{b-r_0}^{r_{b-r_0}-1}}{l_0! \cdot l_1! \cdots l_{b-r_0}!} \\ &= S(h - \lambda_0, b) \cdot \binom{b-1}{b-r_0} \cdot \frac{(h - \lambda_0)^{b-r_0}}{(h - \lambda_0)!}. \end{aligned} \quad (62)$$

Подставим полученную правую часть этого равенства вместо внутренней суммы выражения (61), а затем, возвращаясь к правой части равенства (60) с прежними индексами, получим там суммирование лишь по двум индексам ρ_1 и λ_0 . Таким образом, вместо (60) имеем равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\rho_1 + \dots + \rho_b = b \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_b = h}} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot S(\lambda_1, \rho_1) \cdots S(\lambda_b, \rho_b) \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdot \lambda_1^{\rho_2} \cdots \lambda_{b-1}^{\rho_b}}{\lambda_0! \cdot \lambda_1! \cdots \lambda_b!} \\ &= \sum_{\lambda_0 = \rho_0}^{h-b} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot \frac{1}{\lambda_0!} \sum_{\rho_1=1}^b \lambda_0^{\rho_1} \cdot S(h - \lambda_0, b) \cdot \binom{b-1}{b-\rho_1} \cdot \frac{(h - \lambda_0)^{b-\rho_1}}{(h - \lambda_0)!}. \end{aligned} \quad (63)$$

Из внутренней суммы легко образуется бином Ньютона

$$\begin{aligned} & \sum_{\rho_1=1}^b \lambda_0^{\rho_1} \cdot S(h - \lambda_0, b) \cdot \binom{b-1}{b-\rho_1} \cdot \frac{(h - \lambda_0)^{b-\rho_1}}{(h - \lambda_0)!} \\ &= \lambda_0 \cdot S(h - \lambda_0, b) \cdot \frac{1}{(h - \lambda_0)!} \cdot \sum_{k=0}^{b-1} \lambda_0^k \binom{b-1}{b-1-k} \cdot (h - \lambda_0)^{b-1-k} \\ &= S(h - \lambda_0, b) \cdot \lambda_0 \cdot \frac{1}{(h - \lambda_0)!} \cdot h^{b-1}. \end{aligned} \quad (64)$$

Осталось лишь представить правую часть равенства (63) (с использованием (64)) в форме левой части тождества (56). Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_0 = \rho_0}^{h-b} S(\lambda_0, \rho_0) \cdot S(h - \lambda_0, b) \cdot \frac{1}{(\lambda_0 - 1)!} \cdot \frac{1}{(h - \lambda_0)!} \cdot h^{b-1} \\ &= \frac{h^{b-1}}{(h-1)!} \cdot \sum_{k=\rho_0-1}^{(h-1)-b} S((\rho_0 - 1) + 1, k + 1) \cdot S((h-1) - k, b) \cdot \binom{h-1}{k} \\ &= \frac{h^{b-1}}{(h-1)!} \cdot S(h, \rho_0 + b) \cdot \binom{\rho_0 + b - 1}{b}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Попутно установим следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_r$ – любые числа, удовлетворяющие лишь условию $c_1 + c_2 + \dots + c_r = c$, k и n – натуральные числа. Имеет место тождество

$$\sum S(l_1, \alpha_1) \cdots S(l_r, \alpha_r) \cdot \frac{c_1^{\alpha_1} \cdots c_r^{\alpha_r}}{l_1! \cdots l_r!} = S(n, k) \cdot \frac{c^k}{n!}, \quad (65)$$

где суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $l_1, \dots, l_r$ таким, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k$ и $l_1 + \dots + l_r = n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $c_1, c_2, \dots, c_r$ – любые числа, удовлетворяющие лишь условию $c_1 + c_2 + \dots + c_r = c$, k, n, τ – целые неотрицательные числа. Имеет место тождество

$$\sum S(l_0, \tau) \cdot S(l_1, \alpha_1) \cdots S(l_r, \alpha_r) \frac{c_1^{\alpha_1} \cdot c_2^{\alpha_2} \cdots c_r^{\alpha_r}}{l_0! \cdot l_1! \cdots l_r!} = S(n, k + \tau) \cdot \binom{k + \tau}{k} \cdot \frac{c^k}{n!}, \quad (66)$$

где суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $l_0, l_1, \dots, l_r$ таким, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k$ и $l_0 + l_1 + \dots + l_r = n$.

Тождество (65) является частным случаем тождества (66), поэтому проведем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Рассмотрим аналитическую функцию трех переменных

$$f(x, y, z) = \exp\{y \cdot T \cdot E\}, \quad \text{где } T = c + z, \quad E = e^x - 1.$$

При разложении $f(x, y, z)$ в степенной ряд в окрестности точки $(0, 0, 0)$ выделим слагаемое $a_{n, m, \tau} \cdot x^n \cdot y^m \cdot z^\tau$, где $m = k + \tau$, и будем определять коэффициент $a_{n, m, \tau}$. Начнем с представления

$$\exp\{y \cdot T \cdot E\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(y \cdot T \cdot E)^j}{j!}. \quad (67)$$

Поскольку произведение $T \cdot E$ не зависит от y , то в сумме (67) для извлечения слагаемого $a_{n, m, \tau} \cdot x^n \cdot y^m \cdot z^\tau$ можно взять лишь одно слагаемое с индексом $j = m$, равное

$$y^m \cdot \frac{1}{m!} \cdot (T \cdot E)^m. \quad (68)$$

От переменной z зависит лишь множитель T^m . После применения бинома Ньютона

$$T^m = (c + z)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \cdot c^{m-i} \cdot z^i$$

из суммы (в которую превратилось слагаемое (68))

$$\sum_{i=0}^m y^m \cdot \frac{1}{m!} \cdot E^m \cdot \binom{m}{i} \cdot c^{m-i} \cdot z^i \quad (69)$$

можно взять лишь одно слагаемое с индексом $i = \tau$, равное

$$y^m \cdot \frac{1}{m!} \cdot E^m \cdot \binom{m}{\tau} \cdot c^{m-\tau} \cdot z^\tau = \frac{1}{\tau! \cdot k!} \cdot y^m \cdot c^k \cdot z^\tau \cdot E^{\tau+k}. \quad (70)$$

Далее функцию $E^{\tau+k} = (e^x - 1)^{\tau+k}$ будем разлагать в степенной ряд по переменной x в окрестности точки $x = 0$ двумя способами. Из формулы (см. [18; с. 35])

$$E^\alpha = (e^x - 1)^\alpha = \alpha! \cdot \sum_{l=0}^{\infty} S(l, \alpha) \cdot \frac{x^l}{l!} = \alpha! \cdot \sum_{l=\alpha}^{\infty} S(l, \alpha) \cdot \frac{x^l}{l!} \quad (71)$$

сразу следует, что, положив $\alpha = m$, достаточно из последней суммы взять одно слагаемое с индексом $l = n$, равное

$$m! \cdot S(n, m) \cdot \frac{x^n}{n!},$$

чтобы из левой части равенства (70) получить искомый коэффициент

$$a_{n,m,\tau} = \frac{1}{m!} \cdot S(n, m) \cdot \frac{1}{n!} \cdot m! \cdot \binom{m}{\tau} \cdot c^{m-\tau} = S(n, k + \tau) \cdot \binom{k + \tau}{k} \cdot \frac{c^k}{n!}. \quad (72)$$

С другой стороны, множитель c^k можно представить полиномиальной формулой

$$c^k = (c_1 + c_2 + \dots + c_r)^k = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} \cdot c_1^{\alpha_1} \cdot c_2^{\alpha_2} \dots c_r^{\alpha_r}.$$

Тогда правую часть равенства (70) представим в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau! \cdot k!} \cdot y^m \cdot z^\tau \cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} c_1^{\alpha_1} \cdot c_2^{\alpha_2} \dots c_r^{\alpha_r} \cdot E^\tau \cdot E^k \\ &= \frac{1}{\tau!} \cdot y^m \cdot z^\tau \cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} \cdot c_1^{\alpha_1} \dots c_r^{\alpha_r} \cdot E^\tau \cdot E^{\alpha_1} \cdot E^{\alpha_2} \dots E^{\alpha_r} \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma. \end{aligned}$$

Здесь использование формулы (71) для множителей $E^\tau, E^{\alpha_1}, E^{\alpha_2}, \dots, E^{\alpha_r}$ под знаком последней суммы дает равенство

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \frac{1}{\tau!} \cdot y^m \cdot z^\tau \cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_r!} \cdot c_1^{\alpha_1} \dots c_r^{\alpha_r} \\ &\quad \times \tau! \cdot \left(\sum_{l_0=\tau}^{\infty} S(l_0, \tau) \cdot \frac{x^{l_0}}{l_0!} \right) \cdot \alpha_1! \cdot \left(\sum_{l_1=\alpha_1}^{\infty} S(l_1, \alpha_1) \cdot \frac{x^{l_1}}{l_1!} \right) \\ &\quad \times \alpha_2! \cdot \left(\sum_{l_2=\alpha_2}^{\infty} S(l_2, \alpha_2) \cdot \frac{x^{l_2}}{l_2!} \right) \dots \alpha_r! \cdot \left(\sum_{l_r=\alpha_r}^{\infty} S(l_r, \alpha_r) \cdot \frac{x^{l_r}}{l_r!} \right) \\ &= y^m \cdot z^\tau \cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k} c_1^{\alpha_1} \dots c_r^{\alpha_r} \cdot \left[\sum_{l_0=\tau}^{\infty} S(l_0, \tau) \cdot \frac{x^{l_0}}{l_0!} \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{l_1=\alpha_1}^{\infty} S(l_1, \alpha_1) \cdot \frac{x^{l_1}}{l_1!} \right] \dots \left[\sum_{l_r=\alpha_r}^{\infty} S(l_r, \alpha_r) \cdot \frac{x^{l_r}}{l_r!} \right]. \end{aligned}$$

После перемножения квадратных скобок в полученной сумме возьмем только те слагаемые, у которых переменная x имеет показатель степени $n = l_0 + l_1 + \dots + l_r$. Коэффициент при переменной x^n будет равен сумме

$$\sum_{l_0+l_1+\dots+l_r=n} \frac{S(l_0, \tau) \cdot S(l_1, \alpha_1) \cdots S(l_r, \alpha_r)}{l_0! \cdot l_1! \cdots l_r!},$$

где суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел $l_0, l_1, \dots, l_r$, удовлетворяющим условию $l_0 + l_1 + \dots + l_r = n$.

Таким образом, извлекая из величины Γ лишь те слагаемые, которые имеют множитель x^n , где $n = l_0 + l_1 + \dots + l_r$, мы находим вторым способом искомый коэффициент

$$\begin{aligned} a_{n,m,\tau} &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=k} c_1^{\alpha_1} \cdot l_2^{\alpha_2} \cdots c_r^{\alpha_r} \\ &\times \sum_{l_0+l_1+\dots+l_r=n} \frac{S(l_0, \tau) \cdot S(l_1, \alpha_1) \cdots S(l_r, \alpha_r)}{l_0! \cdot l_1! \cdots l_r!}. \end{aligned}$$

Сравнивая этот коэффициент с коэффициентом, полученным первым способом по формуле (72), приходим к тождеству

$$\begin{aligned} a_{n,m,\tau} &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=k} c_1^{\alpha_1} \cdot l_2^{\alpha_2} \cdots c_r^{\alpha_r} \\ &\times \sum_{l_0+l_1+\dots+l_r=n} \frac{S(l_0, \tau) \cdot S(l_1, \alpha_1) \cdots S(l_r, \alpha_r)}{l_0! \cdot l_1! \cdots l_r!} \\ &= \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_r=k \\ l_0+l_1+\dots+l_r=n}} S(l_0, \tau) \cdot S(l_1, \alpha_1) \cdots S(l_r, \alpha_r) \frac{c_1^{\alpha_1} \cdot c_2^{\alpha_2} \cdots c_r^{\alpha_r}}{l_0! \cdot l_1! \cdots l_r!} \\ &= S(n, k + \tau) \cdot \binom{k + \tau}{k} \cdot \frac{c^k}{n!}, \end{aligned} \tag{73}$$

где суммирование ведется по всем наборам целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $l_0, l_1, \dots, l_r$ таким, что $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = k$ и $l_0 + l_1 + \dots + l_r = n$.

Утверждение 2 доказано.

Так как каждый из индексов $\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ в каких-то наборах может быть равным нулю, то и каждое из чисел $l_0, l_1, \dots, l_r$ может быть нулевым. В частности, если $\tau = 0$, то $l_0 = 0$. В этом случае $E^\tau = E^0 = 1$, $S(l_0, \tau) = S(0, 0) = 1$. Коэффициент $a_{n,m,\tau}$, найденный первым способом по формуле (72), дает в этом частном случае равенство

$$a_{n,m,\tau} = a_{n,m,0} = S(n, k) \cdot \frac{c^k}{n!},$$

а это правая часть тождества (65). Во внутренней сумме левой части и в сумме средней части равенства (73) в этом случае можно не записывать множители $S(l_0, \tau) = S(0, 0) = 1$, $1/l_0! = 1/0! = 1$ и слагаемое $l_0 = 0$ в сумме $l_0 + l_1 + \dots + l_r = k$. Тогда равенство (73) превращается в тождество (65). Таким образом, оба утверждения доказаны.

§ 5. Полиномы с большими коэффициентами

По определению

$$H^{(n)}(f) = a_0 \cdot \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=n} \frac{n!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_k!} j_1^{j_2} \cdot j_2^{j_3} \cdot \dots \cdot j_{k-1}^{j_k} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_k^{j_k}. \quad (74)$$

В частном случае, если

$$a_{2k} = 1, \quad a_{2k+1} = \beta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (75)$$

то форма $H^{(n)}(f)$ превращается в полином $H^{(n)}(\beta)$ степени n от одной переменной β .

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо равенство*

$$H^{(n)}(\beta) = \beta \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot [\beta \cdot (n-k+1)]^{k-1} \cdot k^{n-k}. \quad (76)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (74) следует, что

$$H^{(n)}(f) = a_0 \cdot \sum_{j_1+j_2+\dots+j_k=n} \frac{n!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_k!} a_1^{j_1} \cdot (j_1 \cdot a_2)^{j_2} \cdot (j_2 \cdot a_3)^{j_3} \cdot \dots \cdot (j_{k-1} \cdot a_k)^{j_k}, \quad (77)$$

где суммирование производится по всем наборам целых положительных чисел $j_1, j_2, \dots, j_k$, удовлетворяющим условию $j_1 + j_2 + \dots + j_k = n, 1 \leq k \leq n$. С учетом (75) определение (77) приобретает вид:

$$H^{(n)}(\beta) = \sum_{l_1+i_2+l_3+i_4+\dots+l_{2s-1}+i_{2s}=n} \frac{n!}{l_1! \cdot i_2! \cdot l_3! \cdot i_4! \cdot \dots \cdot l_{2s-1}! \cdot i_{2s}!} \times \beta^{l_1} \cdot l_1^{i_2} \cdot i_2^{l_3} \cdot \beta^{l_3} \cdot l_3^{i_4} \cdot \dots \cdot l_{2s-2}^{i_{2s-1}} \cdot i_{2s-1}^{l_{2s-1}} \cdot \beta^{l_{2s-1}} \cdot l_{2s-1}^{i_{2s}} \quad (78)$$

или

$$H^{(n)}(\beta) = \sum_{l_1+i_2+l_3+i_4+\dots+l_{2s-3}+i_{2s-2}+l_{2s-1}=n} \frac{n!}{l_1! \cdot i_2! \cdot l_3! \cdot i_4! \cdot \dots \cdot l_{2s-3}! \cdot i_{2s-2}! \cdot l_{2s-1}!} \times \beta^{l_1} \cdot l_1^{i_2} \cdot i_2^{l_3} \cdot \beta^{l_3} \cdot l_3^{i_4} \cdot \dots \cdot l_{2s-3}^{i_{2s-2}} \cdot i_{2s-2}^{l_{2s-1}} \cdot \beta^{l_{2s-1}}. \quad (79)$$

Очевидно, что $1 \leq s \leq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ и равенство (79) является следствием равенства (78), если положить $i_{2s} = 0$.

Через ν обозначим переменную сумму $l_1 + l_3 + \dots + l_{2s-1} = \nu$, тогда $i_2 + i_4 + \dots + i_{2s-2} + i_{2s} = n - \nu$. Теперь равенство (78) можно представить в виде

$$H^{(n)}(\beta) = \sum_{\nu=1}^n B_\nu \cdot \beta^\nu, \quad (80)$$

где

$$B_\nu = \sum_{\substack{l_1+l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu \\ i_2+i_4+\dots+i_{2s}=n-\nu}} \frac{n!}{l_1! \cdot i_2! \cdot l_3! \cdot \dots \cdot i_{2s-2}! \cdot l_{2s-1}! \cdot i_{2s}!} \\ \times l_1^{i_2} \cdot l_2^{l_3} \cdot l_3^{i_4} \cdot \dots \cdot l_{2s-3}^{i_{2s-2}} \cdot l_{2s-2}^{l_{2s-1}} \cdot l_{2s-1}^{i_{2s}}. \quad (81)$$

Теорема будет доказана, если мы убедимся, что

$$B_\nu = n \cdot \binom{n-1}{\nu-1} \cdot (n-\nu+1)^{\nu-1} \cdot \nu^{n-\nu-1}. \quad (82)$$

Представим правую часть равенства (81) в форме

$$B_\nu = \sum_{l_1+l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu} \frac{n!}{l_1! \cdot l_3! \cdot \dots \cdot l_{2s-1}!} \\ \times \sum_{i_2+i_4+\dots+i_{2s}=n-\nu} \frac{l_2^{l_3} \cdot l_4^{l_5} \cdot \dots \cdot l_{2s-2}^{l_{2s-1}}}{i_2! \cdot i_4! \cdot \dots \cdot i_{2s}!} \cdot l_1^{i_2} \cdot l_3^{i_4} \cdot \dots \cdot l_{2s-1}^{i_{2s}}. \quad (83)$$

Если все числа $i_2, i_4, \dots, i_{2s-2}$ — целые положительные, то числа $i_2 - 1, i_4 - 1, \dots, i_{2s-2} - 1, i_{2s}$ являются целыми неотрицательными (заметим, что при нечетном $k = 2s - 1$ в правой части (77) следующее равенство (78) превращается в равенство (79) при $i_{2s} = 0$). Далее воспользуемся определением ($i \geq l \geq 1$)

$$(i)_l = i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot \dots \cdot (i-l+1) \quad (84)$$

и для каждого $k = 1, 2, \dots, s-1$ произведем разложение (см. [19; §24.1])

$$l_{2k}^{i_{2k+1}-1} = S(l_{2k+1}, l_{2k+1}) \cdot (i_{2k} - 1)_{l_{2k+1}-1} \\ + S(l_{2k+1}, l_{2k+1} - 1) \cdot (i_{2k} - 1)_{l_{2k+1}-2} \\ + \dots + S(l_{2k+1}, r_{2k+1}) \cdot (i_{2k} - 1)_{r_{2k+1}-1} \\ + \dots + S(l_{2k+1}, 2) \cdot (i_{2k} - 1)_1 + S(l_{2k+1}, 1) \cdot 1. \quad (85)$$

Тогда равенство (83) можно записать в виде

$$B_\nu = \sum_{l_1+l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu} \frac{n!}{l_1! \cdot l_3! \cdot \dots \cdot l_{2s-1}!} \\ \times \sum_{\substack{(i_2-1)+(i_4-1)+\dots+(i_{2s-2}-1)+i_{2s} \\ = n-\nu-(s-1)}} \frac{1}{(i_2-1)! \cdot (i_4-1)! \cdot \dots \cdot (i_{2s-2}-1)! \cdot i_{2s}!} \\ \times \left\{ \prod_{k=1}^{s-1} \left[S(l_{2k+1}, l_{2k+1}) \cdot (i_{2k} - 1)_{l_{2k+1}-1} \right. \right. \\ + S(l_{2k+1}, l_{2k+1} - 1) \cdot (i_{2k} - 1)_{l_{2k+1}-2} \\ + \dots + S(l_{2k+1}, r_{2k+1}) \cdot (i_{2k} - 1)_{r_{2k+1}-1} \\ \left. \left. + \dots + S(l_{2k+1}, 2) \cdot (i_{2k} - 1)_1 + S(l_{2k+1}, 1) \cdot 1 \right] \right\} \cdot l_1^{i_2} \cdot l_3^{i_4} \cdot \dots \cdot l_{2s-1}^{i_{2s}}. \quad (86)$$

Внутри квадратных скобок для второго индекса r_{2k+1} у чисел Стирлинга $S(l_{2k+1}, r_{2k+1})$ выполняются неравенства

$$1 \leq r_{2k+1} \leq l_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1. \quad (87)$$

Сумма вторых индексов у всех чисел Стирлинга, находящихся в последних слагаемых в квадратных скобках, равна $s-1$, т.е. количеству множителей под знаком произведения, а из условия $l_1 + l_3 + \dots + l_{2s-1} = \nu$ вытекает, что сумма вторых индексов у таких чисел, находящихся в первых слагаемых, не превышает числа $\nu - l_1$. Из этого следует, что после перемножения всех сумм, находящихся в квадратных скобках под знаком произведения, мы получаем сумму

$$\begin{aligned} & \sum_{s-1 \leq r_3 + r_5 + \dots + r_{2s-1} \leq \nu - l_1} S(l_3, r_3) \cdot S(l_5, r_5) \\ & \times \dots \times S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot (i_2 - 1)_{r_3-1} \cdot (i_4 - 1)_{r_5-1} \dots (i_{2s-2} - 1)_{r_{2s-1}-1}, \end{aligned} \quad (88)$$

где суммирование распространяется на всевозможные системы натуральных чисел r_{2k+1} , $k = 1, 2, \dots, s-1$, удовлетворяющих условиям (87).

Сумма (88) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{m=s-1}^{\nu-l_1} \sum_{r_3+r_5+\dots+r_{2s-1}=m} S(l_3, r_3) \cdot S(l_5, r_5) \\ & \times \dots \times S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot (i_2 - 1)_{r_3-1} \cdot (i_4 - 1)_{r_5-1} \dots (i_{2s-2} - 1)_{r_{2s-1}-1}. \end{aligned} \quad (89)$$

В определении (84) предполагается, что $i \geq l$; если же при натуральных i и l окажется, что $i < l$, то произведение $(i)_l$ равно нулю. Если слагаемое в сумме (89) не равно нулю, то из определения (84) для всех множителей $(i_{2k} - 1)_{r_{2k+1}-1}$ этого слагаемого вытекают равенства

$$(i_{2k} - 1)_{r_{2k+1}-1} = \frac{(i_{2k} - 1)!}{(i_{2k} - r_{2k+1})!}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1.$$

Тогда сумму (89) можно записать в форме

$$\begin{aligned} & \sum_{m=s-1}^{\nu-l_1} \sum_{r_3+r_5+\dots+r_{2s-1}=m} S(l_3, r_3) \cdot S(l_5, r_5) \\ & \times \dots \times S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot \frac{(i_2 - 1)!}{(i_2 - r_3)!} \cdot \frac{(i_4 - 1)!}{(i_4 - r_5)!} \dots \frac{(i_{2s-2} - 1)!}{(i_{2s-2} - r_{2s-1})!}. \end{aligned} \quad (90)$$

Заметим еще, что поскольку все числа $i_{2k} - r_{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots, s-1$, так же как и число i_{2s} , целые неотрицательные, то

$$(i_2 - r_3) + (i_4 - r_5) + \dots + (i_{2s-2} - r_{2s-1}) + i_{2s} = n - \nu - m \geq 0. \quad (91)$$

Обратимся теперь к равенству (86) и вместо произведения, стоящего в фигурных скобках, подставим сумму (90). Кроме того, далее используем представление

$$l_{2k-1}^{i_{2k}} = l_{2k-1}^{i_{2k}-r_{2k+1}} \cdot l_{2k-1}^{r_{2k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, s-1.$$

После очевидных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} B_\nu &= \sum_{l_1+l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu} \frac{n!}{l_1! \cdot l_3! \cdot \dots \cdot l_{2s-1}!} \\ &\times \sum_{\substack{(i_2-1)+(i_4-1)+\dots+(i_{2s-2}-1)+i_{2s} \\ = n-\nu-(s-1)}} \frac{l_1^{i_2} \cdot l_3^{i_4} \cdot \dots \cdot l_{2s-1}^{i_{2s}}}{(i_2-1)! \cdot (i_4-1)! \cdot \dots \cdot (i_{2s-2}-1)! \cdot i_{2s}!} \\ &\times \sum_{m=s-1}^{\nu-l_1} \sum_{r_3+r_5+\dots+r_{2s-1}=m} S(l_3, r_3) \cdot \dots \cdot S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \\ &\times \frac{(i_2-1)!}{(i_2-r_3)!} \cdot \frac{(i_4-1)!}{(i_4-r_5)!} \cdot \dots \cdot \frac{(i_{2s-2}-1)!}{(i_{2s-2}-r_{2s-1})!} \\ &= \sum_{l_1+l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu} \frac{n!}{l_1! \cdot l_3! \cdot \dots \cdot l_{2s-1}!} \cdot \sum_{m=s-1}^{\nu-l_1} \frac{1}{(n-\nu-m)!} \\ &\times \sum_{r_3+r_5+\dots+r_{2s-1}=m} S(l_3, r_3) \cdot \dots \cdot S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot l_1^{r_3} \cdot l_3^{r_5} \cdot \dots \cdot l_{2s-3}^{r_{2s-1}} \\ &\times \sum_{(i_2-r_3)+\dots+(i_{2s-2}-r_{2s-1})+i_{2s}=n-\nu-m} \frac{(n-\nu-m)!}{(i_2-r_3)! \cdot \dots \cdot (i_{2s-2}-r_{2s-1})! \cdot i_{2s}!} \\ &\times l_1^{i_2-r_3} \cdot l_3^{i_4-r_5} \cdot \dots \cdot l_{2s-3}^{i_{2s-2}-r_{2s-1}} \cdot l_{2s-1}^{i_{2s}}. \end{aligned} \quad (92)$$

Здесь мы видим, что последнее внутреннее суммирование в равенстве (92) распространяется на всевозможные системы целых неотрицательных значений $i_2 - r_3$, $i_4 - r_5, \dots, i_{2s-2} - r_{2s-1}, i_{2s}$, удовлетворяющих условию (91), и эта сумма есть каноническое представление возведенной в степень $n - \nu - m$ суммы $l_1 + l_3 + \dots + l_{2s-1} = \nu$. Таким образом, правая часть равенств (92) упрощается так:

$$\begin{aligned} B_\nu &= \sum_{l_1+l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu} \frac{n!}{l_1! \cdot l_3! \cdot \dots \cdot l_{2s-1}!} \sum_{m=s-1}^{\nu-l_1} \frac{1}{(n-\nu-m)!} \cdot \nu^{n-\nu-m} \\ &\times \sum_{r_3+r_5+\dots+r_{2s-1}=m} S(l_3, r_3) \cdot S(l_5, r_5) \cdot \dots \cdot S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot l_1^{r_3} \cdot l_3^{r_5} \cdot \dots \cdot l_{2s-3}^{r_{2s-1}}. \end{aligned} \quad (93)$$

Заметим, что индекс $s = 1$ дает в сумме (81) (а значит, и в сумме (93)) одно слагаемое $\varkappa$, когда $l_1 = \nu$, $i_2 = n - \nu$; так что из (81) следует:

$$\varkappa = \frac{n!}{\nu! \cdot (n-\nu)!} \cdot \nu^{n-\nu}. \quad (94)$$

Сумму (93) можно теперь представить в виде

$$\begin{aligned}
 B_\nu &= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{l_3+l_5+\dots+l_{2s-1}=\nu-l_1} \frac{n!}{l_3! \cdot l_5! \dots l_{2s-1}!} \\
 &\times \sum_{m=s-1}^{\nu-l_1} \frac{1}{(n-\nu-m)!} \cdot \nu^{n-\nu-m} \sum_{r_3=1}^m S(l_3, r_3) \cdot l_1^{r_3} \\
 &\times \sum_{r_5+\dots+r_{2s-1}=m-r_3} S(l_5, r_5) \dots S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot l_3^{r_5} \cdot l_5^{r_7} \dots l_{2s-3}^{r_{2s-1}}.
 \end{aligned}$$

Наименьший индекс $m = 1$ соответствует наименьшему здесь индексу $s = 2$ и тому, что $r_{2s-1} = r_3 = 1$. Если же взять $m = \nu - l_1$, то, имея в виду, что $r_3 + r_5 + \dots + r_{2s-1} = m = \nu - l_1$, и полагая $r_3 = r_5 = \dots = r_{2s-1} = 1$, имеем наибольший индекс $s = m + 1$. Поменяем теперь порядок суммирования:

$$\begin{aligned}
 B_\nu &= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^{\nu-l_1} n \cdot (n-1) \dots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-m} \\
 &\times \sum_{s=2}^{m+1} \sum_{r_3=1}^m l_1^{r_3} \cdot \sum_{l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu-l_1} \sum_{r_5+\dots+r_{2s-1}=m-r_3} S(l_3, r_3) \\
 &\times S(l_5, r_5) \dots S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot \frac{l_3^{r_5} \cdot l_5^{r_7} \dots l_{2s-3}^{r_{2s-1}}}{l_3! \cdot l_5! \dots l_{2s-1}!} \\
 &= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^{\nu-l_1} n \cdot (n-1) \dots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-m} \\
 &\times \sum_{r_3=1}^m l_1^{r_3} \cdot \sum_{s=2}^{m-r_3+2} \sum_{l_3+\dots+l_{2s-1}=\nu-l_1} \sum_{r_5+\dots+r_{2s-1}=m-r_3} S(l_3, r_3) \\
 &\times S(l_5, r_5) \dots S(l_{2s-1}, r_{2s-1}) \cdot \frac{l_3^{r_5} \cdot l_5^{r_7} \dots l_{2s-3}^{r_{2s-1}}}{l_3! \cdot l_5! \dots l_{2s-1}!}.
 \end{aligned}$$

Для более удобного использования теоремы 3 переобозначим числа, фигурирующие в последних суммах, следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \nu - l_1 &= h; \quad m - r_3 = b; \quad r_3 = \rho_0, r_5 = \rho_1, \dots, r_{2(m-r_3+2)-1} = \rho_b; \\
 l_3 &= \lambda_0, \quad l_5 = \lambda_1, \quad l_7 = \lambda_2, \quad \dots, \quad l_{2(m-r_3+2)-1} = \lambda_b.
 \end{aligned}$$

Запишем B_ν в новых обозначениях:

$$\begin{aligned}
 B_\nu &= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^h n \cdot (n-1) \dots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-m} \\
 &\times \sum_{\rho_0=1}^m l_1^{\rho_0} \cdot \sum_{k=0}^b \sum_{\lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_k=h} \sum_{\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_k=b} S(\lambda_0, \rho_0) \\
 &\times S(\lambda_1, \rho_1) \dots S(\lambda_k, \rho_k) \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdot \lambda_1^{\rho_2} \dots \lambda_{k-1}^{\rho_k}}{\lambda_0! \cdot \lambda_1! \dots \lambda_k!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^h n \cdot (n-1) \cdots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-m} \\
&\quad \times \sum_{\rho_0=1}^m l_1^{\rho_0} \cdot \sum_{k=0}^b \sum_{\substack{\rho_1+\dots+\rho_k=b \\ \lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_k=h}} S(\lambda_0, \rho_0) \\
&\quad \times S(\lambda_1, \rho_1) \cdots S(\lambda_k, \rho_k) \cdot \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdot \lambda_1^{\rho_2} \cdots \lambda_{k-1}^{\rho_k}}{\lambda_0! \cdot \lambda_1! \cdots \lambda_k!}, \tag{95}
\end{aligned}$$

где последнее суммирование производится по всевозможным наборам целых положительных чисел $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ и $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, удовлетворяющим условиям $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k = b$, $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = h$.

Здесь мы обратимся к замечанию 4 и для упрощения равенства (95) воспользуемся тождеством (54). Имеем

$$\begin{aligned}
B_\nu &= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^h n \cdot (n-1) \cdots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-m} \\
&\quad \times \sum_{\rho_0=1}^m l_1^{\rho_0} \cdot \sum_{k=0}^b \sum_{\substack{\rho_1+\dots+\rho_k=b \\ \lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_k=h}} S(\lambda_0, \rho_0) \\
&\quad \times S(\lambda_1, \rho_1) \cdots S(\lambda_k, \rho_k) \cdot \frac{\lambda_0^{\rho_1} \cdot \lambda_1^{\rho_2} \cdots \lambda_{k-1}^{\rho_k}}{\lambda_0! \cdot \lambda_1! \cdots \lambda_k!} \\
&= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^h n \cdot (n-1) \cdots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-m} \\
&\quad \times \sum_{\rho_0=1}^m l_1^{\rho_0} \cdot S(h, \rho_0 + b) \cdot \binom{\rho_0 + b - 1}{b} \cdot \frac{h^b}{h!} \\
&= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^h n \cdot (n-1) \cdots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-m} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^{m-1} l_1^{k+1} \cdot S(\nu - l_1, m) \cdot \binom{m-1}{m-k-1} \frac{(\nu - l_1)^{m-1-k}}{(\nu - l_1)!}.
\end{aligned}$$

Внутреннюю сумму в правой части последнего равенства можно свести к биному Ньютона и просуммировать:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1} l_1^{k+1} \cdot S(\nu - l_1, m) \cdot \binom{m-1}{m-k-1} \frac{(\nu - l_1)^{m-1-k}}{(\nu - l_1)!} \\
&= l_1 \cdot S(\nu - l_1, m) \cdot \frac{1}{(\nu - l_1)!} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{m-k-1} \cdot l_1^k \cdot (\nu - l_1)^{m-1-k} \\
&= l_1 \cdot S(\nu - l_1, m) \cdot \frac{1}{(\nu - l_1)!} \cdot \nu^{m-1}.
\end{aligned}$$

Теперь величина B_ν выражается посредством двойного суммирования

$$\begin{aligned}
B_\nu &= \varkappa + \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{1}{l_1!} \cdot \sum_{m=1}^h n \cdot (n-1) \cdots (n-\nu-m+1) \cdot \nu^{n-\nu-1} \\
&\quad \times l_1 \cdot S(\nu-l_1, m) \cdot \frac{1}{(\nu-l_1)!} \\
&= \varkappa + \nu^{n-\nu-1} \cdot \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-\nu)}{(l_1-1)! \cdot (\nu-l_1)!} \\
&\quad \times [S(\nu-l_1, 1) \cdot 1 + S(\nu-l_1, 2) \cdot (n-\nu-1) \\
&\quad + S(\nu-l_1, 3) \cdot (n-\nu-1) \cdot (n-\nu-2) \\
&\quad + \cdots + S(\nu-l_1, \nu-l_1) \cdot (n-\nu-1) \cdot (n-\nu-2) \cdots (n-\nu-(\nu-l_1)+1)] \\
&= \varkappa + \nu^{n-\nu-1} \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-\nu) \cdot \frac{1}{(\nu-1)!} \cdot \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{(l_1-1)! \cdot (\nu-l_1)!} \\
&\quad \times [S(\nu-l_1, \nu-l_1) \cdot (n-\nu-1)_{\nu-l_1-1} \\
&\quad + S(\nu-l_1, \nu-l_1-1) \cdot (n-\nu-1)_{\nu-l_1-2} \\
&\quad + \cdots + S(\nu-l_1, 2) \cdot (n-\nu-1)_1 + S(\nu-l_1, 1) \cdot 1]. \tag{96}
\end{aligned}$$

Выражение, стоящее в последних квадратных скобках, есть разложение степени одной величины по факториалам другой величины, которая на единицу меньше первой. По формуле (85), записывая там $n-\nu$ вместо i_{2k} и $\nu-l_1$ вместо l_{2k+1} , имеем

$$\begin{aligned}
&S(\nu-l_1, \nu-l_1) \cdot (n-\nu-1)_{\nu-l_1-1} + S(\nu-l_1, \nu-l_1-1) \cdot (n-\nu-1)_{\nu-l_1-2} \\
&+ \cdots + S(\nu-l_1, 2) \cdot (n-\nu-1)_1 + S(\nu-l_1, 1) \cdot 1 = (n-\nu)^{\nu-l_1-1}. \tag{97}
\end{aligned}$$

В правой части равенства (96) в квадратные скобки подставим полученную равенством (97) правую часть и вместо величины $\varkappa$ возьмем ее значение по формуле (94). Тогда опять после очевидных преобразований приходим к биному Ньютона:

$$\begin{aligned}
B_\nu &= \frac{n!}{\nu! \cdot (n-\nu)!} \cdot \nu^{n-\nu} + \nu^{n-\nu} \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{n!}{(n-\nu-1)!} \\
&\quad \times \sum_{l_1=1}^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{(l_1-1)! \cdot (\nu-l_1)!} \cdot (n-\nu)^{\nu-l_1} \cdot \frac{1}{n-\nu} \\
&= \frac{n!}{\nu! \cdot (n-\nu)!} \cdot \nu^{n-\nu} + \frac{\nu^{n-\nu}}{\nu!} \cdot \frac{n!}{(n-\nu)!} \cdot \sum_{k=0}^{\nu-2} \frac{(\nu-1)!}{k! \cdot (\nu-1-k)!} \cdot (n-\nu)^{\nu-1-k} \\
&= \frac{n!}{\nu! \cdot (n-\nu)!} \cdot \nu^{n-\nu} + \frac{n!}{\nu! \cdot (n-\nu)!} \cdot \nu^{n-\nu} \\
&\quad \times \left[\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{k! \cdot (\nu-1-k)!} \cdot (n-\nu)^{\nu-1-k} - 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n!}{\nu! \cdot (n-\nu)!} \cdot \nu^{n-\nu} \cdot (n-\nu+1)^{\nu-1} \\
&= n \cdot \binom{n-1}{\nu-1} \cdot (n-\nu+1)^{\nu-1} \cdot \nu^{n-\nu-1}.
\end{aligned}$$

Эти упрощения привели к равенству (82). Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если коэффициенты $a_k, k = 1, 2, \dots$, принимают m различных значений $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и образуют периодическую последовательность (как, например, в решениях (12)), то

$$\begin{aligned}
H^{(n)}(f) &= H^{(n)}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\
&= \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} \frac{n!}{k_1! \dots k_{m-1}! (k_m + 1)!} \\
&\quad \times [(k_m + 1)\alpha_1]^{k_1} \cdot (k_1\alpha_2)^{k_2} \dots (k_{m-1}\alpha_m)^{k_m}.
\end{aligned}$$

Для $m \geq 3$ и $m < n$ это равенство не доказано, но проверено при некоторых больших n .

§6. О точности утверждений теоремы 1 и теоремы 2

Вначале рассмотрим вопрос о точности теоремы 1.

ТЕОРЕМА 1В. Пусть коэффициенты $a_k > 0, k = 1, 2, \dots$, и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$. Тогда точка $z = x = \exp(1/(e \cdot a))$ не является точкой регулярности бесконечной цепной степени $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \dots \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в этом случае любая точка $z = x > \exp(1/(e \cdot a))$ является точкой расходимости степени $\langle z; a_1, a_2, \dots \rangle$. Пусть $\sigma > 0$ — любое малое число и $x_0 = \exp(1/(e \cdot a) + \sigma)$. Из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ следует, что для любого малого $\delta > 0$ существует номер $N = N_\delta$ такой, что при всех $s \geq N$ выполняются неравенства

$$a - \delta < a_s < a + \delta. \quad (98)$$

Как и в работе [6; §2], полагая $z = e^w$, рассмотрим равенство

$$f(z) = F(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \dots \rangle, \quad w \in K = \left\{ w : |w| < \frac{1}{e \cdot a} \right\}, \quad (99)$$

и вспомогательную функцию

$$L_N(w) = a_N \cdot e^{a_{N+1} \cdot w} \cdot e^{a_{N+2} \cdot w} \cdot e^{a_{N+3} \cdot w} \dots \quad (100)$$

с ее разложением в степенной ряд в окрестности точки $w = 0$:

$$\frac{1}{a_N} \cdot L_N(w) = 1 + \frac{H_L^{(1)}}{1!} \cdot w + \frac{H_L^{(2)}}{2!} \cdot w^2 + \dots + \frac{H_L^{(n)}}{n!} \cdot w^n + \dots, \quad (101)$$

где $H_L^{(n)}$ – форма n -й степени от n коэффициентов $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots, a_{N+n}$, $n = 1, 2, \dots$ (см. формулу (9)).

Бесконечную цепную экспоненту $F(w)$ можно представить в виде

$$F(w) = e^{a_1 \cdot w} \cdot e^{a_2 \cdot w} \cdots e^{a_{N-1} \cdot w} \cdot e^{w \cdot L_N(w)} \quad (102)$$

Если функция $L_N(w)$ регулярна в круге K , то в этом круге будет регулярной и функция $F(w)$, а если в граничной точке этого круга функция $L_N(w)$ не является регулярной, то и функция $F(w)$ в этой точке не будет регулярной.

Теперь определим бесконечную цепную экспоненту с коэффициентами, равными одному значению $a - \delta$:

$$\frac{1}{a_N} \cdot \Phi(w) = \langle a^w; a - \delta, a - \delta, \dots \rangle. \quad (103)$$

Эта функция разлагается в окрестности точки $w = 0$ в степенной ряд

$$\frac{1}{a_N} \cdot \Phi(w) = 1 + \frac{H_a^{(1)}}{1!} \cdot w + \frac{H_a^{(2)}}{2!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{H_a^{(n)}}{n!} \cdot w^n + \cdots, \quad (104)$$

где $H_a^{(n)} = (a - \delta)^n \cdot (n + 1)^{n-1}$. Радиус сходимости ρ_a этого ряда (по формуле Коши–Адамара) определяется из равенства

$$\frac{1}{\rho_a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(a - \delta)^n \cdot (n + 1)^{n-1}}{n!}} = e \cdot (a - \delta).$$

Если взять точку $w_0 = 1/(e \cdot a) + \sigma$, то при любом положительном $\delta < \sigma \cdot e \cdot a^2/(1 + \sigma \cdot e)$ степенной ряд (104) будет расходиться, поэтому и бесконечная цепная экспонента (103) будет расходиться в этой точке. Тогда степенной ряд (101) в этой точке также будет расходиться, так как из (98) следуют неравенства $H_L^{(n)} > H_a^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$. Из расходимости степенного ряда (101) в точке w_0 следует расходимость (102) и (99). Теорема 1В доказана.

В таком же смысле является точным и утверждение теоремы 2, именно обнаруживается граничная точка, не являющаяся точкой регулярности.

ТЕОРЕМА 2А. Пусть в условиях теоремы 2 число $\beta \geq 1$, а число q определяется посредством формул (17) и (18). Тогда граничная точка $z = x = \exp(1/(e \cdot q))$ области e^K не является точкой регулярности функции $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \dots \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сравнения неравенств (22) и (23), а затем из сравнения правых частей неравенств (25) и (26) и последующих оценок с предельным переходом следует, что при $|\beta| = \beta$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(|\beta|) = \frac{1}{R} = h(\sqrt{\beta}) = e \cdot q.$$

В таком случае степенной ряд (8) при $z = x > \exp(1/(e \cdot q))$, т.е. при $w > 1/(e \cdot q)$, расходится. Теорема 2А доказана.

Список литературы

1. *Euler L.* De formulis exponentialibus replicatis // Acta Acad. Sci. Petr. 1778. V. 1. P. 38–60.
2. *Knoebel A.* Exponentials reiterated // Amer. Math. Monthly. 1981. T. 88. № 4. С. 235–252.
3. *Maurer H.* Über die Funktion $y = x^{[x^{[x^{(\dots)}]}]}$ für ganzzahliges Argument (Abundanzen) // Mitt. Math. Ges. Hamburg. 1901. V. 4. P. 33–50.
4. *Barrow D. F.* Infinite exponentials // Amer. Math. Monthly. 1936. V. 43. P. 150–160.
5. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.
6. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 49–78.
7. *Буланов А. П.* Движение одной динамической системы // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы. 27 января – 2 февраля 2000 г. С. 24–25.
8. *Bender C. M., Orszag S. A.* Advanced mathematical methods for scientists and engineers. New York: McGraw-Hill, 1978.
9. *Буланов А. П.* Кратные степени и локальные приближения // Труды МИАН. 1987. Т. 180. С. 65–67.
10. *Буланов А. П.* О сходимости кратной степени, являющейся решением нелинейного дифференциального уравнения // Алгебра и анализ. Материалы конференции, посвященной 100-летию Б. М. Гагаева. 16–22 июня 1997 г., Казань. С. 40–41.
11. *Буланов А. П.* О степени бесконечной кратности с коэффициентами, имеющими поочередно два значения // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 9-й Саратовской зимней школы. 26 января – 1 февраля 1998 г. С. 31.
12. *Буланов А. П.* Бесконечнократные степени и некоторые комбинаторные тождества // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней матем. школы. 27 января – 4 февраля 1999 г. С. 16.
13. *Амбарцумян Г. А., Буробин А. В.* О продолжении функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов Воронежской зимней матем. школы, 27 января – 4 февраля 1999 г. С. 16.
14. *Буланов А. П.* Сходимость решения нелинейного дифференциального уравнения, представленного бесконечнократной степенью // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. Казань, 1999 г. С. 49–50.
15. *Fatou P.* Series trigonometriques et series de Taylor // Acta Math. 1906. V. 30. P. 335–400.
16. *Szego G.* Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Phys. Kl. 1922. P. 88–91.
17. *Гиббербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.
18. *Рыбников К. А. (ред.).* Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: Учебное пособие. М.: Наука, 1982.
19. *Абрамовиц М., Стиган И. (ред.).* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.