Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ф. Красичков-Терновский, А. Б. Шишкин, Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 11, 35–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:27:52

УДК 517.5

И. Ф. Красичков-Терновский, А. Б. Шишкин

Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа

Пусть $\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)$ – система многочленов комплексной переменной z . В связи с задачей спектрального синтеза для систем дифференциальных операторов $\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)$, $D = d/dz$, рассматривается задача локального описания замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций над кольцом $\mathbb{C}[\pi_1, \dots, \pi_q]$. В статье показывается, что эта задача сводится к задаче локального описания над кольцом $\mathbb{C}[l]$, где l – многочлен Люрота, ассоциированный с системой многочленов $\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)$.

Библиография: 12 названий.

Введение

Пусть Ω – односвязная область в $\mathbb{C}$; H – пространство функций, аналитических в Ω , наделенное топологией равномерной сходимости на компактах; H^* – его сильное сопряженное. Выберем произвольный многочлен $\pi(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Этому многочлену соответствует дифференциальный оператор $\pi(D) = a_0 + a_1 D + \dots + a_n D^n$. Замкнутое подпространство $W \subseteq H$ называется *инвариантным* (относительно оператора $\pi(D)$), если выполняется импликация: $f \in W \Rightarrow \pi(D)f \in W$. В работах [1]–[4] рассмотрена задача спектрального синтеза: выяснить условия, при которых заданное инвариантное подпространство $W \subseteq H$ совпадает с замыканием линейной оболочки корневых элементов оператора $\pi(D)$, содержащихся в W . В статье [1] эта задача сведена к задаче локального описания замкнутых $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей в модуле P целых функций экспоненциального типа. Этот модуль определяется следующим образом. Пусть T – отображение, которое функционалу $S \in H^*$ ставит в соответствие целую функцию экспоненциального типа $\varphi(\lambda) = \langle S, \exp \lambda z \rangle$. Когда S пробегает пространство H^* , φ пробегает пространство целых функций экспоненциального типа P . Это пространство, наделенное локально выпуклой топологией, индуцированной из H^* отображением T , обладает структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$ и называется модулем, ассоциированным с областью Ω . Кольцо $\mathbb{C}[\pi]$, порожаемое многочленом $\pi(z)$, является подкольцом кольца $\mathbb{C}[z]$, и поэтому P можно рассматривать как модуль над кольцом $\mathbb{C}[\pi]$. Каждому замкнутому инвариантному подпространству $W \subseteq H$ можно поставить в соответствие его *аннуляторный подмодуль* I – образ относительно T подпространства $W^0 \subseteq H^*$ всех линейных непрерывных функционалов $S \in H^*$, аннулирующих W . В работе [1] показано, что I

обладает структурой замкнутого $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в P и задача спектрального синтеза сводится к задаче локального описания этого подмодуля.

Настоящая статья мотивирована задачей спектрального синтеза для систем дифференциальных операторов вида $\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)$, где $\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)$ – многочлены. Эта задача формулируется аналогично задаче спектрального синтеза для одного дифференциального оператора: пусть W – замкнутое подпространство в H , инвариантное относительно каждого из операторов $\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)$; выяснить условия, при которых W совпадает с замыканием линейной оболочки совместных корневых элементов операторов $\pi_1(D), \dots, \pi_q(D)$. В работе [5] показано, что последняя задача эквивалентна задаче локального описания замкнутых $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей в P . Здесь $\mathbb{C}[\pi]$ – подкольцо кольца многочленов $\mathbb{C}[z]$, порождаемое многочленами $\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)$. Системе многочленов $\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)$ соответствует так называемый многочлен Люрота $l(z)$ [6; гл. 1, § 7]. Основной результат настоящей статьи осуществляет редукцию задачи локального описания замкнутых $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей в P к задаче локального описания замкнутых $\mathbb{C}[l]$ -подмодулей в P .

Пусть I_0 – произвольное множество в P , $I_0[\pi]$ – совокупность конечных комбинаций вида

$$\sum p_i u_i, \quad (1)$$

где $p_i \in \mathbb{C}[\pi]$, $u_i \in I_0$. Множество $I_0[\pi]$ обладает структурой $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в P . Поскольку P – топологический модуль над кольцом многочленов, замыкание I множества $I_0[\pi]$ в топологии P по-прежнему обладает структурой $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля в P . Множество I называется $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в P , порождаемым множеством I_0 . Аналогичным образом определяется $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль $J \subseteq P$, порождаемый множеством I_0 : это замыкание конечных линейных комбинаций вида (1), где $p_i \in \mathbb{C}[l]$. Замкнутый подмодуль в P называется *обильным*, если он допускает локальное описание, т.е. задача локального описания по отношению к этому подмодулю решается в положительном смысле. Нас интересует вопрос, как связаны свойства обильности подмодулей I и J .

Основной результат статьи: *подмодули I и J обильны или нет одновременно* (теорема редукции).

Доказанная теорема сводит вопрос обильности $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулей в P к аналогичному вопросу по отношению к подмодулям, уже исследованным ранее (например, в работах [2]–[4]). Это делает ее источником конкретных результатов по спектральному синтезу для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Нужно сказать, что доказанная теорема носит общий характер и допускает ослабление начальных условий. Она остается справедливой, если предположить лишь, что:

- 1) P – пространство целых функций, наделенное отделимой локально выпуклой топологией, мажорирующей топологию компактной сходимости;
- 2) P – устойчивый топологический модуль над кольцом многочленов.

§ 1. Терминология и обозначения

1.1. Отображения, задаваемые системами многочленов. Условимся отождествлять в обозначениях многочлены и ими осуществляемые отображения.

Выделим в кольце $\mathbb{C}[z]$ многочленов от одной переменной совокупность из q элементов $\pi_1, \dots, \pi_q$. Следуя нашему соглашению, символом π будем обозначать q -многочлен $(\pi_1, \dots, \pi_q)$ и отображение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^q$, осуществляемое этим q -многочленом. Обозначим через Λ образ $\mathbb{C}$ при отображении π . Считаем, что среди многочленов $\pi_1, \dots, \pi_q$ есть хотя бы один, отличный от константы. При этом условии отображение π имеет конечные слои $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Если $q > 1$, то Λ – собственное подмножество $\mathbb{C}^q$. Множество Λ мы наделяем топологией, индуцированной из $\mathbb{C}^q$.

1.2. π -симметричные множества. Множество $U \subseteq \mathbb{C}$ называется π -симметричным, если найдется множество $U \subseteq \mathbb{C}^q$ такое, что $U = \pi^{-1}(V)$; π -симметричные множества можно охарактеризовать и как подмножества $\mathbb{C}$, для которых выполняется соотношение $U = \pi^{-1}(\pi(U))$.

Отметим некоторые простые часто используемые свойства π -симметричных множеств.

1. Для любой окрестности U π -слоя $\tilde{\lambda}$ найдется открытое π -симметричное множество U' такое, что $\tilde{\lambda} \subset U' \subseteq U$.
2. Образ $\pi(U)$ любого открытого π -симметричного множества U является открытым множеством в Λ .
3. Открытые π -симметричные множества в $\mathbb{C}$ образуют топологию.

1.3. π -симметричные функции. Функция φ , голоморфная в открытом π -симметричном множестве, называется π -симметричной, если для каждого π -слоя $\tilde{\lambda}$ из области определения функции φ найдутся открытая π -симметричная окрестность U этого слоя и открытая окрестность $V \subseteq \mathbb{C}^q$ точки λ , содержащая $\pi(U)$, такие, что сужение φ на U представляется в виде $\Phi \circ \pi$, где Φ – некоторая функция, голоморфная в V . Простейшие π -симметричные функции – это отображения, осуществляемые элементами кольца $\mathbb{C}[\pi_1, \dots, \pi_q]$ многочленов от $\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)$.

Топологию в $\mathbb{C}$, образованную открытыми π -симметричными множествами, обозначим через τ_π . Пусть $U \in \tau_\pi$; $O(U)$ – кольцо голоморфных на U функций; $\mathbf{O}(U)$ – декартово произведение ν копий $O(U)$; $O_\pi(U)$ – множество всех π -симметричных на U функций. Очевидно, что $\mathbf{O}(U)$ – модуль над кольцом $O(U)$, а $O_\pi(U)$ – подкольцо $O(U)$. Рассматриваем $\mathbf{O}(U)$ как модуль над кольцом $O_\pi(U)$. Совокупность $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\rho_{U,U'}: O_\pi(U') \rightarrow O_\pi(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок колец над $(\mathbb{C}, \tau_\pi)$. Аналогично, совокупность $\{\mathbf{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, вместе с гомоморфизмами сужения $\sigma_{U,U'}: \mathbf{O}(U') \rightarrow \mathbf{O}(U)$, $U \subseteq U'$, образует предпучок абелевых групп над $(\mathbb{C}, \tau_\pi)$ [7; гл. IV, А].

Легко убедиться, что отображение $\sigma_{U,U'}$, $U \subseteq U'$, является гомоморфизмом $O_\pi(U')$ -модуля $\mathbf{O}(U')$ в $O_\pi(U)$ -модуль $\mathbf{O}(U)$, следовательно, предпучок абелевых групп $\{\mathbf{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, является предпучком модулей над предпучком колец $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$.

Выберем $\lambda \in \Lambda$. Пусть $\tilde{\lambda} = \pi^{-1}(\lambda)$. Слой предпучка $\{\mathbf{O}(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, ассоциированный с π -слоем $\tilde{\lambda}$, – индуктивный предел групп $\mathbf{O}(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\sigma_{U,U'}$, $U \subseteq U'$, – обозначим символом $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$. Аналогично, слой предпучка $\{O_\pi(U)\}$, $U \in \tau_\pi$, ассоциированный с π -слоем $\tilde{\lambda}$, – индуктивный предел колец $O_\pi(U)$, $\tilde{\lambda} \subset U \in \tau_\pi$, относительно гомоморфизмов $\rho_{U,U'}$, $U \subseteq U'$, – обозначим символом $O_\pi(\tilde{\lambda})$. Слой $O_\pi(\tilde{\lambda})$ обладает структурой кольца,

а слой $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ – структурой модуля над этим кольцом. Элементы $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ называются ростками ν -функций, голоморфных в π -симметричных окрестностях $\tilde{\lambda}$, а элементы $O_\pi(\tilde{\lambda})$ – ростками π -симметричных функций, голоморфных в π -симметричных окрестностях $\tilde{\lambda}$.

1.4. Устойчивость. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ – система односвязных областей в $\mathbb{C}$; $P_1, \dots, P_\nu$ – модули, ассоциированные с областями $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ соответственно; $\mathbf{P}$ – топологическое произведение $P_1 \times \dots \times P_\nu$. Пространство $\mathbf{P}$ наследует основные свойства $P_1, \dots, P_\nu$. В частности, $\mathbf{P}$ обладает структурой топологического модуля над кольцом $\mathbb{C}[z]$ с операцией покомпонентного умножения на многочлены. Это пространство называется модулем, ассоциированным с системой областей $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ (см. [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В пространстве $\mathbf{P}$ выполняется импликация устойчивости:

$$\varphi \in \mathbf{P}, \quad z - a \mid \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{\varphi}{z - a} \in \mathbf{P}. \quad (2)$$

Здесь запись $z - a \mid \varphi$ означает, что двучлен $z - a$ делит каждую компоненту элемента φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить выполнимость импликации (2) в случае $\nu = 1$, т.е. когда $\mathbf{P} = P$ – модуль, ассоциированный с односвязной областью Ω . Пусть $\varphi \in P$. Тогда φ представляется в виде $\varphi(z) = \langle S, \exp z\zeta \rangle$, где S – некоторый линейный непрерывный функционал на $H = H(\Omega)$. Если $z - a \mid \varphi$, то $\varphi(a) = 0$. Отсюда следует, что $\langle S, \exp a\zeta \rangle = 0$. Используя это обстоятельство, имеем:

$$\frac{\varphi(z)}{z - a} = \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a} = \left\langle S, \frac{\exp z\zeta - \exp a\zeta}{z - a} \right\rangle = \left\langle S, e^{a\zeta} \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{zt} e^{-at} dt \right\rangle,$$

где ζ_0 – произвольная точка в Ω , интеграл берется по любому спрямляемому пути с началом в точке ζ_0 и концом в точке ζ , лежащему в области Ω . Обозначим через $\hat{S}$ линейный функционал на H , действующий по правилу:

$$f \rightarrow \left\langle S, e^{a\zeta} \int_{\zeta_0}^{\zeta} f(t) e^{-at} dt \right\rangle.$$

Легко проверить, что $\hat{S} \in H^*$ и

$$\frac{\varphi(z)}{z - a} = \langle \hat{S}, \exp z\zeta \rangle.$$

Последнее означает, что $\frac{\varphi(z)}{z - a} \in P$. Тем самым выполнимость импликации (2) установлена.

1.5. Обильность. Кольцо $\mathbb{C}[\pi_1, \dots, \pi_q]$ многочленов от $\pi_1(z), \dots, \pi_q(z)$ условимся обозначать через $\mathbb{C}[\pi]$. Это кольцо является подкольцом кольца многочленов $\mathbb{C}[z]$. Значит, пространство $\mathbf{P}$ можно рассматривать как топологический модуль над кольцом $\mathbb{C}[\pi]$. Пусть I – замкнутый $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль в $\mathbf{P}$. Обозначим через $I(\tilde{\lambda})$ минимальный подмодуль $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -модуля $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$, включающий I . Ясно, что $I(\tilde{\lambda})$ состоит из всевозможных конечных сумм $\sum c_i f^{(i)}$, где $c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, $f^{(i)} \in I$. Подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ называется *локальным подмодулем I , ассоциированным с π -слоем $\tilde{\lambda}$* . Подмодуль I допускает локальное описание, если справедлива импликация:

$$f \in \mathbf{P}, \quad f \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad f \in I. \quad (3)$$

Задача локального описания: *найти условия, при которых замкнутый подмодуль $I \subseteq \mathbf{P}$ допускает локальное описание.*

Отметим, что импликация (3) была введена впервые И. Ф. Красичковым-Терновским в [8]. Замкнутые подмодули, удовлетворяющие этой импликации, названы им *обильными*. Таким образом, обильные подмодули в $\mathbf{P}$ и только они допускают локальное описание.

§ 2. Симметричные многочлены

2.1. Многочлен Люрота. Обозначим через $\mathbb{C}(\pi)$ поле частных кольца $\mathbb{C}[\pi]$. По известной теореме Люрота о полях рациональных функций [6; § 7, теорема 12] $\mathbb{C}(\pi)$ – простое трансцендентное расширение поля $\mathbb{C}$. Другими словами, существует элемент $l \in \mathbb{C}(\pi)$ такой, что $\mathbb{C}(\pi) = \mathbb{C}(l)$, где $\mathbb{C}(l)$ – поле частных кольца $\mathbb{C}[l]$ многочленов от l . Всякий элемент $l \in \mathbb{C}(\pi)$, для которого выполняется соотношение $\mathbb{C}(\pi) = \mathbb{C}(l)$, называется *элементом Люрота*. Если l – это элемент Люрота, то и элемент $\frac{al+b}{cl+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, является элементом Люрота [6; § 7, теорема 11]. По теореме Нётер [6; § 7, теорема 14] в качестве элемента Люрота может быть выбран многочлен – *многочлен Люрота*. Если l – многочлен Люрота, то $al + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, – тоже многочлен Люрота.

2.2. Многочлен, ассоциированный с многочленом Люрота. Пусть l – произвольный многочлен Люрота. Так как $\mathbb{C}(\pi) = \mathbb{C}(l)$, то $\pi_1, \dots, \pi_q \in \mathbb{C}(l)$. Легко увидеть, что на самом деле $\pi_1, \dots, \pi_q \in \mathbb{C}[l]$. Значит,

$$\mathbb{C}[\pi] \subseteq \mathbb{C}[l]. \quad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует отличный от нуля многочлен $s \in \mathbb{C}[\pi]$ такой, что*

$$s\mathbb{C}[l] \subseteq \mathbb{C}[\pi]. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $l \in \mathbb{C}(\pi)$, то l можно представить в виде $l = \Phi/F$, где $\Phi, F \in \mathbb{C}[\pi]$. В свою очередь, включение (4) влечет возможность представления F в виде

$$F = a_0 l^p + a_1 l^{p-1} + \dots + a_p, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad a_0 \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$l^p = -\frac{a_1}{a_0} l^{p-1} - \dots - \frac{a_{p-1}}{a_0} l + \left(\frac{1}{a_0} F - \frac{a_p}{a_0} \right).$$

В силу (4) кольцо $\mathbb{C}[l]$ можно рассматривать как модуль над кольцом $\mathbb{C}[\pi]$. Используя рекуррентное соотношение

$$l^{p+k} = -\frac{a_1}{a_0}l^{p+k-1} - \dots - \frac{a_{p-1}}{a_0}l^{k+1} + \left(\frac{1}{a_0}F_i - \frac{a_p}{a_0}\right)l^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

легко убедиться, что система $1, l, \dots, l^{p-1}$ порождает $\mathbb{C}[\pi]$ -модуль $\mathbb{C}[l]$. С другой стороны, произведения

$$l^m F^{p-1} = \Phi^m F^{p-m-1}, \quad m = 0, \dots, p-1,$$

принадлежат кольцу $\mathbb{C}[\pi]$, следовательно, $F^{p-1}\mathbb{C}[l] \subseteq \mathbb{C}[\pi]$. Полагая $s = F^{p-1}$, получаем требуемое включение (5). Предложение доказано.

Среди отличных от нуля многочленов s , для которых выполняется включение (5), имеется многочлен минимальной степени (относительно z). Этот многочлен определен однозначно с точностью до постоянного множителя. Действительно, пусть упомянутая наименьшая степень равна m ; s_1, s_2 — два многочлена из $\mathbb{C}[\pi]$ степени m , для которых выполняется включение (5); a_1, a_2 — коэффициенты при старших членах s_1 и s_2 соответственно. Тогда многочлен $s = a_2 s_1 - a_1 s_2$ принадлежит $\mathbb{C}[\pi]$ и для него выполняется включение (5). Поскольку степень многочлена s меньше m , заключаем, что $s = 0$, т.е. $a_2 s_1 = a_1 s_2$.

Согласно (4) любой многочлен из $\mathbb{C}[\pi]$ можно представить в виде многочлена от l . Отличный от нуля многочлен s , для которого выполнено включение (5), имеющий наименьшую из возможных степень и коэффициент при старшем члене (относительно l) равный 1, называется многочленом, *ассоциированным с многочленом Люрота* l .

2.3. Сравнение слоев отображений π и l . В силу (4) $\pi_1, \dots, \pi_q \in \mathbb{C}[l]$. Эти включения позволяют представить отображение π в виде

$$\pi = \hat{\pi} \circ l, \quad (6)$$

где $\hat{\pi}$ — отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^q$, осуществляемое некоторым q -многочленом $(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_q)$ от одной переменной (обозначим ее через ξ). Вместе с этим $s \in \mathbb{C}[\pi]$. Значит, отображение, осуществляемое многочленом s , является π -симметричной целой функцией. Следовательно, имеет место представление

$$s = S \circ \pi,$$

где S — полином от q переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. При этом нулевое множество $\sigma = s^{-1}(0) = \pi^{-1}(S^{-1}(0))$ многочлена s является замкнутым π -симметричным множеством в $\mathbb{C}$, а его дополнение $\mathbb{C} \setminus \sigma$ является открытым π -симметричным множеством в $\mathbb{C}$. Здесь $S^{-1}(0)$ — нулевое множество многочлена S . С другой стороны, по предложению 2 $sl \in \mathbb{C}[\pi]$, значит, $l = r/s$, где r — некоторый многочлен из кольца $\mathbb{C}[\pi]$. Отсюда вытекает, что сужение $l|_{\mathbb{C} \setminus \sigma}$ отображения, осуществляемого многочленом l , на множество $\mathbb{C} \setminus \sigma$ представляется в виде

$$l|_{\mathbb{C} \setminus \sigma} = L \circ \pi, \quad (7)$$

где $L = R/S$ — рациональная функция от q переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ с полярным множеством, содержащимся в $S^{-1}(0)$.

Напомним, что для любого $\lambda \in \Lambda$ символом $\tilde{\lambda}$ мы обозначаем π -слой $\pi^{-1}(\lambda)$. Аналогично, для любого $\xi \in \mathbb{C}$ символ $\tilde{\xi}$ обозначает l -слой $l^{-1}(\xi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Всякий l -слой $\tilde{\xi}$ лежит в π -слое $\tilde{\lambda}$, где $\lambda = \hat{\pi}(\xi)$; если π -слой $\tilde{\lambda}$ не пересекается с σ , то он совпадает с l -слоем ξ , где $\xi = L(\lambda)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (6) вытекает, что l -слой $\tilde{\xi}$ есть часть π -слоя $\tilde{\lambda}$. Пусть π -слой $\tilde{\lambda}$ не пересекается с σ , т.е. $\tilde{\lambda} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma$. Но на множестве $\mathbb{C} \setminus \sigma$ выполняется соотношение (7), откуда следует, что π -слой $\tilde{\lambda}$ является частью l -слоя ξ . Поскольку по доказанному имеет место и обратное включение $\tilde{\xi} \subseteq \tilde{\lambda}$, заключаем, что $\tilde{\xi} = \tilde{\lambda}$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. *Сужения отображений $\hat{\pi}$ и L на множества $\mathbb{C} \setminus l(\sigma)$ и $\Lambda \setminus \pi(\sigma)$ соответственно являются взаимно однозначными и взаимно обратными отображениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим взаимную однозначность сужения отображения $\hat{\pi}$ на множество $\mathbb{C} \setminus l(\sigma)$. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C} \setminus l(\sigma)$ и $\hat{\pi}(\xi_1) = \hat{\pi}(\xi_2) = \lambda$, нужно показать, что $\xi_1 = \xi_2$. Согласно предложению 3 каждый из l -слоев ξ_1, ξ_2 является частью π -слоя $\tilde{\lambda}$. Но при условии $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C} \setminus l(\sigma)$ слои $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2$ не пересекаются с множеством σ и по предложению 3 совпадают со слоем $\tilde{\lambda}$. Таким образом, $\tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi}_2 = \tilde{\lambda}$. Отсюда следует, что $\xi_1 = \xi_2$. Далее установим взаимную однозначность сужения отображения L на множество $\Lambda \setminus \pi(\sigma)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \setminus \pi(\sigma)$ и $L(\lambda_1) = L(\lambda_2) = \xi$. Согласно предложению 3 π -слои $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ совпадают с l -слоем ξ : $\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_2 = \xi$. Значит, $\lambda_1 = \lambda_2$. Тем самым взаимная однозначность сужения L на множество $\Lambda \setminus \pi(\sigma)$ доказана. Если точка z пробежит множество $\mathbb{C} \setminus \sigma$, то точка λ опишет множество $\Lambda \setminus \pi(\sigma)$, а точка ξ опишет множество $\mathbb{C} \setminus l(\sigma)$. При этом

$$L(\lambda) = L \circ \pi(z) = l(z) = \xi, \quad \hat{\pi}(\xi) = \hat{\pi} \circ l(z) = \pi(z) = \lambda.$$

Таким образом, следствие доказано.

Если $z_0 \in \sigma$, то слои $\tilde{\xi}_0 = l^{-1}(l(z_0))$ и $\tilde{\lambda}^0 = \pi^{-1}(\pi(z_0))$ могут не совпадать. Действительно, пусть $\pi_1 = z^2 - 1, \pi_2 = z(z^2 - 1)$ и $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. Легко видеть, что поле частных $\mathbb{C}(\pi)$ кольца $\mathbb{C}[\pi]$ содержит одночлен z , значит, $\mathbb{C}(\pi) = \mathbb{C}(z)$. Отсюда вытекает, что одночлен z является многочленом Люрота. Обозначим его через l . Тогда

$$l^{-1}(l(1)) = \{1\}, \quad \pi^{-1}(\pi(1)) = \{-1; 1\}.$$

Отметим, что в рассматриваемом примере: многочлен s , ассоциированный с многочленом Люрота, совпадает с двучленом $z^2 - 1$; $\sigma = \{-1; 1\}$; отображение $\hat{\pi}$ совпадает с отображением π ; рациональная функция L совпадает с λ_2/λ_1 ; $S = \lambda_1$.

§3. Симметричные функции

3.1. l -симметричные множества. Множество $U \subseteq \mathbb{C}$ называется l -симметричным, если найдется $W \subseteq \mathbb{C}$ такое, что $U = l^{-1}(W)$; l -симметричные множества можно охарактеризовать и как подмножества $\mathbb{C}$, для которых выполняется соотношение $U = l^{-1}(l(U))$. Открытые l -симметричные множества образуют топологию. Обозначим ее через τ_l .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если $U \in \tau_\pi$, то $U \in \tau_l$, т.е. $\tau_\pi \subseteq \tau_l$. Если $U \in \tau_l$ и $U \cap \sigma = \emptyset$, то $U \in \tau_\pi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in \tau_\pi$. Из представления (6) вытекает, что $U = \pi^{-1}(\pi(U)) = l^{-1}(W)$, где $W = \hat{\pi}^{-1}(\pi(U))$. Это означает, что $U \in \tau_l$. Таким образом, $\tau_\pi \subseteq \tau_l$. Пусть $U \in \tau_l$ и $U \cap \sigma = \emptyset$. Тогда $\pi(U) \subseteq \Lambda \setminus \pi(\sigma)$. Из (7) вытекает, что $U = l^{-1}(l(U)) = \pi^{-1}(L^{-1}(L \circ \pi(U)))$. Но в силу предложения 3 (см. следствие) сужение отображения L на множество $\Lambda \setminus \pi(\sigma)$ является взаимно однозначным. Значит, $U = \pi^{-1}(\pi(U))$, т.е. $U \in \tau_\pi$. Предложение доказано.

3.2. l -симметричные функции. Функция φ , голоморфная в открытом l -симметричном множестве, называется *l -симметричной*, если для каждого l -слоя $\tilde{\xi}$ из области определения функции φ найдутся открытая l -симметричная окрестность U этого слоя и открытая окрестность $W \subseteq \mathbb{C}$ точки $\xi = l(\tilde{\xi})$, содержащая $l(U)$, такие, что сужение φ на U представляется в виде $\hat{\varphi} \circ l$, где $\hat{\varphi}$ – некоторая функция, голоморфная в W . Простейшие l -симметричные функции – это отображения, осуществляемые элементами кольца $\mathbb{C}[l]$.

Пусть U – открытое l -симметричное подмножество $\mathbb{C}$. Кольцо l -симметричных на U функций обозначается через $O_l(U)$.

ЛЕММА 1. *Каждая функция $f \in O_l(U)$ представима в виде*

$$f = \hat{f} \circ l, \quad \hat{f} \in O(l(U)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение l открыто, значит, множество $l(U)$ открыто. Каждый l -слой $\tilde{\xi} \subset U$ обладает открытой l -симметричной окрестностью $u_\xi \subseteq U$, в которой $f = \hat{f}_{v_\xi} \circ l$, где $\hat{f}_{v_\xi}$ голоморфна в $v_\xi = l(u_\xi)$. Таким образом, множество U покрывается системой $\{u\}$ открытых l -симметричных множеств, в каждом из которых имеет место представление

$$f = \hat{f}_v \circ l,$$

где $\hat{f}_v$ голоморфна в $v = l(u)$. Система множеств $\{v\}$, $v = l(u)$, $u \in \{u\}$, в свою очередь, покрывает множество $l(U)$. Нужно показать, что функции $\{f_v\}$ склеиваются в единую функцию $\hat{f}$, голоморфную в $l(U)$. Пусть $v', v'' \in \{v\}$ и $v' \cap v'' \neq \emptyset$. Найдутся $u', u'' \in \{u\}$ такие, что $v' = l(u')$, $v'' = l(u'')$. При этом $v' \cap v'' = l(u') \cap l(u'') = l(u' \cap u'')$. Поскольку $v' \cap v'' \neq \emptyset$, то $u' \cap u'' \neq \emptyset$. На множестве $u' \cap u''$ имеют место два представления

$$f = \hat{f}_{v'} \circ l, \quad f = \hat{f}_{v''} \circ l.$$

Из этих представлений следует, что $\hat{f}_{v'} = \hat{f}_{v''}$ на множестве $v' \cap v''$, т.е. функции $\hat{f}_{v'}$, $\hat{f}_{v''}$ склеиваются в одну функцию, заданную на $v' \cup v''$. Поскольку такая склейка имеет место для любых пар $\hat{f}_{v'}$, $\hat{f}_{v''}$, для которых $v' \cap v'' \neq \emptyset$, заключаем, что существует $\hat{f}$, заданная на $l(U)$, сужение которой на каждое v совпадает с $\hat{f}_v$. Очевидно, что эта функция голоморфна в $l(U)$. Также очевидно, что функция f представляется в U в виде $f = \hat{f} \circ l$. Лемма доказана.

Пусть U – открытое l -симметричное подмножество $\mathbb{C}$ и $U \cap \sigma = \emptyset$. По предложению 4 множество U является π -симметричным. Поэтому наряду с кольцом $O_l(U)$ l -симметричных на U функций мы можем рассматривать и кольцо $O_\pi(U)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $U \in \tau_l$ и $U \cap \sigma = \emptyset$, то $O_\pi(U) = O_l(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем выполнимость вложения

$$O_\pi(U) \subseteq O_l(U).$$

Пусть $f \in O_\pi(U)$. Нужно показать, что $f \in O_l(U)$. Выберем $z \in U$ и обозначим через ξ l -слой $l^{-1}(l(z))$, а через $\tilde{\lambda}$ π -слой $\pi^{-1}(\pi(z)) \subset U$. По определению π -симметричной функции существует открытая π -симметричная окрестность $u \subseteq U$ слоя $\tilde{\lambda}$ такая, что в u имеет место представление

$$f = F \circ \pi, \quad (8)$$

где F голоморфна в некоторой окрестности множества $\pi(u)$. Но $\pi = \hat{\pi} \circ l$. Подставляя в (8) выражение для π , получаем $f = \hat{f} \circ l$, где $\hat{f} = F \circ \hat{\pi}$. Функция $\hat{f}$ голоморфна в $\hat{\pi}^{-1}(\pi(u))$. Так как $u \cap \sigma = \emptyset$, то $l(u) = L \circ \pi(u)$. По предложению 3 (см. следствие) $l(u) = L \circ \pi(u) = \hat{\pi}^{-1}(\pi(u))$. Значит, $\hat{f}$ голоморфна в $l(u)$. В силу предложения 3 $\xi \subseteq \tilde{\lambda}$, а в силу предложения 4 множество u является l -симметричным. Таким образом, для каждого l -слоя $\xi \subset U$ существует открытая l -симметричная окрестность $u \subseteq U$ этого слоя, в которой имеет место представление $f = \hat{f} \circ l$, $\hat{f} \in O(l(u))$. Это значит, что $f \in O_l(U)$.

Пусть $U \in \tau_l$ и $U \cap \sigma = \emptyset$. Докажем выполнимость вложения

$$O_l(U) \subseteq O_\pi(U).$$

Выберем любую $f \in O_l(U)$. По лемме 1 функция f представляется в виде $f = \hat{f} \circ l$, где $\hat{f}$ голоморфна в $l(U)$. В силу (7) и условия $U \cap \sigma = \emptyset$ на множестве U имеем представление $f = \hat{f} \circ L \circ \pi$, т.е. $f = F \circ \pi$. Функция $F = \hat{f} \circ L$ голоморфна в открытом (в $\mathbb{C}^q$) множестве $L^{-1}(l(U))$. При этом в силу предложения 3 (см. следствие) $\pi(U) = \hat{\pi} \circ l(U) \subseteq L^{-1}(l(U))$. Значит, $f \in O_\pi(U)$. Предложение доказано.

3.3. Сравнение колец симметричных функций. Пусть U – открытое π -симметричное подмножество $\mathbb{C}$. По предложению 4 множество U является l -симметричным. Поэтому наряду с кольцом $O_\pi(U)$ мы можем рассматривать и кольцо $O_l(U)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть s – многочлен, ассоциированный с многочленом Люрота l ; тогда для любого открытого π -симметричного множества $U \subseteq \mathbb{C}^n$ имеют место вложения

$$sO_l(U) \subseteq O_\pi(U) \subseteq O_l(U).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнимость вложения $O_\pi(U) \subseteq O_l(U)$ вытекает из предложения 5. Докажем вложение

$$sO_l(U) \subseteq O_\pi(U).$$

Пусть $f \in O_l(U)$. Нужно доказать, что для любого π -слоя $\tilde{\lambda}_0 \subset U$ существуют открытая окрестность v точки $\lambda_0 = \pi(\tilde{\lambda}_0)$ и функция F , голоморфная в v , такие, что в открытом π -симметричном множестве $\pi^{-1}(v)$ имеет место представление $f = F \circ \pi$. Вообще говоря, π -слой $\tilde{\lambda}_0$ состоит из конечного числа l -слоев $\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k$. Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ открытые круги с центрами в точках $\xi_1 = l(\tilde{\xi}_1), \dots, \xi_k = l(\tilde{\xi}_k)$ соответственно. Радиусы этих кругов выбираем столь малыми, чтобы их замыкания попарно не пересекались и лежали в $l(U)$. В силу леммы 1 из условия $f \in O_l(U)$ следует, что $f = \hat{f} \circ l$, где $\hat{f}$ — голоморфная в $l(U)$ функция. По теореме Мергеляна [9; гл. III] существует последовательность многочленов $\hat{p}_n$, $n = 1, 2, \dots$, сходящаяся к $\hat{f}$ равномерно на $w = w_1 \cup \dots \cup w_k$. Выберем из последовательности $\hat{p}_n$ подпоследовательность (также обозначаемую через $\hat{p}_n$), удовлетворяющую условию $\sup_w |\hat{p}_n - \hat{p}_{n-1}| \leq 2^{-n}$, $n = 2, 3, \dots$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_n, \quad (9)$$

где $\hat{q}_1 = \hat{p}_1$, $\hat{q}_n = \hat{p}_n - \hat{p}_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, абсолютно сходится к $\hat{f}$ по норме $\|f\|_w = \sup_w |f|$; при этом абсолютная сходимость ряда (9) по норме $\|\cdot\|_w$ означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{q}_n\|_w < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_n \circ l$ сходится абсолютно к $f = \hat{f} \circ l$ по норме $\|\cdot\|_u$, где $u = l^{-1}(w)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} s(\hat{q}_n \circ l). \quad (10)$$

В силу включения $s\mathbb{C}[l] \subseteq \mathbb{C}[\pi]$ ряд (10) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \circ \pi, \quad (11)$$

где P_n — многочлены от q переменных. Ряд (11) совпадает с рядом (10) и сходится абсолютно к sf по норме $\|\cdot\|_u$. Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (12)$$

сходится абсолютно по норме $\|\cdot\|_{\pi(u)}$. Множество u содержит π -слой $\tilde{\lambda}_0$. Значит, множество $\pi(u)$ содержит точку λ_0 . Далее, по теореме Реммерта [10; 5.8, теорема] множество $\pi(u)$ является аналитическим. Значит [7; гл. V, предложение ВЗ], существует открытая окрестность v точки λ_0 такая, что для каждого многочлена P_n существует функция $\tilde{P}_n$, голоморфная в v , такая, что выполняются условия:

- 1) $\tilde{P}_n(\lambda) = P_n(\lambda)$ при $\lambda \in v \cap \pi(u)$;
- 2) $\sup_v |\tilde{P}_n| \leq Q \sup_{\pi(u)} |P_n|$ при некотором $Q > 0$.

Можно предполагать, что

$$v \cap \Lambda \subset \pi(u). \quad (13)$$

Из того, что ряд (12) сходится абсолютно по норме $\|\cdot\|_{\pi(u)}$, и из условия 2) следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n \quad (14)$$

сходится абсолютно по норме $\|\cdot\|_v$ к некоторой функции F , голоморфной в v . Сходимость ряда (14) по норме $\|\cdot\|_v$ влечет сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n \circ \pi$ по норме $\|\cdot\|_{\pi^{-1}(v)}$. Далее, включение (13) влечет включение $\pi^{-1}(v) \subseteq u$. Используя условие 1), имеем на $\pi^{-1}(v)$:

$$F \circ \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{P}_n \circ \pi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \circ \pi = \sum_{n=1}^{\infty} s\hat{q}_n \circ l = sf.$$

Заметим, что открытое π -симметричное множество $\pi^{-1}(v)$ содержит π -слой $\tilde{\lambda}_0$. Таким образом, мы установили, что на π -симметричной окрестности $\pi^{-1}(v)$ слоя $\tilde{\lambda}$ имеет место представление $sf = F \circ \pi$, где F голоморфна в v . Предложение доказано.

§ 4. О представлениях симметричных функций

4.1. Представление голоморфных функций. Пусть f — голоморфная функция в открытом множестве $U \subseteq \mathbb{C}$; $z_0, \dots, z_k$ — конечная система точек из U . Справедливо тождество

$$\begin{aligned} f(z) &= [z_0]_f + [z_0, z_1]_f(z - z_0) + \dots + [z_0, \dots, z_k]_f(z - z_0) \dots (z - z_{k-1}) \\ &\quad + [z_0, \dots, z_k, z]_f(z - z_0) \dots (z - z_k). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь использованы стандартные обозначения для разделенных разностей [11]:

$$\begin{aligned} [z_0]_f &= f(z_0), \quad [z_0, z_1]_f = \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}, \\ [z_0, z_1, z_2]_f &= \frac{[z_0, z_1]_f - [z_1, z_2]_f}{z_1 - z_2}, \\ [z_0, z_1, z_2, z_3]_f &= \frac{[z_0, z_1, z_2]_f - [z_0, z_1, z_3]_f}{z_2 - z_3} \end{aligned}$$

и т. д. Действительно, согласно принятым обозначениям очевидное соотношение

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

запишется в виде

$$f(z) = [z_0]_f + [z_0, z]_f(z - z_0).$$

Положим $f_1(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in O(U)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f_1(z)(z - z_0) \\ &= f(z_0) + \left(f_1(z_1) + \frac{f_1(z) - f_1(z_1)}{z - z_1}(z - z_1) \right)(z - z_0) \\ &= f(z_0) + f_1(z_1)(z - z_0) + \frac{f_1(z) - f_1(z_1)}{z - z_1}(z - z_1)(z - z_0) \\ &= [z_0]_f + [z_0, z_1]_f(z - z_0) + [z_0, z_1, z]_f(z - z_0)(z - z_1). \end{aligned}$$

Продолжая такие выкладки, на k -м шаге получаем формулу (15). Отметим, что эта формула широко используется в теории разделенных разностей [11; гл. 1, формула Ньютона].

4.2. Представление l -симметричных функций. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} [z_0]_{f,l} &= f(z_0), \quad [z_0, z_1]_{f,l} = \frac{f(z_1) - f(z_0)}{l(z_1) - l(z_0)}, \\ [z_0, z_1, z_2]_{f,l} &= \frac{[z_0, z_1]_{f,l} - [z_1, z_2]_{f,l}}{l(z_1) - l(z_2)} \end{aligned}$$

и т.д.

ЛЕММА 2. Пусть f l -симметрична в открытом l -симметричном множестве U , $\xi, \xi_0, \dots, \xi_k$ — конечная совокупность l -слоев в U , $z \in \xi$, $z_0 \in \xi_0, \dots, z_k \in \xi_k$. Тогда в U имеет место представление

$$f(z) = p(z) + [z_0, \dots, z_k, z]_{f,l}(l(z) - \xi_0) \cdots (l(z) - \xi_k), \quad (16)$$

где

$$p(z) = [z_0]_{f,l} + [z_0, z_1]_{f,l}(l(z) - \xi_0) + \cdots + [z_0, \dots, z_k]_{f,l}(l(z) - \xi_0) \cdots (l(z) - \xi_{k-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 f представляется в виде $f = \widehat{f} \circ l$, где $\widehat{f}$ голоморфна в $l(U)$. Используя (15), напомним представление

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= [\xi_0]_{\widehat{f}} + [\xi_0, \xi_1]_{\widehat{f}}(\xi - \xi_0) + \cdots + [\xi_0, \dots, \xi_k]_{\widehat{f}}(\xi - \xi_0) \cdots (\xi - \xi_{k-1}) \\ &\quad + [\xi_0, \dots, \xi_k, \xi]_{\widehat{f}}(\xi - \xi_0) \cdots (\xi - \xi_k). \end{aligned}$$

Теперь произведем замену $\xi = l(z)$ и заметим, что

$$[\xi_0]_{\widehat{f}} = [z_0]_{f,l}, \quad [\xi_0, \xi_1]_{\widehat{f}} = [z_0, z_1]_{f,l}, \quad \dots$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть σ – нулевое множество многочлена s , ассоциированного с многочленом Люрота l , U – открытое l -симметричное множество, содержащее σ , $f \in O_l(U)$. Тогда в U имеет место представление

$$f = p + s\varphi,$$

где $p = P \circ l \in \mathbb{C}[l]$, $\varphi \in O_l(U)$; коэффициенты P представляют собой конечные линейные комбинации разделенных разностей вида $[z_0, \dots, z_n]_{f,l}$, где $z_0, \dots, z_k \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество σ состоит из конечного числа l -слоев $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_k$. Применим лемму 2 к l -симметричной в U функции f и к слоям $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_k$. Получим представление (16). В этом представлении произведение $(l - \xi_0) \cdots (l - \xi_k)$ совпадает с точностью до постоянного множителя с многочленом s , $[z_0, \dots, z_k, z]_{f,l} \in O_l(U)$. Что касается утверждения о коэффициентах многочлена p , оно очевидно.

4.3. Представление π -симметричных функций. Пусть $V_1, \dots, V_q$ – открытые множества в $\mathbb{C}$, $V = V_1 \times \cdots \times V_q$,

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_q^{(0)}), \dots, \lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_q^{(k)})$$

– фиксированные точки из V .

ЛЕММА 3. Всякая функция $F \in O(V)$ допускает представление

$$F(\lambda) = P(\lambda) + A_1(\lambda)(\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}) \cdots (\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}) + \cdots + A_q(\lambda)(\lambda_q - \lambda_q^{(0)}) \cdots (\lambda_q - \lambda_q^{(k)}), \quad (17)$$

где $P(\lambda)$ – многочлен, $A_1(\lambda), \dots, A_q(\lambda) \in O(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу (15) к функции F по переменной λ_1 . Получим представление

$$F(\lambda) = P_1(\lambda) + A_1(\lambda)(\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}) \cdots (\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}),$$

где $A_1(\lambda) = [\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_1^{(k)}, \lambda_1]_F \in O(V)$, $P_1(\lambda) = \sum b_i \lambda_1^i$ – многочлен, коэффициенты которого представляют собой конечные линейные комбинации разделенных разностей функции F по переменной λ_1 с узлами в точках $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_1^{(k)}$. Эти разделенные разности являются функциями переменных $\lambda_2, \dots, \lambda_q$, голоморфными в $V_2 \times \cdots \times V_q$. Аналогичным образом разлагаются коэффициенты многочлена $P_1(\lambda)$ по переменной λ_2 . Получаем представление

$$F(\lambda) = P_2(\lambda) + A_1(\lambda)(\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}) \cdots (\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}) + A_2(\lambda)(\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}) \cdots (\lambda_2 - \lambda_2^{(k)}),$$

где $A_1(\lambda), A_2(\lambda) \in O(V)$, $P_2(\lambda) = \sum b_{i,j} \lambda_1^i \lambda_2^j$ – многочлен с коэффициентами, зависящими от переменных $\lambda_3, \dots, \lambda_q$ и голоморфными в $V_3 \times \cdots \times V_q$. Продолжая эту процедуру, на q -м шаге получаем представление (17). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $U = \pi^{-1}(V)$. Всякая функция $f = F \circ \pi$, $F \in O(V)$, допускает представление

$$f = p + a_1(\pi_1 - \lambda_1^{(0)}) \cdots (\pi_1 - \lambda_1^{(k)}) + \cdots + a_q(\pi_q - \lambda_q^{(0)}) \cdots (\pi_q - \lambda_q^{(k)}), \quad (18)$$

в котором $p \in \mathbb{C}[\pi]$, $a_1 = A_1 \circ \pi$, $\dots$, $a_q = A_q \circ \pi$, $A_1, \dots, A_q \in O(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (18) получается из представления (17) подстановками $\lambda_1 = \pi_1(z), \dots, \lambda_q = \pi_q(z)$.

Пусть σ — объединение конечного множества π -слоев.

ЛЕММА 4. Если $f \in O_\pi(\tilde{\lambda}) \quad \forall \tilde{\lambda} \subseteq \sigma$, то в некоторой открытой π -симметричной окрестности U множества σ имеет место представление

$$f = F \circ \pi, \quad (19)$$

в котором F — функция, голоморфная в некотором открытом (в $\mathbb{C}^q$) множестве V , содержащем $\pi(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что множество σ состоит из π -слоев $\tilde{\lambda}^{(0)}, \dots, \tilde{\lambda}^{(k)}$. При этом $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_q^{(0)}), \dots, \lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_q^{(k)})$. По условию для каждого $j = 0, \dots, k$ существует открытое полицилиндрическое множество $V^{(j)} = V_1^{(j)} \times \cdots \times V_q^{(j)}$ с центром в $\lambda^{(j)} = (\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_q^{(j)})$ и голоморфная в нем функция $F^{(j)}$ такие, что в открытой π -симметричной окрестности $\pi^{-1}(V^{(j)})$ π -слоя $\tilde{\lambda}^{(j)}$ имеет место представление

$$f = F^{(j)} \circ \pi.$$

При этом множества $V_i^{(j)}, i = 1, \dots, q, j = 0, \dots, k$, можно выбрать таким образом, что $V_i^{(j')} \cap V_i^{(j'')} = \emptyset$, если $\lambda_i^{(j')} \neq \lambda_i^{(j'')}$, и $V_i^{(j')} = V_i^{(j'')}$, если $\lambda_i^{(j')} = \lambda_i^{(j'')}$, $i = 1, \dots, q$. Рассмотрим множества $V^{(j_1, \dots, j_q)} = V_1^{(j_1)} \times \cdots \times V_q^{(j_q)}$, где $j_1, \dots, j_q$ независимо друг от друга принимают значения $0, 1, \dots, k$, и множества

$$V_1 = \bigcup_{j=0}^k V_1^{(j)}, \dots, V_q = \bigcup_{j=0}^k V_q^{(j)}.$$

Обозначим через V объединение всех множеств $V^{(j_1, \dots, j_q)}$. Тогда $V = V_1 \times \cdots \times V_q$. Множество V есть наименьшее полицилиндрическое множество, содержащее $V^{(0)}, \dots, V^{(k)}$, ибо всякое другое полицилиндрическое множество, содержащее $V^{(0)}, \dots, V^{(k)}$, necessarily содержит множества $V^{(j_1, \dots, j_q)}$ и, следовательно, содержит V . Совокупность множеств $V^{(j_1, \dots, j_q)}$ обладает следующим свойством: если два из этих множеств пересекаются, то они совпадают. Действительно, пусть $V^{(j'_1, \dots, j'_q)} \cap V^{(j''_1, \dots, j''_q)} \neq \emptyset$. Значит, $V_1^{(j'_1)} \cap V_1^{(j''_1)} \neq \emptyset, \dots, V_q^{(j'_q)} \cap V_q^{(j''_q)} \neq \emptyset$. В силу условий, наложенных на выбор $V_i^{(j)}, i = 1, \dots, q, j = 0, \dots, k$, это возможно только в случае, когда $V_1^{(j'_1)} = V_1^{(j''_1)}, \dots, V_q^{(j'_q)} = V_q^{(j''_q)}$. Заметим, что множества $V^{(0)}, \dots, V^{(k)}$ совпадают с множествами $V^{(0, \dots, 0)}, \dots, V^{(k, \dots, k)}$ соответственно. Пусть на множествах $V^{(0)}, \dots, V^{(k)}$ заданы функции $F_1, \dots, F_k$ соответственно. Определим на полицилиндрическом множестве V функцию F , полагая $F = F_j$

на тех $V^{(j_1, \dots, j_q)}$, которые совпадают с $V^{(j)}$, и $F = 0$ на всех $V^{(j_1, \dots, j_q)}$, не совпадающих ни с одним из множеств $V^{(0)}, \dots, V^{(k)}$. В силу свойств множеств $V^{(j_1, \dots, j_q)}$ определение функции F корректно. Пусть $U = \pi^{-1}(V)$ и $U^{(j)} = \pi^{-1}(V^{(j)})$. Ясно, что U – открытое π -симметричное множество и при этом $\bigcup_{j=1}^k U^{(j)} \subseteq U$. Очевидно, что сужение F на $V^{(j)}$ есть $F^{(j)}$. Отсюда следует, что $f = F^{(j)} \circ \pi = F \circ \pi$ на множестве $U^{(j)}$. Значит, на всем U имеем представление (19), где F голоморфна на открытом полицилиндрическом множестве $V \supset \pi(U)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть σ – нулевое множество многочлена s , ассоциированного с многочленом Люрота l , и $f \in O_\pi(\tilde{\lambda}) \quad \forall \tilde{\lambda} \subseteq \sigma$. Тогда в некоторой открытой π -симметричной окрестности U множества σ имеет место представление

$$f = p + s(a_1 p_1 + \dots + a_q p_q),$$

где $p \in \mathbb{C}[\pi]$, $p_1, \dots, p_q \in \mathbb{C}[l]$, $a_1, \dots, a_q \in O_\pi(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 в некоторой открытой π -симметричной окрестности U множества σ имеет место представление (19), где F – функция, голоморфная в некотором открытом (в $\mathbb{C}^q$) полицилиндрическом множестве V , содержащем $\pi(U)$. Пусть σ состоит из π -слоев $\tilde{\lambda}^{(0)}, \dots, \tilde{\lambda}^{(k)}$. При этом $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_q^{(0)})$, $\dots$, $\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_q^{(k)})$. По лемме 3 (см. следствие) на множестве U функция f представляется в виде

$$f = p + a_1(\pi_1 - \lambda_1^{(0)}) \cdots (\pi_1 - \lambda_1^{(k)}) + \dots + a_q(\pi_q - \lambda_q^{(0)}) \cdots (\pi_q - \lambda_q^{(k)}),$$

где $p \in \mathbb{C}[\pi]$, $a_1, \dots, a_q \in O_\pi(U)$. При любом фиксированном $i = 1, \dots, q$ произведение $(\pi_i - \lambda_i^{(0)}) \cdots (\pi_i - \lambda_i^{(k)})$ обращается в нуль на σ . Следовательно, это произведение делится на многочлен s . Результат деления p_i есть, очевидно, l -симметричный многочлен. Таким образом, необходимое представление получено.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $r \in \mathbb{C}[z]$ и $r \in O_\pi(\tilde{\lambda}) \quad \forall \tilde{\lambda} \subseteq \sigma$. Тогда $r \in \mathbb{C}[\pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 8 в некоторой π -симметричной окрестности U множества σ имеем $r = p + s\varphi$, где $p \in \mathbb{C}[\pi]$, $\varphi \in O_l(U)$. Значит, $\varphi = (r - p)/s$. Так как нули многочлена s лежат в U , то s делит $r - p$. Следовательно, φ – многочлен (от z). Но $\varphi \in O_l(U)$. Значит, по лемме 1 существует $\hat{\varphi} \in O(l(U))$ такая, что на множестве U имеет место представление $\varphi = \hat{\varphi} \circ l$. Это представление возможно только при условии, что $\hat{\varphi}$ – многочлен. Таким образом, $\varphi \in \mathbb{C}[l]$. В силу предложения 2 $s\varphi \in \mathbb{C}[\pi]$. Значит, $r \in \mathbb{C}[\pi]$.

§ 5. Обильные подмодули

5.1. Обозначения и формулировка теоремы. Пусть I_0 – произвольное множество в $\mathbf{P}$. Обозначим через $I_0[\pi]$ множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов I_0 с коэффициентами из кольца $\mathbb{C}[\pi]$. Множество $I_0[\pi]$ является минимальным $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, содержащим множество I_0 . Так как операция умножения на многочлен непрерывна в топологии $\mathbf{P}$, то замыкание $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуля $I_0[\pi]$ будет также $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$. Этот подмодуль будем обозначать через I и называть замкнутым $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, порождаемым

множеством I_0 . Аналогичным образом, обозначим через $I_0[l]$ множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов I_0 с коэффициентами из кольца $\mathbb{C}[l]$. Множество $I_0[l]$ является минимальным $\mathbb{C}[l]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, содержащим множество I_0 . Его замыкание будет также $\mathbb{C}[l]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$. Этот подмодуль будем обозначать через J и называть замкнутым $\mathbb{C}[l]$ -подмодулем в $\mathbf{P}$, порождаемым множеством I_0 . Заметим, что из включений

$$s\mathbb{C}[l] \subseteq \mathbb{C}[\pi] \subseteq \mathbb{C}[l]$$

следуют включения

$$sJ \subseteq I \subseteq J. \quad (20)$$

Символ $I(\tilde{\lambda})$ обозначает локальный $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -подмодуль I , ассоциированный с π -слоем $\tilde{\lambda}$. Напомним, что $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I называется *обильным*, если справедлива импликация:

$$f \in \mathbf{P}, \quad f \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad f \in I.$$

Пусть $O_l(\tilde{\xi})$ – кольцо ростков l -симметричных функций, голоморфных в l -симметричных окрестностях l -слоя $\tilde{\xi}$; $\mathbf{O}(\tilde{\xi})$ – кольцо ростков ν -функций, голоморфных в l -симметричных окрестностях l -слоя $\tilde{\xi}$; $J(\tilde{\xi}) \subseteq \mathbf{O}(\tilde{\xi})$ – локальный $O_l(\tilde{\xi})$ -подмодуль подмодуля J , ассоциированный с l -слоем $\tilde{\xi}$. Согласно определению замкнутого $\mathbb{C}[l]$ -подмодуля J называется *обильным*, если справедлива импликация:

$$f \in \mathbf{P}, \quad f \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad f \in J.$$

Наша цель – доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА РЕДУКЦИИ. *Для того чтобы $\mathbb{C}[\pi]$ -подмодуль I был обильным, необходимо и достаточно, чтобы был обильным $\mathbb{C}[l]$ -подмодуль J .*

5.2. Связи между локальными подмодулями. Введем в $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ отделимую локально выпуклую топологию, порожденную счетным набором полунорм

$$f = (f_j) \rightarrow \frac{1}{k!} |D^k f_j(\omega)|,$$

каждая из которых определяется выбором точки (k, ω, j) из декартова произведения $\mathbb{Z}_+ \times \tilde{\lambda} \times \{1, \dots, \nu\}$. Здесь $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Эту топологию будем называть *коэффициентной*. Известно, что любой $O_\pi(\tilde{\lambda})$ -подмодуль $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ является замкнутым в коэффициентной топологии [5; §3, предложение 4]. Кроме того, топология $\mathbf{P}$ мажорирует топологию компактной сходимости [12]. Значит, отображение вложения $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{O}(\tilde{\lambda})$ является непрерывным.

Для π -слоя $\tilde{\lambda}$ обозначим через $I_0(\tilde{\lambda})$ множество всевозможных конечных сумм $\sum c_i f^{(i)}$, где $c_i \in O_\pi(\tilde{\lambda})$, $f^{(i)} \in I_0$.

ЛЕММА 5. *Для любого π -слоя $\tilde{\lambda}$ справедливо соотношение*

$$I(\tilde{\lambda}) = I_0(\tilde{\lambda}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $I_0 \subseteq I$, то $I_0(\tilde{\lambda}) \subseteq I(\tilde{\lambda})$. Докажем обратное включение. Каждый элемент $f \in I$ аппроксимируется элементами из $I_0[\pi]$ в топологии $\mathbf{P}$ и, тем более, в коэффициентной топологии. Таким образом, подмодуль $I(\tilde{\lambda})$ вложен в замыкание $\overline{I_0(\tilde{\lambda})}$ подмодуля $I_0(\tilde{\lambda})$ в топологии $\mathbf{O}(\tilde{\lambda})$. Но $\overline{I_0(\tilde{\lambda})} = I_0(\tilde{\lambda})$. Значит, $I(\tilde{\lambda}) \subseteq I_0(\tilde{\lambda})$. Лемма доказана.

Для l -слоя $\tilde{\xi}$ обозначим через $I_0(\tilde{\xi})$ множество всевозможных конечных сумм $\sum c_i f^{(i)}$, где $c_i \in O_l(\tilde{\xi})$, $f^{(i)} \in I_0$. Аналогично лемме 5 доказывается

ЛЕММА 6. Для любого l -слоя $\tilde{\xi}$ справедливо соотношение

$$J(\tilde{\xi}) = I_0(\tilde{\xi}).$$

Выберем произвольный π -слой $\tilde{\lambda}$. В общем случае он составлен из конечного множества попарно не пересекающихся l -слоев.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если π -слой $\tilde{\lambda}$ составлен из конечного множества попарно не пересекающихся l -слоев $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_k$, то справедливы включения

$$s \bigcap_{j=0}^k J(\tilde{\xi}_j) \subseteq I(\tilde{\lambda}) \subseteq \bigcup_{j=0}^k J(\tilde{\xi}_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in J(\tilde{\xi}_j)$, $j = 0, \dots, k$. По лемме 6 в некоторой открытой l -симметричной окрестности U_j l -слоя $\tilde{\xi}_j$ имеет место представление

$$f = a_{j,1} f_{j,1} + \dots + a_{j,N} f_{j,N}, \quad (21)$$

где $a_{j,i} \in O_l(U_j)$, $f_{j,i} \in I_0$. Окрестности U_j , $j = 0, \dots, k$, выберем так, чтобы они попарно не пересекались. Открытое множество $U = \bigcup_{j=0}^k U_j$ включает $\tilde{\lambda}$. Подберем открытое π -симметричное множество $U' \subseteq U$, $\tilde{\lambda} \subset U'$, так, чтобы выполнялись условия:

- 1) U' распадается в объединение открытых попарно не пересекающихся l -симметричных множеств U'_j , $j = 0, \dots, k$;
- 2) $\tilde{\xi}_j \subset U'_j \subseteq U_j$, $j = 0, \dots, k$.

Отображение π является замкнутым, значит, можно положить, например, $U' = \pi^{-1}(\mathbb{C}^q \setminus \pi(\mathbb{C} \setminus U)) \subseteq U$, $U'_j = U' \cap U_j$. Из (21) вытекает, что сужение f на множество U'_j представляется в виде

$$f = a'_{j,1} f_{j,1} + \dots + a'_{j,N} f_{j,N}, \quad a'_{j,i} \in O_l(U'_j),$$

где $a'_{j,i}$ – сужение $a_{j,i}$ на U'_j . Доопределим коэффициенты $a'_{j,i}$ до l -симметричных на U' функций $b_{j,i}$ следующим образом: $b_{j,i} = a'_{j,i}$ на U'_j и $b_{j,i} \equiv 0$ на $U' \setminus U'_j$. Тогда $\sum_{i=1}^N b_{j,i} f_{j,i} = f$ на U'_j и $\sum_{i=1}^N b_{j,i} f_{j,i} \equiv 0$ на $U' \setminus U'_j$. Значит, на U' справедливо представление

$$f = \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^N b_{j,i} f_{j,i}, \quad b_{j,i} \in O_l(U'), \quad f_{j,i} \in I_0.$$

В силу предложения 6 $c_{j,i} = sb_{j,i} \in O_\pi(U')$, значит, $sf \in I_0(\tilde{\lambda})$. Но $I_0(\tilde{\lambda}) = I(\tilde{\lambda})$ по лемме 5. Таким образом, левое включение доказано. Перейдем к доказательству правого включения. Пусть $f \in I(\tilde{\lambda})$. По лемме 5 существует π -симметричная окрестность U слоя $\tilde{\lambda}$, в которой имеет место представление $f = \sum c_i f^{(i)}$, где $c_i \in O_\pi(U)$, $f^{(i)} \in I_0$. Но в силу предложения 6 $O_\pi(U) \subseteq O_l(U)$. Отсюда следует, что $f \in I_0(\xi_j) = J(\xi_j)$, $j = 0, \dots, k$. Предложение доказано.

5.3. Три леммы. Для доказательства теоремы редукции нам потребуются три подготовительные леммы.

ЛЕММА 7. Пусть $f \in \mathbf{P}$, $f \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. Тогда существует элемент $\psi \in I_0[l]$ такой, что

$$f = \psi + sg,$$

где $g \in \mathbf{P}$, $g \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ — нулевое множество многочлена s , ассоциированного с многочленом Люрота $l, \tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_k$ — l -слои, составляющие σ . Условие $f \in \mathbf{P}$, $f \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$ влечет $f \in \bigcap_{j=0}^k J(\xi_j)$. По лемме 6 в некоторой открытой l -симметричной окрестности U_j l -слоя $\tilde{\xi}_j$ имеет место представление (21). Окрестности U_j , $j = 0, \dots, k$, выберем так, чтобы они попарно не пересекались, и доопределим коэффициенты $a_{j,i}$ до l -симметричных на множестве $U = \bigcup_{j=0}^k U_j$ функций $b_{j,i}$ следующим образом: $b_{j,i} = a_{j,i}$ на U_j и $b_{j,i} \equiv 0$ на $U \setminus U_j$. Из (21) вытекает, что f на множестве U представляется в виде

$$f = \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^N b_{j,i} f_{j,i}, \quad b_{j,i} \in O_l(U), \quad f_{j,i} \in I_0.$$

По предложению 7 на множестве U имеем $b_{j,i} = p_{j,i} + s\varphi_{j,i}$, где $p_{j,i} \in \mathbb{C}[l]$, $\varphi_{j,i} \in O_l(U)$. Используя это представление, на том же множестве получим

$$f = \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^N (p_{j,i} + s\varphi_{j,i}) f_{j,i} = \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^N p_{j,i} f_{j,i} + s \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^N \varphi_{j,i} f_{j,i} = \psi + sg, \quad (22)$$

где $\psi \in I_0[l]$, $g \in I_0(\tilde{\xi}) \quad \forall \tilde{\xi} \subset U$. Так как многочлен s не обращается в нуль вне U , из представления (22) вытекает, что g аналитически продолжается на всю комплексную плоскость в виде $(f - \psi)/s$; при этом в силу устойчивости $\mathbf{P}$ элемент g принадлежит $\mathbf{P}$. Из включения $s \in \mathbb{C}[l]$ вытекает представление $s = \hat{s} \circ l$. При этом многочлен $\hat{s}$ не имеет нулей вне множества $l(\sigma)$. Значит, рациональная функция $\frac{1}{s} = \frac{1}{\hat{s}} \circ l$ принадлежит $O_l(\mathbb{C} \setminus \sigma)$. Отсюда вытекает, что $g \in I_0(\tilde{\xi}) \quad \forall \tilde{\xi} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma$. Значит, $g \in I_0(\tilde{\xi}) \quad \forall \tilde{\xi} \subset \mathbb{C}$. Но по лемме 6 для любого l -слоя $\tilde{\xi}$ справедливо соотношение $J(\tilde{\xi}) = I_0(\tilde{\xi})$. Таким образом, лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $f \in \mathbf{P}$, $f \in I(\tilde{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Тогда существует элемент $\psi \in I_0[\pi]$ такой, что

$$f = \psi + sg,$$

где $g \in \mathbf{P}$, $g \in J(\tilde{\xi}) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нулевое множество σ многочлена s разбивается на конечное множество π -слоев $\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_k$. По лемме 5 в некоторой открытой π -симметричной окрестности U_j π -слоя $\tilde{\lambda}_j$ имеет место представление (21), в котором $a_{j,i} \in O_\pi(U_j)$, $f_{j,i} \in I_0$. Окрестности U_j , $j = 0, \dots, k$, выберем так, чтобы они попарно не пересекались, и доопределим коэффициенты $a_{j,i}$ до π -симметричных на множестве $U = \bigcup_{j=0}^k U_j$ функций $b_{j,i}$ следующим образом: $b_{j,i} = a_{j,i}$ на U_j и $b_{j,i} \equiv 0$ на $U \setminus U_j$. Из (21) вытекает, что f на множестве U представляется в виде

$$f = \sum_{j=0}^k \sum_{i=1}^N b_{j,i} f_{j,i}, \quad b_{j,i} \in O_\pi(U), \quad f_{j,i} \in I_0.$$

По предложению 8 на множестве U имеем $b_{j,i} = p_{j,i} + s\varphi_{j,i}$, где $p_{j,i} \in \mathbb{C}[\pi]$, $\varphi_{j,i} \in O_l(U)$. Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей леммы, приходим к представлению $f = \psi + sg$, в котором $\psi \in I_0[\pi]$, $g \in I_0(\tilde{\xi}) \forall \tilde{\xi} \subset \mathbb{C}$. Но по лемме 6 для любого l -слоя $\tilde{\xi}$ справедливо соотношение $I_0(\tilde{\xi}) = J(\tilde{\xi})$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Если I – обильный подмодуль и $f \in \mathbf{P}$, $f \in J(\tilde{\xi}) \forall \tilde{\xi} \in \mathbb{C}$, то $sf \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\lambda}$ – произвольный π -слой. Вообще говоря, $\tilde{\lambda}$ состоит из конечного множества попарно не пересекающихся l -слоев $\tilde{\xi}_0, \dots, \tilde{\xi}_k$. По условию $f \in J(\tilde{\xi}_j)$, $j = 0, \dots, k$. Следовательно, по предложению 9 $sf \in I(\tilde{\lambda})$. Так как π -слой $\tilde{\lambda}$ выбран произвольным образом, то $sf \in I(\tilde{\lambda}) \forall \tilde{\lambda} \in \Lambda$. В силу обильности I имеем $sf \in I$.

5.4. Доказательство теоремы редукции. Необходимость. Допустим, что I – обильный подмодуль. Докажем, что при этом условии J – также обильный подмодуль. Пусть $f \in \mathbf{P}$, $f \in J(\tilde{\xi}) \forall \tilde{\xi} \in \mathbb{C}$. По лемме 7 существует элемент $\psi \in I_0[l] \subseteq J$ такой, что

$$f = \psi + sg, \tag{23}$$

где $g \in \mathbf{P}$, $g \in J(\tilde{\xi}) \forall \tilde{\xi} \in \mathbb{C}$. По лемме 9 $sg \in I$. В силу (20) $sg \in J$. Из (23) вытекает, что $f \in J$. Необходимость установлена.

Достаточность. Пусть J – обильный подмодуль и $f \in \mathbf{P}$, $f \in I(\tilde{\lambda}) \forall \tilde{\lambda} \in \Lambda$. По лемме 8 существует элемент $\psi \in I_0[\pi] \subseteq I$ такой, что имеет место представление (23), в котором $g \in \mathbf{P}$, $g \in J(\tilde{\xi}) \forall \tilde{\xi} \in \mathbb{C}$. Так как J – обильный подмодуль, то $g \in J$. В силу (20) $sg \in I$. Из соотношения (23) следует, что $f \in I$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб. 1991. Т. 182. №11. С. 1559–1587.
2. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. II. Метод модулей // Матем. сб. 1992. Т. 183. №1. С. 3–19.
3. Красичков-Терновский И. Ф. Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. III. Обильные подмодули // Матем. сб. 1992. Т. 183. №6. С. 55–86.

4. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 8. С. 23–46.
5. *Шишкин А. Б.* Спектральный синтез для систем дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Теорема двойственности // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 9. С. 143–160.
6. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М.: ОГИЗ, 1948.
7. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
8. *Красичков-Терновский И. Ф.* Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 44–66.
9. *Гайдер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986.
10. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
11. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959.
12. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). № 1. С. 3–41.

Институт математики Уфимского научного центра УрО РАН;
Армавирский государственный педагогический институт
E-mail: kra@imat.rb.ru, Shishkin-home@mail.ru

Поступила в редакцию
16.03.2001