Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Липин, Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули,
Матем. сб., 2001, том 192, номер 11, 55–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:13:12

УДК 513.83

С. В. Лапин

Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули

В работе введены понятия D_∞ -дифференциала и D_∞ -дифференциального модуля, которые соответственно являются гомотопически инвариантными аналогами дифференциала и цепного комплекса. Установлены основные гомотопические свойства D_∞ -дифференциалов и D_∞ -дифференциальных модулей. Рассмотрена связь теории Гугенхайма–Ламбе–Сташеффа дифференциальных возмущений в гомологической алгебре с конструкцией D_∞ -дифференциального модуля.

Библиография: 16 названий.

В работе [1] при изучении гомотопических свойств топологических моноидов Сташеффом было введено понятие A_∞ -пространства, которое является гомотопическим аналогом топологического пространства с непрерывным ассоциативным умножением. Одним из основных свойств структуры A_∞ -пространства, как было показано Сташеффом в [1], является ее гомотопическая инвариантность, т.е. структура A_∞ -пространства обладает тем свойством, что на любом топологическом пространстве, которое гомотопически эквивалентно A_∞ -пространству, можно ввести структуру A_∞ -пространства. Начиная с этого результата Сташеффа интерес к изучению гомотопически инвариантных алгебраических структур на топологических пространствах неуклонно растет. Достаточно сказать, что на этом пути в работе Мэя [2] были введены такие понятия, как топологическая E_∞ -операда и E_∞ -пространство, которые являются в настоящее время основным инструментом изучения гомотопических свойств бесконечнократных пространств петель.

Идея о рассмотрении гомотопически инвариантных алгебраических структур на топологических пространствах оказалась плодотворной и в дифференциальной гомологической алгебре. В работе [1] Сташефф ввел понятие дифференциальной A_∞ -алгебры, которая является гомотопически инвариантным аналогом ассоциативной дифференциальной алгебры. В работе [3] Смирнов ввел понятие дифференциальной E_∞ -алгебры, которая является гомотопически инвариантным аналогом ассоциативной и коммутативной дифференциальной алгебры. Методы теории дифференциальных A_∞ -алгебр и E_∞ -алгебр в последнее время интенсивно применяются при изучении предельного члена спектральной последовательности Адамса и вычислении гомотопических групп топологических пространств [4]–[8].

В предлагаемой работе вводятся понятия D_∞ -дифференциала и D_∞ -дифференциального модуля, которые соответственно являются гомотопически инвариантными аналогами дифференциала и цепного комплекса. Устанавливаются основные гомотопические свойства D_∞ -дифференциалов и D_∞ -дифференциальных мо-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00411).

дулей. Рассматривается связь теории дифференциальных возмущений в гомологической алгебре, развитой в работах [9]–[16], с конструкцией D_∞ -дифференциального модуля.

§1. Дифференциальные возмущения дифференциальных модулей

В этом параграфе рассматриваются необходимые понятия и конструкции из теории дифференциальных возмущений дифференциальных модулей, развитой в работах [9], [11], [12], [14], [15].

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей. Напомним, что *дифференциальным K -модулем* (X, d) называется произвольный K -модуль X , снабженный K -гомоморфизмом $d: X \rightarrow X$, который именуется дифференциалом модуля X и для которого выполнено условие $d^2 = 0$. *Отображением* дифференциальных K -модулей $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ называется K -линейное отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условию $df = fd$. *Дифференциальной гомотопией* между отображениями $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей называется K -линейное отображение $h: X \rightarrow Y$, для которого выполняется равенство $dh + hd = f - g$. При помощи понятия дифференциальной гомотопии между отображениями дифференциальных модулей стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности дифференциальных модулей.

Напомним теперь, что *дифференциальным возмущением* дифференциального модуля (X, d) называется такой K -гомоморфизм $t: X \rightarrow X$, что пара $(X, d + t)$ является дифференциальным модулем, т.е. для гомоморфизма $d + t: X \rightarrow X$ выполнено условие $(d + t)^2 = 0$. Легко видеть, что это условие эквивалентно условию $dt + td = -t^2$.

Рассмотрим основные гомотопические свойства дифференциальных возмущений. Пусть заданы произвольные дифференциальные K -модули (X, d) и (Y, d) . Кроме того, пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\xi: Y \rightarrow X$, $\eta: X \rightarrow Y$ и дифференциальная гомотопия $h: X \rightarrow X$, для которых выполнены следующие условия:

$$\eta\xi = 1_Y, \quad dh + hd = \xi\eta - 1_X.$$

Рассмотренную ситуацию обычно записывают в виде $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и называют *сильной деформационной ретракцией* дифференциальных модулей. При выполнении дополнительных условий

$$\eta h = 0, \quad h\xi = 0, \quad hh = 0$$

сильную деформационную ретракцию $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ называют *дифференциальной SDR-ситуацией*.

Итак, пусть имеется SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и задано дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) . Рассмотрим свободную ассоциативную K -алгебру A , порожденную формальными переменными h, t, d . Ясно, что элементами алгебры A являются многочлены $\alpha(h, t, d)$ от некоммутирующих переменных h, t, d . Введем на алгебре A убывающую фильтрацию

$$A = A^0 \supset A^1 \supset \dots \supset A^n \supset A^{n+1} \supset \dots,$$

полагая $A^n = \{\alpha(h, t, d) \in A : \deg_t \alpha(h, t, d) \geq n\}$, где $\deg_t \alpha(h, t, d)$ – это степень многочлена $\alpha(h, t, d)$ по переменной t . Для заданных выше K -модулей

X и Y рассмотрим K -модули всех K -гомоморфизмов $\text{Hom}(X, X)$, $\text{Hom}(X, Y)$ и $\text{Hom}(Y, X)$. Операция композиции отображений задает на $\text{Hom}(X, X)$ структуру ассоциативной K -алгебры. Определим гомоморфизм K -модульных алгебр $P: A \rightarrow \text{Hom}(X, X)$, полагая на образующих

$$P(h) = h: X \longrightarrow X, \quad P(t) = t: X \longrightarrow X, \quad P(d) = d: X \longrightarrow X.$$

Рассмотренная выше убывающая фильтрация алгебры A индуцирует убывающую фильтрацию

$$I = I^0 \supset I^1 \supset \dots \supset I^n \supset I^{n+1} \supset \dots$$

K -алгебры $I = \text{Im}(P: A \rightarrow \text{Hom}(X, X))$. Отметим, что $dt + td \in I^2$, поскольку $dt + td = -t^2$. Наряду с алгеброй I будем рассматривать K -модули

$$\eta \circ I \subset \text{Hom}(X, Y), \quad I \circ \xi \subset \text{Hom}(Y, X),$$

далее обозначаемые также через I , на которых введем убывающие фильтрации, полагая соответственно $I^n = \eta \circ I^n$ и $I^n = I^n \circ \xi$. Для элементов из I будем употреблять запись $\alpha \equiv \beta \pmod{I^n}$, если $\alpha - \beta \in I^n$.

Рассмотрим теперь элементы $t_i: X \rightarrow X$, $i \geq 1$, алгебры I , которые определяются следующими формулами:

$$t_1 = t, \quad t_{i+1} = (th)^i t, \quad i \geq 1.$$

Поведение дифференциальных возмущений в условиях, определяемых дифференциальной SDR-ситуацией, описывается в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть задана произвольная дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, и пусть задано некоторое дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$, т.е. введен новый дифференциал $D = d + t: X \rightarrow X$. Тогда для отображений

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} &= \partial_n + \eta t_n \xi = d + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi: Y \rightarrow Y, \\ \xi_{n+1} &= \xi_n + h t_n \xi = \xi + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \xi: Y \rightarrow X, \\ \eta_{n+1} &= \eta_n + \eta t_n h = \eta + \eta \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h: X \rightarrow Y, \\ h_{n+1} &= h_n + h t_n h = h + h \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) h: X \rightarrow X \end{aligned} \tag{1}$$

выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \partial_n \partial_n &\equiv 0 \pmod{I^n}, \\ D \xi_n &\equiv \xi_n \partial_n \pmod{I^n}, \\ \partial_n \eta_n &\equiv \eta_n D \pmod{I^n}, \\ D h_n + h_n D &\equiv \xi_n \eta_n - 1_X \pmod{I^n}, \\ \eta_n \xi_n &= 1_Y, \quad \eta_n h_n = 0, \quad h_n \xi_n = 0, \quad h_n h_n = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, если имеется SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и задано дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$, т.е. введен новый дифференциал $D = d + t: X \rightarrow X$, то для каждого $n \geq 1$ указанное дифференциальное возмущение индуцирует ситуацию $(\eta_n: X \rightleftharpoons Y: \xi_n, h_n)$, которую будем называть *SDR-ситуацией по модулю I^n* и обозначать через

$$(\eta_n: X \rightleftharpoons Y: \xi_n, h_n) \bmod(I^n).$$

В частности, дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$ для каждого целого числа $n \geq 1$ индуцирует K -линейное отображение

$$\tilde{t}(n) = \eta(t_1 + \dots + t_n)\xi: Y \rightarrow Y,$$

которое, вообще говоря, не является настоящим дифференциальным возмущением дифференциального модуля (Y, d) , а является для (Y, d) только дифференциальным возмущением по модулю I^n , т.е. выполнено условие

$$(d + \tilde{t}(n))^2 \equiv 0 \bmod(I^n).$$

Формулы (1) удобно представлять себе как машину для выработки из заданной дифференциальной SDR-ситуации $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и заданного дифференциального возмущения t дифференциального модуля (X, d) последовательности SDR-ситуаций $(\eta_n: X \rightleftharpoons Y: \xi_n, h_n) \bmod(I^n)$ и, в частности, последовательности дифференциальных возмущений $\tilde{t}(n)$ по модулю I^n . Эту машину далее будем называть *машиной дифференциальных возмущений* или, более кратко, просто машиной возмущений.

Рассмотрим один важный пример применения машины возмущений. Пусть $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ – гомологический модуль произвольного дифференциального K -модуля (X, d) над полем K . Если K -модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\text{Ker } d = H(X) \oplus \text{Im } d$ получим дифференциальную SDR-ситуацию

$$(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h).$$

Пусть теперь задано произвольное дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) . Применяя к этому дифференциальному возмущению и к SDR-ситуации $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$ машину возмущений, получаем последовательность SDR-ситуаций $(\eta_n: X \rightleftharpoons H(X): \xi_n, h) \bmod(I^n)$. В частности, для каждого $n \geq 1$ определен эндоморфизм

$$\partial_n = \tilde{t}(n): H(X) \rightarrow H(X),$$

удовлетворяющий условию $\partial_n \partial_n \equiv 0 \bmod(I^n)$. Эндоморфизм $\partial_n = \tilde{t}(n)$, $n \geq 1$, вообще говоря, не является настоящим дифференциалом K -модуля $H(X)$, а является, так сказать, дифференциалом для $H(X)$ по модулю I^n , т.е. является дифференциалом фактормодуля $H(X)/I^n(H(X))$.

Отметим, что соотношения $\eta h = 0$, $h\xi = 0$, $hh = 0$, которые должны быть выполнены для SDR-ситуации $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ в условиях теоремы 1.1, не являются ограничительными. В самом деле, если для произвольной сильной деформационной ретракции $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ определить новую гомотопию $h' = h''dh''$, где $h'' = (\xi\eta - 1_X)h(\xi\eta - 1_X)$, то получим дифференциальную SDR-ситуацию

($\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h'$). Более того, в работе [15] показано, что имеется аналог машины возмущений для произвольных взаимнообратных гомотопических эквивалентностей $\eta: X \rightarrow Y, \xi: Y \rightarrow X$ дифференциальных модулей.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости последовательности $\tilde{t}(n)$ дифференциальных возмущений по модулю $I^n, n \geq 1$, вырабатываемых машиной возмущений. Будем говорить, что вырабатываемая машиной возмущений последовательность дифференциальных SDR-ситуаций $(\eta_n: X \rightleftharpoons Y: \xi_n, h_n) \bmod(I^n), n \geq 1$, *сходится*, если для каждого элемента $x \in X$ найдется такой номер $k \geq 1$, зависящий от x , что для всех $n > k$ выполнены следующие равенства:

$$\partial_n(x) = \partial_k(x), \quad \eta_n(x) = \eta_k(x), \quad h_n(x) = h_k(x), \quad \xi_n(y) = \xi_k(y),$$

где $y = \eta(x)$. Нетрудно видеть, что если вырабатываемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций $(\eta_n: X \rightleftharpoons Y: \xi_n, h_n) \bmod(I^n)$ сходится, то определено дифференциальное возмущение $\tilde{t} = \lim \tilde{t}(n): Y \rightarrow Y$ и для дифференциальных модулей $(X, d + \tilde{t})$ и $(Y, d + \tilde{t})$ возникает предельная дифференциальная SDR-ситуация $(\eta_\infty: X \rightleftharpoons Y: \xi_\infty, h_\infty)$, где

$$\xi_\infty = \lim \xi_n, \quad \eta_\infty = \lim \eta_n, \quad h_\infty = \lim h_n.$$

Легко также видеть, что если рассматриваемая последовательность SDR-ситуаций $(\eta_n: X \rightleftharpoons Y: \xi_n, h_n) \bmod(I^n)$ не сходится, то формулы для $\xi_\infty, \eta_\infty, h_\infty, \tilde{t}$ теряют всякий смысл и, следовательно, не определяют никакой предельной дифференциальной SDR-ситуации и никакого предельного дифференциального возмущения.

Для того чтобы привести примеры сходимости последовательностей, вырабатываемых машиной возмущений, рассмотрим понятие дифференциального модуля с фильтрацией. Напомним, что *возрастающей фильтрацией* $\{X^n\}$ дифференциального модуля (X, d) называется система его подмодулей

$$0 = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq X^{n+1} \subseteq \dots \subseteq X, \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n = X,$$

для которых выполнено условие сохранения фильтрации $d(X^n) \subseteq X^n, n \geq 0$. Отображением $f: X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$ называется отображение дифференциальных модулей $f: X \rightarrow Y$, для которого выполняется условие сохранения фильтрации $f(X^n) \subseteq Y^n, n \geq 0$. Дифференциальной гомотопией между отображениями $f, g: X \rightarrow Y$ дифференциальных модулей с возрастающими фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$ называется дифференциальная гомотопия $h: X \rightarrow Y$ между отображениями f и g , для которой выполняется условие сохранения фильтрации $h(X^n) \subseteq Y^n, n \geq 0$.

Пусть заданы произвольные дифференциальные модули (X, d) и (Y, d) с возрастающими фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{Y^n\}$, и пусть задана некоторая дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$. Указанная SDR-ситуация называется дифференциальной SDR-ситуацией с возрастающей фильтрацией, если отображения $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$ и $h: X \rightarrow Y$ сохраняют рассматриваемые фильтрации. Прямыми вычислениями проверяется справедливость следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть задана дифференциальная SDR-ситуация с возрастающей фильтрацией $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, и пусть задано дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$ дифференциального модуля (X, d) , для которого выполнено условие $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \geq 0$. Тогда вырабатываемая машиной возмущений последовательность SDR-ситуаций $(\eta_n: X \rightleftharpoons Y: \xi_n, h_n) \bmod(I^n)$ сходится. Более того, для каждого номера $n \geq 1$ этой последовательности выполнены условия

$$\partial_n(X^k) \subseteq X^k, \quad \eta_n(X^k) \subseteq Y^k, \quad \xi_n(Y^k) \subseteq X^k, \quad h_n(X^k) \subseteq X^k$$

и предельная дифференциальная SDR-ситуация $(\eta_\infty: X \rightleftharpoons Y: \xi_\infty, h_\infty)$ является дифференциальной SDR-ситуацией с возрастающей фильтрацией. В частности, для каждого дифференциального возмущения $\tilde{t}(n): Y \rightarrow Y$ по модулю I^n и предельного дифференциального возмущения $\tilde{t}: Y \rightarrow Y$ выполнены условия $\tilde{t}(n)(Y^k) \subseteq Y^{k-1}$, $\tilde{t}(Y^k) \subseteq Y^{k-1}$.

Применим предложение 1.1 к SDR-ситуации $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$, которая была рассмотрена выше. Пусть (X, d) является дифференциальным модулем с некоторой возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$. Легко видеть, что система подмодулей $H(X)^n = \text{Im}(H(X^n) \rightarrow H(X))$, $n \geq 0$, где отображение $H(X^n) \rightarrow H(X)$ индуцировано вложением $X^n \subseteq X$, представляет собой возрастающую фильтрацию дифференциального модуля $(H(X), d = 0)$. Таким образом, если (X, d) является дифференциальным модулем с возрастающей фильтрацией, то возникает дифференциальная SDR-ситуация с возрастающей фильтрацией $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$. Пусть теперь для рассматриваемого дифференциального модуля (X, d) задано произвольное дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$, удовлетворяющее условию $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$. Если к этому дифференциальному возмущению и к дифференциальной SDR-ситуации $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$ применить машину возмущений, то из предложения 1.1 следует, что предельное дифференциальное возмущение $\partial_\infty = \tilde{t}: H(X) \rightarrow H(X)$ является дифференциалом K -модуля $H(X)$, для которого выполнено условие $\partial_\infty(H(X)^n) \subseteq H(X)^{n-1}$. Другими словами, если задан дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, то введение на K -модуле X нового дифференциала $D = d + t$, где $t(X^n) \subseteq X^{n-1}$, влечет за собой появление на гомологическом модуле $H(X)$ дифференциала $\partial_\infty: H(X) \rightarrow H(X)$, удовлетворяющего условию $\partial_\infty(H(X)^n) \subseteq H(X)^{n-1}$.

В заключение параграфа следует отметить, что рассмотренные выше понятия, конструкции и утверждения имеют очевидные аналоги для градуированных дифференциальных модулей, т.е. для дифференциальных модулей, имеющих произвольную градуировку, которая, вообще говоря, никак не согласована с действием дифференциала.

§ 2. D_∞ -дифференциальные модули

Параграф посвящен введению понятия D_∞ -дифференциального модуля, который является гомотопическим аналогом структуры дифференциального модуля. В начале параграфа разбирается один пример работы машины дифференциальных возмущений, который служит мотивировкой для введения понятия D_∞ -дифференциала. После этого определяются D_∞ -дифференциальные модули над произвольным коммутативным кольцом K и рассматриваются их свойства. Далее доказывается основная теорема этого параграфа о гомотопической инвариантности структуры D_∞ -дифференциального модуля и рассматривается гомологический вариант

этой теоремы. В заключение параграфа показано, что для стабильных D_∞ -дифференциальных модулей машина дифференциальных возмущений и теорема о гомотопической инвариантности структуры D_∞ -дифференциального модуля дают существенно разные результаты.

Пусть заданы дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$. Применяя к этим дифференциальной SDR-ситуации и дифференциальному возмущению t машину возмущений, получаем последовательность $\tilde{t}(n) = \eta(t_1 + \dots + t_n)\xi$ дифференциальных возмущений по модулю I^n . Рассмотрим семейство отображений $\{d^i: Y \rightarrow Y, i \geq 0\}$, определяемых формулами $d^0 = d$ и $d^i = \eta(t_i)\xi, i \geq 1$. Ясно, что для отображения ∂_{n+1} из теоремы 1.1 и для отображения $\tilde{t}(n)$ имеют место равенства

$$\partial_{n+1} = d^0 + d^1 + \dots + d^n, \quad \tilde{t}(n) = d^1 + \dots + d^n.$$

Легко проверяется, что отображения $d^i, i \geq 0$, для каждого целого числа $n \geq 0$ связаны между собой следующим соотношением:

$$\sum_{i+j \leq n} d^i d^j \equiv 0 \pmod{I^n}.$$

Это соотношение можно уточнить, если рассматриваемое дифференциальное возмущение t само является дифференциалом. В самом деле, прямые вычисления показывают, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть заданы любая дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и дифференциальное возмущение $t: X \rightarrow X$, которое само является дифференциалом K -модуля X , т.е. для t одновременно выполнены условия $t^2 = 0$ и $dt + td = 0$. Тогда для каждого целого числа $k \geq 0$ отображения d^i связаны между собой следующим соотношением:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0.$$

Рассмотренный в предложении 2.1 пример работы машины возмущений для дифференциальных возмущений, которые сами являются дифференциалами, мотивирует введение следующего понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. D_∞ -дифференциалом K -модуля X называется семейство K -гомоморфизмов $\{d^i: X \rightarrow X, i \geq 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0. \quad (3)$$

D_∞ -дифференциальным модулем (X, d^i) называется произвольный K -модуль X , рассматриваемый вместе с некоторым фиксированным D_∞ -дифференциалом $\{d^i: X \rightarrow X\}$ этого K -модуля.

Рассмотрим соотношения (3) для малых значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношение (3) имеет вид

$$d^0 d^0 = 0.$$

Это говорит о том, что пара (X, d^0) является дифференциальным модулем. При $k = 1$ соотношение (3) принимает вид

$$d^1 d^0 + d^0 d^1 = 0.$$

Другими словами, отображения d^0 и d^1 являются антикоммутирующими. Из этого следует, что композиция $d^1 d^1: X \rightarrow X$ является эндоморфизмом дифференциального модуля (X, d^0) . При $k = 2$ соотношение (3) записывается в виде

$$d^0 d^2 + d^2 d^0 = 0 - d^1 d^1.$$

Это означает, что K -модульное отображение $d^2: X \rightarrow X$ является дифференциальной гомотопией между нулевым отображением и отображением дифференциальных модулей $d^1 d^1: (X, d^0) \rightarrow (X, d^0)$. Таким образом, K -модульное отображение $d^1: X \rightarrow X$ является дифференциалом с точностью до гомотопии.

ПРИМЕР 1. Простейшими нетривиальными примерами D_∞ -дифференциальных модулей служат модули, которые снабжены двумя антикоммутирующими дифференциалами. Ясно, что в этом случае один из дифференциалов является дифференциальным возмущением другого.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь примеры D_∞ -дифференциальных модулей, которые возникают из конструкции дифференциального модуля с фильтрацией. Пусть над полем K задан дифференциальный модуль (X, d) с возрастающей фильтрацией $\{X^n\}$, $n \geq 0$. Обозначим через Y^n подмодуль модуля X^n , для которого $X^n = Y^n \oplus X^{n-1}$. Легко видеть, что

$$X^n = Y^n \oplus Y^{n-1} \oplus \dots \oplus Y^0, \quad X = \bigoplus_{n \geq 0} Y^n.$$

При помощи условия $d(X^n) \subseteq X^n$ определим отображение $d_n^i: Y^n \rightarrow Y^{n-i}$, $i \geq 0$, как компоненту дифференциала

$$d: Y^n \rightarrow X^n = Y^n \oplus \dots \oplus Y^{n-i} \oplus \dots \oplus Y^0.$$

Легко видеть, что семейство отображений $\{d^i = \bigoplus_{n \geq 0} d_n^i: X \rightarrow X, i \geq 0\}$ является D_∞ -дифференциалом K -модуля X , поскольку условие $d^2 = 0$ в рассматриваемом случае эквивалентно соотношениям (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Морфизмом $f: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ D_∞ -дифференциальных модулей называется семейство K -гомоморфизмов $f = \{f^i: X \rightarrow Y, i \geq 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} f^i d^j = \sum_{i+j=k} d^i f^j. \quad (4)$$

Рассмотрим соотношения (4) для начальных значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношение (4) имеет вид

$$f^0 d^0 = d^0 f^0,$$

т.е. определено отображение дифференциальных модулей $f^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$. При $k = 1$ соотношение (4) записывается в виде

$$f^0 d^1 - d^1 f^0 = d^0 f^1 - f^1 d^0.$$

Это означает, что отображение $f^1: X \rightarrow Y$ служит гомотопией между нулевым отображением и отображением $f^0 d^1 - d^1 f^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$, которое антикоммутирует с дифференциалами. Другими словами, отображение f^0 относительно d^1 является с точностью до гомотопии отображением дифференциальных модулей.

Определим теперь композицию морфизмов D_∞ -дифференциальных модулей. Пусть заданы морфизмы D_∞ -дифференциальных модулей $f = \{f^i\}: X \rightarrow Y$ и $g = \{g^i\}: Y \rightarrow Z$. Введем композицию gf морфизмов f и g , полагая

$$(gf)^i = \sum_{s+t=i} g^s f^t: X \rightarrow Z.$$

Непосредственные вычисления показывают, что совокупность K -модульных отображений $gf = \{(gf)^i\}$ является морфизмом D_∞ -дифференциальных модулей. Нетрудно также проверить, что операция композиции морфизмов D_∞ -дифференциальных модулей ассоциативна. Тожественным морфизмом $1_X = \{1_X^i\}$ для D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) служит семейство K -модульных отображений $1_X = \{1_X^i: X \rightarrow X\}$, где $1_X^i = 0, i > 0$, а $1_X^0 = \text{id}_X$ — тождественное отображение K -модуля X . Таким образом, класс всех D_∞ -дифференциальных K -модулей и их морфизмов представляет собой категорию, которую будем обозначать через $D_\infty(K)$.

Рассмотрим теперь вопрос о характеристизации изоморфизма $\{f^i\}$ категории $D_\infty(K)$ его компонентой f^0 . Прямые вычисления показывают, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть задан любой морфизм $\{f^i\}: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ категории $D_\infty(K)$, у которого K -гомоморфизм $f^0: X \rightarrow Y$ является изоморфизмом K -модулей. Тогда морфизм $\{f^i\}$ является изоморфизмом категории $D_\infty(K)$, обратным к которому в категории $D_\infty(K)$ служит изоморфизм $\{g^i\}: (Y, d^i) \rightarrow (X, d^i)$, где $g^0: Y \rightarrow X$ — изоморфизм, обратный к изоморфизму $f^0: X \rightarrow Y$, а компоненты $g^i: Y \rightarrow X, i \geq 1$, задаются следующими формулами:

$$g^i = - \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} g^0 f^{i_1} g^0 \dots g^0 f^{i_k} g^0, \quad i \geq 1.$$

Таким образом, морфизм $\{f^i\}$ категории $D_\infty(K)$ является изоморфизмом этой категории тогда и только тогда, когда его компонента f^0 является изоморфизмом K -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. D_∞ -дифференциальной гомотопией между морфизмами $f = \{f^i\}: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ и $g = \{g^i\}: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ категории $D_\infty(K)$ называется семейство K -гомоморфизмов $h = \{h^i\}: X \rightarrow Y, i \geq 0$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^j h^i + h^j d^i = f^k - g^k. \quad (5)$$

При $k = 0$ соотношение (5) имеет вид $d^0 h^0 + h^0 d^0 = f^0 - g^0$, т.е. отображение K -модулей $h^0: X \rightarrow Y$ является дифференциальной гомотопией между отображениями $f^0, g^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$ дифференциальных модулей.

Легко видеть, что отношение между морфизмами категории $D_\infty(K)$ вида $(X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$, определяемое наличием D_∞ -дифференциальной гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности D_∞ -дифференциальных модулей.

Рассмотрим основные гомотопические свойства D_∞ -дифференциальных модулей. Пусть заданы произвольные D_∞ -дифференциальные модули (X, d^i) и (Y, d^i) . Кроме того, пусть заданы морфизмы D_∞ -дифференциальных модулей $\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i): \{\xi^i\}$ и D_∞ -дифференциальная гомотопия $\{h^i: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)\}$, для которых выполнены следующие условия:

$$\sum_{s+t=i} \eta^s \xi^t = (1_Y)^i, \quad \sum_{s+t=i} d^s h^t + h^s d^t = \sum_{s+t=i} \xi^s \eta^t - (1_X)^i, \quad i \geq 0.$$

Эту ситуацию будем записывать в виде $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i): \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и называть *сильной деформационной ретракцией* D_∞ -дифференциальных модулей. При выполнении дополнительных условий

$$\sum_{s+t=i} \eta^s h^t = 0, \quad \sum_{s+t=i} h^s \xi^t = 0, \quad \sum_{s+t=i} h^s h^t = 0, \quad i \geq 0,$$

указанную сильную деформационную ретракцию D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i): \{\xi^i\}, \{h^i\})$ будем называть *D_∞ -дифференциальной SDR-ситуацией*.

Поведение D_∞ -дифференциалов при дифференциальных гомотопических эквивалентностях типа сильных деформационных ретракций описывается в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть заданы произвольные D_∞ -дифференциальный K -модуль (X, d^i) и дифференциальный K -модуль (Y, d) . Кроме того, пусть задана произвольная сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^0) \rightrightarrows (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда семейство K -гомоморфизмов $\{d_*^i: Y \rightarrow Y\}$, определяемых формулами

$$d_*^0 = d, \quad d_*^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} (h d^{i_2}) \dots (h d^{i_k}) \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (6)$$

является D_∞ -дифференциалом K -модуля Y . Более того, определена сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей

$$(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d_*^i): \{\xi^i\}, \{h^i\}),$$

где семейства K -гомоморфизмов $\{\xi^i: Y \rightarrow X\}$, $\{\eta^i: X \rightarrow Y\}$ и $\{h^i: X \rightarrow X\}$ задаются соответственно следующими формулами:

$$\xi^0 = \xi, \quad \xi^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k}) \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (7)$$

$$\eta^0 = \eta, \quad \eta^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k}) \right) h, \quad i \geq 1, \quad (8)$$

$$h^0 = h, \quad h^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k}) \right) h, \quad i \geq 1. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $d_*^0 d_*^0 = dd = 0$ очевидно. Теперь для каждого $i \geq 1$, используя равенства $d^0 h = -hd^0 + \xi\eta - 1_X$ и

$$d^0 d^t = -d^t d^0 - \sum_{\substack{p+q=t \\ p \geq 1, q \geq 1}} d^p d^q, \quad t \geq 1,$$

получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} d_*^0 d_*^i + d_*^i d_*^0 &= -\eta \left(\sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_s})(\xi\eta d^{i_{s+1}})(hd^{i_{s+2}}) \dots (hd^{i_k}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k}) d^0 \right) \xi \\ &\quad + \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k}) \right) \xi d^0 \\ &= -\eta \left(\sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1}(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_s})(\xi\eta d^{i_{s+1}})(hd^{i_{s+2}}) \dots (hd^{i_k}) \right) \xi \\ &= - \sum_{\substack{p+q=i \\ p \geq 1, q \geq 1}} d_*^p d_*^q, \end{aligned}$$

где $p = i_1 + \dots + i_s$ и $q = i_{s+1} + \dots + i_k$. Таким образом, соотношения (3) для K -гомоморфизмов d_*^i , $i \geq 0$, проверены. Аналогично проверяются соотношения (4) и (5) для семейств K -гомоморфизмов $\{\xi^i: Y \rightarrow X\}$, $\{\eta^i: X \rightarrow Y\}$ и $\{h^i: X \rightarrow X\}$.

Отметим, что если в условиях теоремы 2.1 сильная деформационная ретракция $(\eta: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ является дифференциальной SDR-ситуацией, то теорему 2.1 можно уточнить. В самом деле, прямые вычисления показывают, что справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть заданы произвольные D_∞ -дифференциальный K -модуль (X, d^i) и дифференциальный K -модуль (Y, d) . Кроме того, пусть задана произвольная дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$. Тогда формулы (6)–(9) задают на K -модуле Y структуру D_∞ -дифференциального модуля $\{d_*^i: Y \rightarrow Y\}$ и определяют D_∞ -дифференциальную SDR-ситуацию

$$(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d_*^i): \{\xi^i\}, \{h^i\}).$$

Пусть над произвольным полем K задан D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) . Тогда, как было отмечено в §1, определена дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$, где $H(X) = \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^0$. Применяя к этой дифференциальной SDR-ситуации теорему 2.2, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть над полем K задан произвольный D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) , и пусть $H(X)$ – гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^0) . Тогда формулы (6)–(9) задают на K -модуле $H(X)$ структуру D_∞ -дифференциального модуля $\{d_*^i: H(X) \rightarrow H(X)\}$, где $d_*^0 = 0$, и определяют D_∞ -дифференциальную SDR-ситуацию

$$(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (H(X), d_*^i): \{\xi^i\}, \{h^i\}).$$

Покажем теперь, что гомотопические свойства морфизма D_∞ -дифференциальных модулей $\{f^i\}: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ полностью определяются гомотопическими свойствами его компоненты $f^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Морфизм $\{f^i\}: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ категории $D_\infty(K)$ определяет сильную деформационную ретракцию D_∞ -дифференциальных модулей $(\{f^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d^i): \{g^i\}, \{s^i\})$ тогда и только тогда, когда отображение $f^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$ дифференциальных модулей определяет сильную деформационную ретракцию $(\{f^0\}: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d^0): \{g^0\}, \{s^0\})$ дифференциальных модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что если имеется сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{f^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d^i): \{g^i\}, \{s^i\})$, то определена и сильная деформационная ретракция дифференциальных модулей $(\{f^0\}: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d^0): \{g^0\}, \{s^0\})$. Пусть теперь заданы морфизм D_∞ -дифференциальных модулей $\{f^i\}: (X, d^i) \rightarrow (Y, d^i)$ и сильная деформационная ретракция дифференциальных модулей $(\{f^0\}: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d^0): \{g^0\}, \{s^0\})$. По формулам (6)–(9) из теоремы 2.1 определим сильную деформационную ретракцию D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d_*^i): \{\xi^i\}, \{h^i\})$, где $\eta^0 = f^0$, $\xi^0 = g^0$, $h^0 = s^0$, $d_*^0 = d^0$. Рассмотрим морфизм D_∞ -дифференциальных модулей $\{\psi^i\}: (Y, d_*^i) \rightarrow (Y, d^i)$, где

$$\psi^i = \sum_{l+m=i} f^l \xi^m: Y \rightarrow Y, \quad i \geq 0.$$

Так как $\psi^0 = f^0 \xi^0 = f^0 g^0 = \text{id}_Y$, то из предложения 2.2 следует, что морфизм $\{\psi^i\}: (Y, d_*^i) \rightarrow (Y, d^i)$ является изоморфизмом D_∞ -дифференциальных модулей. Обозначим через $\{\varphi^i\}: (Y, d^i) \rightarrow (Y, d_*^i)$ изоморфизм D_∞ -дифференциальных модулей, обратный к изоморфизму $\{\psi^i\}$. Рассмотрим семейства отображений $\{g^i: Y \rightarrow X, i \geq 0\}$ и $\{s^i: X \rightarrow X, i \geq 0\}$, компоненты которых задаются формулами

$$g^i = \sum_{p+q=i} \xi^p \varphi^q, \quad s^i = h^i - \sum_{n+m+l=i} g^n f^m h^l, \quad i \geq 0.$$

Прямые вычисления показывают, что определена сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{f^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d^i): \{g^i\}, \{s^i\})$, которая и является искомой.

Рассмотрим теперь вопрос о единственности D_∞ -дифференциала $\{d_*^i\}$, определяемого теоремой 2.1 на дифференциальном K -модуле (Y, d) . Пусть задана произвольная сильная деформационная ретракция дифференциальных модулей $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, и пусть $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d_*^i): \{\xi^i\}, \{h^i\})$ – сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей, определяемая теоремой 2.1. Пусть, кроме того, задана еще одна сильная деформационная ретракция D_∞ -дифференциальных модулей $(\{\bar{\eta}^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, \bar{d}^i): \{\bar{\xi}^i\}, \{\bar{h}^i\})$, для которой выполнены условия $\bar{\eta}^0 = \eta, \bar{d}^0 = d, \bar{\xi}^0 = \xi, \bar{h}^0 = h$. Рассмотрим гомотопические эквивалентности D_∞ -дифференциальных модулей

$$\{\bar{\eta}^i\} \circ \{\xi^i\}: (Y, d^i) \rightleftharpoons (Y, \bar{d}^i): \{\eta^i\} \circ \{\bar{\xi}^i\}.$$

Нетрудно видеть, что морфизмы D_∞ -дифференциальных модулей $\{\bar{\eta}^i\} \circ \{\xi^i\}$ и $\{\eta^i\} \circ \{\bar{\xi}^i\}$ являются изоморфизмами D_∞ -дифференциальных модулей, поскольку выполнены равенства $\eta^0 \bar{\xi}^0 = \bar{\eta}^0 \xi^0 = \eta \xi = 1_Y$. Из этого следует, что структура D_∞ -дифференциального модуля $\{d_*^i: Y \rightarrow Y\}$, которая вводится теоремой 2.1 на дифференциальном K -модуле (Y, d) , определена однозначно с точностью до изоморфизма D_∞ -дифференциальных модулей. Следствием этой однозначности является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть заданы произвольные сильные деформационные ретракции D_∞ -дифференциальных модулей

$$(\{\bar{\eta}^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, \bar{d}^i): \{\bar{\xi}^i\}, \{\bar{h}^i\}), \quad (\{\bar{\bar{\eta}}^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, \bar{\bar{d}}^i): \{\bar{\bar{\xi}}^i\}, \{\bar{\bar{h}}^i\}),$$

для которых выполнены условия $\bar{\eta}^0 = \bar{\bar{\eta}}^0, \bar{d}^0 = \bar{\bar{d}}^0, \bar{\xi}^0 = \bar{\bar{\xi}}^0, \bar{h}^0 = \bar{\bar{h}}^0$. Тогда D_∞ -дифференциальные модули $(Y, \bar{d}^i)$ и $(Y, \bar{\bar{d}}^i)$ являются изоморфными в категории $D_\infty(K)$.

Рассмотрим теперь аналог теоремы 2.1 для произвольных гомотопических эквивалентностей. Пусть заданы взаимнообратные гомотопические эквивалентности дифференциальных модулей $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$, и пусть заданы соответствующие им дифференциальные гомотопии $h: X \rightarrow X$ и $t: Y \rightarrow Y$, для которых выполнены соотношения

$$dh + hd = \xi \eta - 1_X, \quad dt + td = \eta \xi - 1_Y.$$

Указанную ситуацию будем записывать в виде $(t, \eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ и называть гомотопической эквивалентностью дифференциальных модулей.

Аналогично, пусть заданы взаимнообратные гомотопические эквивалентности D_∞ -дифференциальных модулей $\{\eta^i\}: X \rightleftharpoons Y: \{\xi^i\}$, и пусть заданы соответствующие им D_∞ -дифференциальные гомотопии $\{h^i\}: X \rightarrow X$ и $\{t^i\}: Y \rightarrow Y$, для которых выполнены соотношения

$$\sum_{p+q=i} d^p h^q + h^p d^q = \sum_{p+q=i} \xi^p \eta^q - (1_X)^i, \quad \sum_{p+q=i} d^p t^q + t^p d^q = \sum_{p+q=i} \eta^p \xi^q - (1_Y)^i,$$

$i \geq 0$. Эту ситуацию будем записывать в виде $(\{t^i\}, \{\eta^i\}: X \rightleftharpoons Y: \{\xi^i\}, \{h^i\})$ и называть *гомотопической эквивалентностью D_∞ -дифференциальных модулей*.

Поведение D_∞ -дифференциалов при произвольных гомотопических эквивалентностях дифференциальных модулей описывается в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть заданы произвольные D_∞ -дифференциальный K -модуль (X, d^i) и дифференциальный K -модуль (Y, d) . Кроме того, пусть зафиксирована произвольная гомотопическая эквивалентность дифференциальных модулей $(t, \eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$. Тогда на K -модуле Y имеется структура D_∞ -дифференциального модуля $\{d_*^i: Y \rightarrow Y, i \geq 0\}$, где $d_*^0 = d$, и определена гомотопическая эквивалентность D_∞ -дифференциальных модулей*

$$(\{t^i\}, \{\eta^i\}: X \rightleftharpoons Y: \{\xi^i\}, \{h^i\}),$$

для которой выполнены начальные условия

$$t^0 = t, \quad \eta^0 = \eta, \quad \xi^0 = \xi, \quad h^0 = h + \xi t \eta - \xi \eta h.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отображения дифференциальных модулей $\xi: Y \rightarrow X$ рассмотрим дифференциальный модуль $(C(\xi), d)$, именуемый *цилиндром отображения $\xi: Y \rightarrow X$* , который определяется следующими формулами:

$$C(\xi) = Y \oplus X \oplus X, \quad d = \begin{pmatrix} d & -1 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & \xi & d \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим K -модульные отображения $i_X: X \rightarrow C(\xi)$, $p_X: C(\xi) \rightarrow X$, $s: C(\xi) \rightarrow C(\xi)$, которые задаются следующими матрицами:

$$i_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_X = (\xi \quad 0 \quad 1), \quad s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверяется, что имеет место SDR-ситуация дифференциальных модулей $(p_X: C(\xi) \rightleftharpoons X: i_X, s)$. При помощи этой SDR-ситуации и D_∞ -дифференциала $\{d^i: X \rightarrow X\}$ введем на K -модуле $C(\xi)$ структуру D_∞ -дифференциального модуля $\{d_\xi^i: C(\xi) \rightarrow C(\xi)\}$, полагая $d_\xi^0 = d$, $d_\xi^i = i_X d^i p_X$, $i \geq 1$. Легко видеть, что в этом случае определена SDR-ситуация D_∞ -дифференциальных модулей

$$(\{p_X^i\}: C(\xi), d_\xi^i \rightleftharpoons (X, d^i): \{i_X^i\}, \{s^i\}),$$

где морфизмы D_∞ -дифференциальных модулей $\{p_X^i\}$, $\{i_X^i\}$ и гомотопия $\{s^i\}$ между морфизмами D_∞ -дифференциальных модулей задаются следующими формулами:

$$p_X^i = \begin{cases} p_X, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} \quad i_X^i = \begin{cases} i_X, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} \quad s^i = \begin{cases} s, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь K -модульные отображения $i_Y: Y \rightarrow C(\xi)$, $p_Y: C(\xi) \rightarrow Y$, $m: C(\xi) \rightarrow C(\xi)$, задаваемые матрицами

$$i_Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_Y = (1 \quad t \quad \eta),$$

$$m = \begin{pmatrix} 0 & tt + t\eta(h\xi - \xi t) - \eta h(h\xi - \xi t) & t\eta - \eta h \\ 0 & -t - \eta(h\xi - \xi t) & -\eta \\ 0 & h(h\xi - \xi t) & h \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления показывают, что в этом случае определена SDR-ситуация дифференциальных модулей $(p_Y: C(\xi) \rightrightarrows Y: i_Y, m)$. Применяя теорему 2.1 к этой SDR-ситуации и к D_∞ -дифференциальному модулю $(C(\xi), d_\xi^i)$, получаем по формулам (6)–(9) на K -модуле Y структуру D_∞ -дифференциального модуля $\{d_*^i: Y \rightarrow Y\}$ и SDR-ситуацию D_∞ -дифференциальных модулей

$$(\{p_Y^i\}: (C(\xi), d_\xi^i) \rightrightarrows (Y, d_*^i): \{i_Y^i\}, \{m^i\}).$$

Теперь из найденных выше SDR-ситуаций D_∞ -дифференциальных модулей

$$(\{p_X^i\}: (C(\xi), d_\xi^i) \rightrightarrows (X, d^i): \{i_X^i\}, \{s^i\}),$$

$$(\{p_Y^i\}: (C(\xi), d_\xi^i) \rightrightarrows (Y, d_*^i): \{i_Y^i\}, \{m^i\})$$

составим, используя операцию композиции морфизмов D_∞ -дифференциальных модулей, искомую гомотопическую эквивалентность D_∞ -дифференциальных модулей

$$(\{t^i\}, \{\eta^i\}: X \rightrightarrows Y: \{\xi^i\}, \{h^i\}),$$

где морфизмы D_∞ -дифференциальных модулей $\{\eta^i\}$, $\{\xi^i\}$ и гомотопии между морфизмами D_∞ -дифференциальных модулей $\{t^i\}$, $\{h^i\}$ определяются следующими формулами:

$$\eta^i = p_Y^i i_X, \quad \xi^i = p_X i_Y^i, \quad i \geq 0,$$

$$t^i = \begin{cases} p_Y(s - m)i_Y, & i = 0, \\ -\sum_{i=j+k+l} p_Y^j m^k i_Y^l, & i > 0, \end{cases} \quad h^i = \begin{cases} p_X(m - s)i_X, & i = 0, \\ p_X m^i i_X, & i > 0. \end{cases}$$

Прямые вычисления показывают, что справедливы следующие равенства:

$$\eta^0 = \eta, \quad \xi^0 = \xi, \quad t^0 = t, \quad h^0 = h + \xi t \eta - \xi \eta h.$$

Полезно отметить, что D_∞ -дифференциал $\{d_*^i: Y \rightarrow Y\}$ и морфизм D_∞ -дифференциальных модулей $\{\xi^i\}: (Y, d_*^i) \rightarrow (X, d^i)$, которые были построены в условиях теоремы 2.3, можно задать следующими индуктивными формулами:

$$\begin{aligned} d_*^0 &= d, & d_*^1 &= \eta d^1 \xi, \\ d_*^i &= \eta \left(\sum_{j=0}^{i-1} d^{i-j} \xi^j - \sum_{j=1}^{i-1} \xi^{i-j} d_*^j \right) + t \sum_{j=1}^{i-1} d_*^{i-j} d_*^j, & i \geq 2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \xi, & \xi^1 &= h d^1 \xi - (h \xi - \xi t) d_*^1, \\ \xi^i &= h \left(\sum_{j=0}^{i-1} d^{i-j} \xi^j - \sum_{j=1}^{i-1} \xi^{i-j} d_*^j \right) - (h \xi - \xi t) d_Y^i, & i \geq 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим теперь отдельно случай, когда к заданной дифференциальной SDR-ситуации $(\eta: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$, где K -модуль X снабжен D_∞ -дифференциалом $\{d^i: X \rightarrow X, i \geq 0\}$, можно применить машину дифференциальных возмущений. Для того чтобы описать такие случаи и сравнить в этой ситуации результат работы машины возмущений и утверждение теоремы 2.2, введем понятие стабильного D_∞ -дифференциального модуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) будем называть *стабильным*, если для каждого элемента $x \in X$ найдется номер $k \geq 1$, зависящий от элемента x , для которого выполнены следующие условия:

$$d^i(x) = 0, \quad i > k.$$

Ясно, что если D_∞ -дифференциальный модуль является стабильным, то в этом случае корректно определены K -линейные отображения

$$D = \sum_{i=0}^{\infty} d^i: X \longrightarrow X, \quad t = \sum_{i=1}^{\infty} d^i: X \longrightarrow X.$$

Легко видеть, что в силу соотношений (3) отображение $D = d^0 + t$ является дифференциалом модуля X . Таким образом, отображение t является дифференциальным возмущением дифференциального модуля (X, d^0) . Отметим, что отображение t , вообще говоря, не является дифференциалом K -модуля X . Применяя теперь к SDR-ситуации $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$, где $H(X) = \text{Ker } d^0 / \text{Im } d^0$, и к возмущению t машину дифференциальных возмущений, получаем указанную в начале этого параграфа последовательность отображений $\tilde{d}^i: H(X) \rightarrow H(X), i \geq 0$, для которых справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть над произвольным полем K задан любой стабильный D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) . Тогда вырабатываемые машиной возмущений отображения $\tilde{d}^i: H(X) \rightarrow H(X)$ задаются следующими формулами:

$$\tilde{d}^0 = 0, \quad \tilde{d}^i = \eta \left(\sum_{\substack{s_1 \geq 1 \\ \vdots \\ s_i \geq 1}} d^{s_1} (h d^{s_2}) \cdots (h d^{s_i}) \right) \xi, \quad i \geq 1. \quad (12)$$

Сравнивая теорему 2.2 и предложение 2.5, получаем, что отображения $d_*^i: H(X) \rightarrow H(X)$, $i \geq 0$, определяемые формулой (6), и отображения $\tilde{d}^i: H(X) \rightarrow H(X)$, $i \geq 0$, задаваемые формулой (12), связаны соотношением

$$d_*^0 + d_*^1 + \dots + d_*^i + \dots = \tilde{d}^0 + \tilde{d}^1 + \dots + \tilde{d}^i + \dots.$$

Однако непосредственно из формул (6) и (12) видно, что для любого целого числа $i \geq 1$ отображения $d_*^i: H(X) \rightarrow H(X)$ и $\tilde{d}^i: H(X) \rightarrow H(X)$ являются существенно разными.

Таким образом, машина дифференциальных возмущений вырабатывает на гомотопическом K -модуле $H(X)$ структуру дифференциального модуля, но не вырабатывает никакой структуры D_∞ -дифференциального модуля. В этом заключается главное различие между результатом работы машины дифференциальных возмущений и утверждением теоремы 2.1 в случае стабильных D_∞ -дифференциальных модулей. Если же рассматривать D_∞ -дифференциальные модули, которые не являются стабильными, то машина дифференциальных возмущений к ним вообще неприменима.

В заключение отметим, что введенные в этом параграфе понятия, конструкции и утверждения имеют очевидные аналоги для градуированных D_∞ -дифференциальных модулей, т.е. для D_∞ -дифференциальных модулей, имеющих произвольную градуировку, которая, вообще говоря, никак не согласована с действием D_∞ -дифференциала.

§ 3. D_∞ -дифференциальные модули и спектральные последовательности

В этом параграфе устанавливается связь между D_∞ -дифференциальными модулями и спектральными последовательностями. Для каждого D_∞ -дифференциального модуля, заданного над полем, построена спектральная последовательность и описана связь дифференциалов этой спектральной последовательности с D_∞ -дифференциалом рассматриваемого D_∞ -дифференциального модуля. Далее показано, что любая спектральная последовательность, заданная над полем, является спектральной последовательностью стабильного D_∞ -дифференциального модуля. Для стабильного D_∞ -дифференциального модуля установлена сходимость спектральной последовательности этого стабильного D_∞ -дифференциального модуля к его гомотопиям.

Введем сначала понятие $D_\infty^{(s)}$ -дифференциального модуля, которое обобщает понятие D_∞ -дифференциального модуля и которое будет нужно для изучения спектральных последовательностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) будем называть $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальным модулем, если найдется целое число $s \geq 0$, для которого выполнены следующие условия:

$$d^i = 0, \quad i < s. \quad (13)$$

Морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей будем считать морфизмы D_∞ -дифференциальных модулей. Для $D_\infty^{(s)}$ -дифференциального модуля (X, d^i) будем употреблять запись (X, d^{i+s}) , где $i \geq 0$.

Ясно, что для каждого фиксированного числа $s \geq 0$ категория $D_{\infty}^{(s+1)}$ -дифференциальных модулей является полной подкатегорией категории $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальных модулей.

Легко видеть, что для любого $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциального модуля (X, d^{i+s}) , где s – фиксированное неотрицательное целое число, соотношения (3) при $k = 2s$ имеют вид $d^s d^s = 0$, т.е. определен дифференциальный модуль (X, d^s) .

Заметим теперь, что для $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальных модулей, поскольку они являются D_{∞} -дифференциальными модулями, имеется определенное в § 2 отношение гомотопической эквивалентности. Однако для $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальных модулей имеется более приспособленное к ним понятие гомотопической эквивалентности. Определим между $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальными модулями отношение (s) -гомотопической эквивалентности, которое при $s = 0$ совпадает с отношением гомотопической эквивалентности для D_{∞} -дифференциальных модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть заданы произвольные морфизмы $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальных модулей $f = \{f^i\}, g = \{g^i\}: (X, d^{i+s}) \rightarrow (Y, d^{i+s}), i \geq 0$. Семейство K -гомоморфизмов $h = \{h^{i-s}: X \rightarrow Y, i \geq 0\}$ назовем (s) -гомотопией между морфизмами f и g , если для каждого целого числа $k \geq 0$ выполнено следующее соотношение:

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{j-s} d^{i+s} = f^k - g^k. \quad (14)$$

При $k = 0$ соотношение (14) имеет вид $d^s h^{-s} + h^{-s} d^s = f^0 - g^0$, т.е. отображение K -модулей $h^{-s}: X \rightarrow Y$ является дифференциальной гомотопией между отображениями $f^0, g^0: (X, d^s) \rightarrow (Y, d^s)$ дифференциальных модулей.

Легко видеть, что отношение между морфизмами $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальных модулей, определяемое наличием (s) -гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальных модулей, которую будем называть (s) -гомотопической эквивалентностью.

Нетрудно проверить, что если $D_{\infty}^{(s+1)}$ -дифференциальные модули, рассматриваемые как $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальные модули, являются (s) -гомотопически эквивалентными, то они и $(s+1)$ -гомотопически эквивалентны. С другой стороны, если $D_{\infty}^{(s+1)}$ -дифференциальные модули $(s+1)$ -гомотопически эквивалентны, то они, рассматриваемые как $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальные модули, вообще говоря, не являются (s) -гомотопически эквивалентными.

Пусть над полем K задан любой $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальный модуль (X, d^{i+s}) . Тогда определена дифференциальная SDR-ситуация $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$, где гомотологический модуль $H(X) = \text{Ker } d^s / \text{Im } d^s$ рассматривается как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом. Аналогично тому, как это было сделано в теоремах 2.1 и 2.2, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть над полем K задан произвольный $D_{\infty}^{(s)}$ -дифференциальный модуль (X, d^{i+s}) , и пусть $H(X) = \text{Ker } d^s / \text{Im } d^s$ – гомотологический модуль дифференциального модуля (X, d^s) . Тогда пара семейств K -гомоморфизмов $\{d_*^{i+s}: H(X) \rightarrow H(X)\}$ и $\{f^i: H(X) \rightarrow X\}$, определяемых рекуррентными

формулами

$$d_*^s = 0, \quad d_*^{i+s} = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} (h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s}) \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (15)$$

$$f^0 = \xi, \quad f^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} (h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s}) \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (16)$$

задают на гомологическом K -модуле $H(X)$ структуру $D_\infty^{(s)}$ -дифференциального модуля и определяют (s) -гомотопическую эквивалентность $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей $f = \{f^i\}: (H(X), d_*^{i+s}) \rightarrow (X, d^{i+s})$. Обратная (s) -гомотопическая эквивалентность $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей $g = \{g^i: X \rightarrow H(X)\}$, для которой выполнено условие $gf = 1_{H(X)}$, и гомотопия $\{h^{i-s}: X \rightarrow X\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей fg и 1_X задаются следующими рекуррентными формулами:

$$g^0 = \eta, \quad g^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} (h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s}) \right) h, \quad i \geq 1, \quad (17)$$

$$h^{-s} = h, \quad h^{i-s} = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1+s} (h d^{i_2+s}) \dots (h d^{i_k+s}) \right) h, \quad i \geq 1. \quad (18)$$

Так как для $D_\infty^{(s)}$ -дифференциального модуля $(H(X), d_*^{i+s})$ выполнено условие $d_*^s = 0$, то гомологический K -модуль $H(X)$ является $D_\infty^{(s+1)}$ -дифференциальным модулем $(H(X), d_*^{i+(s+1)})$. В частности, определен дифференциальный модуль $(H(X), d_*^{s+1})$, к которому можно снова применить теорему 3.1.

Пусть надполем K задан любой D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) . Тогда определена последовательность морфизмов D_∞ -дифференциальных модулей

$$(X_0, d_0^i) \xrightarrow{\{g_0^i\}} (X_1, d_1^i) \xrightarrow{\{g_1^i\}} \dots \xrightarrow{\{g_{s-1}^i\}} (X_s, d_s^i) \xrightarrow{\{g_s^i\}} (X_{s+1}, d_{s+1}^i) \xrightarrow{\{g_{s+1}^i\}} \dots, \quad (19)$$

где $(X_0, d_0^i) = (X, d^i)$. Здесь через (X_{s+1}, d_{s+1}^i) , $s \geq 0$, обозначен $D_\infty^{(s+1)}$ -дифференциальный модуль, получаемый при помощи теоремы 3.1 из $D_\infty^{(s)}$ -дифференциального модуля (X_s, d_s^i) , и через $\{g_s^i\}: (X_s, d_s^i) \rightarrow (X_{s+1}, d_{s+1}^i)$ обозначена соответствующая ему (s) -гомотопическая эквивалентность из теоремы 3.1. Пусть X_∞ — прямой предел последовательности морфизмов D_∞ -дифференциальных модулей (19). Легко видеть, что D_∞ -дифференциал K -модуля X_∞ является нулевым. Таким образом, получено следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для любого D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) над полем K имеется спектральная последовательность D_∞ -дифференциальных модулей $\{E_s, d_s\}$, $s \geq 0$, $E_s = (X_s, d_s^i)$, $i \geq s$, предельный член которой является тривиальным D_∞ -дифференциальным модулем $E_\infty = (X_\infty, d_\infty^i = 0)$. Для каждого $s \geq 0$ члены E_s и E_{s+1} этой спектральной последовательности, рассматриваемые как $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальные модули, являются (s) -гомотопически эквивалентными. Имеющийся в члене E_s спектральной последовательности D_∞ -дифференциал $\{d_s^i\}$, $i \geq s$, находимый индуктивно по формулам (15), связан с дифференциалом $d_s: E_s \rightarrow E_s$ этой спектральной последовательности соотношением $d_s = d_s^s$.

Итак, каждый D_∞ -дифференциальный модуль, заданный над полем, определяет некоторую спектральную последовательность. Покажем теперь, что любая спектральная последовательность, заданная над полем, является спектральной последовательностью некоторого стабильного D_∞ -дифференциального модуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть над произвольным полем задана любая спектральная последовательность $\{E_s, d_s\}$, $s \geq 0$. Тогда на каждом члене E_s , $s \geq 0$, этой спектральной последовательности имеется структура стабильного $D_\infty^{(s)}$ -дифференциального модуля $\{d_s^i: E_s \rightarrow E_s\}$, $i \geq s$, которая связана с дифференциалом спектральной последовательности $d_s: E_s \rightarrow E_s$ соотношением $d_s^s = d_s$. Если для D_∞ -дифференциального модуля (E_0, d_0^i) рассмотреть спектральную последовательность $\{E_s, \tilde{d}_s^i\}$ из предложения 3.1, то D_∞ -дифференциальные модули $(E_s, \tilde{d}_s^i)$ и (E_s, d_s^i) являются изоморфными для каждого $s \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любого $s \geq 0$ имеется изоморфизм модулей $E_{s+1} = H(E_s)$, где $H(E_s) = \text{Ker } d_s / \text{Im } d_s$, то, учитывая, что спектральная последовательность задана над полем, получаем последовательность SDR-ситуаций дифференциальных модулей $(\eta_s: E_s \rightleftharpoons E_{s+1}: \xi_s, h_s)$, $s \geq 0$. Введем $D_\infty^{(s)}$ -дифференциал $\{d_s^i: E_s \rightarrow E_s\}$, $i \geq s$, в члене (E_s, d_s) , полагая

$$d_s^s = d_s, \quad d_s^i = \xi_s \cdots \xi_{i-1} d_i \eta_{i-1} \cdots \eta_s, \quad i > s,$$

где $d_i: E_i \rightarrow E_i$ — дифференциал в члене E_i рассматриваемой спектральной последовательности. Таким образом, получена последовательность D_∞ -дифференциальных модулей (E_s, d_s^i) , $s \geq 0$, $i \geq s$, где $d_s^s = d_s$. Рассмотрим теперь для D_∞ -дифференциального модуля (E_0, d_0^i) спектральную последовательность $\{E_s, \tilde{d}_s^i\}$ из предложения 3.1 и покажем, что D_∞ -дифференциальные модули (E_s, d_s^i) и $(E_s, \tilde{d}_s^i)$ изоморфны для каждого $s \geq 0$. По построению имеем $(E_0, d_0^i) = (E_0, \tilde{d}_0^i)$. Предположим теперь по индукции, что D_∞ -дифференциальные модули (E_k, d_k^i) и $(E_k, \tilde{d}_k^i)$ изоморфны для всех $k \leq s$. Рассмотрим D_∞ -дифференциальные модули (E_{s+1}, d_{s+1}^i) и $(E_{s+1}, \tilde{d}_{s+1}^i)$. Заметим, что для каждого $s \geq 0$ имеется SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей

$$(\{\tilde{\eta}_s^i\}: (E_s, \tilde{d}_s^i) \rightleftharpoons (E_{s+1}, \tilde{d}_{s+1}^i): \{\tilde{\xi}_s^i\}, \{\tilde{h}_s^i\}),$$

определяемая теоремой 3.1, где $\tilde{\eta}_s^0 = \eta_s$, $\tilde{\xi}_s^0 = \xi_s$, $\tilde{h}_s^{-s} = h_s$. Кроме того, легко проверить, что для каждого $s \geq 0$ определена SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей

$$(\{\eta_s^i\}: (E_s, d_s^i) \rightleftharpoons (E_{s+1}, d_{s+1}^i): \{\xi_s^i\}, \{h_s^i\}),$$

где морфизмы $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей $\{\eta_s^i\}$, $\{\xi_s^i\}$ и гомотопия $\{h_s^i\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей задаются следующими формулами:

$$\eta_s^i = \begin{cases} \eta_s, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} \quad \xi_s^i = \begin{cases} \xi_s, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} \quad h_s^i = \begin{cases} h_s, & i = -s, \\ 0, & i > -s. \end{cases}$$

Таким образом, для рассмотренных выше SDR-ситуаций $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей, поскольку $d_{s+1}^{s+1} = \tilde{d}_{s+1}^{s+1} = d_{s+1}$, выполнены условия предложения 2.4 (точнее, очевидного аналога предложения 2.4 для $D_\infty^{(s)}$ -дифференциальных модулей) и, следовательно, D_∞ -дифференциальные модули (E_{s+1}, d_{s+1}^i) и $(E_{s+1}, \tilde{d}_{s+1}^i)$ изоморфны.

Опишем теперь связь D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) , заданного над полем, со стабильным D_∞ -дифференциальным модулем (E_0, d_0^i) , $E_0 = X$, который определяется при помощи спектральной последовательности $\{E_s, d_s\}$ исходного D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) . Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве предложения 3.2, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть над произвольным полем задан любой D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) , и пусть $\{E_s, d_s\}$ – спектральная последовательность из предложения 3.1, определяемая D_∞ -дифференциальным модулем (X, d^i) . Тогда стабильный D_∞ -дифференциальный модуль (E_0, d_0^i) , $E_0 = X$, из предложения 3.2, определяемый спектральной последовательностью $\{E_s, d_s\}$, гомотопически эквивалентен исходному D_∞ -дифференциальному модулю (X, d^i) .

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Над любым полем каждый D_∞ -дифференциальный модуль гомотопически эквивалентен некоторому стабильному D_∞ -дифференциальному модулю.

Рассмотрим теперь спектральную последовательность D_∞ -дифференциального модуля из предложения 3.1 для стабильных D_∞ -дифференциальных модулей. Напомним (см. §2), что D_∞ -дифференциал $\{d^i\}$ стабильного D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) определяет на K -модуле X дифференциал $D: X \rightarrow X$, задаваемый формулой $D = d^0 + d^1 + \dots + d^i + \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. K -модулем гомологий $H(X)$ стабильного D_∞ -дифференциального модуля (X, d^i) называется модуль гомологий K -модуля X относительно суммарного дифференциала

$$D = (d^0 + d^1 + \dots + d^i + \dots): X \longrightarrow X.$$

Легко видеть, что если D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) является стабильным, то каждый D_∞ -дифференциальный модуль (X_s, d_s^i) из последовательности (19) также является стабильным. Из этого следует, что последовательность (19) индуцирует последовательность гомотопических эквивалентностей дифференциальных модулей

$$(X_0, D_0) \xrightarrow{g_0} (X_1, D_1) \xrightarrow{g_1} \dots \xrightarrow{g_{s-1}} (X_s, D_s) \xrightarrow{g_s} (X_{s+1}, D_{s+1}) \xrightarrow{g_{s+1}} \dots, \quad (20)$$

где $D_s = d_s^s + d_s^{s+1} + \dots + d_s^i + \dots$ и $g_s = g_s^0 + g_s^1 + \dots + g_s^i + \dots$, $s \geq 0$, которая имеет своим прямым пределом K -модуль $X_\infty = H(X)$, рассматриваемый с нулевым дифференциалом. Таким образом, получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть над полем K задан стабильный D_∞ -дифференциальный модуль (X, d^i) . Тогда спектральная последовательность D_∞ -дифференциальных модулей $\{E_s, d_s\}$, $s \geq 0$, $E_s = (X_s, d_s^i)$, $i \geq s$, $d_s = d_s^s$, определяемая предложением 3.1 для (X, d^i) , сходится к $H(X)$. Все члены E_s этой спектральной последовательности, если их рассматривать как дифференциальные модули с суммарными дифференциалами $D_s: E_s \rightarrow E_s$, гомотопически эквивалентны между собой и гомотопически эквивалентны дифференциальному модулю $(H(X), d = 0)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть над произвольным полем задана любая спектральная последовательность $\{E_s, d_s\}$, $s \geq 0$. Тогда на каждом члене E_s этой спектральной последовательности имеется такой дифференциал $D_s: E_s \rightarrow E_s$, что соответствующий ему модуль гомологий $H(E_s, D_s) = \text{Ker } D_s / \text{Im } D_s$ изоморфен предельному члену спектральной последовательности $\{E_s, d_s\}$.

Список литературы

1. Stasheff J. D. Homotopy associativity of H -spaces. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. №2. P. 275–312.
2. May J. P. The geometry of iterated loop spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1972. (Lecture Notes in Math. V. 271.)
3. Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологических пространств // Матем. сб. 1981. Т. 115 (157). №1. С. 146–158.
4. Смирнов В. А. Когомологии алгебры Стиррода // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №2. С. 120–126.
5. Смирнов В. А. Вторичные операции в гомологиях операды E // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. №2. С. 449–468.
6. Смирнов В. А. Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С. 80–96.
7. Смирнов В. А. E_∞ -структуры на гомотопических группах // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №1. С. 152–156.
8. Смирнов В. А. Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №3. С. 121–154.
9. Gugenheim V. K. A. M. On a chain complex of a fibration // Illinois J. Math. 1972. V. 3. P. 398–414.
10. Gugenheim V. K. A. M., Stasheff J. D. On perturbations and A_∞ -structures // Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A. 1986. V. 38. P. 237–246.
11. Lambe L. A., Stasheff J. D. Applications of perturbation theory to iterated fibrations // Manuscripta Math. 1987. V. 58. P. 363–376.
12. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A. Perturbation theory in differential homological algebra. I // Illinois J. Math. 1989. V. 33. №4. P. 566–582.
13. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Algebraic aspects of Chen's twisting cochain // Illinois J. Math. 1990. V. 34. P. 485–502.
14. Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. II // Illinois J. Math. 1991. V. 35. №3. P. 357–373.
15. Huebschmann J., Kadeishvili T. Small models for chain algebras // Math. Z. 1991. V. 207. P. 245–280.
16. Берикашвили Н. А. Дифференциалы спектральной последовательности // Труды Тбилисского матем. ин-та им. А. М. Размадзе 1976. Т. 51.