Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Микитюк, Кэлеровы структуры на касательных расслоениях симметрических пространств ранга один, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 11, 93–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm611>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:50:29

УДК 514.765.1+512.813.4

И. В. Микитюк

Кэлеровы структуры на касательных расслоениях симметрических пространств ранга один

В работе построены все G -инвариантные кэлеровы структуры F на областях симплектических многообразий $T(G/K)$, где G/K – риманово симметрическое пространство ранга один размерности ≥ 3 с полупростой группой Ли G . Показано, что этот класс $\{F\}$ кэлеровых структур инвариантен относительно процедуры редукции. Представлен Ли-алгебраический метод описания G -инвариантных кэлеровых структур на касательных расслоениях симметрических пространств G/K . Также обсуждаются смежные вопросы описания тройной системы Ли пространства $F_4/\mathrm{Spin}(9)$ в терминах его спинорной структуры.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

Пусть G/K – симметрическое пространство с полупростой группой Ли G и компактной подгруппой K . Стандартная G -инвариантная метрика g на G/K определяет геодезический поток с гамильтонианом H на касательном расслоении $T(G/K)$, рассматриваемом как симплектическое многообразие с симплектической 2-формой Ω (индуцированной канонической симплектической структурой на кокасательном расслоении после отождествления этих двух расслоений с помощью метрики).

Комплексные структуры, определенные на выколоте касательном расслоении $T^0(G/K) = T(G/K) - \{\text{нулевое сечение}\}$, естественно возникают как результат геометрических конструкций метода геометрического квантования. Такую структуру для сферы обнаружил Сурио в работе [1]. Позже Раунсли [2] заметил, что функция длины $\sqrt{H}$ является строго плюрисубгармонической относительно упомянутой выше комплексной структуры J_S и, таким образом, определяет кэлерову метрику на T^0S^n с Ω как кэлеровой формой. Он также заметил, что J_S инвариантна относительно гамильтонова потока $X_{\sqrt{H}}$ функции длины $\sqrt{H}$ (нормализованного геодезического потока) и использовал кэлерову структуру J_S для квантования.

Впоследствии Фурутани и Танака [3] определили кэлерову структуру J_S с аналогичными свойствами на выколотах касательных расслоениях комплексного и кватернионного проективных пространств $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ и использовали ее для квантования. В работе [4] Ии и Моригава описали эту структуру (на выколоте касательном расслоении) в терминах геометрических структур, ассоциированных с метрикой g на G/K .

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального научного фонда Германии (грант № SFB237).

В работе [5] Шоке исследовал связь между J_S и так называемой адаптированной комплексной структурой J_A на соответствующем касательном расслоении $T(G/K)$. Он показал, что для всех компактных симметрических пространств ранга один (включая проективную плоскость Кэли $F_4/\text{Spin}(9)$) семейство комплексных структур, являющихся образами адаптированной комплексной структуры относительно подходящего семейства диффеоморфизмов, имеет границу и эта граничная комплексная структура совпадает с J_S . В нашей работе [6] мы, используя методы теории алгебр Ли, описали все G -инвариантные кэлеровы структуры F (с Ω как кэлеровой формой) на выколотых касательных расслоениях $T^0(G/K)$ симметрических пространств G/K , которые инвариантны относительно нормализованного геодезического потока $X_{\sqrt{H}}$. Мы показали, что такие кэлеровы структуры F существуют только на выколотых касательных расслоениях компактных симметрических пространств ранга один.

В настоящей работе представлен метод описания G -инвариантных кэлеровых структур на касательных расслоениях симметрических пространств G/K , основанный на теории алгебр Ли. Этот метод базируется на подходе работы [6] и на обобщении упомянутого выше метода, изложенного в [5]. Главная цель нашей работы состоит в построении всех G -инвариантных кэлеровых структур F на G -инвариантных областях касательных расслоений $T(G/K)$ симметрических пространств G/K ранга один размерности ≥ 3 (теорема 4.14). Доказано, что такие кэлеровы структуры F определяются парой комплекснозначных гладких функций (ψ, λ) , связанных уравнением Риккати (4.4), и что этот класс $\{F\}$ кэлеровых структур инвариантен относительно процедуры редукции. Как приложение методов, развитых в §3, получено описание тройной системы Ли симметрического пространства $F_4/\text{Spin}(9)$ в терминах его спинорной структуры.

Часть этой работы была выполнена автором во время его пребывания в Рурском университете (Бохум, Германия) в апреле–мае 2000 года. Автор выражает благодарность А. Т. Хаклберри за поддержку, гостеприимство и плодотворные дискуссии.

§ 2. G -инвариантные кэлеровы структуры на $T(G/K)$

2.1. Поляризации. Здесь мы приведем необходимые в дальнейшем факты о поляризациях. Более детальное изложение этого материала можно найти, например, в работах [7], [8].

Пусть (X, Ω) – вещественное симплектическое многообразие, F – комплексное распределение, т.е. комплексное подрасслоение комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}X$. Распределение F определяет *комплексную структуру* на X , если F инволютивно (т.е. замкнуто относительно скобки Ли: $[F, F] \subset F$), $F \cap \overline{F} = 0$ и $F + \overline{F} = T^{\mathbb{C}}X$. Говорят, что распределение F *интегрируемо*, если

- (1) $F \cap \overline{F}$ имеет постоянный ранг,
- (2) распределения F и $F + \overline{F}$ инволютивны.

Распределение F *лагранжево*, если $\Omega(F, F) = 0$ и $\dim_{\mathbb{C}} F = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} X$.

Поляризация на X – это комплексное интегрируемое лагранжево распределение $F \subset T^{\mathbb{C}}X$. Поляризация F *положительно определена*, если $-i\Omega_x(Z, \overline{Z}) > 0$ для всех ненулевых векторов $Z \in F(x)$ и $x \in X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [8]. *Кэлериово многообразие* – это симплектическое многообразие, снабженное положительно определенной поляризацией.

Чтобы согласовать это определение с общепринятым, мы будем использовать следующую лемму (см. [8; лемма 4.3]).

ЛЕММА 2.2. *Пусть F – положительно определенная поляризация на вещественном симплектическом многообразии X . Тогда для каждого $x \in X$ существует единственное линейное отображение $J_x: T_x X \rightarrow T_x X$ такое, что*

- (1) $J_x^2 = -\text{Id}_x$;
- (2) $F(x) = \{Y + iJ_x(Y), Y \in T_x X\}$;
- (3) $\Omega_x(J_x(Y_1), J_x(Y_2)) = \Omega_x(Y_1, Y_2)$ для произвольных $Y_1, Y_2 \in T_x X$;
- (4) *квадратичная форма $B_x(Y_1, Y_2) = \Omega_x(J_x Y_1, Y_2)$ симметрична и положительно определена.*

Из леммы 2.2 следует, что F – (интегрируемое) комплексное распределение, состоящее из векторов типа $(0, 1)$ комплексной структуры J , а четверка (X, J, B, Ω) является кэлериовым многообразием в обычном понимании этого термина.

2.2. G -инвариантные комплексные структуры. В этом пункте мы изложим некоторые результаты работы [6]. Пусть M – однородное пространство вещественной связной редуктивной группы Ли G , т.е. $M = G/K$. Предположим, что K – (замкнутая) редуктивная подгруппа группы G . Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп Ли G и K соответственно. Тогда существует точное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такое, что ассоциированная с ним билинейная форма Φ невырождена на $\mathfrak{g}$ (если $\mathfrak{g}$ полупроста, то в качестве Φ мы можем взять форму Киллинга, ассоциированную с присоединенным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Форма Φ невырождена на $\mathfrak{k}$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle = c\Phi$, где $c \in \mathbb{R}$ – ненулевая константа. Форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ определяет G -инвариантную псевдориманову метрику g на многообразии G/K . Метрика g позволяет отождествить кокасательное расслоение T^*M и касательное расслоение TM , и, таким образом, мы можем говорить о канонической 1-форме θ на TM , т.е. форме, определенной уравнением

$$\theta(Y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, p_* Y), \quad Y \in T_x(TM), \quad (2.1)$$

где $p: TM \rightarrow M$ обозначает естественную проекцию. Форма θ и симплектическая форма $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} d\theta$ инвариантны относительно естественного действия группы Ли G на TM (продолжения действия G на M).

Обозначим через $\mathfrak{m}$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ – $\text{Ad } K$ -инвариантное разложение $\mathfrak{g}$ в прямую сумму подпространств. Рассмотрим тривиальное векторное расслоение $G \times \mathfrak{m}$ и на нем два коммутирующих действия групп Ли: действие группы Ли G слева $l_h: (g, w) \mapsto (hg, w)$ и действие группы Ли K справа $r_k: (g, w) \mapsto (gk, \text{Ad } k^{-1}(w))$. Пусть $\pi: G \times \mathfrak{m} \rightarrow G \times_K \mathfrak{m}$ – естественная проекция. Хорошо известно, что пространства $G \times_K \mathfrak{m}$ и TM изоморфны. Используя соответствующий G -эквивариантный диффеоморфизм $\varphi: G \times_K \mathfrak{m} \rightarrow TM, [(g, w)] \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g \exp(tw)K$, и проекцию π , определим

G -эquivариантную субмерсию $\Pi: G \times \mathfrak{m} \rightarrow TM$, $\Pi = \varphi \circ \pi$. Обозначим через $\tilde{\theta}$ 1-форму $\Pi^*\theta$, а через $\tilde{\Omega}$ – ее дифференциал $d\tilde{\theta}$. Пусть ξ^l – левоинвариантное векторное поле на G , определяемое вектором $\xi \in \mathfrak{g}$.

ЛЕММА 2.3. 1-форма $\tilde{\theta}$ на многообразии $G \times \mathfrak{m}$ имеет вид

$$\tilde{\theta}_{(g,w)}(\xi^l(g), u) = \langle w, \xi \rangle, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\Omega}_{(g,w)}((\xi_1^l(g), u_1), (\xi_2^l(g), u_2)) = \langle \xi_2, u_1 \rangle - \langle \xi_1, u_2 \rangle - \langle w, [\xi_1, \xi_2] \rangle, \quad (2.3)$$

где $g \in G$, $w \in \mathfrak{m}$, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}$, $u, u_1, u_2 \in \mathfrak{m} = T_w \mathfrak{m}$. Ядро $\mathcal{K} \subset T(G \times \mathfrak{m})$ 2-формы $\tilde{\Omega}$ порождается глобальными (лево) G -инвариантными векторными полями ζ^L , $\zeta \in \mathfrak{k}$, на $G \times \mathfrak{m}$, $\zeta^L(g, w) = (\zeta^l(g), [w, \zeta])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение для 1-формы $\tilde{\theta}$ следует непосредственно из определения (2.1). Чтобы получить формулу для $\tilde{\Omega}$, зафиксируем базис $\{\eta_j\}$ в $\mathfrak{g}$ и соответствующий дуальный базис $\{\omega_j\}$ в $\mathfrak{g}^*$. Тогда $\tilde{\theta} = \sum_j f_j \omega_j^L$, где $f_j(g, w) = \langle w, \eta_j \rangle$ – гладкая функция и ω_j^L – поднятие вдоль проекции $G \times \mathfrak{m} \rightarrow G$ (лево) G -инвариантной 1-формы ω_j^l на группе Ли G . Теперь достаточно заметить, что $df_j(g, w)(\xi^l(g), u) = \langle u, \eta_j \rangle$, и применить формулу Маурера–Картана: $d\omega_j^l(\xi^l, \eta^l) = -\omega_j([\xi, \eta])$. Так как Ω является симплектической формой, ядро формы $\tilde{\Omega}$ совпадает с ядром отображения Π_* .

Пусть D – открытое связное G -инвариантное подмножество в TM . Обозначим через W единственное $\text{Ad } K$ -инвариантное открытое подмножество в $\mathfrak{m}$ такое, что $\Pi^{-1}(D) = G \times W$, а через $\mathcal{K}_W$ – ограничение распределения $\mathcal{K}$ на открытое подмногообразие $G \times W$.

Пусть F – поляризация на D . Так как F – интегрируемое распределение, то оно определяется дифференциальным идеалом $\mathcal{I}(F) \subset \Lambda T^{\mathbb{C}*} D$ (замкнутым относительно операции внешнего дифференцирования). Ядро $\mathcal{F}$ дифференциального идеала $\Pi^* \mathcal{I}(F)$ является интегрируемым комплексным распределением на $G \times W$. Распределение $\mathcal{F}$ мы будем обозначать также через $\Pi_*^{-1}(F)$. Это распределение единственным образом определяется двумя условиями:

- (1) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} G$;
- (2) $\Pi_*(\mathcal{F}) = F$.

Очевидно, что $\tilde{\Omega}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$ и $\mathcal{F}$ содержит $\mathcal{K}_W$. Больше того, распределение $\mathcal{F}$ (право) K -инвариантно.

Мы существенно упростим все выкладки, рассматривая тривиальное векторное расслоение $G \times W$ с распределением $\mathcal{F}$ вместо G -инвариантного подмножества D касательного расслоения $T(G/K)$ с поляризацией F . Для этого нам необходима

ЛЕММА 2.4. Пусть $\mathcal{F}$ – интегрируемое комплексное распределение на $G \times W$ такое, что

- (1) $\mathcal{F}$ (право) K -инвариантно,
- (2) $\mathcal{K}_W^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{F}$,
- (3) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{R}} G$,
- (4) $\tilde{\Omega}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$.

Тогда $F = \Pi_*(\mathcal{F})$ является поляризацией на D .

Обратно, произвольная поляризация F на D определяет единственное интегрируемое распределение $\mathcal{F} = \Pi_*^{-1}(F)$ со свойствами (1)–(4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как распределение $\mathcal{F}$ (право) K -инвариантно и содержит ядро $\mathcal{H}_W$ отображения $\Pi_*(G \times W)$, то его образ $F = \Pi_*(\mathcal{F})$ – корректно определенное (комплексное) распределение на D размерности $\dim G - \dim K$; $F \cap \overline{F}$ имеет постоянный ранг потому, что распределение $\mathcal{H}_W \subset \mathcal{F}$ вещественно. Лагранжевость распределения F является непосредственным следствием условия (4). Чтобы доказать его гладкость и инволютивность, заметим, что Π – субмерсия, т.е. для произвольной точки $(g, w) \in G \times W$ существуют ее окрестность U , координаты $x_1, \dots, x_N$ на U и координаты $x_1, \dots, x_{N'}$ на открытом множестве $U' = \Pi(U)$ такие, что $x_j(g, w) = 0$, $j = 1, \dots, N$, и отображение $\Pi|_U$ в этих координатах имеет вид $\Pi: (x_1, x_2, \dots, x_N) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{N'})$. Пусть

$$Y(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N a_j(x_1, \dots, x_N) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

– произвольное сечение распределения $\mathcal{F}|_U$. Распределение $\mathcal{H}|_U$ порождено $\partial/\partial x_j$, $j = N' + 1, \dots, N$, и $\mathcal{F}|_U$ сохраняется этими векторными полями $\partial/\partial x_j$. Поэтому гладкое векторное поле

$$Y_0(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N a_j(x_1, \dots, x_{N'}, 0, \dots, 0) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

также является сечением распределения $\mathcal{F}|_U$. Таким образом,

$$\Pi_* Y_0(x_1, \dots, x_{N'}) = \sum_{j=1}^{N'} a_j(x_1, \dots, x_{N'}, 0, \dots, 0) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

– гладкое сечение $F|_{U'}$. (Распределение $\mathcal{F}$ сохраняется векторным полем $\partial/\partial x_j$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ сохраняется соответствующей локальной однопараметрической подгруппой [7].) Теперь инволютивность F следует непосредственно из равенства (2.4). Аналогично доказывается инволютивность распределения $\Pi_*(\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}})$, т.е. F – поляризация.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть F – поляризация на D , $\mathcal{F} = \Pi_*^{-1}(F)$. Тогда

- (1) F G -инвариантно тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ (лево) G -инвариантно;
- (2) F – комплексная структура на D тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{H}_W^{\mathbb{C}}$ ($\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}} = T^{\mathbb{C}}(G \times W)$);
- (3) F – положительно определенная поляризация на D тогда и только тогда, когда $-i\tilde{\Omega}(Z, \overline{Z}) \geq 0$ для всех векторных полей (сечений) $Z \in \Gamma\mathcal{F}$ и $\tilde{\Omega}(Z, \overline{Z}) = 0 \Leftrightarrow Z \in \Gamma\mathcal{H}_W^{\mathbb{C}} \subset \Gamma\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как субмерсия Π G -эквивариантна, то распределения $\mathcal{F}$ и $\Pi_*(\mathcal{F})$ G -левоинвариантны одновременно. Если $\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{K}_W^{\mathbb{C}}$, то $\Pi_*(\mathcal{F}) \cap \Pi_*(\overline{\mathcal{F}}) = 0$ и, следовательно, F – комплексная структура. Последнее утверждение предложения очевидно.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех G -инвариантных поляризаций F на D и множеством всех интегрируемых (лево) G -инвариантных распределений $\mathcal{F} \subset T^{\mathbb{C}}(G \times W)$, для которых выполнены условия (1)–(4) леммы 2.4.

Пусть F – G -инвариантная поляризация, $\mathcal{F} = \Pi_*^{-1}(F)$. Теперь мы сосредоточим наше внимание на G -инвариантном подраспределении распределения $\mathcal{F}$, которое будет играть важную роль в нашем дальнейшем изложении. Определим это распределение $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$ как дополнительное к $\mathcal{K}_W^{\mathbb{C}}$ (в $\mathcal{F}$) G -инвариантное распределение, для которого $\mathcal{P}(e, w) \subset \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \subset T_e^{\mathbb{C}}G \times T_w^{\mathbb{C}}W$. Так как распределение $\mathcal{K}_W$ порождено векторными полями $\zeta^L|(G \times W)$, $\zeta \in \mathfrak{k}$, $\zeta^L(g, w) = (\zeta^l(g), [w, \zeta])$, то такое распределение $\mathcal{P}$ единственно. По определению $\mathcal{F} = \mathcal{K}_W^{\mathbb{C}} + \mathcal{P}$. Больше того, распределения $\mathcal{K}_W$, $\mathcal{P}$ (и $\mathcal{F}$ по определению) являются (право) K -инвариантными потому, что разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ $\text{Ad } K$ -инвариантно.

§ 3. G -инвариантные кэлеровы структуры на касательных расслоениях симметрических пространств

В этом параграфе мы продолжим изложение, используя наши предыдущие обозначения, но предположим дополнительно, что G/K – симметрическое пространство ($[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$) и что ограничение формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{m}$ положительно определено. Положим $r(w) = |w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$ на $\mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{m} - \{0\}$.

3.1. G -инвариантные комплексные структуры на касательных расслоениях симметрических пространств. Следующие лемма и предложение описывают все положительно определенные G -инвариантные поляризации на G -инвариантных областях D касательного расслоения TM симметрического пространства M в терминах гладкого семейства $\mathbb{C}$ -линейных отображений на $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$.

ЛЕММА 3.1 [6]. Пусть $\mathcal{F} = \Pi_*^{-1}(F)$, где F – G -инвариантная положительно определенная поляризация на D , $\mathcal{F} = \mathcal{K}_W^{\mathbb{C}} + \mathcal{P}$. Предположим, что G/K – симметрическое пространство ($[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$). Тогда для каждого $w \in W$ существует единственное невырожденное $\mathbb{C}$ -линейное отображение $P_w: \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ такое, что $\mathcal{P}$ порождается всюду ненулевыми на $G \times W$ (лево) G -инвариантными векторными полями ξ^L , $\xi \in \mathfrak{m}$, где $\xi^L(g, w) = (\xi^l(g), i P_w(\xi))$. Больше того, $\text{Ad } k \circ P_w \circ \text{Ad } k^{-1} = P_{\text{Ad } k(w)}$ на $\mathfrak{m}$ для всех $w \in W$, $k \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим вещественные подпространства V_1, V_2 пространства $T_{(e, w)}(G \times W)$, положив $V_1 = \{(\xi, 0), \xi \in \mathfrak{m} \subset T_e G\}$ и $V_2 = \{(0, u), u \in \mathfrak{m} = T_w W\}$. Отметим, что $\mathcal{P}(e, w) \subset V_1^{\mathbb{C}} \oplus V_2^{\mathbb{C}}$ и что пространства $\mathcal{P}(e, w)$, $V_1^{\mathbb{C}}, V_2^{\mathbb{C}}$ имеют одинаковую размерность.

Теперь, чтобы доказать существование отображения P_w , достаточно доказать, что $\mathcal{P}(e, w) \cap V_k^{\mathbb{C}} = 0$, $k = 1, 2$. В силу равенства (2.3) $\tilde{\Omega}(V_k, V_k) = 0$, $k = 1, 2$ ($[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k} = \mathfrak{m}^{\perp}$). Поэтому $\tilde{\Omega}(Z, \overline{Z}) = 0$ для всех $Z \in \mathcal{P}(e, w) \cap V_k^{\mathbb{C}}$ и, как следует из предложения 2.5, $Z \in (\mathcal{P} \cap \mathcal{K}_W^{\mathbb{C}})(e, w) = 0$.

По определению (правого) действия r_k группы Ли K на $G \times W$ диффеоморфизм r_{k*} отображает касательный вектор $(\xi^l(g), u)$ в точке (g, w) в касательный вектор $((\text{Ad}_{k^{-1}} \xi)^l(gk), \text{Ad}_{k^{-1}} u)$ в точке $(gk, \text{Ad}_{k^{-1}} w)$, где $\xi \in \mathfrak{g}$, $w, u \in \mathfrak{m}$, $k \in K$. Тогда $\mathcal{P}$ – (право) K -инвариантно тогда и только тогда, когда $\text{Ad } k \circ P_w \circ \text{Ad } k^{-1} = P_{\text{Ad } k(w)}$ на $\mathfrak{m}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $W \subset \mathfrak{m}$ – открытое $\text{Ad } K$ -инвариантное подмножество в $\mathfrak{m}$. Пусть $P: W \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, $w \mapsto P_w$, – гладкое K -эквивариантное отображение, т.е. сплетающее присоединенное действие Ad группы K на $W \subset \mathfrak{m}$ и действие $(k, B) \mapsto (\text{Ad}_{\mathfrak{m}} k B \text{Ad}_{\mathfrak{m}} k^{-1})$ группы K на $\text{GL}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$:

$$\text{Ad } k \circ P_w \circ \text{Ad } k^{-1} = P_{\text{Ad } k(w)} \quad \text{на } \mathfrak{m} \quad \text{для всех } w \in W, \quad k \in K. \quad (3.1)$$

Мы будем говорить, что (комплексные) распределения $\mathcal{F} \subset T^{\mathbb{C}}(G \times W)$ и $F \subset T^{\mathbb{C}}(\Pi(G \times W))$ *определены отображением* P (все P_w невырождены), если

- (1) $\mathcal{F} = \mathcal{K}_W^{\mathbb{C}} + \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ порождается всюду ненулевыми на $G \times W$ (лево) G -инвариантными векторными полями ξ^L , $\xi \in \mathfrak{m}$, $\xi^L(g, w) = (\xi^l(g), i P_w(\xi))$;
- (2) $F = \Pi_*(\mathcal{F})$.

Такие (лево) G -инвариантные распределения $\mathcal{F}$ и F мы будем обозначать через $\mathcal{F}(P)$ и $F(P)$ соответственно.

Мы будем исследовать комплексные структуры $F(P)$ (не обязательно кэлеровы) на G -инвариантных связных открытых подмножествах в $T(G/K)$. Зафиксируем базисы $\{X_{\beta}\}$ в $\mathfrak{k}$ и $\{W_b\}$ в $\mathfrak{m}$. Пусть $\{w_b\}$ обозначает координаты вектора w в $\mathfrak{m}$ относительно базиса $\{W_b\}$. Для произвольной вектор-функции $\tau: W \rightarrow \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, $\tau = \sum_b \tau_b(w) W_b$, через $\vec{\tau}$ обозначим векторное поле

$$\vec{\tau}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_b \tau_b(w) \frac{\partial}{\partial w_b}.$$

Будем говорить, что векторное поле $Y \in \Gamma T(G \times W)$ горизонтально (вертикально), если $\text{pr}_{v*}(Y) = 0$ (соответственно $\text{pr}_{h*}(Y) = 0$), где $\text{pr}_v: G \times W \rightarrow W$ (соответственно $\text{pr}_h: G \times W \rightarrow G$) – обычная проекция.

Пусть $\sigma: T(G/K) \rightarrow T(G/K)$ – инволюция, которая отображает произвольный касательный вектор Y в точке gK в вектор $-Y$ в этой же точке gK .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 [6]. *Предположим, что G/K – риманово симметрическое пространство. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P)$ – комплексное распределение на $G \times W$, определенное отображением $P: W \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$. Распределение $F(P)$ на D*

- (1) *инволютивно тогда и только тогда, когда $[\xi^L, \eta^L] = [\xi, \eta]^L \in \Gamma \mathcal{K}_W^{\mathbb{C}}$, т.е. когда тождество $\left[\overrightarrow{P(\xi)}, \overrightarrow{P(\eta)} \right](w) = -[w, [\xi, \eta]]$ выполняется на W при всех $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$;*
- (2) *лагранжево тогда и только тогда, когда для каждого $w \in W$ оператор P_w симметричен относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$;*
- (3) *является комплексной структурой тогда и только тогда, когда выполнено условие (1) и вещественная часть $\text{Re } P_w$ линейного оператора P_w невырождена для всех $w \in W$, т.е. $\mathcal{F} \cap \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{K}_W^{\mathbb{C}}$;*

- (4) является кэлеровой структурой (с кэлеровой формой Ω) тогда и только тогда, когда выполнены условия (1), (2) и вещественная часть $\operatorname{Re} P_w$ (симметричного) линейного отображения P_w положительно определена для всех $w \in W$, т.е. $\langle (\operatorname{Re} P_w)(\xi), \xi \rangle > 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{m} - \{0\}$.

Если $F(P)$ – комплексная структура и $W = -W$, то отображение σ является антиголоморфной инволюцией тогда и только тогда, когда $\overline{P}_w = P_{-w}$ для всех $w \in W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы попытаемся объяснить смысл каждого условия этого предложения. В силу определения 3.2 распределение $\mathcal{P}$ (право) K -инвариантно. Поэтому распределение $\mathcal{K}_W$ (порожденное этим действием группы Ли K) сохраняет (инвариантным) распределение $\mathcal{F}$: $[\zeta_W^L, \mathcal{P}] \subset \mathcal{P}$, $\zeta \in \mathfrak{k}$.

Пусть $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$. Так как векторные поля ξ^L, η^L (лево) G -инвариантны, их горизонтальные и вертикальные компоненты не зависят от $w \in W$ и $g \in G$ соответственно:

$$\xi^L(g, w) = \sum_b \xi_b W_b^l(g) + i \sum_b (P_w(\xi))_b \frac{\partial}{\partial w_b}.$$

Поэтому горизонтальная компонента векторного поля $[\xi^L, \eta^L]$ – это векторное поле $[\xi, \eta]^l$. С другой стороны, произвольное сечение распределения $\mathcal{F}$ определяется своей горизонтальной компонентой, а значит, из соотношений $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ и $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$ следует, что $[\xi^L, \eta^L]$ – сечение распределения $\mathcal{F}(P)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1) предложения 3.3.

Так как $\mathcal{K}$ – ядро 2-формы $\tilde{\Omega}$, то распределение $F(P)$ лагранжево тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\Omega}_{(e, w)}((\xi, iP_w(\xi)), (\eta, iP_w(\eta))) = \langle \eta, iP_w(\xi) \rangle - \langle \xi, iP_w(\eta) \rangle - \langle w, [\xi, \eta] \rangle = 0.$$

Но $\mathfrak{m} \perp [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ и, следовательно, $\langle \xi, iP_w(\eta) \rangle = \langle \eta, iP_w(\xi) \rangle$, т.е. мы пришли к условию (2). Используя аналогичные аргументы, получаем, что

$$\begin{aligned} & -i\tilde{\Omega}_{(e, w)}((\xi + i\eta, iP_w(\xi + i\eta)), (\xi - i\eta, -i\overline{P}_w(\xi - i\eta))) \\ & = (\langle \overline{P}_w + P_w(\xi), \xi \rangle + \langle \overline{P}_w + P_w(\eta), \eta \rangle) \\ & \quad + i(\langle \overline{P}_w - P_w(\xi), \eta \rangle - \langle \overline{P}_w - P_w(\eta), \xi \rangle). \end{aligned}$$

В силу условия (2) предложения линейный оператор $\overline{P}_w - P_w$ симметричен. Поэтому поляризация $F(P)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\langle (\operatorname{Re} P_w)(\xi), \xi \rangle > 0$ для всех $\xi \neq 0$ из $\mathfrak{m}$ (см. также предложение 2.5). Легко проверить, что условие (3) означает следующее: $\mathcal{F} + \overline{\mathcal{F}} = T^{\mathbb{C}}(G \times W)$. Таким образом, $F + \overline{F} = T^{\mathbb{C}}D$. Очевидно, что $\sigma_*(F(P)) = \overline{F}(P)$ тогда и только тогда, когда $\overline{P}_w = P_{-w}$. Теперь предложение следует из леммы 2.4 и предложения 2.5.

3.2. Потенциальные функции. В этом пункте рассматривается класс G -инвариантных кэлеровых структур F на касательном расслоении риманова метрического пространства G/K , допускающих потенциальную функцию f (т.е. $\Omega = -i\partial\bar{\partial}f$) вида $q \circ \sqrt{H}$.

Пусть $H: TM \rightarrow \mathbb{R}$ – гамильтониан на $TM = T(G/K)$, ассоциированный с данной метрикой g : $H(gK, Y) = g(Y, Y)$, $Y \in T_{gK}(G/K)$. Обозначим через η гамильтоново векторное поле функции $H/2$. Векторное поле 2η ($\Omega(2\eta, \cdot) = -dH$)

определяет на TM геодезический поток. Чтобы упростить существенно все вычисления, мы, как и в предыдущем пункте, будем работать на тривиальном векторном расслоении $G \times \mathfrak{m}$. Для этого рассмотрим на $G \times \mathfrak{m}$ функцию $\tilde{H}$ и векторное поле $\tilde{\eta}$, положив

$$\tilde{H}(g, w) = \langle w, w \rangle \quad \text{и} \quad \tilde{\eta}(g, w) = (w^l(g), 0).$$

Ясно, что $\tilde{H} = \Pi^* H$. Так как билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\text{Ad } G$ -инвариантна, то из (2.3) получим

$$\tilde{\Omega}_{(g, w)}(\tilde{\eta}(g, w), (\eta^l(g), u)) = -\langle w, u \rangle - \langle w, [w, \eta] \rangle = -\langle w, u \rangle = -\frac{1}{2} d\tilde{H}_{(g, w)}(\eta^l(g), u),$$

где $\eta \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathfrak{m} = T_w \mathfrak{m}$. Таким образом, $\Pi^* \Omega(\tilde{\eta}, \cdot) = -d\tilde{H}/2 = -\Pi^* dH/2$. Но форма Ω невырождена, поэтому $\Pi_* \tilde{\eta}$ — корректно определенное векторное поле и $\Pi_* \tilde{\eta} = \eta$ по определению.

Пусть Ξ и $\tilde{\Xi}$ — векторные поля на $T(G/K)$ и $G \times \mathfrak{m}$ соответственно, определенные тождествами

$$\iota(\Xi)\Omega = \theta \quad \text{и} \quad \tilde{\Xi}(g, w) = (0, w).$$

В силу соотношений (2.2), (2.3) $\iota(\tilde{\Xi})\tilde{\Omega} = \tilde{\theta}$. Учитывая, что векторное поле $\tilde{\Xi}$ (право) K -инвариантно, мы получаем, что $\Pi_*(\tilde{\Xi}) = \Xi$. В этом пункте мы введем в рассмотрение векторное поле, определенное на $G \times W$, которое сыграет существенную роль в дальнейшем изложении. Пусть $\lambda: r(W) \rightarrow \mathbb{C}$ — гладкая функция. Эта функция определяет $\text{Ad } K$ -инвариантную функцию $\lambda: w \mapsto \lambda(r(w))$ на W и единственную G -инвариантную функцию на $G \times W$ и $\Pi(G \times W)$. Для упрощения обозначений мы часто будем писать $\lambda(r)$ вместо $\lambda \circ \sqrt{H}$ и $\lambda \circ \sqrt{\tilde{H}}$, $\tilde{\eta}$ и $\tilde{\Xi}$ (η и Ξ) вместо их ограничений на $G \times W$ ($\Pi(G \times W)$). Рассмотрим теперь векторное поле Υ^λ на $G \times W$, заданное равенством $\Upsilon^\lambda(g, w) = (w^l(g), i\lambda(|w|)w)$. Ясно, что $\Upsilon^\lambda = \tilde{\eta} + i\lambda\tilde{\Xi}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть F — G -инвариантная кэлорова структура на G -инвариантной области D в выколотом касательном расслоении риманова симметрического пространства G/K . Существует вещественная гладкая функция $q: r(W) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\theta = \text{Im } \bar{\partial}(q \circ \sqrt{H})$ тогда и только тогда, когда векторное поле $\eta + i\lambda(r)\Xi$, где $\lambda(r) = 2r/q'(r)$, является сечением распределения $F = F(P)$. В этом случае каждый вектор $w \in W$ — собственный вектор оператора P_w с собственным значением $\lambda(|w|)$, а λ — положительная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий предложения следует из результатов работы [9; дополнение А]. Для полноты изложения и, главным образом, чтобы зафиксировать обозначения, мы докажем это здесь. Так как симплектическая форма Ω J -инвариантна, то для каждого $Y \in \Gamma TD$ выполняется цепочка равенств

$$\begin{aligned} \Omega(J\eta, Y) &= \Omega(\eta, -JY) = \lambda \frac{1}{2} dq(JY) = \lambda \frac{1}{2} (\bar{\partial}q(-iY) + \partial q(iY)) \\ &= \lambda \text{Im } \bar{\partial}q(Y) = \lambda \theta(Y) = \Omega(\lambda \Xi, Y). \end{aligned}$$

Следовательно, $J\eta = \lambda \Xi$. Для доказательства достаточности мы отметим следующее: $\eta + i\lambda \Xi \in \Gamma F$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\eta} + i\lambda \tilde{\Xi}$ есть сечение распределения

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(P)$ на $\Pi^{-1}(D)$, т.е. когда каждый вектор $w \in W$ – собственный вектор оператора P_w с собственным значением $\lambda(|w|)$. В частности, отсюда вытекает то, что для нас существенно в этом месте доказательства и что мы сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 3.5. Пусть $\lambda: r(W) \rightarrow \mathbb{C}$ – гладкая функция с положительной вещественной частью ($W \subset \mathfrak{m}^0$). Если $\Upsilon^\lambda \in \Gamma\mathcal{F}$, то функция $q \circ \sqrt{H}$, где

$$q(r) = \int r \cdot \frac{\lambda(r) + \bar{\lambda}(r)}{|\lambda|^2(r)} dr,$$

является потенциальной функцией для кэлеровой структуры F .

По определению $\bar{\partial}(q \circ \sqrt{H})|F = d(q \circ \sqrt{H})|F$ и $\bar{\partial}(q \circ \sqrt{H})|\bar{F} = 0$. Обозначим через Δ 1-форму $\Pi^*(\bar{\partial}(q \circ \sqrt{H}))$ на $G \times W$. Тогда для каждого $\xi \in \mathfrak{m}, \zeta \in \mathfrak{k}, w \neq 0$: $\Delta_{(g,w)}(\xi^l(g), -i\bar{P}_w(\xi)) = 0, \Delta_{(g,w)}(\xi^l(g), [w, \zeta]) = 0$ и

$$\Delta_{(g,w)}(\xi^l(g), iP_w(\xi)) = r^{-1}q'\langle w, iP_w(\xi) \rangle = ir^{-1}q'\lambda\langle w, \xi \rangle,$$

так как оператор P_w симметричен относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Теперь, используя инвариантность пространства $\langle w \rangle^\perp$ относительно P_w , мы получаем, что $\Delta_{(e,w)}(\xi_0, 0) = 0, \Delta_{(e,w)}(0, \xi_0) = 0$ для всех $\xi_0 \in \langle w \rangle^\perp \subset \mathfrak{m}$. Так как $[w, \zeta] \perp w$ для всех $\zeta \in \mathfrak{k}$, то $\Delta_{(e,w)}(\zeta, 0) = 0$. Следовательно,

$$\Delta_{(e,w)}(w, -i\bar{\lambda}w) = 0, \quad \Delta_{(e,w)}(w, i\lambda w) = ir^{-1}q'\lambda\langle w, w \rangle.$$

Таким образом, для произвольных $\eta \in \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{m}$ мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{(e,w)}(\eta, u) &= \frac{q'}{|w|(\lambda + \bar{\lambda})} (i|\lambda|^2\langle w, \eta \rangle + \lambda\langle w, u \rangle) \\ &= \frac{q'}{|w|(\lambda + \bar{\lambda})} \left(i|\lambda|^2\tilde{\theta} + \frac{1}{2}\lambda d\tilde{H} \right)_{(e,w)}(\eta, u). \end{aligned}$$

Поэтому функция $q \circ \sqrt{H}$ является потенциалом для F , если $q'|\lambda|^2/(|w|(\lambda + \bar{\lambda})) \equiv 1$. В этом случае, если дополнительно предположить вещественность функции λ , мы получим требуемое свойство $\text{Im } \Pi^*(\bar{\partial}q) = \tilde{\theta} = \Pi^*\theta$.

Следующие свойства отображения P нам необходимы для доказательства теоремы 4.14.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $M = G/K$ – риманово симметрическое пространство и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(P)$ – комплексное распределение на $G \times W$, $W \subset \mathfrak{m}^0$, определенное отображением $P: W \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m}^\mathbb{C})$. Предположим, что векторное поле Υ^λ является сечением $\mathcal{F}(P)$. Если распределение $F(P)$ инволютивно и лагранжево, то

$$-\text{ad}^2 w|_{\mathfrak{m}} - P_w^2 + \lambda(r) \left(P_w - \frac{d}{dt} \Big|_0 P_{w+tw} + \frac{d\lambda}{dr} r^{-1} w \otimes w \right) = 0 \quad \forall w \in W, \quad (3.2)$$

где $(w \otimes w)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle w, \xi \rangle w, \xi \in \mathfrak{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо вычислить коммутатор $Y = [\Upsilon^\lambda, \xi^L]$, $\xi \in \mathfrak{m}$. Используя обозначения доказательства предложения 3.3, мы получаем:

$$\begin{aligned} Y &= \left[w_b W_b^l(g) + i\lambda(r)w_b \frac{\partial}{\partial w_b}, \xi_b W_b^l(g) + i(P_w(\xi))_b \frac{\partial}{\partial w_b} \right] \\ &= [w, \xi]_\beta X_\beta^l(g) - i(P_w(\xi))_b W_b^l(g) \\ &\quad + \left(\lambda(r)P_w(\xi) + \frac{d\lambda}{dr}r^{-1}\langle w, P_w(\xi) \rangle w - \lambda(r) \frac{d}{dt} \Big|_0 P_{w+tw}(\xi) \right)_b \frac{\partial}{\partial w_b}. \end{aligned}$$

Так как произвольное сечение распределения $\mathcal{F}(P)$ определяется своей горизонтальной компонентой и оператор P_w симметричен, векторное поле Y есть сечение распределения $\mathcal{F}(P)$ только в том случае, когда выполнено условие (3.2) ($P_w(w) = \lambda(|w|)w$).

3.3. Кэлеровы структуры и локальные диффеоморфизмы. В этом пункте мы, обобщая конструкцию работы [5], построим “группу” локальных диффеоморфизмов и изучим ее действие на пространстве локальных G -инвариантных кэлеровых структур $\{(F(P), \Pi(G \times W))\}$ на $T(G/K)$, где G/K – риманово симметрическое пространство.

Для этого мы рассмотрим диффеоморфизм $\Psi(\gamma)$, отображающий открытое множество $U_\gamma = G \times W_\gamma$, $W_\gamma \subset \mathfrak{m}^0$, на множество $U_\delta = G \times W_\delta$ и заданный формулой

$$\Psi(\gamma): G \times W_\gamma \rightarrow G \times W_\delta, \quad \Psi(\gamma)(g, w) = (g, \gamma(|w|)w), \quad (3.3)$$

где $\gamma: r(W_\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^+$ – гладкая положительная функция такая, что $\frac{d}{dr}(r\gamma(r)) > 0$. Обратный диффеоморфизм $\Psi^{-1}(\gamma)$ – это отображение $\Psi(\delta): U_\delta \rightarrow U_\gamma$ (3.3), где $\delta: (r\gamma)(W_\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^+$ – единственная функция, определяемая уравнением $\gamma(r\delta(r)) \cdot \delta(r) \equiv 1$. Нетрудно показать, что $\frac{d}{dr}(r\delta(r)) > 0$.

Образ $\Psi(\gamma)_* \xi^L$ векторного поля $\xi^L|_{U_\gamma}$, $\xi^L(g, w) = (\xi^l(g), iP_w(\xi))$, $W_\gamma = W$, есть векторное поле

$$(\Psi(\gamma)_* \xi^L)_{(g,w)} = (\xi^l(g), i\gamma(r\delta(r)) \cdot P_{\delta(r)w}(\xi) + i(\gamma'(r\delta(r))\delta(r)r^{-1})\langle w, P_{\delta(r)w}(\xi) \rangle \cdot w),$$

где $r = |w|$, $w \in W_\delta$. Это означает, что образ $\Psi(\gamma)_*(\mathcal{F}(P))$ – это распределение $\mathcal{F}(P^\gamma)$ на $G \times W_\delta$ с

$$P_w^\gamma = \frac{1}{\delta(r)} P_{\delta(r)w} + \left(\frac{1}{(r\delta(r))'} - \frac{1}{\delta(r)} \right) r^{-2} \cdot w \otimes (P_{\delta(r)w}(w)), \quad w \in W_\delta, \quad (3.4)$$

где $r = |w|$. Но диффеоморфизм $\Psi(\gamma)$ коммутирует с (левым) G -действием и (правым) K -действием на $G \times \mathfrak{m}$, а значит, индуцирует диффеоморфизм из $D_\gamma = \Pi(G \times W_\gamma)$ на $D_\delta = \Pi(G \times W_\delta)$. Этот диффеоморфизм мы обозначим тоже через $\Psi(\gamma)$. Ясно, что $\Psi(\gamma)_*(F(P))$ – комплексная структура. Оператор P_w^γ симметричен тогда и только тогда, когда $\delta(r)w \in W_\gamma$ является собственным вектором оператора $P_{\delta(r)w}$. Из предложения 3.3 в этом случае следует, что P_w^γ определяет кэлерову структуру на $D_\delta \subset T(G/K)$. Итак, доказана

ЛЕММА 3.7. Пусть $F(P)$ – кэлерова структура на $D_\gamma = \Pi(G \times W_\gamma)$. Комплексная структура $\Psi(\gamma)_*(F(P))$ на $D_\delta \subset T(G/K)$ кэлерова тогда и только тогда, когда каждый $w \in W_\gamma$ является собственным вектором оператора P_w . Эта структура совпадает с распределением $F(P^\gamma)$, где P^γ имеет вид (3.4), на D_δ .

3.4. Каноническая кэлерова структура на касательном расслоении компактного симметрического пространства. В этом пункте G – компактная связная группа Ли. Пусть $G^\mathbb{C}$ и $K^\mathbb{C}$ – комплексификации групп Ли G и K соответственно. Так как группа Ли G компактна, то топологически $K^\mathbb{C} = K \exp(i\mathfrak{k})$ и $G^\mathbb{C} = G \exp(i\mathfrak{m}) \exp(i\mathfrak{k})$ [10; теорема 4], т.е. отображения

$$G \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{k} \rightarrow G^\mathbb{C}, \quad (g, w, \zeta) \mapsto g \exp(iw) \exp(i\zeta), \quad (3.5)$$

$$K \times \mathfrak{k} \rightarrow K^\mathbb{C}, \quad (k, \zeta) \mapsto k \cdot \exp(i\zeta), \quad (3.6)$$

являются диффеоморфизмами. Тогда отображение

$$G \times_K \mathfrak{m} \rightarrow G^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}, \quad [(g, w)] \mapsto g \exp(iw) K^\mathbb{C},$$

– G -эквивариантный диффеоморфизм. Это отображение определяет на многообразии $T(G/K)$ комплексную структуру F^c .

ЛЕММА 3.8. Пусть G – компактная связная группа Ли. Комплексная структура F^c на касательном расслоении симметрического пространства G/K совпадает с распределением $F(P^c)$, где

$$P_w^c : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, \quad P_w^c = \frac{\operatorname{ad} w \cos(\operatorname{ad} w)}{\sin(\operatorname{ad} w)} \Big|_{\mathfrak{m}}, \quad w \in \mathfrak{m}. \quad (3.7)$$

Комплексная структура F^c кэлерова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО формулы (3.7), основанное на процедуре редукции, можно найти в работе [6]. Здесь мы докажем лемму, используя диффеоморфизм (3.5) и G -инвариантность F^c . Пусть $\mathcal{F}^c = \Pi_*^{-1}(F^c)$. Группу $G^\mathbb{C}$, рассматриваемую как вещественную группу Ли, обозначим через $G^\mathbb{R}$. Каноническая комплексная структура F^c на $G^\mathbb{R}$ определяется (лево) $G^\mathbb{R}$ -инвариантными $(0, 1)$ -векторными полями $\xi^l + i(I\xi)^l$, где $\xi \in \mathfrak{g}$ и I – комплексная структура на $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$. Поэтому чтобы найти $\mathcal{F}^c = \Pi_*^{-1}(F^c)$, нужно вычислить образ $G^\mathbb{R}$ -инвариантного векторного поля $\xi^l + i(I\xi)^l$, $\xi \in \mathfrak{g}$, при отображении $G^\mathbb{C} \rightarrow G \times_K \mathfrak{m}$, $g \exp(iw) \exp(i\zeta) \mapsto [g, w]$. В силу формул (3.5) $\exp(iw) \exp(t\xi) = g(t) \exp(iv(t)) \exp(ik(t))$, где $g_0 = e$, $v_0 = w$ и $k_0 = 0$. Тогда из уравнения

$$\exp t\xi = (\exp(-iw)g(t) \exp iw) (\exp(-iw) \exp iv(t)) \exp(ik(t)), \quad \xi \in \mathfrak{m},$$

мы получим два вещественных уравнения для касательных векторов $g'_0 \in \mathfrak{g}$, $v'_0 \in \mathfrak{m}$, $k'_0 \in \mathfrak{k}$:

$$\xi = \exp(-i \operatorname{ad} w)(g'_0) + \frac{1 - \exp(-i \operatorname{ad} w)}{\operatorname{ad} w}(v'_0) + ik'_0. \quad (3.8)$$

Приравнивая компоненты, лежащие в подпространствах $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{k}$ соответственно, получаем $g'_0 = \cos^{-1}(\text{ad } w)(\xi) \in \mathfrak{m}$, $v'_0 = 0$.

Заменяя в (3.8) $\xi \mapsto i\xi$ и решая опять те же два уравнения, мы получаем выражения $\widehat{g}'_0 = \frac{\cos(\text{ad } w) - 1}{\sin(\text{ad } w)}\xi \in \mathfrak{k}$, $\widehat{v}'_0 = \frac{\text{ad } w \cos(\text{ad } w)}{\sin(\text{ad } w)}\xi$. Учитывая, что $(i\widehat{g}'_0, i[w, \widehat{g}'_0])$ является $\mathcal{K}^C(e, w)$ -компонентой вектора $(g'_0 + i\widehat{g}'_0, i\widehat{v}'_0)$, мы находим его $\mathcal{P}(e, w)$ -компоненту, определяемую (3.7). Из предложения 3.3 следует теперь, что P^c определяет кэлерову структуру на $T(G/K)$.

Следствие из леммы 3.8 выделяет каноническую комплексную структуру F^c в множестве всех комплексных структур на σ -инвариантных окрестностях U , содержащих нулевое сечение $G/K \subset T(G/K)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.8.1. Пусть F – комплексная структура на σ -инвариантной области $U \subset T(G/K)$, содержащей G/K , обладающая свойствами:

- (1) $\sigma_*(F) = \overline{F}$;
- (2) $\text{Im } \bar{\partial}H = \theta$.

Тогда $F = F^c|U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\overline{P}_w^c = P_{-w}^c$ для всех $w \in \mathfrak{m}$, то из предложения 3.3 вытекает, что $\sigma_*(F^c) = \overline{F^c}$. Теперь, применяя предложение 3.4 к структуре F^c , получаем второе условие: $\text{Im } \bar{\partial}H = \theta$ (относительно F^c). Но теорема Гийемина и Стензеля [11] утверждает, что комплексная структура F на множестве U , содержащем G/K , со свойствами (1), (2) единственна. Поэтому $F = F^c|U$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Другое доказательство формулы (3.7) может быть получено с использованием выражений (3)–(5) работы [12] для адаптированной структуры F^A на $T(G/K)$ в терминах геометрических структур, ассоциированных с метрикой g на G/K . Структуры F^c и F^A совпадают [13].

Теперь, используя структуру F^c и результаты предыдущих пунктов, мы построим новое семейство G -инвариантных кэлеровых структур на выколотых касательных расслоениях $T^0(G/K) = T(G/K) - G/K$ и соответствующее семейство расщеплений на $G \times \mathfrak{m}^0$, где $\mathfrak{m}^0 = \mathfrak{m} - \{0\}$.

Мы продолжим изложение с прежними обозначениями, положив $P = P^c$ (3.7). Так как $P_w^c(w) = w$, то в силу леммы 3.7 отображение $P^\gamma: w \mapsto P_w^\gamma$ (3.4) определяет кэлерову структуру в области D_δ и

$$P_w^\gamma = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\text{ad}(\delta w) \cos(\text{ad } \delta w)}{\sin(\text{ad } \delta w)} \Big|_{\mathfrak{m}} + \left(\frac{1}{(r\delta)'} - \frac{1}{\delta} \right) r^{-2} \cdot w \otimes w, \quad w \in W_\delta, \quad (3.9)$$

где $r = |w|$, $\delta = \delta(r)$.

Пусть $\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – гладкая положительная функция, а функция a определяется равенством

$$\frac{d}{dr} \ln a(r) = \frac{1}{\lambda(r)}.$$

Положим $\delta_\varepsilon(r) = r^{-1} \ln(a(r)/\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Так как $(r\delta_\varepsilon(r))' = a'(r)/a(r)$, то собственное значение $\lambda_\varepsilon(r) = a(r)/a'(r)$ эндоморфизма $P_w^{\gamma_\varepsilon}$, соответствующее

вектору w , не зависит от ε . Как легко следует из (3.9), для произвольного $\xi \in \mathfrak{m}$ существует граничное векторное поле $\xi_0^L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\gamma_\varepsilon)_* \xi^L$ на $G \times \mathfrak{m}^0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Psi(\gamma_\varepsilon)_* \xi^L(g, w) = \left(\xi^L(g), i\sqrt{-\text{ad}^2 w}(\xi) + i \left(\frac{\lambda(r)}{r^2} \right) \langle w, \xi \rangle w \right), \quad r = |w|, \quad w \in \mathfrak{m}^0.$$

Это векторное поле гладко на открытом подмножестве $G \times R(\mathfrak{m})$, где $R(\mathfrak{m})$ – множество регулярных элементов из $\mathfrak{m}$. В силу утверждения (1) предложения 3.3 и леммы 3.7 $[\Psi(\gamma_\varepsilon)_* \xi^L, \Psi(\gamma_\varepsilon)_* \eta^L] = [\xi, \eta]^L$ и, следовательно, $[\xi_0^L, \eta_0^L] = [\xi, \eta]^L$ на $G \times R(\mathfrak{m})$. В самом деле, $\text{ad } w \text{ ctg}(\text{ad } w)|_{\mathfrak{m}} = \widehat{w} \text{cth } \widehat{w}$, где $\widehat{w} = \sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}}$. Поэтому если $[u, w] = 0$, $u \in \mathfrak{m}$, то для $w_t = w + tu$:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{cth}(\delta_\varepsilon(|w_t|)\widehat{w}_t) = -\text{sh}^{-2}(\delta_\varepsilon(|w|)\widehat{w}) \cdot O(\delta_\varepsilon(|w|)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0;$$

если $w_t = \text{Ad } k_t(w)$, то

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad } k_t \cdot \text{cth}(\delta_\varepsilon(|w|)\widehat{w}) \text{Ad } k_t^{-1} = [\text{ad } \zeta, \text{cth}(\delta_\varepsilon(|w|)\widehat{w})],$$

где $k_t = \exp t\zeta$, $\zeta \in \mathfrak{k}$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P_{w+tu}^{\gamma_\varepsilon} \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{w+tu}^{\gamma_\varepsilon} \right)$$

для произвольных $w \in R(\mathfrak{m})$ и $u \in \mathfrak{m}$ ($\delta'_\varepsilon(r) = O(\delta_\varepsilon(r))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\ker(\text{ad } w|_{\mathfrak{m}}) = \text{ad } w(\mathfrak{k})^\perp \subset \mathfrak{m}$).

Если G/K – симметрическое пространство ранга один, то $R(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^0$ и ядро оператора $\text{ad}^2 w|_{\mathfrak{m}}$, $w \in \mathfrak{m}^0$, порождается вектором w . Поэтому отображение $\mathfrak{m}^0 \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m})$, $w \mapsto P_w$, заданное формулой

$$P_w = \sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}} + \frac{\lambda(|w|)}{|w|^2} \cdot w \otimes w, \quad w \in \mathfrak{m}^0, \quad (3.10)$$

определяет кэлерову структуру на $T^0(G/K)$. Мы доказали

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Пусть G/K – компактное симметрическое пространство ранга один. Для произвольной гладкой положительной функции $\lambda: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ отображение $P: \mathfrak{m}^0 \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m})$ (3.10) определяет кэлерову структуру на $T^0(G/K)$.

Отметим, что структура $F(P)$, определяемая P (3.10), где $\lambda(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, совпадает со структурой J_S [5]. Мы можем дополнить предложение 3.10 следствием.

СЛЕДСТВИЕ 3.10.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – компактная полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{k}$ – ее подалгебра. Если $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ – симметрическая пара, т.е. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$, то для произвольных векторов $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$ коммутационное соотношение

$$\left[\left(\sqrt{-\text{ad}^2 w}(\xi) \right)_b \frac{\partial}{\partial w_b}, \left(\sqrt{-\text{ad}^2 w}(\eta) \right)_b \frac{\partial}{\partial w_b} \right] = -[w, [\xi, \eta]]_b \frac{\partial}{\partial w_b}, \quad w \in R(\mathfrak{m}),$$

выполнено на множестве регулярных точек $R(\mathfrak{m})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать следствие, достаточно использовать предельный переход, как было показано выше, но для функции $\lambda(r) = \varepsilon > 0$ ($\frac{d}{dr} \ln a(r) = \varepsilon^{-1}$). Тогда $\delta_\varepsilon(r) \rightarrow \infty$ и $\delta'_\varepsilon(r) = O(\delta_\varepsilon(r))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§ 4. Инвариантные кэлеровы структуры на инвариантных областях касательных расслоений симметрических пространств ранга один

Мы продолжим изложение, используя обозначения предыдущих параграфов, но здесь, если не оговорено противное, предположим, что G/K – симметрическое пространство ранга один с полупростой связной группой Ли G и связной компактной подгруппой K . Чтобы согласовать описания кэлеровых структур для симметрических пространств классических групп Ли G , мы выберем в качестве положительно определенного скалярного произведения на $\mathfrak{m}$ ограничение нормализованной формы $-\frac{\varepsilon}{2} \text{Tr}$ (на $\mathfrak{g}$), ассоциированной со стандартным представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ($\varepsilon = 1$ для компактных и $\varepsilon = -1$ для некомпактных симметрических пространств). Это скалярное произведение для классических симметрических пространств мы обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и положим $\mathbf{r}(w) = \|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$.

Пусть $S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ – множество всех обратимых симметричных операторов из $\text{GL}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$. Обозначим через $\mathfrak{K}(D) = \mathfrak{K}(W)$ множество всех G -инвариантных кэлеровых структур (с кэлеровой формой Ω) на G -инвариантных областях $D = \Pi(G \times W)$, $W = \text{Ad } K(W)$ в $T(G/K)$. Здесь мы опишем множество $\mathfrak{K}(W)$, т.е. множество всех K -эквивариантных отображений $P: W \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, $w \mapsto P_w$ (см. (3.1)), для которых выполнены условия предложения 3.3. Для этого мы рассмотрим более детально представление $R_{\mathfrak{m}}: K \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{m})$, $k \mapsto \text{Ad } k|_{\mathfrak{m}}$, группы Ли K в пространстве $\mathfrak{m}$ и его ограничение на стационарную подгруппу $K_w = \{k \in K : \text{Ad } k(w) = w\}$ элемента $w \in W$. В силу уравнения (3.1) оператор P_w коммутирует со всеми операторами $\text{Ad } k|_{\mathfrak{m}}$, $k \in K_w$:

$$\text{Ad } k \cdot P_w = P_w \cdot \text{Ad } k \quad \text{на } \mathfrak{m} \quad \text{для всех } w \in W, \quad k \in K_w. \quad (4.1)$$

Так как G/K – симметрическое пространство ранга один, то каждая $\text{Ad } K$ -инвариантная функция на $\mathfrak{m}$ является функцией от $r(w) = |w|$ и для произвольных ненулевых векторов $w, u \in W$ стационарные подгруппы K_w и K_u сопряжены [14] (w порождает подпространство Картана в $\mathfrak{m}$). В частности, $W = r^{-1}(O)$, где O – открытое связное подмножество в $[0, +\infty)$. Обозначим через W^0 подмножество $W - \{0\}$. Положим $D^0 = D - G/K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть $\mathfrak{a}$ – одномерное подпространство Картана в $\mathfrak{m}$, содержащее элемент w , $\mathfrak{t}$ – подалгебра Картана полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{a}$. Обозначим через Σ ограниченную систему корней, ассоциированную с парой $(\mathfrak{a}, \mathfrak{t})$; для корня $\sigma \in \Sigma$ пусть m_{σ} обозначает его кратность [14; гл. IX, § 6]. Тогда существует корневое разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{\sigma \in \Sigma^+} V^{\sigma}$ пространства $\mathfrak{m}$, где Σ^+ – множество положительных ограниченных корней и подпространства V^{σ} – собственные подпространства линейного отображения $\text{ad}^2 h$, $h \in \mathfrak{a}$, размерности m_{σ} с собственными значениями $\sigma^2(h)$ [14; гл. VII, лемма 2.3; § 10]. Отметим, что величины $\sigma(h)$ чисто мнимые, если $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ – симметрическая пара компактного типа, и вещественные в некомпактном случае. Ясно, что это разложение $\text{Ad } K_w$ -инвариантно. В нашем случае ранга один $\Sigma = \{\pm\sigma\}$ для симметрического пространства G/K с $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \simeq (\mathfrak{so}(n+1), \mathfrak{so}(n))$ и дуального к нему некомпактного $\text{SO}_0(1, n)/\text{SO}(n)$; $\Sigma = \{\pm\sigma, \pm 2\sigma\}$ для всех остальных симметрических пространств ранга один [14; таблица VI]. Больше того, $m_{2\sigma} = 1$ для комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^n$, $n \geq 2$, и $m_{2\sigma} = 3$ для кватернионных проективных пространств $\mathbb{H}P^n$, $n \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Предположим, что полупростая группа Ли G компактна. Так как $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$, то (вещественное) подпространство $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}^*$, $\mathfrak{m}^* = i\mathfrak{m}$, комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ является (некомпактной) алгеброй Ли. Пусть G^* – связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^*$ такая, что G^*/K – симметрическое пространство. Тогда отображения $P: w \mapsto P_w \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, $W \subset \mathfrak{m}$, и $P^{(*)}: iw \rightarrow P_w$ удовлетворяют условию (3.1) одновременно.

4.1. Инвариантные кэлеровы структуры на инвариантных областях D в касательных расслоениях пространств $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{SO}_0(1, n)/\mathrm{SO}(n)$ ($n \geq 2$). Пусть G – группа Ли $\mathrm{SO}(n+1)$ и K – ее подгруппа, изоморфная $\mathrm{SO}(n)$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает нормализованную форму $-\frac{\varepsilon}{2} \mathrm{Tr}$ на $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1)$ с $\varepsilon = 1$, ассоциированную со стандартным представлением алгебры $\mathfrak{so}(n+1)$. Для симметрического пространства $G/K = \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ его тензор кривизны задается формулой (см. [14; гл. X, §2])

$$[w, [\xi, \eta]] = \varepsilon (\langle w, \eta \rangle \xi - \langle w, \xi \rangle \eta), \quad \varepsilon = 1, \quad \forall w, \xi, \eta \in \mathfrak{m}. \quad (4.2)$$

Мы попытаемся описать все отображения $P_w: W \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, для которых выполнено условие (3.1), такие, что каждый оператор P_w имеет положительно определенную вещественную часть. Предположим, что $n \geq 3$. Так как Ad -представление $R_{\mathfrak{m}}$ группы Ли $K = \mathrm{SO}(n)$ в пространстве $\mathfrak{m}$ – это стандартное неприводимое n -мерное представление группы $\mathrm{SO}(n)$, то группа K действует транзитивно на $(n-1)$ -мерной сфере, состоящей из векторов пространства $\mathfrak{m}$ постоянной длины, и стационарная подгруппа K_w изоморфна $\mathrm{SO}(n-1)$ для произвольного ненулевого $w \in W$. Следовательно, $\mathfrak{m} = \langle w \rangle \oplus \langle w \rangle^{\perp}$, где $\langle w \rangle$ – одномерный тривиальный K_w -модуль, порожденный вектором w , и $\langle w \rangle^{\perp}$ – простой K_w -модуль, состоящий из всех векторов, ортогональных к w . В силу условия (4.1) для произвольного вектора $\xi \in \mathfrak{m}$ его две компоненты, соответствующие разложению $\mathfrak{m} = \langle w \rangle \oplus \langle w \rangle^{\perp}$, являются собственными векторами оператора P_w с собственными значениями $\lambda(w)$ и $\psi(w)$ соответственно ($n \geq 3$). Так как скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathrm{Ad} K$ -инвариантно, то из (3.1) следует, что λ и ψ – $\mathrm{Ad} K$ -инвариантные комплекснозначные функции, т.е. $\lambda = \lambda(\|w\|)$, $\psi = \psi(\|w\|)$, и

$$P_w = \psi(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{Id} + (\lambda(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})) \mathbf{r}^{-2} \cdot w \otimes w, \quad w \in W^0. \quad (4.3)$$

Если $n = 2$ и $P_w(w) = \lambda(w)w$, то отображение P также имеет вид (4.3) ($\dim \mathfrak{m} = 2$).

Положим $\Lambda(\mathbf{r}) = (\lambda(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})) \mathbf{r}^{-2}$. Как следует из предложения 3.3, отображение (4.3) определяет инволютивное распределение тогда и только тогда, когда $[P(\xi), P(\eta)](w) = -[w, [\xi, \eta]]$. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} & \left[\psi(\mathbf{r}) \xi_b \frac{\partial}{\partial w_b} + \Lambda(\mathbf{r}) \langle w, \xi \rangle w_b \frac{\partial}{\partial w_b}, \psi(\mathbf{r}) \eta_b \frac{\partial}{\partial w_b} + \Lambda(\mathbf{r}) \langle w, \eta \rangle w_b \frac{\partial}{\partial w_b} \right] \\ &= (\mathbf{r}^{-1} \psi(\mathbf{r}) \psi'(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \Lambda(\mathbf{r}) \psi'(\mathbf{r}) - \Lambda(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})) \cdot (\langle w, \xi \rangle \eta - \langle w, \eta \rangle \xi)_b \frac{\partial}{\partial w_b}. \end{aligned}$$

Учитывая (4.2) и заменяя $\Lambda(\mathbf{r})$ на $(\lambda(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})) \mathbf{r}^{-2}$, мы получаем уравнение Риккати

$$\psi'(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mathbf{r} \lambda(\mathbf{r})} \cdot \psi^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon \mathbf{r}}{\lambda(\mathbf{r})}. \quad (4.4)$$

Используя его частное решение $\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, находим общее решение:

$$\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \frac{C_1 \exp(\alpha(\mathbf{r})) + C_2 \exp(-\alpha(\mathbf{r}))}{C_1 \exp(\alpha(\mathbf{r})) - C_2 \exp(-\alpha(\mathbf{r}))}, \quad \alpha'(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda(\mathbf{r})}, \quad (4.5)$$

где по крайней мере одна из двух комплексных констант C_1, C_2 ненулевая. Мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $G = \mathrm{SO}(n+1)$ и K – подгруппа в G , изоморфная $\mathrm{SO}(n)$. Пусть $F \in \mathfrak{K}(D)$ – G -инвариантная кэлерова структура в области $D \subset T(G/K)$. Если $n \geq 3$, то $F = F(P)$, где отображение $P: W \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ имеет вид (4.3). Если $n \geq 2$, то отображение P (4.3) определяет кэлерову структуру на D^0 тогда и только тогда, когда вещественные части гладких функций $\lambda(\|w\|), \psi(\|w\|): W^0 \rightarrow \mathbb{C}$ положительны и $\psi(\mathbf{r})$ – решение уравнения Риккати (4.4) с $\varepsilon = 1$, т.е. $\psi(\mathbf{r})$ задается формулой (4.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Так как форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathrm{Ad} G$ -инвариантна, то вся конструкция целиком и доказательство теоремы 4.3 зависят существенно только от пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{so}(n+1), \mathfrak{so}(n))$ алгебр Ли. Учитывая изоморфизмы [14; гл. X, §6.4]

$$\begin{aligned} (\mathfrak{su}(2), \mathfrak{u}(1)) &\simeq (\mathfrak{so}(3), \mathfrak{so}(2)), \quad (\mathfrak{sp}(2), \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1)) \simeq (\mathfrak{so}(5), \mathfrak{so}(4)), \\ (\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3), \mathrm{diag}(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))) &\simeq (\mathfrak{so}(4), \mathfrak{so}(3)), \end{aligned}$$

мы получаем, что теорема справедлива также и для следующих симметрических пространств ранга один:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^1 &= \mathrm{SU}(2)/S(U(1) \times U(1)), \quad \mathbb{H}P^1 = \mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1)), \\ (\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3))/\mathrm{diag}(\mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)). \end{aligned}$$

Мы будем говорить, что симметрическое пространство G/K – пространство *сферического типа*, если $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \simeq (\mathfrak{so}(n+1), \mathfrak{so}(n))$, $n \geq 2$. Так как для таких пространств $\sqrt{-\mathrm{ad}^2 w} \big| \mathfrak{m} = \|w\| \cdot \mathrm{Id} - \|w\|^{-1} \cdot w \otimes w$ (см. (4.2)), то формула (3.10) получается как непосредственное следствие этой теоремы. Больше того, $F^c = F(P)$ с P из (4.3), где $\lambda(\mathbf{r}) = 1$ и $\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \, \mathrm{ch}(\mathbf{r})/\mathrm{sh}(\mathbf{r})$.

Теперь пусть G – связная группа Ли $\mathrm{SO}_0(1, n)$ и K – ее подгруппа, изоморфная $\mathrm{SO}(n)$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает нормализованную форму $-\frac{\varepsilon}{2} \mathrm{Tr} \, c \, \varepsilon = -1$ (на $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, n)$), ассоциированную со стандартным представлением алгебры Ли $\mathfrak{so}(1, n)$. Тогда для симметрического пространства $G/K = \mathrm{SO}_0(1, n)/\mathrm{SO}(n)$ имеет место формула (4.2) с $\varepsilon = -1$. Замечание 4.2 и анализ, подобный приведенному выше при доказательстве теоремы 4.3, показывает, что

- (1) если $n \geq 3$, то для отображения $P: W \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, $w \mapsto P_w$, выполнено условие (3.1) тогда и только тогда, когда операторы P_w имеют форму (4.3);
- (2) распределение $F(P)$ инволютивно тогда и только тогда, когда ψ является решением уравнения (4.4) с $\varepsilon = -1$.

В этом случае общее решение уравнения (4.4) задается формулой

$$\psi(\mathbf{r}) = i\mathbf{r} \frac{C_1 \exp(i\alpha(\mathbf{r})) + C_2 \exp(-i\alpha(\mathbf{r}))}{C_1 \exp(i\alpha(\mathbf{r})) - C_2 \exp(-i\alpha(\mathbf{r}))}, \quad \alpha'(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda(\mathbf{r})}, \quad (4.6)$$

где по крайней мере одна из двух комплексных констант C_1, C_2 отлична от нуля. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть $G = \mathrm{SO}_0(1, n)$ и K – подгруппа в G , изоморфная $\mathrm{SO}(n)$. Пусть $F \in \mathfrak{K}(D)$ – G -инвариантная кэлерова структура в области $D \subset T(G/K)$. Если $n \geq 3$, то $F = F(P)$, где отображение $P: W \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ имеет вид (4.3). Если $n \geq 2$, то отображение P (4.3) определяет кэлерову структуру на D^0 тогда и только тогда, когда вещественные части гладких функций $\lambda(\|w\|), \psi(\|w\|): W^0 \rightarrow \mathbb{C}$ положительны и $\psi(\mathbf{r})$ – решение уравнения Риккати (4.4) с $\varepsilon = -1$, т.е. $\psi(\mathbf{r})$ задается формулой (4.6).

4.2. K -эквивариантные отображения. В этом пункте мы опишем K -эквивариантные отображения $P: W^0 \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ (т.е. удовлетворяющие условию (3.1)) для компактных симметрических пространств ранга один несферического типа.

А. Пусть G – группа Ли $U(n+1)$, $n \geq 2$, и K – ее подгруппа, изоморфная $U(1) \times U(n)$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает нормализованную форму $-\frac{\varepsilon}{2} \mathrm{Tr}$ (на $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n+1)$) с $\varepsilon = 1$, ассоциированную со стандартным представлением алгебры Ли $\mathfrak{u}(n+1)$. Для симметрического пространства $G/K = U(n+1)/(U(1) \times U(n))$ его тензор кривизны задается формулой (см. [14; гл. X, §2])

$$[w, [\xi, \eta]] = \varepsilon(\langle w, \eta \rangle \xi + \langle w, J\eta \rangle J\xi - \langle w, \xi \rangle \eta - \langle w, J\xi \rangle J\eta + 2\langle \xi, J\eta \rangle Jw), \quad (4.7)$$

где $\varepsilon = 1$, $w, \xi, \eta \in \mathfrak{m}$, $J: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ – $\mathbb{R}$ -линейный оператор, определяющий комплексную структуру на $\mathfrak{m}$. В частности, $J^2 = -1$. Более того, эндоморфизм J ортогонален относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, т.е. $J^* = -J$. Так как Ad -представление подгруппы $K^n \subset K$, $K^n = U(n)$, в $\mathfrak{m}$ – это стандартное неприводимое n -мерное представление $U(n)$, то группа K^n действует транзитивно на $(2n-1)$ -мерной сфере, состоящей из векторов пространства $\mathfrak{m}$ постоянной длины; стационарная подгруппа $K_w = K_w^1 \times K_w^{n-1}$ изоморфна $U(1) \times U(n-1)$ для произвольного ненулевого $w \in W$ [14; гл. X]. Следовательно, $\mathfrak{m} = \langle w, Jw \rangle \oplus \langle w, Jw \rangle^{\perp}$, где $\langle w, Jw \rangle$ – двумерный тривиальный K_w^{n-1} -модуль, порожденный векторами w, Jw , и $\langle w, Jw \rangle^{\perp}$ – простой K_w^{n-1} -модуль, состоящий из векторов, ортогональных к w, Jw . Подгруппа K_w^1 группы K_w действует тривиально на $\langle w, Jw \rangle$ и как умножение на характер на $\langle w, Jw \rangle^{\perp}$. Учитывая, что оператор J коммутирует с Ad -действием группы K на $\mathfrak{m}$, мы получаем, что произвольное K -эквивариантное отображение $P: W \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ задается формулой

$$P_w = \psi(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{Id} + a(\mathbf{r})Jw \otimes Jw + b(\mathbf{r})w \otimes Jw + b(\mathbf{r})Jw \otimes w + A(\mathbf{r})w \otimes w, \quad w \in W^0, \quad (4.8)$$

где ψ, a, b, A – гладкие функции и по определению $\xi \otimes \eta(w) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \xi \langle \eta, w \rangle$.

Предположим, что P (4.8) определяет кэлерову структуру на D . Рассмотрим коммутатор $Y = [\overrightarrow{P(\xi)}, \overrightarrow{P(\eta)}]$ двух векторных полей на W^0 . Так как $\overrightarrow{P(\xi)}$ задается формулой

$$(\psi(\mathbf{r})\xi + a(\mathbf{r})\langle Jw, \xi \rangle Jw + b(\mathbf{r})\langle Jw, \xi \rangle w + b(\mathbf{r})\langle w, \xi \rangle Jw + A(\mathbf{r})\langle w, \xi \rangle w)_b \frac{\partial}{\partial w_b}$$

и $d\mathbf{r}(w)(\xi) = \mathbf{r}^{-1}(w)\langle w, \xi \rangle$, то мы получим, что значение векторного поля Y в точке w является элементом векторного пространства, порожденного шестью векторами $\xi, J\xi, \eta, J\eta, w, Jw$. Если $n \geq 3$, мы можем предположить, что эти векторы линейно независимы. Приравнивая коэффициенты при $J\eta$ в $Y(w)$ и $-[w, [\xi, \eta]]$ (4.7)

(используя несложные вычисления), мы получаем уравнение $-\psi(\mathbf{r})(b(\mathbf{r})\langle w, \xi \rangle + a(\mathbf{r})\langle Jw, \xi \rangle) = \varepsilon\langle w, J\xi \rangle$, которое выполняется для произвольных w, ξ, η в общем положении, если распределение $F(P)$ инволютивно. Следовательно, $b(\mathbf{r}) \equiv 0$ и $\psi(\mathbf{r})a(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon$. Если $n = 2$, то чтобы получить последние два тождества, нужно рассмотреть соответствующие коэффициенты при $J\eta$ в точках $w = \xi, J\xi$. Другими словами, векторы w и Jw – собственные векторы оператора P_w . Соответствующие собственные значения мы обозначим через $\lambda(\|w\|)$ и $\varphi(\|w\|)$. Таким образом, доказана

ЛЕММА 4.6. *Если $F(P)$ – кэлерова структура на области D в $T(U(n+1)/U(1) \times U(n))$, $n \geq 2$, то отображение P имеет форму*

$$P_w = \psi(\mathbf{r}) \cdot \text{Id} + (\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}))\mathbf{r}^{-2} \cdot Jw \otimes Jw + (\lambda(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}))\mathbf{r}^{-2} \cdot w \otimes w,$$

где $w \in W^0$. Больше того, $\psi(\mathbf{r})(\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}))\mathbf{r}^{-2} \equiv \varepsilon$.

В. Пусть G – группа Ли $\text{Sp}(n+1)$, $n \geq 2$, и $K = K^1 \times K^n$ – ее подгруппа, изоморфная $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n)$. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает нормализованную форму $-\frac{\varepsilon}{2} \text{Tr}$ (на $\mathfrak{g} = \text{sp}(n+1)$) с $\varepsilon = 1$, ассоциированную со стандартным представлением алгебры Ли $\text{sp}(n+1)$ кватернионными матрицами. Для произвольного ненулевого $w \in W$ стационарная подгруппа $K_w = K_w^1 \times K_w^{n-1}$ изоморфна $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n-1)$ [14]. Чтобы описать Ad -представление группы K_w в $\mathfrak{m}$, рассмотрим группу Ли $\text{Sp}(m)$ как кватернионную унитарную группу.

Пусть $\text{GL}_m(\mathbb{H})$ обозначает группу всех обратимых кватернионных $(m \times m)$ -матриц. Тогда $\text{Sp}(m) = \{X \in \text{GL}_m(\mathbb{H}) : \overline{X}^t X = 1_m\}$ и $\text{sp}(m) = \{X \in \text{Mat}_m(\mathbb{H}) : \overline{X}^t + X = 0\}$. При этом отождествлении $4n$ -мерное вещественное пространство $\mathfrak{m}$ – это n -мерное правое векторное пространство $\mathbb{H}^n$, $\langle w, w \rangle = \sum_{j=1}^n q_j \bar{q}_j$ ($w = (q_1, \dots, q_n)$) и Ad -действие группы $K = K^1 \times K^n$ на $\mathbb{H}^n$ имеет вид $(a, A)(w) = A \cdot w \cdot a^{-1}$. Поэтому $\mathbb{H}^n$ – прямая сумма тривиального четырехмерного (над $\mathbb{R}$) K_w^{n-1} -модуля $\langle w\mathbb{H} \rangle = \{w \cdot q, q \in \mathbb{H}\}$ и простого K_w^{n-1} -модуля $\langle w\mathbb{H} \rangle^\perp$, состоящего из всех векторов из $\mathfrak{m}$, ортогональных каждому $w \cdot q, q \in \mathbb{H}$. Простая компонента $K_w^1 = \text{Sp}(1)$ действует на $\langle w\mathbb{H} \rangle$ сопряжением $w \cdot q \mapsto w \cdot aqa^{-1}$ ($\text{Ad } K_w(w) = w$). Поэтому как вещественный K_w -модуль $\langle w\mathbb{H} \rangle$ равен $\langle w \rangle \oplus \langle E_1 w, E_2 w, E_3 w \rangle$, где линейные операторы E_1, E_2, E_3 определяют кватернионную структуру на $\mathfrak{m} = \mathbb{H}^n$:

$$\begin{aligned} E_p^2 &= -\text{Id}, \quad E_p^* = -E_p, \quad p = 1, 2, 3; \\ E_1 E_2 &= -E_2 E_1 = E_3, \quad E_2 E_3 = -E_3 E_2 = E_1, \quad E_3 E_1 = -E_1 E_3 = E_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Так как внутренний автоморфизм $q \mapsto aqa^{-1}$ тела кватернионов $\mathbb{H}$ оставляет инвариантным подпространство $\mathbb{H}'$ чисто мнимых кватернионов, то подпространство $\text{Ad } k \langle E_p w, p = 1, 2, 3 \rangle$ совпадает с $\langle E_p(\text{Ad } k w), p = 1, 2, 3 \rangle$ ($A \cdot wq' \cdot a^{-1} = (A \cdot w \cdot a^{-1})(aq'a^{-1})$). Используя представление группы Ли $\text{Sp}(n+1)$ кватернионными матрицами, мы выведем формулу для коммутатора $[w, [\xi, \eta]]$, $w, \xi, \eta \in \mathfrak{m}$. В терминах операторов $E_p, p = 1, 2, 3$, и $E_0 = \text{Id}$ эта формула может быть записана в виде

$$[w, [\xi, \eta]] = \varepsilon \left(\sum_{j=0}^3 \langle w, E_j \eta \rangle E_j \xi - \sum_{j=0}^3 \langle w, E_j \xi \rangle E_j \eta + 2 \sum_{p=1}^3 \langle \xi, E_p \eta \rangle E_p w \right), \quad (4.10)$$

где $\varepsilon = 1$. В силу условия (3.1) для произвольного вектора $\xi \in \mathfrak{m}$ его три компоненты, соответствующие разложению $\mathfrak{m} = \langle w \rangle \oplus \langle E_1 w, E_2 w, E_3 w \rangle \oplus \langle w \mathbb{H} \rangle^\perp$, являются собственными векторами оператора P_w с собственными значениями $\lambda(w)$, $\varphi(w)$ и $\psi(w)$ соответственно. Из (4.9) вытекает, что отображение $P: W \rightarrow S(\mathfrak{m}^\mathbb{C})$ K -эквивариантно тогда и только тогда, когда для всех $w \in W^0$

$$P_w = \psi(\mathbf{r}) \cdot \text{Id} + (\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})) \mathbf{r}^{-2} \cdot \sum_{p=1}^3 E_p w \otimes E_p w + (\lambda(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})) \mathbf{r}^{-2} \cdot w \otimes w. \quad (4.11)$$

ЛЕММА 4.7. Если $F(P)$ – кэлерова структура на области D в $T(\text{Sp}(n+1)/(\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n)))$, $n \geq 2$, то P имеет вид (4.11), где $\psi(\mathbf{r})(\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})) \mathbf{r}^{-2} \equiv \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутатор $Y = [\overrightarrow{P(\xi)}, \overrightarrow{P(\eta)}]$ двух векторных полей на W^0 . Из формулы (4.11) вытекает, что значение векторного поля Y в точке w является элементом векторного пространства, порожденного двенадцатью векторами: ξ, η, w и их образами при E_j , $j = 1, 2, 3$ (восемью, если $w = E_1 \xi$). Приравнявая коэффициенты при $E_1 \eta$ в $Y(w)$ и $-[w, [\xi, \eta]]$ (4.10) в точке $w = E_1 \xi$ (с помощью несложных вычислений), мы получаем условие леммы при $n \geq 2$.

С. В этом пункте мы рассмотрим симметрическое пространство $G/K = F_4/\text{Spin}(9)$, единственное особое компактное симметрическое пространство ранга один. Пусть $(\langle \cdot, \cdot \rangle = c\Phi)|_{\mathfrak{m}}$ – положительно определенное скалярное произведение на $\mathfrak{m}$. Представление $R_{\mathfrak{m}}$ группы Ли $K = \text{Spin}(9)$ в $\mathfrak{m}$ – это точное вещественное представление в 16-мерном пространстве [14], [15], единственное неприводимое представление группы Ли $\text{Spin}(9)$ размерности 16 [16]. Более того, $K = \text{Spin}(9)$ действует транзитивно на 15-мерной сфере, состоящей из всех векторов из $\mathfrak{m}$ постоянной длины; стационарная подгруппа K_w произвольного ненулевого элемента $w \in \mathfrak{m}$ изоморфна $\text{Spin}(7)$ [16; гл. I, § 5, пример 5]. Но для $F_4/\text{Spin}(9)$ система положительных ограниченных корней Σ^+ содержит только два элемента σ и 2σ с кратностями $m_\sigma = 8$ и $m_{2\sigma} = 7$ [14; таблица VI]. Поэтому в силу замечания 4.1 K_w -модуль $\mathfrak{m}$ есть прямая сумма $\langle w \rangle \oplus V_7(w) \oplus V_8(w)$ одномерного тривиального K_w -модуля $\langle w \rangle$ и двух K_w -модулей $V_7(w)$ и $V_8(w)$ размерностей 7 и 8. Ясно, что $V_7(w)$ и $V_8(w)$ – простые K_w -модули (см. [16; гл. I, § 5, примеры 4, 5]). Чтобы описать K_w -модуль $V_8(w)$, мы рассмотрим конструкцию спинорного представления группы Ли $\text{Spin}(9)$ более детально.

Пусть V – вещественное пространство размерности 9, снабженное положительно определенной билинейной формой Q . Пусть $e_0, \dots, e_8$ – ортонормированный базис в V . В терминах этого базиса алгебра Клиффорда $\mathbb{C}l_+(9)$ определяется как вещественная ассоциативная алгебра с единицей 1, генераторами $e_0, \dots, e_8$ и определяющими соотношениями

$$e_j \cdot e_k + e_k \cdot e_j = 0, \quad j \neq k, \quad e_j^2 = 1, \quad j, k = 0, \dots, 8.$$

Пусть $\text{pin}_+(9)$ – мультипликативная подгруппа группы всех обратимых элементов из $\mathbb{C}l_+(9)$, порожденная векторами длины один из V . Если $Q(v, v) = 1$, то $v \cdot v = 1$, т.е. $v \in \text{pin}_+(9)$. Группа Ли $\text{Spin}_+(9) \simeq \text{Spin}(9)$ – это подгруппа группы $\text{pin}_+(9)$, состоящая из четных элементов, т.е.

$$\text{Spin}(9) = \{v_1 \cdot v_2 \cdots v_{2k}, Q(v_j, v_j) = 1, j = 1, \dots, 2k, k \in \mathbb{N}\}. \quad (4.12)$$

Более того, группа $\mathrm{Spin}(9)$ сохраняет при сопряжении пространство $V: gVg^{-1} = V$ [17; лекция 13].

Существует точное 16-мерное представление группы $\mathrm{pin}_+(9)$ ортогональными матрицами [17; лекция 15]. Другими словами, $\mathrm{Spin}(9) \subset \mathrm{pin}_+(9) \subset O(16)$. Поэтому найдутся девять ортогональных (относительно формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{m}$) линейных преобразований $E_k: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$, удовлетворяющих соотношениям

$$E_j E_k + E_k E_j = 0, \quad j \neq k, \quad E_j^2 = \mathrm{Id}, \quad E_j^* = E_j^{-1} = E_j, \quad j, k = 0, \dots, 8. \quad (4.13)$$

В силу соотношений (4.13) для произвольного ненулевого $w \in \mathfrak{m}$ векторы $E_j w, j = 0, \dots, 8$, образуют ортогональный базис некоторого подпространства $V_9(w) \subset \mathfrak{m}$. Более того, так как $gVg^{-1} = V$ для каждого $g \in \mathrm{Spin}(9)$, то каждый эндоморфизм $gE_jg^{-1} \in \mathrm{End}(\mathfrak{m})$ является линейной комбинацией эндоморфизмов $E_j, j = 0, \dots, 8$. Следовательно, если $g \in \mathrm{Ad} K_w$, то $g(V_9(w)) = V_9(w)$. Из соображений размерности получим разложение $V_9(w) = \langle w \rangle \oplus V_8(w)$.

Теперь пусть $P: W^0 \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ – отображение, для которого выполнено условие (4.1). Тогда пространства $\langle w \rangle, V_8(w)$ и $V_7(w)$ являются собственными подпространствами оператора P_w с собственными значениями $\lambda(w), \varphi(w)$ и $\psi(w)$ соответственно. Как следует из изложенного выше и соотношения (3.1), отображение $P: W^0 \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ K -эквивариантно тогда и только тогда, когда для всех $w \in W^0$

$$P_w = \psi(w) \cdot \mathrm{Id} + (\varphi(w) - \psi(w))r^{-2} \cdot \sum_{j=0}^8 E_j w \otimes E_j w + (\lambda(w) - \varphi(w))r^{-2} \cdot w \otimes w.$$

4.3. Необходимое условие. Пусть G/K – симметрическое пространство ранга один (компактного или некомпактного типа). Пусть $(\langle \cdot, \cdot \rangle = c\Phi)|_{\mathfrak{m}}$ – положительно определенное скалярное произведение на $\mathfrak{m}$ и $r(w) = |w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$. Следующее предложение подытоживает результаты, доказанные в предыдущих пунктах (если мы положим $E_0 = \mathrm{Id}$ в классическом случае, $E_1 = J$ для $\mathbb{C}P^n$ ($n \geq 2$), $\psi = \varphi$ для G/K сферического типа и применим замечание 4.2 в некомпактном случае).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть G/K – симметрическое пространство ранга один (со связной компактной подгруппой K). Тогда существует множество ортогональных эндоморфизмов $E_j: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, j = 0, \dots, N, N = N(G/K) \in \{0, 1, 3, 8\}$, удовлетворяющих соотношениям п. 4.2 и таким, что

- (1) для каждого $k \in K$ эндоморфизм $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{m}} k E_j \mathrm{Ad}_{\mathfrak{m}} k^{-1}$ является линейной комбинацией $E_j: \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}, j = 0, \dots, N$;
- (2) произвольное K -эквивариантное отображение $P: W^0 \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$, $P_w(w) = \lambda(w)w$, задается формулой

$$P_w = \psi(w) \cdot \mathrm{Id} + (\varphi(w) - \psi(w))r^{-2} \cdot \sum_{j=0}^N E_j w \otimes E_j w + (\lambda(w) - \varphi(w))r^{-2} \cdot w \otimes w. \quad (4.14)$$

Пусть $P(\psi, \varphi, \lambda)$ обозначает отображение, заданное формулой (4.14). Мы попытаемся описать некоторые определяющие соотношения между функциями ψ, φ, λ для кэлеровой структуры $F(P)$, $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$, на $D \subset T(G/K)$. Прежде всего, мы найдем формулу для эндоморфизма $\sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}}$ в компактном случае.

Предположим, что G/K имеет компактный тип. В силу предложения 3.10 $\sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}} + \lambda(r)r^{-2} \cdot w \otimes w - K$ -эквивариантное отображение для произвольной положительной функции λ , т.е. совпадает с отображением $P_w(\psi_0, \varphi_0, \lambda)$, где ψ_0, φ_0 – некоторые гладкие функции на интервале $(0, \infty)$, в частности $\sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}} = P_w(\psi_0, \varphi_0, 0)$. Это отображение $P_w(\psi_0, \varphi_0, \lambda)$ удовлетворяет условию (3.2) (см. предложение 3.6). Так как $\lambda(r) > 0$ и три эндоморфизма Id , $\sum_{j=0}^N E_j w \otimes E_j w$, $w \otimes w$ линейно независимы (два эндоморфизма Id , $w \otimes w$, если G/K – пространство сферического типа) и по определению $P_w^2(\psi_0, \varphi_0, \lambda) = P_w(\psi_0^2, \varphi_0^2, \lambda^2)$, мы получим из (3.2), что $\psi'_0 = r^{-1}\psi_0$ и $\varphi'_0 = r^{-1}\varphi_0$. Следовательно, $\psi_0(r) = c_1 r$ и $\varphi_0(r) = c_2 r$. Другими словами,

$$\sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}} = c_1 r \cdot \text{Id} + (c_2 - c_1)r^{-1} \cdot \sum_{j=0}^N E_j w \otimes E_j w - c_2 r^{-1} \cdot w \otimes w. \quad (4.15)$$

Так как алгебра $\mathfrak{g}$ компактна, то константы c_1 и c_2 положительны. Ввиду замечания 4.1 и того, что было сказано в предыдущем пункте, $c_2/c_1 = 2$ для комплексного и кватернионного проективных пространств ($n \geq 2$), $c_2/c_1 = 1/2$ для проективной плоскости Кэли. Мы положим $c_2/c_1 = 1$ для симметрических пространств сферического типа ($S^n, \mathbb{C}P^1, \mathbb{H}P^1, (\text{SO}(3) \times \text{SO}(3))/\text{DSO}(3)$). Нетрудно заметить, учитывая сказанное (см. (4.2), (4.7), (4.10)), что в классическом случае существует единственное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr}$ на $\mathfrak{g}$, для которого $c_1 = 1$. Теперь следующее предложение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. Пусть $G/K = F_4/\text{Spin}(9)$ и эндоморфизмы $\{E_j, j = 0, \dots, 8\}$ удовлетворяют определяющим соотношениям (4.13). Существует единственное положительно определенное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle = c\Phi$ на компактной алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(F_4)$ такое, что эндоморфизм $\sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}}$ задается формулой (4.15) с константой $c_1 = 2$. Тогда $c_2 = 1$ и

$$-\text{ad}^2 w|_{\mathfrak{m}} = 4\langle w, w \rangle \cdot \text{Id} - 3 \sum_{j=0}^8 E_j w \otimes E_j w - w \otimes w.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.10. Если G^*/K – дуальное симметрическое пространство некомпактного типа, то нормализованное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на компактной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяет нормализованное скалярное произведение на $\mathfrak{m}^* = i\mathfrak{m}$ следующим образом: $(w^*, w^*) = (iw, iw) \mapsto \langle w, w \rangle, w \in \mathfrak{m}$ (см. замечание 4.2).

ЛЕММА 4.11. Если $F(P)$ – кэлерова структура на области D в $T(G/K)$ и P имеет вид (4.14), то функции $\psi(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$ являются решениями уравнения Риккати

$$y'(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\mathbf{r}\lambda(\mathbf{r})} \cdot y^2(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mathbf{r}}y(\mathbf{r}) + \frac{C\mathbf{r}}{\lambda(\mathbf{r})} \quad (4.16)$$

с $C = \varepsilon c_1^2$ и $C = \varepsilon c_2^2$ соответственно, где $\varepsilon = 1$, если пространство G/K компактного типа, и $\varepsilon = -1$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3.6 отображение P удовлетворяет условию (3.2). Предположим, что полупростая группа Ли G компактна, т.е. G/K – пространство компактного типа и $\varepsilon = 1$. Учитывая формулы (4.14) и (4.15), мы получаем, что левая часть уравнения (3.2) есть линейная комбинация трех эндоморфизмов Id , $\sum_{j=0}^N E_j w \otimes E_j w$ и $w \otimes w$. Нетрудно проверить, что соответствующие коэффициенты обращаются в нуль только в том случае, когда условия леммы выполнены. Применяя замечания 4.2 и 4.10, мы завершаем доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.12. Непосредственная проверка показывает, что $\psi(\mathbf{r})$ есть всюду отличное от нуля на $O \subset [0, \infty)$ решение уравнения Риккати (4.16) с $C = \varepsilon$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + \varepsilon \mathbf{r}^2 / \psi(\mathbf{r})$ есть решение уравнения (4.16) с $C = 4\varepsilon$ (этот факт следует из лемм 4.6 и 4.7). Такие решения $\psi_{\pm}$ имеют вид (4.5), (4.6), а $\varphi_{\pm}$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\varphi_+(\mathbf{r}) &= 2\mathbf{r} \frac{C_1^2 e^{2\alpha(\mathbf{r})} + C_2^2 e^{-2\alpha(\mathbf{r})}}{C_1^2 e^{2\alpha(\mathbf{r})} - C_2^2 e^{-2\alpha(\mathbf{r})}}, \\ \varphi_-(\mathbf{r}) &= 2i\mathbf{r} \frac{C_1^2 e^{2i\alpha(\mathbf{r})} + C_2^2 e^{-2i\alpha(\mathbf{r})}}{C_1^2 e^{2i\alpha(\mathbf{r})} - C_2^2 e^{-2i\alpha(\mathbf{r})}},\end{aligned}$$

где $\alpha'(\mathbf{r}) = 1/\lambda(\mathbf{r})$.

4.4. Основная лемма. Здесь мы докажем для проективной плоскости Кэли лемму, аналогичную леммам 4.6 и 4.7. В этом пункте G/K обозначает особое компактное симметрическое пространство $F_4/\text{Spin}(9)$. Мы используем обозначения пунктов 4.2С и 4.3. Для произвольных векторов $w, \xi, \eta \in \mathfrak{m}$ мы будем писать $\xi \stackrel{V_9(w)}{=} \eta$, если $\xi - \eta \in V_9(w)$, где $V_9(w)$ – подпространство в $\mathfrak{m}$, порожденное векторами $E_j w$, $j = 0, \dots, 8$.

Предположим, что K -эквивариантное отображение $P(\psi, \varphi, \lambda)$ определяет кэлерову структуру на области $D \subset T(G/K)$. Рассмотрим коммутатор $Y(\xi, \eta) = \overrightarrow{[P(\xi), P(\eta)]}$ двух векторных полей на $W^0 = W^0(D)$. Используя (4.14), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}Y(\xi, \eta)(w) &\stackrel{V_9(w)}{=} \psi'(\mathbf{r})\mathbf{r}^{-1}(\langle w, P_w(\xi) \rangle \eta - \langle w, P_w(\eta) \rangle \xi) \\ &\quad + (\lambda(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r})\mathbf{r}^{-2}(\langle w, \eta \rangle \xi - \langle w, \xi \rangle \eta) \\ &\quad + (\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r})\mathbf{r}^{-2} \left(\sum_{j=0}^8 \langle E_j w, \eta \rangle E_j \xi - \sum_{j=0}^8 \langle E_j w, \xi \rangle E_j \eta \right) \\ &\quad + 2(\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}))^2 \mathbf{r}^{-4} \sum_{\substack{j,k=0 \\ k \neq j}}^8 \langle E_k w, \eta \rangle \langle E_j w, \xi \rangle E_k E_j w.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Учитывая, что $\sqrt{-\text{ad}^2 w}|_{\mathfrak{m}} = P_w(2\mathbf{r}, \mathbf{r}, 0)$, из соотношений (4.13) и следст-

вия 3.10.1 вытекает, что для произвольных $w, \xi, \eta \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
 -[w, [\xi, \eta]] &= 2\langle\langle w, \xi \rangle\rangle \eta - 2\langle\langle w, \eta \rangle\rangle \xi + 2 \sum_{j=0}^8 \langle\langle E_j w, \xi \rangle\rangle E_j \eta \\
 &\quad - 2 \sum_{j=0}^8 \langle\langle E_j w, \eta \rangle\rangle E_j \xi + 2\mathbf{r}^{-2} \sum_{\substack{j,k=0 \\ k \neq j}}^8 \langle\langle E_k w, \eta \rangle\rangle \langle\langle E_j w, \xi \rangle\rangle E_k E_j w \\
 &\quad + \mathbf{r}^{-2} \sum_{\substack{j,k=0 \\ k \neq j}}^8 (\langle\langle E_k E_j w, \eta \rangle\rangle \langle\langle E_j w, \xi \rangle\rangle - \langle\langle E_k E_j w, \xi \rangle\rangle \langle\langle E_j w, \eta \rangle\rangle) E_k w.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

ЛЕММА 4.13. *Если $F(P)$ – кэлерова структура на области D в $T(F_4/\text{Spin}(9))$, то $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$ имеет вид (4.14), где $\varphi(\mathbf{r})(\psi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}))\mathbf{r}^{-2} \equiv \varepsilon$, $\varepsilon = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $P(\psi, \varphi, \lambda)$ определяет кэлерову структуру на $D = D(W)$, тождество $Y(\xi, \eta)(w) = -[w, [\xi, \eta]]$ выполнено для каждого $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$, $w \in W$ (см. предложение 3.3). Вследствие ортогональности базиса $\{E_p w, p = 0, \dots, 8\}$ пространства $V_9(w)$ мы существенно упростим вычисления, рассматривая значение векторного поля $Y(E_p w, E_l w)$, $p \neq l$, в точке $w \neq 0$. Тогда из (4.17), (4.18) и определяющих соотношений (4.13) вытекает, что $Y(E_p w, E_l w)(w) \stackrel{V_9(w)}{=} -[w, [E_p w, E_l w]]$ тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbf{r})(\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}))E_l E_p w \stackrel{V_9(w)}{=} -\mathbf{r}^2 E_l E_p w$, $l \neq p$. Другими словами, условие леммы выполнено, если $E_l E_p w \notin V_9(w)$ для некоторых $p, l \in \{0, \dots, 8\}$. В противном случае если $E_l E_p w \in V_9(w)$ для всех $0 \leq p, l \leq 8$, то каждый оператор E_p оставляет инвариантным пространство $V_9(w)$ и, следовательно, в силу (4.12) подпространство $V_9(w)$ $\text{Ad } K$ -инвариантно. Это противоречит простоте $\text{Spin}(9)$ -модуля $\mathfrak{m}$.

4.5. Инвариантные кэлеровы структуры на инвариантных областях D . Пусть G/K – симметрическое пространство ранга один (компактного или некомпактного типа). Пусть $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ обозначает нормализованное положительно определенное скалярное произведение на $\mathfrak{m}$ (см. замечание 4.10). Положим $\varepsilon = 1$, если G/K имеет компактный тип, и $\varepsilon = -1$ в противном случае. Напомним, что пространство G/K сферического типа, если $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \simeq (\mathfrak{so}(n+1), \mathfrak{so}(n))$, $n \geq 2$.

ТЕОРЕМА 4.14. *Пусть G/K – симметрическое пространство ранга один с полупростой связной группой Ли G и связной компактной подгруппой K . Пусть F – G -инвариантная кэлерова структура на области $D \subset T(G/K)$. Если $\dim G/K \geq 3$, то $F = F(P)$, где K -эквивариантное отображение $P: W \rightarrow S(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}})$ имеет вид (4.14). Отображение $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$ (4.14) определяет кэлерову структуру на D^0 тогда и только тогда, когда*

- (1) вещественные части гладких функций $\lambda(\|w\|), \psi(\|w\|), \varphi(\|w\|): W^0 \rightarrow \mathbb{C}$ положительны;
- (2) $\psi(\mathbf{r})$ (соответственно $\varphi(\mathbf{r})$) есть решение уравнения Риккати (4.4), если G/K – классическое симметрическое пространство (соответственно G/K – особое симметрическое пространство);

- (3) $\psi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$, если пространство G/K или дуальное к нему G^*/K имеет сферический тип; $\psi(\mathbf{r})(\varphi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})) = \varepsilon \mathbf{r}^2$ (соответственно $\varphi(\mathbf{r})(\psi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})) = \varepsilon \mathbf{r}^2$), если G/K – иное классическое симметрическое пространство (соответственно G/K – особое симметрическое пространство).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий теоремы уже нами доказана (см. также замечание 4.4). Мы установим достаточность, используя следующую теорему Гийемина и Стензеля.

ТЕОРЕМА 4.15 [11]. *Существуют σ -инвариантная окрестность D^c нулевого сечения G/K в $T(G/K)$ и единственная комплексная структура F^c на D^c , удовлетворяющие двум условиям:*

- (1) σ – антиголоморфная инволюция;
- (2) 1-форма $\text{Im } \bar{\partial}H$ совпадает с канонической 1-формой θ .

Более того, F^c – кэлерава структура с кэлеровой формой $\Omega = i\bar{\partial}\partial H$.

Так как комплексная структура $g_*(F^c)$, $g \in G$, также удовлетворяет условиям (1), (2) теоремы 4.15, то F^c – G -инвариантная кэлерава структура. В силу леммы 3.1 и предложения 3.4 $F^c = F(P^c)$, где $P_w^c(w) = w$, т.е. $\lambda(\mathbf{r}) \equiv 1$. Применяя теперь предложение 4.8, мы получаем, что $P^c = P(\psi^c, \varphi^c, 1)$, где функции ψ^c, φ^c – решения уравнения Риккати (4.16). Так как существует единственное решение уравнения (4.16) с $\lambda \equiv 1$, для которого соответствующая структура $F(P)$ регулярна в окрестности нулевого сечения $G/K \subset T(G/K)$, то мы получим, что

$$\psi_+^c(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \operatorname{ch}(\mathbf{r})}{\operatorname{sh}(\mathbf{r})}, \quad \varphi_+^c(\mathbf{r}) = \psi_+^c(2\mathbf{r}) \quad \text{и} \quad \psi_-^c(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} \cos(\mathbf{r})}{\sin(\mathbf{r})}, \quad \varphi_-^c(\mathbf{r}) = \psi_-^c(2\mathbf{r})$$

в классическом случае (если G/K или дуальное к нему пространство G^*/K имеет сферический тип, мы положим $\varphi_\pm^c = \psi_\pm^c$) и ψ, φ нужно поменять местами в особом случае.

Пусть $F(P)$, $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$, $\psi \neq \mathbf{r}$ ($\psi \neq 2\mathbf{r}$ в особом случае), – распределение на D со свойствами (1)–(3). Мы должны доказать только, что распределение $F(P)$ инволютивно. Предположим, что функции λ и ψ положительны. Тогда существует (локальная) положительная функция $\delta = \delta(\mathbf{r})$ такая, что $\lambda(\mathbf{r}) = 1/(\mathbf{r}\delta(\mathbf{r}))'$. Из (3.4), (4.5), (4.6) (см. также (3.9)) при подходящем выборе постоянной интегрирования вытекает, что локально $\Psi(\gamma)_*(F^c) = F(P)$, т.е. распределение $F(P)$ инволютивно.

Осталось доказать инволютивность распределения $F(P)$, когда λ, ψ – комплексные функции. Для этого зафиксируем векторы $\xi, \eta \in \mathfrak{m}$ и $w \in W^0$. Рассмотрим коммутатор $Y(w) = [\overrightarrow{P(\xi)}, \overrightarrow{P(\eta)}](w)$ как функцию от ψ, φ, λ и их производных $\psi', \varphi', \lambda'$. Так как оператор P_w симметричен и ψ, φ удовлетворяют уравнению Риккати (4.16), эта функция зависит только от переменных ψ, φ, λ . Более того, из условия (3) вытекает, что каждая компонента (координата) вектора $\lambda\psi^2 Y(w)$ является собой вещественный полином f_b от переменных ψ, λ степени ≤ 5 . Учитывая (4.5), (4.6) и то, что было сказано выше, получаем, что этот полином равен тождественно нулю на некотором открытом подмножестве в $\mathbb{R}^2$. Поэтому $f_b \equiv 0$.

§ 5. Редукция

5.1. Редукция и поляризации. В этом пункте мы изложим необходимые нам результаты работ [8], [18], модифицированные для наших нужд. Предположим, что X – кокасательное расслоение T^*N многообразия N . Пусть $p: T^*N \rightarrow N$ – каноническая проекция. Обозначим через G и S вещественные редуктивные связные группы Ли, которые действуют на N , и предположим, что эти действия коммутируют. Действия групп Ли G, S на N естественно продолжаются до действий G, S на T^*N . Эти действия на T^*N симплектические, так как они сохраняют каноническую 1-форму θ , а значит, и симплектическую 2-форму $\Omega = d\theta$. Для каждого вектора ξ , принадлежащего алгебре Ли $\mathfrak{s}$ группы Ли S , однопараметрическая подгруппа $\exp t\xi$ индуцирует гамильтоново векторное поле $\widehat{\xi}$ на T^*N с гамильтонианом $f_\xi = \theta(\widehat{\xi})$: $df_\xi = -\widehat{\xi} \lrcorner d\theta$. Следовательно, действие группы S на $X = T^*N$ гамильтоново (пуассоново) [8], [18] и определяет отображение момента $\mathbf{J}: X \rightarrow \mathfrak{s}^*$ из X в дуальное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{s}$: $\mathbf{J}(x)(\xi) = f_\xi(x)$. Отображение $\mathbf{J}$ S -эквивариантно, т.е. оно сплетает действие S на X и коприсоединенное действие группы Ли S на $\mathfrak{s}^*$.

Предположим, что группа S компактна и действие S на N свободно и собствен. Тогда каждый элемент $\mu \in \mathfrak{s}^*$ является регулярным значением отображения $\mathbf{J}$ [18; предложение 2.2], в частности $\mathbf{J}^{-1}(\mu)$ – подмногообразие. Из соображений, упомянутых во введении, мы ограничим наше внимание подмногообразием $X_0 = \mathbf{J}^{-1}(0)$. Многообразие X_0 G -инвариантно. В самом деле, из определения 1-формы θ вытекает, что $x \in X_0 \Leftrightarrow x(p_*(\widehat{\xi}_x)) = 0 \ \forall \xi \in \mathfrak{s}$. Но действия групп Ли G и S на N коммутируют, поэтому векторные поля $\widehat{\xi}, p_*(\widehat{\xi})$ G -инвариантны. Далее, вследствие эквивариантности многообразие X_0 инвариантно относительно действия группы S , а значит, пространство орбит $X'_0 = X_0/S$ – корректно определенное многообразие и отображение $\pi: X_0 \rightarrow X'_0$ является главным S -расслоением. Так как его слои – это листы нулевого расслоения (ассоциированного с ограничением симплектической формы на X_0), то существует единственная симплектическая форма Ω'_0 на X'_0 такая, что $\pi^*\Omega'_0 = \mathbf{j}^*\Omega$, где $\mathbf{j}$ – отображение вложения X_0 в X . Так как действия групп Ли G и S на $X = T^*N$ коммутируют, то существует единственное действие группы G на X'_0 такое, что отображение π G -эквивариантно.

Пусть $\Omega' = d\theta'$ – каноническая симплектическая структура на T^*N' , где $N' = N/S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1 [18]. *Редуцированное фазовое пространство (X'_0, Ω'_0) симплектоморфно многообразию (T^*N', Ω') . Более того, при таком отождествлении X'_0 с T^*N' мы имеем следующее тождество для канонических 1-форм: $\pi^*\theta' = \mathbf{j}^*\theta$.*

Конструкция этого симплектоморфизма в [18] базируется на факте, что

$$p_S^*(T^*N') = \mathbf{J}^{-1}(0), \quad (5.1)$$

где $p_S: N \rightarrow N/S$ – каноническая субмерсия. Факторизуя по S в (5.1), получаем $T^*N' \simeq X'_0$. Так как действия S и G на N коммутируют, то действие группы Ли G на $X'_0 \simeq T^*N'$ является продолжением естественного действия G на факторпространстве N/S .

Пусть F – положительно определенная S -инвариантная поляризация на X .

ТЕОРЕМА 5.2 [8]. *Существует канонически ассоциированная с F положительно определенная поляризация F' на редуцированном пространстве X'_0 .*

Эта поляризация F' описывается следующим образом [8]. Для каждой точки $x \in X_0$ положим $F_0(x) = (T_x^{\mathbb{C}} X_0) \cap F(x)$. Тогда F_0 — S -инвариантное подрасслоение (распределение) комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}} X_0$ размерности $(\dim X'_0)/2$ и $F' = \pi_*(F_0)$ (в частности, пересечение F_0 с комплексификацией ядра касательного отображения π_* , порожденного векторными полями $\hat{\xi}|_{X_0}$, нулевое). Если распределение F G -инвариантно, то F' также G -инвариантно, потому что действия G и S на N коммутируют.

5.2. Редуцированные кэлеровы структуры на $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{H}P^n$. В этом пункте мы докажем, что все кэлеровы структуры $F(P)$, $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$ (для которых σ является антиголоморфной инволюцией), на областях в касательных расслоениях симметрических пространств $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{H}P^n$ могут быть получены с помощью процедуры редукции из аналогичных структур, определенных на областях касательных расслоений к сферам. Ниже мы рассмотрим распределения, отображения на этих трех типах многообразий и будем использовать обозначения, введенные ранее для $T(G/K)$, но с индексом $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ для сферы, комплексного и кватернионного проективных пространств соответственно.

Пусть G'' — группа Ли $SO(2n+2)$, $n \geq 1$, и K'' — ее подгруппа, изоморфная $SO(2n+1)$. На $(2n+1)$ -мерной сфере $N = G''/K''$ транзитивно действует подгруппа Ли $G \subset G''$, изоморфная $SU(n+1)$. Пересечение $G \cap K''$ — это подгруппа Ли $K \simeq SU(n)$. Поэтому $N = G/K = SU(n+1)/SU(n)$. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ — это однородное пространство $N' = G/K' = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$, т.е. $N' = N/S$, где S — подгруппа Ли группы G , изоморфная $U(1)$ (мы рассматриваем действие группы Ли S справа). Рассмотрим также естественное действие группы G на N слева. Ясно, что эти два действия групп Ли G и S коммутируют. Пусть $\Phi_{\mathbb{R}}$ и $\Phi_{\mathbb{C}}$ — нормализованные билинейные формы $-\frac{1}{2} \text{Tr}$ на вещественных полупростых алгебрах Ли $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{so}(2n+2)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1)$ соответственно (ассоциированные с точным стандартным представлением). Используя формы $\Phi_{\mathbb{R}}$ и $\Phi_{\mathbb{C}}$, мы отождествим кокасательные расслоения $T^*N = T^*(G''/K'')$ и $T^*N' = T^*(G/K')$ с соответствующими касательными расслоениями $X = TN$ и $X'_0 = TN'$, как в п. 2.2. Пусть $\theta_{\mathbb{R}}$ и $\theta'_{\mathbb{C}}$ обозначают канонические 1-формы на TN и TN' (зависящие от этих отождествлений). Обозначим через $H_{\mathbb{R}}$ и $H'_{\mathbb{C}}$ соответствующие формам $\Phi_{\mathbb{R}}$ и $\Phi_{\mathbb{C}}$ гамильтонианы геодезических потоков на многообразиях $TN = T(G''/K'')$ и $TN' = T(G/K')$. Но, отождествляя $T^*N = T^*(G/K)$ с $TN = T(G/K)$ с помощью формы $\Phi_{\mathbb{C}}$, мы получаем другие каноническую 1-форму $\theta_{\mathbb{C}}$ и гамильтониан $H_{\mathbb{C}}$ на TN . Ясно, что $C_{\mathbb{R}\mathbb{C}}\theta_{\mathbb{C}} = \theta_{\mathbb{R}}$ и $C_{\mathbb{R}\mathbb{C}}H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}}$, где $C_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ — некоторая константа.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m}'$ — разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму ортогональных относительно формы $\Phi_{\mathbb{C}}$ подпространств, где $\mathfrak{k}$ — алгебра Ли подгруппы Ли $K \subset G$. Пусть $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m}'$. Обозначим через $\mathfrak{k}'$ алгебру Ли группы Ли $K' \subset G$: $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Так как $[\mathfrak{k}', \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, то мы можем рассмотреть тривиальное векторное расслоение $G \times \mathfrak{m}$ с действием на нем группы Ли K' справа $r_{k'}: (g, w) \mapsto (gk', \text{Ad } k'^{-1}(w))$. Пусть $\mathbf{J}: T(G/K) \rightarrow \mathfrak{s}^*$ — отображение момента, ассоциированное с (правым) действием группы Ли S на $N = G/K$. Используя (лево) G -эквивариантную субмер-

сию $\Pi: G \times \mathfrak{m} \rightarrow T(G/K)$, $(g, w) \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_0 g \exp(tw)K$, и лемму 2.3, мы получаем,

что $(\mathbf{J} \circ \Pi)(g, w)(\eta) = \tilde{\theta}_{\mathbb{C}(g, w)}(\eta^l(g), [w, \eta]) = \Phi_{\mathbb{C}}(w, \eta)$ для произвольных $\eta \in \mathfrak{s}$. Поэтому $\Pi(G \times \mathfrak{m}') = \mathbf{J}^{-1}(0) = X_0$, а значит, $X'_0 = TN' \simeq G \times_{K'} \mathfrak{m}'$. Более того, из (2.2) вытекает, что $\pi^* \theta'_{\mathbb{C}} = \mathbf{j}^* \theta_{\mathbb{C}}$. Так как отображение $T(G/K) \rightarrow T(G''/K'')$,

$g \exp(t\xi)K \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_0 g \exp(t\xi)K''$, $g \in G$, $\xi \in \mathfrak{m}$, является диффеоморфизмом (G дей-

ствует транзитивно на G''/K'') и $H_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}\mathbb{C}} H_{\mathbb{C}}$, редуцированный гамильтониан $H'_{\mathbb{R}}$ на X'_0 совпадает с $C_{\mathbb{R}\mathbb{C}} H'_{\mathbb{C}}$. Чтобы найти константу $C_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$, рассмотрим стандарт-

ное вложение $\mathfrak{su}(n+1) \rightarrow \mathfrak{so}(2n+2)$, $\xi = (A+iB) \mapsto \xi'' = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, алгебры Ли $\mathfrak{g}$

в алгебру Ли $\mathfrak{g}''$. Пусть $\mathfrak{k}'' = \mathfrak{so}(2n+1)$ – алгебра Ли подгруппы $K'' \subset G''$. Так как для билинейных (след)-форм (на $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}''$) $\text{Tr } \xi^2 = \text{Tr}(\xi'')^2_{\mathfrak{m}''}$, где $\xi \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ и $(\cdot)_{\mathfrak{m}''}$ – проекция на $\mathfrak{m}''$ вдоль $\mathfrak{k}''$ в $\mathfrak{g}''$, определенная прямым ортогональным разложением $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{k}'' \oplus \mathfrak{m}''$ [14], мы получим, что $C_{\mathbb{R}\mathbb{C}} = 1$. Отметим, что $\text{Tr } \xi^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\xi'')^2$.

Пусть $F_{\mathbb{R}}^c$ – G'' -инвариантная каноническая кэлерова структура на $X = T(G''/K'')$ со свойствами (1), (2) теоремы 4.15 (S -инвариантная в силу этой же теоремы). Такая глобальная структура имеет вид $F_{\mathbb{R}}(P)$, где $P = P(\psi, \psi, 1)$ и $\psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \text{cth}(\mathbf{r})$ (см. доказательство теоремы 4.14). В силу теоремы 5.2 существует редуцированная кэлерова структура $F'_{\mathbb{R}}$ на $X'_0 = TN'$ такая, что $F'_{\mathbb{R}} = \pi_*(F_{\mathbb{R}0}^c)$, т.е. $\pi^*(\text{Im } \bar{\partial} H'_{\mathbb{R}}) = \mathbf{j}^*(\text{Im } \bar{\partial} H_{\mathbb{R}})$ (чтобы доказать это, достаточно использовать определение $\bar{\partial}$: $\bar{\partial} H|F = dH|F$, $\bar{\partial} H|\bar{F} = 0$). Но $\pi^* \theta'_{\mathbb{C}} = \mathbf{j}^* \theta_{\mathbb{C}}$, поэтому $\text{Im } \bar{\partial} H'_{\mathbb{R}} = C_{\mathbb{R}\mathbb{C}} \theta'_{\mathbb{C}}$ – каноническая 1-форма на TN' с точностью до константы $C_{\mathbb{R}\mathbb{C}} = 1$. Применяя теорему 4.15 и аргументы доказательства теоремы 4.14, мы получаем, что кэлерова структура $F'_{\mathbb{R}}$ совпадает с канонической (глобальной) структурой $F_{\mathbb{C}}$ на редуцированном пространстве $X'_0 = T(G/K')$.

Пусть $F_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{R}}(P)$ – произвольная G'' -инвариантная кэлерова структура на некоторой σ -, G'' - и S -инвариантной области $D_{\mathbb{R}} \subset T(G''/K'')$. Предположим, что $\sigma: X \rightarrow X$ – антиголоморфная инволюция, т.е. $P = P(\psi, \psi, \lambda)$, где ψ, λ – положительные функции. Существует (локальная) положительная функция $\delta = \delta(\mathbf{r})$, для которой $\lambda(\mathbf{r}) = 1/(\mathbf{r}\delta(\mathbf{r}))'$. В силу (3.4), (4.5) (см. также (3.9)) при подходящем выборе постоянной интегрирования мы (локально) получим $\Psi_{\mathbb{R}*}(\gamma)(F_{\mathbb{R}}^c) = F_{\mathbb{R}}(P)$ (в частности, $F_{\mathbb{R}}(P)$ S -инвариантна). По определению (локальный) диффеоморфизм $\Psi_{\mathbb{R}}(\gamma)$ отображает точку $(g'', Y) \in T(G''/K'')$ в $(g'', \gamma(\sqrt{H_{\mathbb{R}}(Y)})Y)$. Значит, этот диффеоморфизм оставляет инвариантным подмногообразие X_0 . Более того, так как $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{C}}$, то мы имеем $\pi \circ \Psi_{\mathbb{R}}(\gamma) = \Psi'_{\mathbb{C}}(\gamma) \circ \pi$, где (локальный) диффеоморфизм $\Psi'_{\mathbb{C}}(\gamma)$ на $X'_0 = T(G/K')$ определяется с помощью $H'_{\mathbb{C}}$. В силу теоремы 5.2 существует редуцированная кэлерова структура $F'_{\mathbb{R}}$ на некотором открытом подмножестве в $X'_0 = TN'$ такая, что $F'_{\mathbb{R}} = \pi_*(F_{\mathbb{R}0}^c)$. Таким образом, $F'_{\mathbb{R}} = \Psi'_{\mathbb{C}*}(\gamma)(F_{\mathbb{C}}^c)$ (локально), т.е. эта структура имеет вид $F_{\mathbb{C}}(P)$, где $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$. Доказана

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $N = S^{2n+1}$ и $F_{\mathbb{R}}(P)$, $P = P(\psi, \psi, \lambda)$, – кэлерова структура на $D_{\mathbb{R}} \subset (TN, d\theta_{\mathbb{R}})$, $D_{\mathbb{R}} = \{x \in TN : H_{\mathbb{R}}(x) \in O\}$, для которой σ является антиголоморфной инволюцией. Редуцированное многообразие $\mathbf{J}^{-1}(0)/S$, где $S \simeq U(1)$, изоморфно $(TN', d\theta'_{\mathbb{C}})$, $N' = \mathbb{C}P^n$, с редуцированной кэлеровой структурой $F'_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{C}}(P)$ на $D'_{\mathbb{C}} = \{x' \in TN' : H'_{\mathbb{C}}(x') \in O\}$, где $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$ и $\varphi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + \mathbf{r}^2/\psi(\mathbf{r})$, если $n \geq 2$, $P = P(\psi, \psi, \lambda)$, если $n = 1$.

Теперь пусть G'' – группа Ли $SO(4n+4)$, $n \geq 1$, и K'' – ее подгруппа, изоморфная $SO(4n+3)$. На $(4n+3)$ -мерной сфере $N = G''/K''$ транзитивно действует подгруппа $G \subset G''$, изоморфная $Sp(n+1)$. Пересечение $G \cap K''$ – это подгруппа Ли $K \simeq Sp(n)$. Поэтому $N = Sp(n+1)/Sp(n)$. Кватернионное проективное пространство $\mathbb{H}P^n$ определяется как однородное пространство $N' = Sp(n+1)/(Sp(1) \times Sp(n))$, т.е. $N' = N/S$, где S – подгруппа Ли группы G , изоморфная $Sp(1)$ (мы рассматриваем действие S справа). Пусть $\Phi_{\mathbb{R}}$ и $\Phi_{\mathbb{H}}$ обозначают нормализованные билинейные формы $-\frac{1}{2} \text{Tr}$ на полупростых алгебрах Ли $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{so}(4n+4)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n+1)$ соответственно (ассоциированные с точными стандартными представлениями вещественными и кватернионными матрицами соответственно). Используя формы $\Phi_{\mathbb{R}}$ и $\Phi_{\mathbb{H}}$, мы отождествим кокасательные расслоения $T^*N = T^*(G''/K'')$ и $T^*N' = T^*(G/K')$ с соответствующими касательными расслоениями $X = TN$ и $X'_0 = TN'$, как в п. 2.2. Пусть $\theta_{\mathbb{R}}$ и $\theta'_{\mathbb{H}}$ – канонические 1-формы на TN и TN' (зависящие от этих отождествлений). Мы находимся в ситуации, аналогичной рассмотренной выше в случае пары $(S^{2n+1}, \mathbb{C}P^n)$. Заменяя, где это необходимо, $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{H}$ и вычисляя $C_{\mathbb{R}\mathbb{H}} = 1$, завершаем доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $N = S^{4n+3}$ и $F_{\mathbb{R}}(P)$, $P = P(\psi, \psi, \lambda)$, – кэлерова структура на $D_{\mathbb{R}} \subset (TN, d\theta_{\mathbb{R}})$, $D_{\mathbb{R}} = \{x \in TN : H_{\mathbb{R}}(x) \in O\}$, для которой σ является антиголоморфной инволюцией. Редуцированное многообразие $\mathbf{J}^{-1}(0)/S$, где $S \simeq Sp(1)$, изоморфно $(TN', d\theta'_{\mathbb{H}})$, где $N' = \mathbb{H}P^n$, с редуцированной кэлеровой структурой $F'_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{H}}(P)$ на $D'_{\mathbb{H}} = \{x' \in TN' : H'_{\mathbb{H}}(x') \in O\}$, где $P = P(\psi, \varphi, \lambda)$ и $\varphi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + \mathbf{r}^2/\psi(\mathbf{r})$, если $n \geq 2$, $P = P(\psi, \psi, \lambda)$, если $n = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Полезно отметить, что вся конструкция целиком и доказательства теорем выше не используют компактность пространства G''/K'' . Поэтому аналогичные теоремы могут быть доказаны и в некомпактном случае с использованием этой же конструкции.

Список литературы

1. Souriau J. M. Sur la variété de Kepler // Sympos. Math. 1974. V. 14. P. 343–360.
2. Rawnsley J. H. Coherent states and Kähler manifolds // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1977. V. 28. P. 403–415.
3. Furutani K., Tanaka R. A Kähler structure on the punctured cotangent bundle of complex and quaternion projective spaces and its applications to geometric quantization. I // J. Math. Kyoto Univ. 1994. V. 34. № 4. P. 719–737.
4. Ii K., Morikawa T. Kähler structures on the tangent bundle of Riemannian manifolds of constant positive curvature // Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci. 1999. V. 14. № 3. P. 141–154.
5. Szöke R. Adapted complex structures and geometric quantization // Nagoya Math. J. 1999. V. 154. P. 171–183.
6. Mykytyuk I. V. Invariant Kähler structures on the cotangent bundle of compact symmetric spaces // Submitted to Nagoya Math. J.
7. Gawedzki K. Fourier-like kernels in geometric quantization // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). 1976. V. 128. P. 1–80.
8. Guillemin V., Sternberg S. Geometric quantization and multiplicities of group representations // Invent. Math. 1982. V. 67. № 3. P. 515–538.
9. Guillemin V., Stenzel M. Grauert tubes and the homogeneous Monge–Ampère equation. II // J. Differential Geom. 1992. V. 35. № 3. P. 627–641.

10. *Mostow G. D.* Some new decomposition theorems for semisimple groups // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1955. V. 14. P. 31–54.
11. *Guillemin V., Stenzel M.* Grauert tubes and the homogeneous Monge–Ampere equation // *J. Differential Geom.* 1991. V. 34. №2. P. 561–570.
12. *Dancer A., Szöke R.* Symmetric spaces, adapted complex structures and hyperkähler structures // *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*. 1997. V. 48. №2. P. 27–38.
13. *Szöke R.* Adapted complex structures and Riemannian homogeneous spaces // *Ann. Polon. Math.* 1998. V. 70. P. 215–220.
14. *Helgason S.* Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. New York: Academic Press, 1978. (Pure Appl. Math. V. 80.)
15. *Гото М., Гроссханс Ф.* Полупростые алгебры Ли. М.: Мир, 1981.
16. *Onishchik A. L.* Topology of transitive transformation groups. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1994.
17. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
18. *Gotay M.* Constraints, reduction and quantization // *J. Math. Phys.* 1986. V. 27. №8. P. 2051–2066.

Государственный университет “Львовская политехника”,
Львов, Украина
E-mail: viva@iapmm.lviv.ua

Поступила в редакцию
15.03.2001