Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Прибегин, Об одном методе приближения в H^p , $0 < p \leq 1$, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 11, 123–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm612>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:35:40

УДК 517.5

С. Г. Прибегин

Об одном методе приближения в H^p , $0 < p \leq 1$

В статье вводится метод суммирования рядов, который мы назвали обобщенным методом Абеля–Пуассона. Для функций из H^p , $0 < p \leq 1$, устанавливается, что скорость приближения граничной функции обобщенными средними Абеля–Пуассона эквивалентна модулю гладкости дробного порядка. Все оценки даются в метрике $L_{2\pi}^p$.

Библиография: 13 названий.

Получению двусторонних оценок скорости приближения функций из H^p , $0 < p \leq 1$, всевозможными средними их степенных рядов через интегральный модуль гладкости функции посвящены работы разных авторов. Однако модули гладкости конечного порядка для указанной цели подходят не ко всем методам суммирования. Возникает необходимость привлекать модули гладкости дробного порядка (это отмечено и в [1; §2]). Одним из таких методов является обобщенный метод Рисса–Бохнера при $l > 0$ и $l \notin \mathbb{N}$, для которого средние степенного ряда функции $f \in H^p$ в круге имеют вид:

$$R_\varepsilon^{l,\alpha}(f; z) = \sum_{k=0}^{[1/\varepsilon]} (1 - (\varepsilon k)^l)^\alpha (f)_k z^k, \quad (1)$$

где $(f)_k$ – тейлоровские коэффициенты, $\alpha > -1$, $\varepsilon > 0$, а $[\cdot]$ – целая часть числа. В настоящей статье обобщенные средние Абеля–Пуассона [2] рассматриваются при любом $l > 0$. Это позволяет получить двустороннюю оценку через модуль гладкости дробного порядка. Основной целью введения обобщенных средних Абеля–Пуассона в [2] было получение оценки сверху скорости приближения через модуль гладкости k -го порядка (k – натуральное). Для обычных средних Абеля–Пуассона, получаемых из обобщенных при $k = 1$, в [3] доказана и оценка снизу. Соответствующий аналог обобщенных средних Абеля–Пуассона [2] для функций из H^p , $0 < p \leq 1$, в верхней полуплоскости рассматривался в [4], где для него доказана двусторонняя оценка при натуральном k . Статья [4] показывает, что применение обобщенных средних Абеля–Пуассона было логически оправдано и достаточно плодотворно. Используя схему рассуждений из [4], в [5] доказана оценка снизу для обобщенных средних Абеля–Пуассона при любом $k \in \mathbb{N}$. В работе [5] доказана также двусторонняя оценка для обобщенных средних Рисса–Бохнера (1) при $l \in \mathbb{N}$, причем в этом доказательстве использовалась двусторонняя оценка для обобщенных средних Абеля–Пуассона из [2] при $k \in \mathbb{N}$. Получение двусторонней оценки для средних (1) при $l \notin \mathbb{N}$ через l -й модуль гладкости дробного порядка автор предполагает изложить в другой работе. Определение модуля гладкости

дробного порядка для функций из $L_{2\pi}^p$, $0 < p < 1$, и доказательства некоторых его свойств, а также ряда вспомогательных фактов приводятся в §§ 1 и 2. В § 3 вводится класс линейных методов суммирования, дающих оценку сверху порядка приближения функций из H^p , $0 < p \leq 1$, через модули гладкости дробного порядка. Частным случаем этих методов являются и обобщенные средние Абеля–Пуассона при $l > 0$; оценка снизу для них доказывается в § 4. Уточнению свойства полудлительности для модулей гладкости дробного порядка функций из H^p , $0 < p \leq 1$, посвящен § 5.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность Э. А. Стороженко за постановку задачи и критические замечания, способствующие улучшению этой статьи.

§ 1. Свойства модулей гладкости дробного порядка для функций из $L_{2\pi}^p$, $0 < p < 1$

Через $L_{2\pi}^p$, $0 < p < 1$, обозначим класс комплекснозначных 2π -периодических измеримых функций, для которых

$$\|f(x)\|_p^p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx < \infty.$$

Пусть $\alpha > 0$ и $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ ($k \in \mathbb{N}$) – биномиальные коэффициенты. Известно (см., например, [6; гл. 1, § 1, п. 3°, (1.51)]), что

$$\left| \binom{\alpha}{k} \right| \leq \frac{C(\alpha)}{k^{\alpha+1}}. \quad (2)$$

Введем обозначение

$$M(\alpha; p) = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{k} \right|^p. \quad (3)$$

Если $\alpha \neq \mathbb{N}$, то в силу (2) при $(\alpha+1)p > 1$ ряд (3) сходится. Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то в (3) конечное число слагаемых и, следовательно, (3) имеет смысл при любом $p > 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. Доказательства некоторых затронутых в этой статье вопросов при $\alpha \in \mathbb{N}$ содержатся в [2]–[5], [7]–[9].

Пусть $f \in L_{2\pi}^p$, $0 < p < 1$, далее $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. Несложно показать, что тогда при $\alpha > 1/p - 1$ дробная разность

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(x + kh) \quad (4)$$

порядка α определена почти всюду и $\Delta_h^\alpha f(x) \in L_{2\pi}^p$ при фиксированном $h \in \mathbb{R}$, причем

$$\|\Delta_h^\alpha f(x)\|_p^p \leq M(\alpha; p) \|f(x)\|_p^p. \quad (5)$$

Для функции $f(x) \in L_{2\pi}^p$, $0 < p < 1$, *модулем гладкости* порядка α , где $\alpha \notin \mathbb{N}$ и $\alpha > 1/p - 1$, назовем функцию:

$$\omega_\alpha(\delta; f)_p = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_p. \quad (6)$$

Отметим ряд свойств дробного модуля (6).

1) На основании (5)

$$\omega_\alpha^p(\delta; f)_p \leq M(\alpha; p) \|f\|_p^p.$$

2) В силу неравенства треугольника если $f, g \in L_{2\pi}^p$, $(\alpha + 1)^{-1} < p < 1$, то

$$\omega_\alpha^p(\delta; f + g)_p \leq \omega_\alpha^p(\delta; f)_p + \omega_\alpha^p(\delta; g)_p.$$

3) $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_\alpha(\delta; f)_p = 0$.

Для тригонометрических полиномов непосредственное вычисление показывает справедливость свойства 3). Так как для функций из $L_{2\pi}^p$ имеет место теорема Вейерштрасса (см., например, [10]), то несложно доказать это свойство и для функций из $L_{2\pi}^p$.

4) Если $f \in L_{2\pi}^p$, $0 < p < 1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha > 1/p - 1$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\omega_\alpha^p(n\delta; f)_p \leq M(\alpha; p) n^{[\log_2 M(\alpha; p)] + 1} \omega_\alpha^p(\delta; f)_p. \quad (7)$$

Для доказательства (7) нам понадобится следующее свойство биномиальных коэффициентов (см. [11; гл. 4, п. 4.2.5, 17]):

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha}{n-k} = \frac{(-1)^{n/2} (1 + (-1)^n)}{2} \binom{\alpha}{n/2}. \quad (8)$$

Формула (8) нужна для получения равенства

$$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \Delta_{h/2}^\alpha f\left(x + k \cdot \frac{h}{2}\right), \quad (9)$$

которое имеет место почти всюду для $f \in L_{2\pi}^p$, $(\alpha + 1)^{-1} < p < 1$. Действительно, согласно (4) и (8)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \Delta_{h/2}^\alpha f\left(x + k \cdot \frac{h}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-1)^j f\left(x + (k+j) \cdot \frac{h}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \sum_{s=k}^{\infty} \binom{\alpha}{s-k} (-1)^{s-k} f\left(x + s \cdot \frac{h}{2}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} f\left(x + s \cdot \frac{h}{2}\right) \sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} \binom{\alpha}{s-k} \binom{\alpha}{k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-1)^j f(x + j \cdot h) = \Delta_h^\alpha f(x). \end{aligned}$$

Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $2^{l-1} < n < 2^l$. Применим к дробной разности $\Delta_{nh}^\alpha f(x)$ соотношение (9) l раз:

$$\begin{aligned} \Delta_{nh}^\alpha f(x) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_1} \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_2} \cdots \sum_{k_l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k_l} \\ &\quad \times \Delta_{nh/2^l}^\alpha f\left(x + \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2^2} + \cdots + \frac{k_l}{2^l}\right)nh\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\Delta_{nh}^\alpha f(x)\|_p^p &\leq (M(\alpha; p))^l \|\Delta_{nh/2^l}^\alpha f(x)\|_p^p \\ &\leq M(\alpha; p) n^{[\log_2 M(\alpha; p)]+1} \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_p^p. \end{aligned}$$

Отсюда следует (7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Через X обозначим одно из пространств $L_{2\pi}^p$, $p \geq 1$, $C[-\pi, \pi]$. В случае, если $f \in X$, $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, предыдущие рассуждения приводят к неравенству

$$\omega_\alpha(n\delta; f)_X \leq n^{[\alpha]+1} \omega_\alpha(\delta; f)_X.$$

Из (7) вытекает, что при $\lambda > 0$ и $(\alpha + 1)^{-1} < p < 1$

$$\omega_\alpha^p(\lambda\delta; f)_p \leq M(\alpha; p)(\lambda + 1)^{[\log_2 M(\alpha; p)]+1} \omega_\alpha^p(\delta; f)_p. \quad (10)$$

§ 2. Вспомогательные утверждения

Через E обозначим класс экспоненциально убывающих функций из $C^\infty[0, \infty)$, все производные которых также экспоненциально убывают, т.е. если $F \in E$, то

$$|F^{(k)}(t)| \leq L_k e^{-a_k t}, \quad (11)$$

где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $L_k > 0$, $a_k > 0$. Пусть $F \in E$. Тогда дробная разность $\Delta_h^\alpha F(t)$ порядка α определена всюду при $\alpha > 0$ и

$$|\Delta_h^\alpha F(t)| \leq L 2^{[\alpha]+1} e^{-at}, \quad (12)$$

$L = L_0$ и $a = a_0$. Для функции $F \in E$ правосторонний дробный интеграл Римана–Лиувилля (см. [6; гл. 2, § 5, п. 1°, (5.4)])

$$(I_-^\alpha F)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} F(x+t) dt \quad (13)$$

определен при $\alpha > 0$.

Правосторонняя дробная производная Римана–Лиувилля (см. [6; гл. 2, § 5, п. 1°, (5.7)]) функции F определяется так:

$$(D_-^\alpha F)(x) = (-1)^\nu \left(\frac{d}{dx} \right)^\nu ((I_-^{\nu-\alpha} F)(x)), \quad \nu = [\alpha] + 1. \quad (14)$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$I_-^\alpha(e^{-ax}) = a^{-\alpha} e^{-ax}, \quad D_-^\alpha(e^{-ax}) = a^\alpha e^{-ax}, \quad a > 0. \quad (15)$$

Для правосторонних дробных интегралов (см. [6; гл. 2, § 5, п. 1°, (5.15)]) выполняется полугрупповое свойство

$$I_-^\alpha I_-^\beta F = I_-^{\alpha+\beta} F. \quad (16)$$

ЛЕММА 1. Если $F \in E$, то при любом $\alpha > 0$

$$|(I_-^{\nu-\alpha} F)^{(k)}(x)| \leq L_k a^{\{\alpha\}+1} e^{-a_k x}, \quad (17)$$

$\nu = [\alpha] + 1$, $k = 0, 1, \dots, \nu$, $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, константы L_k и a_k такие же, как в (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (11) следует, что

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} F^{(k)}(b)(b-x)^k = 0. \quad (18)$$

Записывая формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме с центром в точке b и затем устремляя b к $+\infty$, на основании (18) получаем:

$$F(x) = (-1)^k (I_-^k F^{(k)})(x). \quad (19)$$

Далее согласно (19) и (16)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^k ((I_-^{\nu-\alpha} F)(x)) &= (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k (I_-^{\nu-\alpha} (I_-^k F^{(k)})(x)) \\ &= (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k ((I_-^{\nu+k-\alpha} F^{(k)})(x)) = (I_-^{\nu-\alpha} F^{(k)})(x). \end{aligned}$$

На основании (11) и (13)

$$\begin{aligned} |(I_-^{\nu-\alpha} F)^{(k)}(x)| &= |(I_-^{\nu-\alpha} F^{(k)})(x)| \\ &\leq \frac{L_k}{\Gamma(\nu-\alpha)} \int_0^\infty t^{\nu-\alpha-1} e^{-a_k t} dt e^{-a_k x} = L_k a_k^{\{\alpha\}+1} e^{-a_k x}. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $F \in E$, тогда при $\alpha > 0$

$$(I_-^\alpha (D_-^\alpha F))(x) = F(x). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (I_-^{\nu-\alpha} F)^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \nu. \quad (21)$$

Условие (21) является достаточным для выполнения (20) (см. [6; гл. 2, § 6, п. 3°, теорема 6.3], а также [6; гл. 1, § 2, п. 6°, теорема 2.3]).

Так как для функции $F \in E$ имеет место (20), то, повторяя рассуждения из [6; гл. 4, § 20, п. 3°, теорема 20.4], получаем формулу:

$$\Delta_\varepsilon^\beta F(n\varepsilon) = \varepsilon^\beta \int_0^\infty (D_-^\beta F)(\varepsilon(n+t)) P_\beta(t) dt, \quad (22)$$

где

$$P_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^\infty \binom{\beta}{j} (-1)^j (t-j)_+^{\beta-1} \quad (23)$$

и, как показано в [6; гл. 4, § 20, п. 2°, лемма 20.1],

$$P_\beta(t) \in L_1(\mathbb{R}). \quad (24)$$

Принимая во внимание (14) и (17), имеем

$$\begin{aligned} |(D_-^\beta F)(\varepsilon(n+t))| &= |(-1)^\nu (I_-^{\nu-\beta} F)^\nu(\varepsilon(n+t))| \leq L_\beta a_\nu^{\{\beta\}+1} e^{-a_\nu \varepsilon(n+t)}, \\ \nu &= [\beta] + 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (22)–(25) вытекает, что

$$|\Delta_\varepsilon^\beta F(n\varepsilon)| \leq \varepsilon^\beta K_\beta e^{-a_\nu \varepsilon n}. \quad (26)$$

§3. О некоторых линейных методах суммирования степенных рядов

Для функции $f \in H^p$ в круге

$$\|f\|_{H^p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}$$

и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k z^k \quad (27)$$

– ее ряд Тейлора. Положим

$$M_{\varepsilon, F}(F; e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} F(\varepsilon k)(f)_k e^{ik\theta}, \quad (28)$$

где $F \in E$, $\varepsilon > 0$. Так как $(f)_k = o(k^{1/p-1})$ для $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$ (см. [2]), то выражение (28) определено корректно. Если $\varphi(t)$ – непрерывная экспоненциально убывающая на $[0, +\infty)$ функция такая, что $\varphi(0) = 1$, то $M_{\varepsilon, \varphi}(f; e^{it})$ будем называть Φ -средними ряда (27), а $\varphi(t)$ – множителем. Далее, пусть $\alpha > 0$ и

$$\varphi_{\alpha}(t) = \varphi(0) - \Delta_t^{\alpha} \varphi(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^{m+1} \varphi(mt). \quad (29)$$

Ряд в (29) сходится абсолютно и равномерно при $t > 0$, причем (см. (12)) имеет место оценка $|\varphi_{\alpha}(t)| \leq L 2^{[\alpha]+1} e^{-at}$, кроме того, $\varphi_{\alpha}(0) = 1$. Таким образом, $\varphi_{\alpha}(t)$ – также множитель. Тогда (см. (28))

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon, \varphi_{\alpha}}(f; e^{it}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^{m+1} \varphi(mk\varepsilon) \right) (f)_k e^{ikt} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(mk\varepsilon) (f)_k e^{ikt} \end{aligned} \quad (30)$$

мы будем называть $(\Phi; \alpha)$ -средними ряда (27).

В частном случае, когда $\varphi(t) = e^{-t}$, согласно (30) и (27)

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon, \varphi_{\alpha}}(f; e^{it}) &= P_{\varepsilon}^{\alpha}(f; e^{it}) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k e^{-mk\varepsilon} e^{ikt} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^{m+1} f(e^{-m\varepsilon} e^{it}). \end{aligned} \quad (31)$$

Средние (31) назовем *обобщенными средними Абеля–Пуассона*. Отметим, что при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ средние (31) рассматривались в [2] и [5]. Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\theta})^m e^{it}) (\rho e^{i\theta})^{-j} d\theta = \begin{cases} (f)_k e^{ikt}, & mk = j, \\ 0, & mk \neq j, \end{cases}$$

то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(mk\varepsilon)(f)_k e^{ikt} = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j\varepsilon) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f((\rho e^{i\theta})^m e^{it}) (\rho e^{i\theta})^{-j} d\theta.$$

Подставляя данное выражение в (30) и выбирая $e^{-a\varepsilon/2} \leq \rho < 1$, получаем следующее интегральное представление:

$$f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_{\alpha}}(f; e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\rho e^{i\theta}; e^{it}) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^{-k} d\theta, \quad (32)$$

где

$$\Phi(\rho e^{i\theta}; e^{it}) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^m f((\rho e^{i\theta})^m e^{it}). \quad (33)$$

Покажем, что правую часть (32) можно привести к виду

$$f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_{\alpha}}(f; e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(\rho e^{i\theta}; e^{it})}{(1 - \rho e^{i\theta})^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\varepsilon}^{\beta} \varphi(n\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^{-n} d\theta \quad (34)$$

при любом $\beta > 0$. Для доказательства (34) предварительно преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned} (1 - \rho e^{i\theta})^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^{-k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} (-1)^n \varphi(k\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^{n-k} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \right) \binom{\beta}{n} (-1)^n \varphi(k\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^{n-k} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\beta}{n} (-1)^n \sum_{m=1}^n \varphi((n-m)\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^m + \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_{\varepsilon}^{\beta} \varphi(j\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^{-j}. \end{aligned} \quad (35)$$

На основании (11)

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\beta}{n} (-1)^n \sum_{m=1}^n \varphi((n-m)\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^m \right| \leq \frac{L2^{[\beta]+1}}{1 - e^{-a\varepsilon}} \quad (36)$$

и, следовательно, первый ряд в правой части (35) сходится равномерно по θ . Согласно теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(\rho e^{i\theta}; e^{it})}{(1 - \rho e^{i\theta})^{\beta}} (\rho e^{i\theta})^m d\theta = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(\rho e^{i\theta}; e^{it})}{(1 - \rho e^{i\theta})^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\beta}{n} (-1)^n \sum_{m=1}^n \varphi((n-m)\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^m d\theta = 0, \quad (37)$$

так как условие (36) обеспечивает почленное интегрирование ряда в (37).

Используя (35), (37), а также правую часть (32), нетрудно получить (34).

Модулем гладкости порядка α , где $\alpha > 1/p - 1$, функции $f \in H^p$ назовем модуль гладкости граничной функции $f(e^{it})$, т.е.

$$\omega_\alpha(\delta; f)_p = \sup_{|\theta| \leq \delta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-1)^k f(e^{i(t+k\theta)}) \right|^p dt \right\}^{1/p}. \quad (38)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi(t)$ — множитель из E . Тогда для любой функции $f \in H^p$, $(\alpha + 1)^{-1} < p \leq 1$, имеет место оценка:

$$\|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_\alpha}(f; e^{it})\|_p \leq C(\alpha; p) \omega_\alpha(\varepsilon; f)_p, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{1}{|1 - \rho e^{i\theta}|^\beta} \leq \left| \frac{1 - \rho^2 e^{i\theta}}{1 - \rho e^{i\theta}} \right|^\beta \cdot \frac{1}{|1 - \rho^2 e^{i\theta}|^\beta} \leq \frac{2^\beta}{|1 - \rho^2 e^{i\theta}|^\beta}$$

и на основании (26) при $\rho = e^{-a_\nu \varepsilon/2}$, $\nu = [\beta] + 1$,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_\varepsilon^\beta \varphi(n\varepsilon) (\rho e^{i\theta})^{-n} \right| \leq K_\beta \varepsilon^\beta \cdot \frac{1}{1 - e^{-a_\nu \varepsilon/2}} \leq M_\beta \varepsilon^{\beta-1},$$

то из (34) получаем:

$$|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_\alpha}(f; e^{it})| \leq C(\alpha; p) \varepsilon^{\beta-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\Phi(\rho e^{i\theta}; e^{it})|}{|1 - \rho^2 e^{i\theta}|^\beta} d\theta.$$

Возведем обе части этого неравенства в степень p и воспользуемся следующим неравенством (см. [2]):

$$\|f(\rho e^{it})\|_1^p \leq \left(\frac{2}{R - \rho} \right)^{1-p} \|f(R e^{it})\|_p^p,$$

где $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, $0 < \rho < R \leq 1$. Взяв при этом $R = 1$ и учитывая, что $\rho = e^{-a_\nu \varepsilon/2}$, получаем (см. (33) и (4))

$$\begin{aligned} & |f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_\alpha}(f; e^{it})|^p \\ & \leq C(\alpha; p) \varepsilon^{\beta-1} \cdot \frac{1}{(1 - \rho)^{1-p}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\theta^\alpha f(e^{it})|^p \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{\beta p}}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по t от $-\pi$ до π . Тогда с учетом (38) и (10) имеем:

$$\begin{aligned} & \|f(e^{it}) - M_{\varepsilon, \varphi_\alpha}(f; e^{it})\|_p^p \leq C(\alpha; p) \varepsilon^{\beta p-1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \omega_\alpha^p(\theta; f)_p \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{\beta p}} \\ & \leq C(\alpha; p) \varepsilon^{\beta p-1} \cdot \omega_\alpha^p(\varepsilon; f)_p \int_0^\pi \left(\frac{\theta}{\varepsilon} + 1 \right)^N \cdot \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{\beta p}} \\ & \leq C(\alpha; p) \varepsilon^{\beta p-1} \cdot \omega_\alpha^p(\varepsilon; f)_p \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \varepsilon^{-k} \int_0^\pi \theta^k \cdot |1 - \rho e^{i\theta}|^{-\beta p} d\theta, \quad (40) \end{aligned}$$

где $N = \lfloor \log_2 M(\alpha; p) \rfloor + 1$. В [2] доказано следующее неравенство: если $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$, $\gamma - \beta > 1$ и $\frac{1}{2} < R < 1$, то

$$\int_0^\pi t^\beta |1 - Re^{it}|^{-\gamma} dt \leq C(\beta; \gamma)(1 - R)^{1+\beta-\gamma}. \quad (41)$$

Взяв $\beta > \frac{1}{p}(N + 1)$ и учитывая, что $\rho = e^{-a_\nu \varepsilon/2}$, на основании (41) имеем

$$\int_0^\pi \theta^k |1 - \rho e^{i\theta}|^{-\beta p} d\theta \leq C(k; \beta p) \varepsilon^{1+k-\beta p}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (40), получаем утверждение теоремы.

§ 4. Обратная оценка приближения обобщенными средними Абеля–Пуассона

ЛЕММА 3. Пусть $F \in E$. Тогда для любой функции $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$,

$$\|M_{\varepsilon, F}(f; e^{it})\|_p \leq C(p) \|f\|_{H^p}.$$

Доказательство этой леммы можно провести по схеме доказательства теоремы 1 (см. также лемму 1 из [9]).

Для $f \in H^p$ производная Вейля порядка $\alpha > 0$ ряда (27) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(\rho e^{it}) &= \sum_{k=1}^{\infty} (f)_k \rho^k (ik)^\alpha e^{ikt}, \\ (ik)^\alpha &= k^\alpha e^{i\alpha\pi/2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (27) и (43) видно, что $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} f(\rho e^{it})$ – аналитическая в единичном круге функция и

$$\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \right)_k = (f)_k (ik)^\alpha. \quad (44)$$

Тогда

$$I_+^{(\alpha)} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} (\rho e^{it}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \right)_k \frac{\rho^k e^{ikt}}{(ik)^\alpha} = f(\rho e^{it}) - f(0). \quad (45)$$

Здесь $I_+^{(\alpha)}$ – дробный интеграл Вейля порядка α . Так как

$$\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \right)_k e^{ik(t+\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} (Re^{i(t+\varphi)}) (Re^{i\varphi})^{-k} d\varphi e^{ik\tau}, \quad (46)$$

то (45) переписывается так:

$$f(\rho e^{i(t+\tau)}) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} (Re^{i(t+\varphi)}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(ik)^\alpha} \left(\frac{\rho}{Re^{i\varphi}} \right)^k e^{ik\tau} d\varphi \quad (47)$$

при $0 < \rho < R < 1$.

ЛЕММА 4. Пусть f – аналитическая в единичном круге функция, $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда при $0 < p \leq 1$

$$\begin{aligned} \|\Delta_\varepsilon^\alpha f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^m f(e^{-\varepsilon} e^{i(t+m\varepsilon)}) \right|^p dt \right\}^{1/p} \\ &\leq C(\alpha, p) \varepsilon^\alpha \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon/4} e^{i\varphi}) \right\|_p. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (4) и (47)

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon^\alpha f(\rho e^{it}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(R e^{i(\varphi+t)}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(ik)^\alpha} \left(\frac{\rho}{R e^{i\varphi}} \right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^m e^{imk\varepsilon} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(R e^{i(\varphi+t)}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{ik\varepsilon})^\alpha}{(ik)^\alpha} \left(\frac{\rho}{R e^{i\varphi}} \right)^k d\varphi. \end{aligned}$$

Пусть $\rho = e^{-\varepsilon}$, $R = e^{-\varepsilon/2}$, $R_1 = e^{-\varepsilon/4}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon^\alpha f(e^{-\varepsilon} e^{it}) &= \frac{\varepsilon^\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon/4} R_1 e^{i(\varphi+t)}) \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{i\varepsilon k}}{i\varepsilon k} \right)^\alpha e^{-3\varepsilon k/4} (R_1 e^{i\varphi})^{-k} d\varphi. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$F_1(\tau) = \left(\frac{1 - e^{i\tau}}{i\tau} \right)^\alpha e^{-3\tau/4}.$$

В силу (46) и (28) последнее равенство означает, что

$$\Delta_\varepsilon^\alpha f(e^{-\varepsilon} e^{it}) = \varepsilon^\alpha M_{\varepsilon, F_1} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon/4} z); e^{it} \right).$$

Так как $F_1 \in E$, то, применяя лемму 3, получаем утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $\alpha = k \in \mathbb{N}$ этой леммы доказан в [8; § 4, лемма 3] другими методами и в несколько иной формулировке.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon} e^{i\theta}) \right\|_p \leq C(p) \varepsilon^{-\alpha} \|f(e^{i\theta}) - P_{j\varepsilon}^\alpha(f; e^{i\theta})\|_p,$$

где $j \in \mathbb{N}$, а $P_{j\varepsilon}^\alpha(f; e^{i\theta})$ – обобщенные Абеля–Пуассона (31).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (44)

$$\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \right)_k e^{-\varepsilon k} = (ik)^\alpha e^{-\varepsilon k} (f)_k = i^\alpha \varepsilon^{-\alpha} F_2(\varepsilon k) (1 - e^{-j\varepsilon k})^\alpha (f)_k,$$

где

$$F_2(t) = \frac{t^\alpha}{(1 - e^{-jt})^\alpha} e^{-t} \in E.$$

Далее, так как $(1 - e^{-j\varepsilon t})^\alpha (f)_k = (f - P_{j\varepsilon}^\alpha(f))_k$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} (e^{-\varepsilon} e^{it}) &= i^\alpha \varepsilon^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} F_2(\varepsilon k) (f - P_{j\varepsilon}^\alpha(f))_k e^{ik\varphi} \\ &= i^\alpha \varepsilon^{-\alpha} M_{\varepsilon, F_2}(f - P_{j\varepsilon}^\alpha(f); e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя лемму 3, получаем требуемое.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > 0$, $f \in H^p$, $(\alpha + 1)^{-1} < p \leq 1$. Тогда

$$C_2(\alpha, p) \omega_\alpha(\varepsilon; f)_p \leq \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it})\|_p \leq C_1(\alpha, p) \omega_\alpha(\varepsilon; f)_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямая оценка сразу следует из теоремы 1, поскольку $e^{-t} \in E$. Докажем обратную оценку. Так как

$$\begin{aligned} \Delta_h^\alpha f(e^{it}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^m \Delta_h^\alpha f(e^{-m\varepsilon} e^{it}) \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^m \Delta_h^\alpha f(e^{-m\varepsilon} e^{it}), \quad 0 < h \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^\alpha f(e^{it})\|_p^p &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{k} \right|^p \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^m f(e^{-m\varepsilon} e^{i(t+kh)}) \right\|_p^p \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{m} \right|^p \|\Delta_h^\alpha f(e^{-m\varepsilon} e^{it})\|_p^p. \end{aligned} \quad (48)$$

Слагаемые из первой суммы в правой части неравенства (48) в силу определения средних $P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it})$ (см. (31)) и инвариантности H^p -нормы относительно сдвига равны $\left| \binom{\alpha}{k} \right|^p \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it})\|_p^p$. Что касается слагаемых из второй суммы, то каждое из них мажорируется $\left| \binom{\alpha}{m} \right|^p \|\Delta_h^\alpha f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p^p$ в силу монотонности $\|f(\rho e^{i\theta})\|_p^p$ по ρ (см. [12; теорема 1.5]). Таким образом, из (48) и сделанных замечаний вытекает

$$\|\Delta_h^\alpha f(e^{it})\|_p^p \leq M(\alpha; p) (\|f(e^{it}) - P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it})\|_p^p + \|\Delta_h^\alpha f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p^p). \quad (49)$$

Согласно леммам 4 и 5

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^\alpha f(e^{-\varepsilon} e^{it})\|_p^p &\leq C(\alpha; p) \varepsilon^{\alpha p} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon/4} e^{it}) \right\|_p^p \\ &\leq C(\alpha; p) \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it})\|_p^p. \end{aligned} \quad (50)$$

Подставляя (50) в (49), получаем:

$$\|\Delta_h^\alpha f(e^{it})\|_p^p \leq C(\alpha; p) \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it})\|_p^p.$$

Отсюда, переходя к супремуму по h , получаем обратную оценку.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\alpha > 0$, $f \in H^p$, $(\alpha + 1)^{-1} < p \leq 1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Тогда

$$\left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon} e^{it}) \right\|_p \leq C(\alpha; p) \varepsilon^{-\alpha} \omega_\alpha(\varepsilon; f)_p.$$

Доказательство непосредственно следует из леммы 5 при $j = 1$ и прямой оценки теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Основные идеи доказательства леммы 5 и теоремы 2 взяты из [4].

ЗАМЕЧАНИЕ. По аналогии с работой [13] можно ввести радиальный модуль гладкости дробного порядка

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(\varepsilon; \text{rad}; f)_p &:= \|f(e^{it}) - P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it})\|_p \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^m f(e^{-m\varepsilon} e^{it}) \right|^p dt \right\}^{1/p}. \end{aligned} \quad (51)$$

В этом случае теорему 2 можно сформулировать как теорему об эквивалентности модулей (51) и (38).

§ 5. Уточненное свойство полуаддитивности для модулей гладкости функций из H^p при $0 < p < 1$

При доказательстве теоремы 1 мы использовали (10), так как если $f \in H^p$, то граничная функция $f(e^{i\theta}) \in L_{2\pi}^p$. Однако для функций из H^p это неравенство может быть усилено. Пусть $f \in H^p$, $0 < p < 1$; полагая в (27) $z = e^{-x+it}$, $0 < x < \infty$, имеем

$$f(e^{-x+it}) = \sum_{k=0}^{\infty} (f)_k e^{-kx} e^{ikt}.$$

Тогда на основании (13)–(15)

$$\begin{aligned} I_{x-}^\alpha (f(e^{-x+it}) - f(0)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} (f(e^{-(\tau+x)+it}) - f(0)) d\tau \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (f)_k \frac{e^{-kx}}{k^\alpha} e^{ikt}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(e^{-x+it}) = D_{x-}^\alpha (f(e^{-x+it}) - f(0)) = \sum_{k=1}^{\infty} (f)_k k^\alpha e^{-kx} e^{ikt}. \quad (53)$$

Сравнивая (53) с (43), видим, что

$$i^{-\alpha} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-x+it}) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(e^{-x+it}). \quad (54)$$

Из (52)–(54) следует, что

$$i^{-\alpha} I_{x-}^\alpha \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-x+it}) \right) = I_{x-}^\alpha \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(e^{-x+it}) \right) = f(e^{-x+it}) - f(0). \quad (55)$$

Далее, на основании (31), (52) и (55)

$$P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it}) = f(0) + \frac{1}{i^\alpha \Gamma(\alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} (-1)^{m+1} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-(\tau+m\varepsilon)} e^{it}) d\tau.$$

Сделав в интегралах замену $\tau + m\varepsilon = \varepsilon x$, получим окончательно

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^\alpha(f; e^{it}) &= -\varepsilon^\alpha i^{-\alpha} \int_1^\infty \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon x} e^{it}) P_\alpha(x) dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon^\alpha i^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty x^{\alpha-1} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\varepsilon x} e^{it}) dx + f(0) \end{aligned} \quad (56)$$

(здесь $P_\alpha(x)$ – функция (23)).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in H^p$, $(\alpha + 1)^{-1} < p < 1$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\omega_\alpha(n\delta; f)_p \leq C(\alpha; p) n^\alpha \omega_\alpha(\delta; f)_p. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 и неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(n\delta; f)_p &= C(\alpha; p) \|f(e^{it}) - P_{n\delta}^\alpha(f; e^{it})\|_p^p \\ &\leq C(\alpha; p) \{ \|f(e^{it}) - P_\delta^\alpha(f; e^{it})\|_p^p + \|P_\delta^\alpha(f; e^{it}) - P_{n\delta}^\alpha(f; e^{it})\|_p^p \} \\ &\leq C(\alpha; p) \{ \omega_\alpha(\delta; f)_p^p + \|P_\delta^\alpha(f; e^{it}) - P_{n\delta}^\alpha(f; e^{it})\|_p^p \}. \end{aligned} \quad (58)$$

На основании (56)

$$\begin{aligned} P_\delta^\alpha(f; e^{it}) - P_{n\delta}^\alpha(f; e^{it}) &= \delta^\alpha i^{-\alpha} \int_1^\infty \left(n^\alpha \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-n\delta x} e^{it}) - \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-\delta x} e^{it}) \right) P_\alpha(x) dx \\ &\quad + \frac{(n\delta)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} i^{-\alpha} \int_{1/n}^1 x^{\alpha-1} \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-n\delta x} e^{it}) dx. \end{aligned}$$

Отсюда (см. (24))

$$\begin{aligned} |P_\delta^\alpha(f; e^{it}) - P_{n\delta}^\alpha(f; e^{it})| &\leq 2(n\delta)^\alpha \sup_{\delta \leq x < \infty} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-x} e^{it}) \right| \int_1^\infty |P_\alpha(x)| dx \\ &\quad + (n\delta)^\alpha \sup_{\delta \leq x \leq n\delta} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(e^{-x} e^{it}) \right| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{1/n}^1 t^{\alpha-1} dt \\ &\leq C(\alpha) (n\delta)^\alpha \sup_{0 < \rho < e^{-\delta}} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}(\rho e^{it}) \right|. \end{aligned}$$

По теореме Харди–Литтлвуда (см. [12; теорема 1.8])

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sup_{0 < \rho < 1} |F(\rho e^{i\varphi})|^p d\varphi \leq C_p \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{i\varphi})|^p d\varphi.$$

Тогда, используя эту теорему, лемму 5, а затем теорему 2, получаем:

$$\begin{aligned} \|P_{\delta}^{\alpha}(f; e^{it}) - P_{n\delta}^{\alpha}(f; e^{it})\|_p^p &\leq C(\alpha, p)(n\delta)^{\alpha p} \left\| \sup_{0 < \rho < e^{-\delta}} \left| \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial t^{\alpha}}(\rho e^{it}) \right| \right\|_p^p \\ &\leq C(\alpha, p)(n\delta)^{\alpha p} \left\| \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial t^{\alpha}}(e^{-\delta} e^{it}) \right\|_p^p \\ &\leq C(\alpha, p)(n\delta)^{\alpha p} \delta^{-\alpha p} \|f(e^{it}) - P_{\delta}^{\alpha}(f; e^{it})\|_p^p \\ &\leq C(\alpha, p)n^{\alpha p} \omega_{\alpha}^p(\delta; f)_p. \end{aligned}$$

Подставляя полученное соотношение в (58), получаем (57).

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [4] доказан аналог теоремы 3 для функций из H^p , $0 < p \leq 1$, в верхней полуплоскости для модулей гладкости конечного порядка.

Список литературы

1. Тригуб Р. М. Мультипликаторы в пространстве Харди $H^p(D^m)$ при $p \in (0, 1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 4. С. 145–160.
2. Стороженко Э. А. Приближение функций класса H^p , $0 < p < 1$ // Докл. АН Арм. ССР. 1978. Т. 66. № 3. С. 145–149.
3. Стороженко Э. А. Об одной задаче Харди–Литтлвуда // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). № 4 (12). С. 564–583.
4. Soljanik A. A. On the order of approximation to function of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leq 1$) by certain of Fourier integrals // Anal. Math. 1986. V. 12. № 1. P. 59–79.
5. Прибегин С. Г. Оценка сверху и снизу скорости приближения функций класса H^p , $0 < p \leq 1$ // Деп. ГНТБ Укр. 29.06.93 № 1290-Ук93.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
7. Стороженко Э. А. Приближение функций класса H^p , $0 < p \leq 1$ // Матем. сб. 1978. Т. 105 (147). № 4. С. 601–621.
8. Стороженко Э. А. О теоремах типа Джексона в H^p , $0 < p \leq 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 946–962.
9. Прибегин С. Г. О приближении средними Чезаро функций из классов Харди // Изв. вузов. Сер. матем. 1992. № 10. С. 41–46.
10. Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). № 3. С. 395–415.
11. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
12. Duren P. L. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1981.
13. Говстолис А. В., Тригуб Р. М. Эквивалентность разных модулей гладкости в пространствах Харди // Теория приближения функций. Труды ИПММ НАН Украины. 1998. Т. 3. С. 201–210.