Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Необходимое условие равномерной минимальности системы экспонент в пространствах L^p на прямой, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 11, 137–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm613>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 10:28:00

УДК 517.5

А. М. Седлецкий

Необходимое условие равномерной минимальности системы экспонент в пространствах L^p на прямой

В статье получено необходимое условие равномерной минимальности системы весовых экспонент

$$\exp(-i\lambda_n t - a|t|^\alpha), \quad a > 0, \quad \alpha > 1,$$

в пространствах L^p , $1 \leq p < \infty$, и C_0 на прямой и на полупрямой. Условие формулируется в терминах индикатора целой функции порядка $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, нули которой совпадают с последовательностью λ_n . С помощью него доказано, что среди известных полных и минимальных систем такого вида в указанных пространствах базисов нет.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

Под B (B_+) будем понимать любое из пространств $L^p = L^p(\mathbb{R})$, $C_0 = C_0(\mathbb{R})$ ($L^p_+ = L^p(\mathbb{R}_+)$, $C^+_0 = C_0(\mathbb{R}_+)$), $1 \leq p < \infty$, где $C_0(\mathbb{R})$ ($C_0(\mathbb{R}_+)$) обозначает снабженное суп-нормой пространство непрерывных на $\mathbb{R}$ (на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$) функций таких, что $f(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \pm\infty$ ($t \rightarrow +\infty$). В статье получено необходимое условие равномерной минимальности в B и B_+ системы весовых экспонент

$$(e_n(t))_{n=0}^\infty := (e^{-i\lambda_n t} \exp(-a|t|^\alpha))_{n=0}^\infty, \quad a > 0, \quad \alpha > 1, \quad (1)$$

где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $|\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|$, $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty$.

Интерес к аппроксимационным свойствам весовых систем экспонент

$$(e^{-i\lambda_n t} g(t))_{n=0}^\infty, \quad g \in L^2, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^\infty, \quad (2)$$

в пространстве L^2 связан с теоремой Винера [1], утверждающей, что линейные комбинации сдвигов $f(t + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функции $f \in L^2$ плотны в L^2 тогда и только тогда, когда преобразование Фурье $\hat{f} \neq 0$ почти всюду. Эквивалентная формулировка (с $g = \hat{f}$) такова: линейные комбинации функций

$$(e^{-i\lambda t} g(t))_{\lambda \in \mathbb{R}}, \quad g \in L^2, \quad (3)$$

плотны в L^2 тогда и только тогда, когда $g \neq 0$ почти всюду.

При фиксированной функции g семейство (3) представляет собой континуальное множество функций, тогда как обычно в теории аппроксимации имеют дело

с системами (т.е. с последовательностями) функций. Поэтому переход от семейства (3) к системе (2), позволяющий более экономно использовать множество параметров λ , согласуется с традициями классической теории аппроксимации. При этом естественно искать последовательности Λ , не только являющиеся неплотными в $\mathbb{R}$, но и такие, что $\lambda_n \rightarrow \infty$. Следующая теорема показывает, что такой выбор возможен далеко не всегда.

ТЕОРЕМА А [2]. Пусть $g \in L^2$ и

$$|g(t)| \geq \exp(-\omega(|t|)), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\omega(t)$ — положительная неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$ с условием

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt < +\infty.$$

Тогда если последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}$ неплотна в $\mathbb{R}$, то система (2) неполна в L^2 .

Таким образом, для изучения полных в L^2 систем (2) с неплотными в $\mathbb{R}$ последовательностями Λ следует ограничиться весами $g(t)$, убывающими достаточно быстро. В настоящее время наиболее исследованным является случай веса

$$g(t) = \exp(-a|t|^\alpha), \quad a > 0, \quad \alpha > 1,$$

соответствующего системе (1). В статьях [3]–[6] получен ряд условий (как достаточных, так и необходимых) полноты системы (1) в L^2 . Однако все полные системы (1), встречающиеся в этих статьях, не являются минимальными. Впервые полная и одновременно минимальная в L^2 система (1) с $\alpha = 2$ была предъявлена в [7]. Этот результат был расширен в [8] и [9], где исследован уже некоторый класс полных и минимальных систем (1) в L^2 , но снова при $\alpha = 2$. В [10] для произвольных $a > 0$, $\alpha > 1$ построен класс целых функций, зависящих от комплексного параметра μ , и описаны значения μ , обладающие свойством: если Λ есть последовательность корней функции этого класса, то соответствующая система (1) полна и минимальна в L^p (L_+^p), $2 \leq p < \infty$. В [11] для более широкого класса целых функций этот результат распространен на пространства L^p , C_0 (L_+^p , C_0^+), $1 \leq p < 2$. В итоге, к настоящему моменту для всех $a > 0$, $\alpha > 1$ мы располагаем полными и минимальными (одновременно) системами (1) во всех пространствах B (B_+).

Стоит отметить, что в работах [3]–[6] речь, в основном, идет о вещественных последовательностях Λ (хотя некоторые результаты верны и для комплексных). Скорее всего, это вызвано некоторой оглядкой на первоисточник [1]. Но все последовательности Λ , фигурирующие в статьях [7]–[11], уже являются комплексными, и этому есть свое объяснение. Дело в том, что если, например, $\beta = \alpha/(\alpha-1) = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, а $\Lambda \subset \mathbb{R}$, то система (1) не может быть одновременно полной и минимальной в L^2 (подробно об этом сказано в [10]).

Возникает естественный вопрос: существуют ли базисы в пространствах B (B_+) среди имеющихся полных и минимальных систем (1) в этих пространствах? Мы ответим на этот вопрос, найдя необходимое условие сначала полноты и минимальности, а затем и равномерной минимальности системы (1) в B (B_+).

§ 2. Системы элементов в банаховом пространстве

Следующие определения и факты имеются, например, в [12].

Система (e_n) элементов банахова пространства B называется:

а) *полной*, если $\overline{\text{span}}(e_n) = B$;

б) *минимальной*, если для любого n

$$\rho_n := \text{dist}(e_n, \overline{\text{span}}(e_k)_{k \neq n}) > 0;$$

в) *равномерно минимальной*, если $\rho_n \geq \delta \|e_n\|$ для всех n , где $\delta > 0$ не зависит от n ;

г) *базисом*, если для любого элемента $x \in B$ существует единственный ряд по системе (e_n) , сходящийся к x :

$$x = \sum_n c_n e_n, \quad c_n - \text{скаляры.}$$

Неполнота системы (e_n) равносильна существованию нетривиального функционала $h \in B^*$, аннулирующего систему (e_n) : $(h, e_n) = 0$.

Минимальность системы (e_n) равносильна существованию системы сопряженных функционалов $(h_n) \in B^*$, т.е. таких, что $(h_m, e_n) = \delta_{mn}$. Систему (h_n) называют также *биортогональной системой* к системе (e_n) .

Если минимальная система полна, то биортогональная система единственна. В этом случае равномерная минимальность системы (e_n) равносильна условию

$$\sup_n \|e_n\| \cdot \|h_n\| < +\infty. \quad (4)$$

Если (e_n) – базис пространства B , то система (e_n) полна и равномерно минимальна.

§ 3. Необходимое условие полноты и минимальности

Всюду в дальнейшем $a > 0$, $\alpha > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $1 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $z = x + iy = re^{i\theta}$, $K(\beta, a) = \beta^{-1} \cdot (\alpha a)^{-\beta/\alpha}$; $H(\theta) = K(\beta, a) |\sin \theta|^\beta$, $\theta \in \mathbb{R}$, $H_+(\theta) = H(\theta)$, если $\sin \theta \geq 0$, и $H_+(\theta) = 0$, если $\sin \theta < 0$. Через V и V_+ обозначаем пространства функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно. При фиксированных $a > 0$, $\alpha > 1$ класс целых функций

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}(\mathbb{R}_+)} e^{-izt} \exp(-a|t|^\alpha) d\sigma(t), \quad (5)$$

где $\sigma \in V(V_+)$, обозначаем через $\mathcal{F}V$ ($\mathcal{F}V_+$). Если $d\sigma(t) = f(t) dt$, $f \in L^q(L_+^q)$, то соответствующие классы (5) обозначаем через $\mathcal{F}L^q$ ($\mathcal{F}L_+^q$). Помня, что $B^* = L^q$, V и $B_+^* = L_+^q$, V_+ при $B = L^p$, C_0 и $B_+ = L_+^p$, C_0^+ , для введенных только что классов будем использовать единообразные обозначения $\mathcal{F}B^*$ и $\mathcal{F}B_+^*$.

ЛЕММА 1. Пусть λ – корень функции (5), где

а) $\sigma \in V(V_+)$ или

б) $d\sigma(t) = f(t) dt$, $f \in L^q(L_+^q)$, $1 \leq q \leq \infty$.

Тогда

$$\frac{F(z)}{z - \lambda} = -i \int_{\mathbb{R}(\mathbb{R}_+)} e^{-izt} \exp(-a|t|^\alpha) g(t) dt, \quad (6)$$

где

$$g(t) = \exp(a|t|^\alpha + i\lambda t) \int_t^\infty \exp(-a|x|^\alpha - i\lambda x) d\sigma(x). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно записать $F(z)$ в виде

$$F(z) = - \int_{\mathbb{R}(\mathbb{R}_+)} e^{-i(z-\lambda)t} dt \int_t^\infty e^{-i\lambda x} \exp(-a|x|^\alpha) d\sigma(x),$$

затем проинтегрировать по частям и учесть, что $F(\lambda) = 0$.

ЛЕММА 2 [13; гл. 2, теорема 2.6]. Пусть $b \in \mathbb{R}$, $s > -1$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \exp(ax^\alpha + bx) \int_x^\infty \exp(-at^\alpha - bt) t^s dt &\sim \frac{1}{a\alpha x^{\alpha-1-s}}, \\ \exp(-ax^\alpha - bx) \int_0^x \exp(at^\alpha + bt) t^s dt &\sim \frac{1}{a\alpha x^{\alpha-1-s}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ фиксировано и $g(t)$ — функция (7). Тогда

- 1) если $\sigma \in V_+$, то $g(t) \in L_+^q$ при всех $1 \leq q \leq \infty$,
- 2) если в (7) $d\sigma(t) = f(t) dt$, то оператор

$$f(t) \rightarrow (1 + t^{\alpha-1})g(t)$$

ограничен в L_+^q , $1 \leq q \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|g(t)| < C\|f\|$ при $0 \leq t \leq 1$, где норма понимается соответственно в V_+ и L_+^q , то достаточно доказать лемму, заменив L_+^q на $L^q(1, +\infty)$, а оператор $f(t) \rightarrow (1 + t^{\alpha-1})g(t)$ на оператор $f(t) \rightarrow t^{\alpha-1}g(t)$.

- 1) Пусть $b = \operatorname{Im} \lambda$, $v(x) = \operatorname{var}(\sigma(t) : 0 \leq t \leq x)$. Тогда

$$\|g\| = \|g\|_{L^q(1, \infty)} = \sup_\varphi \left| \int_1^\infty \varphi(t) \exp(at^\alpha + i\lambda t) dt \int_t^\infty \exp(-ax^\alpha - i\lambda x) d\sigma(x) \right|,$$

где верхняя грань берется по $\varphi \in L^p(1, \infty)$, $\|\varphi\| = 1$. Значит,

$$\begin{aligned} \|g\| &\leq \sup_\varphi \int_1^\infty \exp(-ax^\alpha + bx) dv(x) \int_1^x \exp(at^\alpha - bt) |\varphi(t)| dt \\ &\leq \int_1^\infty \exp(-ax^\alpha + bx) \cdot \|\exp(at^\alpha - bt)\|_{L^q(1, x)} dv(x). \end{aligned} \quad (8)$$

При подходящем $A > 0$ функция $\exp(at^\alpha - bt)$ возрастает на полупрямой $t \geq A$, поэтому в случае $q = \infty$ для достаточно больших x присутствующая в (8) норма не превосходит $C \exp(ax^\alpha - bx)$ и, значит, правая часть в (8) конечна. Если $q < \infty$, то по лемме 2 указанная норма не превосходит $Cx^{(1-\alpha)/q} \exp(ax^\alpha - bx)$, и снова правая часть в (8) конечна. Утверждение 1) доказано.

2) Пусть сначала $q = \infty$. Тогда при $t > 1$ по лемме 2

$$|g(t)| \leq \|f\|_{\infty} \cdot \exp(at^{\alpha} - bt) \int_t^{\infty} \exp(-ax^{\alpha} + bx) dx \leq C \|f\|_{\infty} \cdot t^{1-\alpha}$$

и, значит, при $q = \infty$ утверждение 2) верно. Если же $q = 1$, то

$$\begin{aligned} \|g(t)t^{\alpha-1}\|_{L^1(1,\infty)} &\leq \int_1^{\infty} \exp(at^{\alpha} - bt)t^{\alpha-1} dt \int_t^{\infty} \exp(-ax^{\alpha} + bx)|f(x)| dx \\ &= \int_1^{\infty} |f(x)| \exp(-ax^{\alpha} + bx) dx \int_1^x \exp(at^{\alpha} - bt)t^{\alpha-1} dt \\ &\leq C \|f\|_{L^1(1,\infty)} \end{aligned}$$

в силу леммы 2 с $s = \alpha - 1$. При $q = 1$ утверждение 2) верно.

По теореме Рисса–Торина из доказанных случаев $q = 1, \infty$ следует справедливость утверждения 2) при всех $1 \leq q \leq \infty$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда справедливо представление (6), где

- а) $g \in L^q (L_+^q)$ при всех $1 \leq q \leq \infty$ или
- б) $(1 + |t|^{\alpha-1})g(t) \in L^q (L_+^q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай полупрямой $\mathbb{R}_+$ в (5) сразу следует из лемм 1 и 3. Пусть интегрирование в (5) ведется по всей прямой $\mathbb{R}$. Тогда в силу леммы 3 остается показать, что

- а) $g \in L_-^q$ или
- б) $(1 + |t|^{\alpha-1})g(t) \in L_-^q$,

где $L_-^q = L^q(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+)$.

Так как $F(\lambda) = 0$, то при $t < 0$ равенство (7) записывается в виде

$$g(t) = \exp(a|t|^{\alpha} + i\lambda t) \int_{-|t|}^{-\infty} \exp(-a|x|^{\alpha} - i\lambda x) d\sigma(x),$$

и, значит, заменяя x на $-x$, мы представляем $g(t)$ в виде

$$g(t) = \exp(a|t|^{\alpha} - i\lambda|t|) \int_{|t|}^{+\infty} \exp(-ax^{\alpha} + i\lambda x) d\sigma(-x),$$

к которому уже применима лемма 3. Из нее все и следует. Лемма 4 доказана.

Так как $\mathcal{F}L^1 \subset \mathcal{F}V$, то непосредственным следствием леммы 4 является

ЛЕММА 5. Пусть λ – корень функции $F(z) \in \mathcal{F}B^* (\mathcal{F}B_+^*)$. Тогда

$$\frac{F(z)}{z - \lambda} \in \mathcal{F}B^* (\mathcal{F}B_+^*).$$

Для случая $B = L^q$ лемма 5 доказана в [14], где содержится и лемма 1. Доказательство леммы 3 построено модификацией доказательства из [14].

Из леммы 5 сразу следует, что в ее условиях

$$\frac{z - \mu}{z - \lambda} F(z) = F(z) + (\lambda - \mu) \frac{F(z)}{z - \lambda} \in \mathcal{F}B^* (\mathcal{F}B_+^*). \quad (9)$$

Впредь вместо (1) рассматриваем более общую систему

$$e(\Lambda) := ((it)^{k-1} e^{-i\lambda_n t} \exp(-a|t|^\alpha))_{k=1}^{m_n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad \Lambda = (\lambda_n), \quad (10)$$

подразумевая, что каждая точка λ_n в Λ считается со своей кратностью m_n . Так как неполнота системы $e(\Lambda)$ в $B(B_+)$ равносильна существованию нетривиальной целой функции $F(z)$ класса $\mathcal{F}B^* (\mathcal{F}B_+^*)$ такой, что $F(\Lambda) = 0$ (обращение в нуль понимается с учетом кратностей), то из формулы (9) следует

ЛЕММА 6. *Замена в последовательности Λ конечного числа точек λ_n конечным числом других точек μ_s той же суммарной кратности не нарушает полноты системы $e(\Lambda)$ в $B(B_+)$.*

ЛЕММА 7. 1) Пусть $F(z) \in \mathcal{F}V (\mathcal{F}V_+)$ и $F(\lambda) = 0$. Тогда

$$\frac{F(z)}{z - \lambda} \in \mathcal{F}L^q (\mathcal{F}L_+^q)$$

при всех $1 \leq q \leq \infty$.

2) Пусть $F(z) \in \mathcal{F}L^q (\mathcal{F}L_+^q)$, $1 < q \leq \infty$. Тогда найдется $l = l(q) \in \mathbb{N}$ такое, что если $F(\lambda_i) = 0$, $i = \overline{1, l}$, то

$$F_l(z) := \frac{F(z)}{(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_l)} \in \mathcal{F}B^* (\mathcal{F}B_+^*)$$

для всех пространств $B(B_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) есть переформулировка части а) леммы 4. Утверждение 2) докажем для пространства B ; случай пространства B_+ рассматривается аналогично.

По утверждению б) леммы 4 функция $F_1(z) = F(z)/(z - \lambda_1)$ представима в виде (6), где $(1 + |t|^{\alpha-1})g(t) \in L^q$.

Пусть сначала q конечно. Тогда $g(t) \in L^{q/\alpha}$. Действительно, принадлежность $g(t) \in L^{q/\alpha}(-1, 1)$ тривиальна, а по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{|t|>1} |g(t)|^{q/\alpha} dt &= \int_{|t|>1} (|g(t)| \cdot |t|^{\alpha-1})^{q/\alpha} \cdot |t|^{-q/\beta} dt \\ &\leq \left(\int_{|t|>1} (|g(t)| \cdot |t|^{\alpha-1})^q dt \right)^{1/\alpha} \cdot \left(\int_{|t|>1} |t|^{-q} dt \right)^{1/\beta}. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части конечен по предположению, а второй – по условию $q > 1$. Итак, $g(t) \in L^{q/\alpha}$ и $g(t) \in L^q$. Значит, $g(t) \in L^s$ при всех $s \in [q/\alpha, q]$.

Теперь, выбирая в роли q число q/α и повторяя рассуждения, получаем, что функция $F_2(z) = F_1(z)/(z - \lambda_2)$ представима в виде (6), где $g(t) \in L^s$ при всех

$s \in [q/\alpha^2, q/\alpha]$. Следовательно, взяв в качестве N наименьшее натуральное n , для которого $q/\alpha^n \leq 1$, через N шагов получаем

$$F_N(z) = \frac{F(z)}{(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_N)} \in \mathcal{FL}^1 \subset \mathcal{FV},$$

где $F(\lambda_i) = 0$. Пусть $l = N + 1$, $F(\lambda_l) = 0$. Тогда по утверждению 1) $F_l(z) = F_N(z)/(z - \lambda_l) \in \mathcal{FB}^*$ для всех пространств B . Случай конечного q рассмотрен.

Случай $q = \infty$ сразу сводится к рассмотренному, так как по лемме 4 функция $F(z)/(z - \lambda_1)$ представима в виде (6) с $(1 + |t|^{\alpha-1})g(t) \in L^\infty$. Отсюда $g(t) \in L^s$ при конечном $s > 1/(\alpha - 1)$. Лемма 7 доказана.

Так как каждая точка в Λ считается со своей кратностью, то под удалением из Λ l точек будем понимать понижение на l суммарной кратности некоторого конечного множества точек Λ .

Из леммы 7 сразу вытекает следующая лемма, в которой для единообразия формулировок полагаем $L^\infty = C_0$, $L_+^\infty = C_0^+$.

ЛЕММА 8. Пусть система (10) неполна в L^s (L_+^s) при некотором $1 \leq s \leq \infty$. Тогда существует число $l = l(s) \in \mathbb{N}$ такое, что при удалении из Λ l точек новая система неполна во всех пространствах L^p (L_+^p), $1 \leq p \leq \infty$.

Нам понадобится функция типа Миттаг-Леффлера (см. [15])

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

ЛЕММА 9 [15]. Пусть $\rho > 1$, $\gamma \in (\pi/(2\rho), \pi/\rho)$. Тогда для любого $s \in \mathbb{N}$ при $r \rightarrow \infty$

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} \exp(z^\rho) - \sum_{k=1}^s \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O\left(\frac{1}{r^{s+1}}\right), \quad |\theta| \leq \gamma,$$

$$E_\rho(z; \mu) = - \sum_{k=1}^s \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\rho)} + O\left(\frac{1}{r^{s+1}}\right), \quad \gamma \leq |\theta| \leq \pi.$$

Через H_-^2 обозначаем пространство Харди в нижней полуплоскости $y < 0$. Функции $H(\theta)$, $H_+(\theta)$ определены в начале §3.

ЛЕММА 10 [16]. Пусть $G(z)$ — целая функция. Тогда

1) принадлежность $G(z) \in \mathcal{FL}^2$ равносильна условию

$$\|G\|^2 := \iint_{\mathbb{R}^2} |G(z)|^2 \exp(-2H(\theta)r^\beta)(1 + |y|^{\beta/2-1}) dx dy < \infty, \quad (11)$$

2) принадлежность $G(z) \in \mathcal{FL}_+^2$ равносильна тому, что $G(z) \in H_-^2$ и конечна величина $\|G\|_+^2$, равная части интеграла (11), взятой по верхней полуплоскости $y > 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть система $e(\Lambda)$ полна и минимальна в B (B_+). Тогда существует целая функция $F(z)$ порядка β такая, что:

- 1) индикатор $h_F(\theta)$ функции $F(z)$ подчиняется оценке

$$h_F(\theta) \leq H(\theta) \quad (h_F(\theta) \leq H_+(\theta)), \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

причем любой отрезок длины π/β содержит хотя бы одну точку, для которой в (12) имеет место знак равенства;

- 2) множество корней функции $F(z)$ совпадает с Λ ;
 3) $F(z) \notin \mathcal{F}B^*$ ($\mathcal{F}B_+^*$);
 4) $F(z)/(z - \lambda_0) \in \mathcal{F}B^*$ ($\mathcal{F}B_+^*$).

При условии нормировки $F(\mu) = 1$, $\mu \notin \Lambda$, функция $F(z)$ единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$e_{n,k} = (it)^{k-1} e^{-i\lambda_n t} \exp(-a|t|^\alpha), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad k = \overline{1, m_n}.$$

По условию система $e_{n,k}$ минимальна в B (B_+) и потому обладает биортогональной системой $h_{n,k}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $k = \overline{1, m_n}$, т.е. $(h_{m,j}, e_{n,k}) = 1$, если $m = n$, $j = k$, и $(h_{m,j}, e_{n,k}) = 0$ во всех остальных случаях. Отождествляя функционал с функцией, его представляющей, положим

$$F_0(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} \exp(-a|t|^\alpha) h_{0,m_0}(t) dt, \quad h_{0,m_0} \in L^q, \quad (13)$$

если $B = L^p$; если же $B = C_0$, то в (13) вместо $h_{0,m_0}(t) dt$ присутствует $dh_{0,m_0}(t)$, где $h_{0,m_0}(t) \in V$. Когда речь идет о пространстве B_+ , интегрирование в (13) ведется по $\mathbb{R}_+$. В силу биортогональности функция $F_0(z)$ обращается в нуль в точках последовательности Λ_0 , полученной из Λ понижением на единицу кратности точки λ_0 . Утверждается, что Λ_0 есть в точности множество всех корней функции $F_0(z)$. Действительно, если бы $F_0(\mu) = 0$, $\mu \notin \Lambda$, то в силу (13) система $e(\Lambda_0 \cup \{\mu\})$ аннулировалась бы нетривиальным функционалом на B (B_+), представляемым функцией $h_{0,m_0}(t)$, и, следовательно, была бы неполной в B (B_+). По лемме 6 и система $e(\Lambda)$ была бы неполной, что противоречит условию. По тем же соображениям кратность корня λ_n функции $F_0(z)$ равна m_n при $n \neq 0$ и равна $m_0 - 1$ при $n = 0$.

Положим $F(z) = (z - \lambda_0)F_0(z)$. Тогда утверждения 2), 4) имеют место. Утверждение 3) следует из полноты системы $e(\Lambda)$ в B (B_+).

Обозначим через ρ порядок $F(z)$. Из (13) следует (см., например, [16]), что $\rho \leq \beta$ и что индикатор функции $F(z)$ при порядке β не превосходит $H(\theta)$. Если речь идет о пространстве B_+ , то интеграл в (13) берется по $\mathbb{R}_+$ и, значит, функция $F_0(z)$ ограничена в нижней полуплоскости. Значит, в этом случае $h_F(\theta) \leq 0$, $-\pi \leq \theta \leq 0$, и мы доказали (12).

Докажем единственность функции $F(z)$, нормированной условием $F(\mu) = 1$, $\mu \notin \Lambda$. Пусть $G(z)$ — целая функция со свойствами, перечисленными в теореме 1, и пусть $G(\mu) = 1$. Покажем, что $G(z) \equiv F(z)$.

Пусть $R(z) = G(z) - F(z) \not\equiv 0$. По предположению $R(\Lambda \cup \{\mu\}) = 0$ и $R(z)/(z - \lambda_0) \in \mathcal{F}B^*$ ($\mathcal{F}B_+^*$). В силу формулы (9) функция $R(z)/(z - \mu) \in \mathcal{F}B^*$

($\mathcal{F}B_+^*$). Так как эта функция обращается в нуль в точках Λ , то система $e(\Lambda)$ неполна в $B(B_+)$, что противоречит условию. Итак, $G(z) \equiv F(z)$.

Из доказанного утверждения 4) и из леммы 7 следует, что

$$F_l(z) = \frac{F_0(z)}{(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_l)} \in \mathcal{F}L^2(\mathcal{F}L_+^2) \quad (14)$$

при некотором $l \in \mathbb{N}$. Оставшиеся утверждения о порядке и об индикаторе достаточно доказать для функции $F_l(z)$. Предположим противное: $\rho < \beta$. Фиксируем отрезок $[\gamma_1, \gamma_2] = (\theta : |\theta - \theta_0| \leq \pi/(2\beta))$ так, чтобы $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \pi$. Тогда, выбирая ε из условия $0 < 2\varepsilon < \min(H(\theta) : \theta \in [\gamma_1, \gamma_2])$, при подходящем $\delta > 0$ и при $r > r_0$ имеем

$$|F_l(z)| < \exp(r^{\beta-\delta}) < \exp(r^\beta(H(\theta) - 2\varepsilon)), \quad |\theta - \theta_0| \leq \frac{\pi}{2\beta}. \quad (15)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$E(z) = \frac{1}{\beta} E_\beta(\varepsilon^{1/\beta} z e^{-i\theta_0}; 1),$$

где $E_\rho(z; \mu)$ — функция типа Миттаг-Леффлера. Из леммы 9 вытекает, что при $r > r_1$

$$\begin{aligned} |E(z)| &< 2 \exp(\varepsilon r^\beta \cos \beta(\theta - \theta_0)) \leq 2 \exp(\varepsilon r^\beta), \quad |\theta - \theta_0| \leq \frac{\pi}{2\beta}, \\ |E(z)| &\leq M < \infty, \quad \frac{\pi}{2\beta} \leq |\theta - \theta_0| \leq \pi. \end{aligned}$$

Отсюда и из (15) вытекает, что для функции $G(z) := F_l(z)E(z)$ при $r > r_2$ верны оценки

$$|G(z)| < 2 \exp(r^\beta(H(\theta) - \varepsilon)), \quad |\theta - \theta_0| \leq \frac{\pi}{2\beta}, \quad (16)$$

$$|G(z)| \leq M |F_l(z)|, \quad \frac{\pi}{2\beta} \leq |\theta - \theta_0| \leq \pi. \quad (17)$$

Из (14) по лемме 10 следует, что $\|F_l\|^2 < \infty$ ($\|F_l\|_+^2 < \infty$ и $F_l(z) \in H_-^2$). Покажем, что $\|G\|^2 < \infty$ ($\|G\|_+^2 < \infty$ и $G(z) \in H_-^2$).

Введем дополняющие друг друга до всей плоскости секторы $S_1 = (z : |\theta - \theta_0| \leq \pi/(2\beta))$ и $S_2 = (z : \pi/(2\beta) \leq |\theta - \theta_0| \leq \pi)$. Пусть $P_\pm = (z : y \gtrless 0)$; заметим, что $S_2 \supset P_-$. Тогда

$$\|G\|^2 = I_1 + I_2 = \int_{S_1} + \int_{S_2}, \quad \|G\|_+^2 = I_1 + I_2 = \int_{S_1} + \int_{S_2 \cap P_+}$$

с той же подынтегральной функцией, что в (11).

Из (17) и из того, что $\|F_l\|^2, \|F_l\|_+^2 < \infty$, следует, что в обоих случаях $I_2 < \infty$, а в силу (16)

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} |G(z)|^2 (1 + |y|)^{\beta/2-1} \cdot \exp(-2H(\theta)r^\beta) dx dy \\ &\leq 4 \iint_{S_1} (1 + |y|)^{\beta/2-1} \cdot \exp(-2\varepsilon r^\beta) dx dy < \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Значит, $\|G\|^2, \|G\|_+^2 < \infty$. В случае пространства B_+ из свойства $F_l(z) \in H_-^2$ и из (17) следует, что $G(z) \in H_-^2$. По лемме 10 $G(z) \in \mathcal{FL}^2(\mathcal{FL}_+^2)$. Значит, система $e(M)$, где M – последовательность корней функции $G(z)$, неполна в $L^2(L_+^2)$. Но M получается присоединением к $\Lambda \setminus (\lambda_i)_{i=0}^l$ бесконечного множества точек – корней функции $E(z)$ (при $\rho \neq 1$ функция $E_\rho(z; \mu)$ имеет бесконечное множество корней [15]). Заменяя в M $l + 1$ точек точками λ_i , $i = \overline{0, l}$, имеем, что система $e(M_1)$, где M_1 получена присоединением к Λ бесконечного множества точек, неполна в $L^2(L_+^2)$. В силу леммы 8 это противоречит тому, что система $e(\Lambda)$ полна в $B(B_+)$. Мы доказали, что $\rho = \beta$.

Осталось доказать часть утверждения 1) о знаке равенства в (12) для индикатора $h(\theta)$ функции $F_l(z)$. Предположим противное: при некотором θ_0 в (12) имеет место знак $<$ для всех $\theta \in [\theta_0 - \pi/(2\beta), \theta_0 + \pi/(2\beta)]$. Сначала рассмотрим случай пространства B , т.е. пусть на указанном отрезке $h(\theta) < H(\theta)$. В силу непрерывности обеих функций имеем $h(\theta) < H(\theta) - 3\varepsilon$, $|\theta - \theta_0| < \pi/(2\beta)$, при подходящем $\varepsilon > 0$. Значит, неравенство (15) верно для крайних его членов. Отсюда вытекают оценки (16), (17), а затем повторяются следующие за ними рассуждения. Они приводят к тому, что $G(z) \in \mathcal{FL}^2$ в случае пространства B .

Пусть речь идет о пространстве B_+ . Тогда в правых частях (15) и (16) $H(\theta)$ заменяется на $H_+(\theta)$, а (17) сохраняется.

Если отрезок $[\gamma_1, \gamma_2] = (\theta : |\theta - \theta_0| \leq \pi/(2\beta))$ лежит на $[0, \pi]$, то $H_+(\theta) = H(\theta)$ для $\theta \in [\gamma_1, \gamma_2]$ и сохраняются предыдущие рассуждения, основанные на (16), (17) и касающиеся пространства B . Получаем, что $G(z) \in \mathcal{FL}_+^2$.

Если $[\gamma_1, \gamma_2] \subset [-\pi, 0]$, то в (15) и (16) следует положить $H(\theta) = 0$. Тогда из (16), (17), а также из того, что $\|F_l\|_+^2 < \infty$ и $F_l(z) \in H_-^2$, следует, что $\|G\|_+^2 < \infty$ и $G(z) \in H_-^2$. По лемме 10 $G(z) \in \mathcal{FL}_+^2$.

Остается разобрать случаи $0 \in (\gamma_1, \gamma_2)$ и $\pi \in (\gamma_1, \gamma_2)$. В силу аналогии ограничимся первым из них. Итак, пусть $\gamma_1 < 0 < \gamma_2$ и $S_+ = (z : 0 < \arg z < \gamma_2)$. Оценка (16) сохраняется для $0 < \theta < \gamma_2$, а при $\gamma_1 < \theta < 0$ в ней следует положить $H(\theta) = 0$. Отсюда, из (17) и из того, что $F_l(z) \in H_-^2$, следует, что $G(z) \in H_-^2$. Пусть I_+ , I – части интеграла (11), взятые по S_+ и по дополнению S_+ до верхней полуплоскости $y > 0$. Тогда $I < \infty$ в силу свойства $\|F_l\|_+^2 < \infty$ и (17), а для I_+ повторяется выкладка (18), показывающая, что $I_+ < \infty$. В итоге, $\|G\|_+^2 < \infty$ и по лемме 10 $G(z) \in \mathcal{FL}_+^2$.

Итак, в случае пространства $B(B_+)$ мы имеем свойство $G(z) \in \mathcal{FL}^2(\mathcal{FL}_+^2)$. Остается повторить концовку доказательства равенства $\rho = \beta$, что приводит к противоречию. Теорема 1 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть система $e(\Lambda)$ полна и минимальна в $B(B_+)$. Тогда целую функцию $F(z)$ со свойствами, перечисленными в теореме 1, назовем *порождающей функцией* системы $e(\Lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть система $e(\Lambda)$ полна и минимальна в $L^p(L_+^p)$, $1 \leq p < \infty$, и пусть все точки λ_n , начиная с некоторой, просты. Тогда при $n > n_1$ формулы для биортогональной системы $h_n(t) = h_{n,1}(t) \in L^q(L_+^q)$ имеют вид

$$F_n(z) := \frac{F(z)}{F'(\lambda_n)(z - \lambda_n)} = \int_{\mathbb{R}(R_+)} e^{-izt} \exp(-a|t|^\alpha) h_n(t) dt, \quad h_n \in L^q(L_+^q), \quad (19)$$

где $F(z)$ – порождающая функция системы $e(\Lambda)$.

Действительно, по лемме 6 и по формуле (9) функция $F_n(z)$ при $n > n_0$ представима в виде правой части (19). Так как $F(\lambda_n) = 1$ и $F(\Lambda \setminus \{\lambda_n\}) = 0$, то $h_n(t)$ – элемент биортогональной системы к системе $e(\Lambda)$. Остается учесть, что в случае полноты и минимальности биортогональная система единственна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $B = C_0$ ($B_+ = C_0^+$), то в формулах (19) следует заменить $h_n(t) dt$ на $dh_n(t)$, где $h_n(t) \in V(V_+)$.

§ 4. Необходимое условие равномерной минимальности

ЛЕММА 11. Пусть функция $F(z)$ аналитична в угле $\varphi \leq \arg z \leq \psi$ и имеет в нем порядок $\rho \in (0, \infty)$ и конечный тип при порядке ρ , пусть $h_F(\theta)$ – индикатор функции $F(z)$ при порядке ρ . Тогда

$$h_{F'}(\theta) \leq h_F(\theta), \quad \varphi < \theta < \psi. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\theta \in (\varphi, \psi)$ и столь большое r_0 , что при $r > r_0$ круг $(w : |w - z| < 1)$, где $z = re^{i\theta}$, попадает в сектор $\varphi < \arg z < \psi$. Пусть γ – граница этого круга. Из формулы Коши следует, что

$$|F'(z)| \leq |F(w(z))|, \quad (21)$$

где $w(z)$ – некоторая точка γ . По свойству индикатора

$$|F(w)| < \exp\left(|w|^\rho \left(h_F(\arg w) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right), \quad |w| > R_0(\varepsilon), \quad \varphi \leq \arg w \leq \psi.$$

Отсюда, из (21) и из непрерывности индикатора вытекает оценка

$$|F'(z)| < \exp((r+1)^\rho (h_F(\theta) + \varepsilon)), \quad r > r_1,$$

дающая требуемое неравенство (20). Лемма 11 доказана.

Встречающаяся далее константа $K(\beta, a)$ введена в начале § 3.

ЛЕММА 12 [7]. Пусть $p > 0$. Тогда при $y \rightarrow +\infty$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp(p(yt - at^\alpha)) dt \sim Cy^{\beta/\alpha - \beta/2} \cdot \exp(pK(\beta, a)y^\beta), \quad C = C(p, \alpha) > 0.$$

Положим $e_n = e_n(t)$ (см. (1)), $y_n = \operatorname{Im} \lambda_n$, $\varphi_n = \arg \lambda_n$. Норму в B и B_+ обозначаем соответственно через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_+$. В лемме 13 для единообразия формулировок считаем, что показатель $p = \infty$ отвечает пространствам $B = C_0$ и $B_+ = C_0^+$. Положительные константы C в лемме 13 зависят от $B(B_+)$.

- ЛЕММА 13. 1) $\|e_n\|, \|e_n\|_+ \geq C(1 + |y_n|)^{-1/p}$,
 2) $\|e_n\|_+ \sim C y_n^{(\beta/\alpha - \beta/2)/p} \exp(|\lambda_n|^\beta H(\varphi_n))$, если $y_n \rightarrow +\infty$,
 3) $\|e_n\| \sim C |y_n|^{(\beta/\alpha - \beta/2)/p} \exp(|\lambda_n|^\beta H(\varphi_n))$, если $y_n \rightarrow \pm\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как 3) следует из 1), 2), то надо доказать 1), 2). Пусть сначала $1 \leq p < \infty$. Так как $|e_n(t)| = \exp(y_n t - a|t|^\alpha)$, то

$$\|e_n\|^p, \|e_n\|_+^p > C \int_0^1 \exp(p y_n t) dt = C \frac{\exp(p y_n) - 1}{p y_n}$$

и утверждение 1) верно. Утверждение 2) содержится в лемме 12.

Если $p = \infty$, т.е. $B = C_0$, $B_+ = C_0^+$, то $\|e_n\|, \|e_n\|_+ \geq 1$ и, значит, утверждение 1) верно. Утверждение 2) следует из свойства

$$\max(\exp(yt - at^\alpha) : t \in \mathbb{R}_+) = \exp(K(\beta, a)y^\beta), \quad y > 0,$$

проверяемого дифференцированием. Лемма 13 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть система $e(\Lambda)$ полна и минимальна в B (B_+), и пусть все точки λ_n , начиная с некоторой, просты. Тогда если система $e(\Lambda)$ равномерно минимальна в B (B_+), то для индикатора $h_F(\theta)$ порождающей функции $F(z)$ системы $e(\Lambda)$ в каждой точке θ_0 , предельной для последовательности $\varphi_n = \arg \lambda_n$, имеет место равенство

$$h_F(\theta_0) = H(\theta_0) \quad (h_F(\theta_0) = H_+(\theta_0)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $h_F(\theta_0) < H(\theta_0)$ ($H_+(\theta_0)$). Тогда, используя непрерывность индикатора и лемму 11, заключаем, что при подходе $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $\delta > 0$ в случае пространства B верна оценка

$$h_{F'}(\theta) < H(\theta) - 2\varepsilon, \quad |\theta - \theta_0| \leq \delta.$$

Значит, при $|\theta - \theta_0| \leq \delta$, $r > r_0$

$$|F'(re^{i\theta})| < \exp(r^\beta (h_{F'}(\theta) + \varepsilon)) < \exp(r^\beta (H(\theta) - \varepsilon)).$$

В частности, если $|\varphi_n - \theta_0| \leq \delta$, то

$$|F'(\lambda_n)| < \exp(|\lambda_n|^\beta (H(\varphi_n) - \varepsilon)). \quad (22)$$

Если речь идет о пространстве B_+ , то в (22) $H(\varphi_n)$ заменяется на $H_+(\varphi_n)$. По определению точки θ_0 неравенство (22) выполняется для некоторой последовательности индексов $n = n_k \rightarrow \infty$.

В дальнейшем нормы в пространствах L^q , L_+^q , V , V_+ обозначаем соответственно через $\|\cdot\|_q$, $\|\cdot\|_q^+$, $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_V^+$.

Пусть сначала $B = L^p$. Если $1 < q \leq 2$, то из формул (19) по теореме Хаусдорфа–Юнга следует, что

$$\|F_n(x)\|_p \leq C_p \|\exp(-a|t|^\alpha) h_n(t)\|_q$$

и, значит,

$$\|h_n\|_q \geq M_p \|F_n(x)\|_p. \quad (23)$$

Если $2 < q \leq \infty$, то по неравенству Гёльдера

$$\|\exp(-a|t|^\alpha)h_n(t)\|_2 \leq C_q \|h_n(t)\|_q$$

и, используя равенство Парсеваля, из (19) находим

$$\|h_n\|_q \geq M_p \|F_n(x)\|_2, \quad 2 < q \leq \infty. \quad (24)$$

Пусть $B = C_0$. Тогда по замечанию 2 в (19) вместо $h_n(t) dt$ присутствует $dh_n(t)$, где $h_n(t) \in V$. Очевидно,

$$\|h_n\|_V \geq \text{var } h_n \geq \|F_n(x)\|_{C(\mathbb{R})}. \quad (25)$$

Если речь идет о пространстве B_+ , то в полученных оценках (23)–(25) нормы $\|h_n\|_q$ и $\|h_n\|_V$ заменяются нормами $\|h_n\|_q^+$ и $\|h_n\|_V^+$.

Итак, во всех рассматриваемых случаях мы получили однотипные оценки (23)–(25) для норм элементов биортогональной системы. Поэтому конец доказательства достаточно провести для одного из этих случаев. Пусть для определенности $B = L^p$ ($B_+ = L_+^p$), $2 \leq p < \infty$; тогда верна оценка (23) с указанной выше заменой при переходе от B к B_+ .

Если $1 < x \leq |\lambda_n|$, то

$$\left| \frac{x}{x - \lambda_n} \right| \geq \frac{1}{2|\lambda_n|}$$

и, значит, при $n > n_1$

$$\left\| \frac{F(x)}{x - \lambda_n} \right\|_p = \left\| \frac{F(x)}{x} \frac{x}{x - \lambda_n} \right\|_p \geq \frac{1}{2|\lambda_n|} \left\| \frac{F(x)}{x} \right\|_{L^p(1, |\lambda_n|)} > \frac{C}{|\lambda_n|}.$$

Отсюда, из (22), (23) следует, что в случае пространства B

$$\|h_n\|_q \geq \frac{C}{|\lambda_n|} \exp(|\lambda_n|^\beta (\varepsilon - H(\varphi_n))), \quad n = n_k \rightarrow \infty, \quad (26)$$

а в случае пространства B_+ в (26) $\|h_n\|_q$ и $H(\varphi_n)$ заменяются соответственно на $\|h_n\|_q^+$ и $H_+(\varphi_n)$.

Если $\theta_0 \neq 0, \pm\pi$, то из (26) и из утверждений 1)–3) леммы 13 вытекает, что

$$\|e_n\| \cdot \|h_n\|, \|e_n\|_+ \cdot \|h_n\|_+ > C|\lambda_n|^{-2} \exp(\varepsilon|\lambda_n|^\beta), \quad n = n_k \rightarrow \infty,$$

и критерий (4) равномерной минимальности нарушен.

Пусть $\theta_0 = 0, \pm\pi$; тогда $H(\varphi_n), H_+(\varphi_n) \rightarrow 0, n = n_k \rightarrow \infty$. По утверждению 1) леммы 13 $\|e_n\|, \|e_n\|_+ > C(1 + |y_n|)^{-1}$, что вместе с (26) дает оценку

$$\|e_n\| \cdot \|h_n\| > \frac{C}{|\lambda_n|^2} \exp(|\lambda_n|^\beta (\varepsilon - H(\varphi_n))) > C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} |\lambda_n|^\beta\right), \quad n = n_k > N, \quad (27)$$

и аналогичную оценку для $\|e_n\|_+ \cdot \|h_n\|_+$ (в этом случае в (27) появится $H_+(\varphi_n)$ вместо $H(\varphi_n)$, но на правую часть это не повлияет). Снова получено противоречие с (4). Теорема 2 доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть порождающая функция $F(z)$ системы $e(\Lambda)$ имеет вполне регулярный рост. Тогда если система $e(\Lambda)$ равномерно минимальна в B (B_+), то

$$h_F(\theta) = H(\theta) \quad (h_F(\theta) = H_+(\theta)), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad (28)$$

где $h_F(\theta)$ — индикатор функции $F(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначив $h(\theta) = h_F(\theta)$, предположим противное. В силу теоремы 1 это будет означать, что в некоторой точке $\theta \in [-\pi, \pi]$ имеет место неравенство

$$h(\theta) < H(\theta) \quad (h(\theta) < H_+(\theta)). \quad (29)$$

В силу непрерывности участвующих функций и по утверждению 1) теоремы 1 найдется интервал (a, b) такой, что неравенство (29) выполнено для всех его точек, а в точках $\theta = a, b$ имеет место равенство (28), причем $b - a \leq \pi/\beta$.

По теореме 2 ни одна точка интервала (a, b) не является предельной для последовательности $(\arg \lambda_n)$. Отсюда в силу полной регулярности роста функции $F(z)$ следует [17; гл. 3, § 3], что на отрезке $[a, b]$ индикатор $h(\theta)$ есть β -тригонометрическая функция, т.е.

$$h(\theta) = A \cos \beta(\theta - \gamma),$$

где A, γ — некоторые числа. Убедимся, что равенство (28) при $\theta = a, b$ несовместимо с условием $b - a \leq \pi/\beta$.

Случай $A = 0$ тривиален. Тогда $h(\theta) = H_+(\theta)$ на $[-\pi, 0]$, значит, в случае пространства B_+ участвующая в (29) точка $\theta \in (0, \pi)$. В случае пространства B либо $\theta \in (0, \pi)$, либо $\theta \in (-\pi, 0)$. В обоих случаях $b - a = \pi > \pi/\beta$.

Пусть $A \neq 0$. В точках $\theta = 0, \pm\pi$ равенство (28) невозможно. Действительно, если $h(\theta) = 0$, то $h(t) > H(t)$ для некоторых точек t из сколь угодно малой окрестности точки θ , так как $H'(\theta) = 0$, тогда как $h'(\theta) \neq 0$. Это дает противоречие с (12). По той же причине в случае пространства B_+ равенство (28) невозможно для точек $\theta \in [-\pi, 0]$. Значит, ввиду четности $H(\theta)$ достаточно рассмотреть случай равенства (28) в точке $\theta^* \in (0, \pi)$.

Так как $h(\theta^*) > 0$, то в силу (12) найдутся точки $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$, $\theta_2 = \theta_1 + \pi/\beta$, такие, что $h(\theta) > 0$ на (θ_1, θ_2) и $h(\theta_1) = h(\theta_2) = 0$. Так как $H(\theta_1) > 0$, то $h(\theta) < H(\theta)$ на $[\theta_1, \theta_1 + \delta]$ при некотором $\delta > 0$. На интервале $(\theta_1 - \pi/\beta, \theta_1)$ это неравенство очевидно, так как на нем $h(\theta) < 0$, а $H(\theta), H_+(\theta) \geq 0$. В итоге мы получили, что неравенство $h(\theta) < H(\theta)$ выполняется на интервале $(\theta_1 - \pi/\beta, \theta_1 + \delta)$ длины большей чем π/β . А это противоречит теореме 1. Теорема 3 доказана.

§ 5. Отсутствие базисов

Рассмотрим систему

$$\left(e^{-i\lambda_n t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right), \quad \Lambda = (\lambda_n), \quad (30)$$

где

$$\Lambda = \bigcup_{k=0}^3 \left(2\sqrt{\pi(n+h)} \exp \left(i \left(\gamma + \frac{\pi}{2} k \right) \right) \right)_{n=1}^{\infty} \cup \{\lambda_1\} \cup \{\lambda_2\}, \quad (31)$$

$$h > -1, \quad \gamma \in \left[0, -\frac{\pi}{2} \right),$$

причем точки $\lambda_1 \neq \lambda_2$ не принадлежат предыдущему множеству в (31). Заметим, что система (30) отвечает случаю $\alpha = 2$ в более общей системе (1). Первый пример полной и минимальной системы (1) в L^2 с $\alpha = 2$ Р. Залик и А. Т. Саад [7] нашли как раз в классе (30)–(31). А именно в [7] показано, что если $h = 0$, $\gamma = \pi/4$, то система (30)–(31) полна и минимальна в L^2 . Этот результат был расширен Т. А. Сальниковой [9] и автором [18]; в итоге, верна следующая

ТЕОРЕМА Б. Система (30)–(31) полна и минимальна в L^p , $2 \leq p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$-\frac{1}{4p} < h \leq \frac{1}{4q}.$$

Доказательства в [7], [9], [18] существенно использовали специфику показателя $\alpha = 2$. В [10] для всех $\alpha > 1$, $a > 0$ был построен класс порождающих функций порядка β , зависящих от параметра $\mu \in \mathbb{C}$, и описаны значения μ , при которых соответствующие системы $e(\Lambda)$ полны и минимальны в L^p (L_+^p), $2 \leq p < \infty$. В статье [11] класс порождающих функций был расширен и результат [10] распространен на пространства L^p , L_+^p , $1 \leq p < 2$, и C_0 , C_0^+ . Сформулируем совокупный результат работ [10], [11] в той общей форме, в которой он приведен в [11]; отметим еще, что в [11] указаны опечатки, допущенные в [10].

Пусть $0 < |\theta_k| < \pi$, $k = \overline{1, m}$. Положим $a_k = |\sin \theta_k|^{\beta-1}$ и

$$\theta_k^0 = \frac{\theta_k}{\alpha} + \frac{\pi}{2\beta}, \quad \text{если } \theta_k \in (0, \pi),$$

$$\theta_k^0 = \frac{\theta_k}{\alpha} - \frac{\pi}{2\beta}, \quad \text{если } \theta_k \in (-\pi, 0).$$

Введем функцию

$$e(z) = \sum_{k=1}^m c_k E_{\beta}(a_k^{1/\beta} z e^{-i\theta_k^0}, \mu), \quad c_k \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

где $E_{\rho}(z; \mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера, и пусть

$$s_0 = \min \left(s \in \mathbb{N} : \frac{1}{\Gamma(\mu - s/\beta)} \sum_{k=1}^m c_k (a_k^{-1/\beta} e^{i\theta_k^0})^s \neq 0 \right).$$

Рассматривается система $e(\Lambda)$ (см. (10)), для которой порождающей функцией является функция

$$F(z) = e((K(\beta, a))^{1/\beta} z). \quad (33)$$

Для единообразия формулировок (и только в них) полагаем $L^{\infty} = C_0$, $L_+^{\infty} = C_0^+$.

ТЕОРЕМА В. Пусть $-\pi < \theta_1 < \dots < \theta_l < 0 < \theta_{l+1} < \dots < \theta_m < \pi$, причем

$$\begin{aligned} \theta_1 &\leq -\pi + \frac{\pi}{\beta}, & \theta_m &\geq \pi - \frac{\pi}{\beta}, & \theta_l &\geq -\frac{\pi}{\beta}, & \theta_{l+1} &\leq \frac{\pi}{\beta}, \\ \theta_{k+1} - \theta_k &\leq \frac{\pi}{\beta}, & k &= 1, \dots, l-1, l+1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Пусть $s_0 < \infty$, причем $s_0 \geq 2$ при $p = 1, \infty$. Тогда для полноты и минимальности системы $e(\Lambda)$ в L^p , $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \mu &\leq \frac{1}{q\alpha} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} \quad \text{при} \quad 1 < p \leq \infty \quad \text{и} \\ \frac{1}{2} &\leq \operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\beta} \quad \text{при} \quad p = 1. \end{aligned} \quad (34)$$

ТЕОРЕМА Г. Пусть $0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \pi$, причем

$$\theta_1 \leq \frac{\pi}{\beta}, \quad \theta_m \geq \pi - \frac{\pi}{\beta}, \quad \theta_{k+1} - \theta_k \leq \frac{\pi}{\beta}, \quad k = \overline{1, m-1}.$$

Пусть $s_0 < \infty$, причем $s_0 \geq 2$ при $p = 1, \infty$. Тогда для полноты и минимальности системы $e(\Lambda)$ в L_+^p , $1 \leq p \leq \infty$, необходимо и достаточно выполнение условия (34).

Системами (30)–(31) и системами $e(\Lambda)$ с порождающей функцией (33) к настоящему времени исчерпывается класс известных полных и минимальных систем $e(\Lambda)$ в L^p , L_+^p , $1 \leq p \leq \infty$. Выясним, выполняется ли для них необходимое условие равномерной минимальности, содержащееся в теореме 3.

Начнем с системы (30)–(31). Обозначим

$$L(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n+h)^2} \right).$$

Хорошо известно (см., например, [17]), что $L(z)$ – целая функция экспоненциального типа и вполне регулярного роста с индикатором $h_L(\theta) = \pi |\sin \theta|$. Порождающая функция системы (30)–(31) имеет вид

$$F(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) L\left(\left(\frac{ze^{-i\gamma}}{2\sqrt{\pi}}\right)^2\right) \frac{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)}{z^2}$$

(см. [9], [16], [18]). Из сказанного о функции $L(z)$ следует, что целая функция $F(z)$ порядка $\beta = 2$ имеет вполне регулярный рост и ее индикатор есть

$$h_F(\theta) = \frac{1}{4} |\sin 2(\theta - \gamma)| - \frac{1}{4} \cos 2\theta.$$

Так как функция $H(\theta)$ всюду дифференцируема, а функция $h_F(\theta)$ не дифференцируема в точке $\theta = \gamma$, то равенство (28) невозможно. Значит, из теоремы 3 мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. В классе полных и минимальных в L^p , $1 \leq p \leq \infty$, систем (30)–(31) нет равномерно минимальных систем.

Для рассмотрения систем $e(\Lambda)$ с порождающей функцией (33) воспользуемся леммой 9. Из нее следует, что функция $E_\beta(z; \mu)$ имеет порядок β и вполне регулярный рост, причем ее индикатор $h_E(\theta)$ есть 2π -периодическая функция такая, что $h_E(\theta) = 0$ при $\pi/(2\beta) \leq |\theta| \leq \pi$ и $h_E(\theta) = \cos \beta\theta$ при $|\theta| \leq \pi/(2\beta)$.

В условиях теоремы В всегда $m \geq 2$. Если $1 < \beta \leq 2$, то в теореме Г набор θ_k может состоять из одной точки (например, $\theta_1 = \theta_1^0 = \pi/2$). Тогда в (32) $m = 1$, функции $e(z)$ и $E_\beta(a_1^{1/\beta} z e^{-i\theta_1^0}; \mu)$ пропорциональны и их индикаторы связаны соотношением $h_e(\theta) = a_1 h_E(\theta - \theta_1^0)$. Из сказанного выше об индикаторе $h_E(\theta)$ следует, что индикатор $h_e(\theta)$, а значит, и индикатор $h_F(\theta)$ не является всюду дифференцируемой функцией. Значит, условие (28) не выполняется. Далее, при $\beta > 1$ все корни функции $E_\beta(z; \mu)$, а значит, и функции $F(z)$, за исключением, быть может, конечного числа, просты [19]. По теореме 3 в случае $m = 1$ полные и минимальные системы $e(\Lambda)$ в L_+^p , фигурирующие в теореме Г, не являются равномерно минимальными.

Пусть $m \geq 2$. Рассмотрим 2π -периодическую функцию

$$h_k(\theta) = a_k \cos \beta(\theta - \theta_k^0), \quad |\theta - \theta_k^0| \leq \frac{\pi}{2\beta}; \quad h_k(\theta) = 0, \quad \frac{\pi}{2\beta} \leq |\theta - \theta_k^0| \leq \pi.$$

Функция $h_k(\theta)$ есть индикатор слагаемого с номером k в сумме (32). Значит, из (32) и из определения числа s_0 следует, что функция $e(z)$ имеет порядок β и вполне регулярный рост и ее индикатор

$$h_e(\theta) = \max_{k=\overline{1, m}} (0, h_k(\theta)).$$

Мы видим, что в условиях теорем В и Г индикатор $h_e(\theta)$, а значит, и индикатор $h_F(\theta)$ не является всюду дифференцируемой функцией. Следовательно, чтобы, сославшись на теорему 3, сделать вывод об отсутствии равномерной минимальности у систем $e(\Lambda)$, фигурирующих в этих теоремах, остается доказать простоту всех корней функции $e(z)$, за исключением, быть может, конечного числа.

Пусть для определенности мы находимся в условиях теоремы Г (в случае теоремы В рассуждения аналогичны). По предположению $\theta_{k+1} - \theta_k \leq \pi/\beta$, а $\theta_k^0 = \theta_k/\alpha + \pi/(2\beta)$. Отсюда

$$\theta_{k+1}^0 - \theta_k^0 = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{\alpha} < \theta_{k+1} - \theta_k \leq \frac{\pi}{\beta}.$$

Значит, арки косинусоид – части графиков функций $h_k(\theta)$, $h_{k+1}(\theta)$ с соседними номерами – пересекаются в некоторой точке с абсциссой t_k , причем $h_k(t_k) = h_{k+1}(t_k) > 0$, $k = \overline{1, m-1}$. Пусть t_0, t_m – точки, в которых $h_1(t_0) = 0$, $h_m(t_m) = 0$ ($0 < t_0 < t_m < \pi$).

Фиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$. Утверждается, что вне секторов $U_j = U_j(\varepsilon) = \{\theta : |\theta - t_j| < \varepsilon\}$, $j = \overline{0, m}$, при $|z| > R$ нет корней $e(z)$. Сначала убедимся, что их нет при

$$t_m + \varepsilon - 2\pi \leq \theta \leq t_0 - \varepsilon, \quad |z| > R. \quad (35)$$

По лемме 9 в этом секторе

$$e(z) = -\frac{A}{z^{s_0}} + O\left(\frac{1}{r^{s_0+1}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (36)$$

где

$$A = \frac{1}{\Gamma(\mu - s_0/\beta)} \sum_{k=1}^m c_k (a_k^{-1/\beta} e^{i\theta_k^0})^{s_0} \neq 0$$

по смыслу числа s_0 . Из (36) следует отсутствие у $e(z)$ корней на множестве (35) при достаточно большом R .

Для сокращения записи введем обозначения

$$g(z) = \frac{1}{\beta} z^{\beta(\mu-1)} \cdot e(z), \quad C_k = c_k a_k^{1-\mu} e^{-i\beta(1-\mu)\theta_k^0}, \quad l = \beta(\mu-1) - s_0.$$

По лемме 9

$$g(z) = \sum_k C_k \exp(a_k (ze^{-i\theta_k^0})^\beta) + \frac{A}{\beta} z^l + O(z^{l-1}), \quad r \rightarrow \infty, \quad (37)$$

где суммирование ведется по тем k , для которых $|\theta - \theta_k^0| \leq \gamma \in (\pi/(2\beta), \pi/\beta)$. Множество индексов k зависит от $\theta = \arg z$.

Пусть точка z находится в секторе

$$t_{j-1} + \varepsilon \leq \theta \leq t_j - \varepsilon, \quad j = \overline{1, m}, \quad |z| > R. \quad (38)$$

Тогда в (37) обязательно присутствует индекс $k = j$. Далее, так как

$$|\exp(a_k (ze^{-i\theta_k^0})^\beta)| = \exp(r^\beta a_k \cos \beta(\theta - \theta_k^0)),$$

а на множестве (38)

$$a_j \cos \beta(\theta - \theta_j^0) \geq a_k \cos \beta(\theta - \theta_k^0) + \delta_1, \quad \delta_1 > 0, \quad k \neq j,$$

то слагаемое с индексом $k = j$ доминирует в данном секторе, т.е.

$$g(z) = C_j \exp(a_j (ze^{-i\theta_j^0})^\beta) (1 + o(1)) + O(z^l), \quad r \rightarrow \infty. \quad (39)$$

И так как в этом секторе

$$|\exp(a_j (ze^{-i\theta_j^0})^\beta)| \geq \exp(\delta r^\beta), \quad \delta > 0, \quad (40)$$

то из (39) следует отсутствие у функции $g(z)$, а значит, и у функции $e(z)$ корней в секторах (38). Мы доказали, что при $|z| > R$ все корни $e(z)$ лежат в секторах U_j , $j = \overline{0, m}$.

Пусть $j \neq 0, m$. В секторе $U_j(3\varepsilon/2)$ верна асимптотика (37), причем если ε достаточно мало, то множество индексов k одно и то же для всех $z \in U_j(3\varepsilon/2)$.

Известно [20; гл. 1, теорема 4.2], что асимптотика такого типа в каждом подсекторе допускает дифференцирование. Отсюда для $z \in U_j = U_j(\varepsilon)$

$$g'(z) = \beta z^{\beta-1} \sum_k C_k a_k e^{-i\beta\theta_k^0} \exp(a_k(z e^{-i\theta_k^0})^\beta) + O(z^{l-1}), \quad r \rightarrow \infty. \quad (41)$$

В ненулевых кратных корнях функции $e(z)$ левые части в (37) и (41) обращаются в нуль. Поэтому, деля (41) на $\beta z^{\beta-1} a_{j+1} e^{-i\beta\theta_{j+1}^0}$ и вычитая полученное из (37), видим, что в кратных корнях функции $e(z)$ ($z \in U_j$, $z \neq 0$) должно выполняться условие

$$\begin{aligned} C_j \left(1 - \frac{a_j e^{-i\beta\theta_j^0}}{a_{j+1} e^{-i\beta\theta_{j+1}^0}} \right) \exp(a_j(z e^{-i\theta_j^0})^\beta) \\ + \sum_{k \neq j, j+1} B_k \exp(a_k(z e^{-i\theta_k^0})^\beta) + O(z^{l-1}) = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

где B_k – некоторые коэффициенты. Убедимся, что коэффициент B_j при экспоненте в первом слагаемом отличен от нуля. Так как $C_j \neq 0$, то достаточно проверить, что

$$a_{j+1} e^{i\beta\theta_j^0} \neq a_j e^{i\beta\theta_{j+1}^0}.$$

Предположим противное: здесь имеет место знак равенства. Так как $a_j, a_{j+1} > 0$, то отсюда $\beta\theta_{j+1}^0 = \beta\theta_j^0 + 2\pi n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\theta_{j+1} - \theta_j = \alpha(\theta_{j+1}^0 - \theta_j^0) = 2\pi n\alpha/\beta > 2\pi/\beta$, а это противоречит тому, что $\theta_{j+1} - \theta_j \leq \pi/\beta$ по условию теоремы Г. Итак, $B_j \neq 0$.

Из тех же соображений, что применялись при рассмотрении сектора (38), следует, что если ε достаточно мало, а $z \in U_j$, $j \neq 0, m$, то в (42) при $r \rightarrow \infty$ доминирует первое слагаемое, т.е. (42) записывается в виде

$$B_j(1 + o(1)) \exp(a_j(z e^{-i\theta_j^0})^\beta) + O(z^{l-1}) = 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Но при достаточно малом ε для $z \in U_j$ верна оценка (40). Значит, необходимое условие (43) кратного корня функции $e(z)$ не может выполняться для сколь угодно больших $|z|$, $z \in U_j$, $j \neq 0, m$.

Осталось рассмотреть секторы U_j , $j = 0, m$. Если ε достаточно мало, то в секторе U_0 верна асимптотика (37) с единственным индексом $k = 1$. Значит, при $|z| > R$ корни $e(z)$ в секторе U_0 совпадают с корнями функции

$$C z^{-l} \exp(a_1(z e^{-i\theta_1^0})^\beta) - A + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (44)$$

где C – соответствующая константа. Но именно такая функция встречается в [19] при исследовании асимптотики корней функции Миттаг-Леффлера, где доказывалось [19; с. 122], что все достаточно большие по модулю корни функции (44) простые. Итак, при $|z| > R$ все корни функции $e(z)$ в секторе U_0 простые. Аналогично это утверждение доказывается для сектора U_m .

Мы доказали простоту всех достаточно больших по модулю корней порождающей функции (33), и из теоремы 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Полные и минимальные в L^p (L^p_+), $1 \leq p \leq \infty$, системы $e(\Lambda)$, описываемые теоремой В (теоремой Г), не являются равномерно минимальными.

Следствия 1, 2 показывают, что среди имеющихся полных и минимальных систем $e(\Lambda)$ в пространствах L^p , L^p_+ , $1 \leq p < \infty$, C_0 , C_0^+ равномерно минимальных систем нет. Подавно среди них нет и базисов.

Список литературы

1. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963.
2. Седлецкий А. М. Аппроксимация сдвигами функции на прямой // Теория приближения функций. Труды Междунар. конф. приближ. функций. Киев, 31 мая – 5 июня 1983 г. М., 1987. С. 397–400.
3. Zalik R. On approximation by shifts and a theorem of Wiener // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 243. P. 299–308.
4. Zalik R. On some gap theorems and the closure of translates // Notices Amer. Math. Soc. 1978. V. 25. № 2. P. A-314.
5. Fahren B. On approximation by translates and related problems in function theory // Ark. Mat. 1981. V. 19. № 2. P. 271–289.
6. Седлецкий А. М. Аппроксимация сдвигами и полнота взвешенных систем экспонент в $L^2(\mathbb{R})$ // Матем. сб. 1984. Т. 123. № 1. С. 92–107.
7. Zalik R, Saad A. T. Some theorems concerning holomorphic Fourier transforms // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 126. P. 483–493.
8. Сальникова Т. А. Полные и минимальные системы экспонент в пространствах $L^2(\mathbb{R})$ // Матем. заметки. 1994. Т. 55. № 3. С. 118–129.
9. Сальникова Т. А. Полные и минимальные системы экспонент в лебеговых пространствах на вещественной оси // Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: РУДН, 1995.
10. Седлецкий А. М. Аппроксимативные свойства систем экспонент на прямой и полупрямой // Матем. сб. 1998. Т. 89. № 3. С. 125–140.
11. Седлецкий А. М. Аппроксимация посредством экспонент на прямой и на полупрямой // Anal. Math. 2001. Т. 27.
12. Крейн С. Г. (ред.) Функциональный анализ. М.: Наука, 1972.
13. Седлецкий А. М. Аппроксимативные свойства систем экспонент в $L^p(a, b)$ // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 1675–1681.
14. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
15. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
16. Седлецкий А. М. Преобразования Фурье быстро убывающих функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 3. С. 187–202.
17. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
18. Sedletskii A. M. Fourier transforms and approximations. Amsterdam: Gordon and Breach, 2000.
19. Седлецкий А. М. Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера // Anal. Math. 1994. Т. 20. С. 117–132.
20. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
04.04.2001