Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 12, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 09:48:19

УДК 517.5

А. В. Лобода

Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии

В статье изучаются строго псевдовыпуклые несферические гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства, однородные относительно локальных групп Ли голоморфных преобразований. Ранее автором было доказано, что размерность группы Ли $\text{Aut } M$, транзитивно действующей на таком многообразии M , не превышает 7.

В работе строится полный список однородных поверхностей, для которых группы $\text{Aut } M$ в точности 7-мерны (а соответствующие группы изотропии имеют размерность 2). Основными инструментами в статье являются локальные нормальные уравнения, задающие изучаемые многообразия.

Библиография: 29 названий.

Введение

В 1932 г. Э. Картаном в [1] было дано полное описание вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств, допускающих транзитивные действия групп голоморфных преобразований.

В последующих работах ряда авторов (см., например, [2]–[6]) вопрос об однородности гиперповерхностей многомерных комплексных пространств изучался в основном в глобальной постановке при дополнительном условии компактности рассматриваемых многообразий. Полученные в них результаты формулировались, как правило, в алгебраических терминах.

В настоящей статье мы обсуждаем однородность с локальной точки зрения, имея в виду действия локальных групп Ли голоморфных преобразований, являющиеся транзитивными вблизи фиксированной точки многообразия. Основным результатом статьи является

ТЕОРЕМА 1. *Однородная вещественная гиперповерхность трехмерного комплексного пространства, имеющая положительно определенную форму Леви и двумерную группу изотропии, голоморфно эквивалентна вблизи любой своей точки одной из следующих попарно неэквивалентных однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ (z_1, z_2, z_3 – комплексные координаты*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00969), а также программы “Фундаментальные исследования – университеты России (2000)” (грант № 04.01.41).

$\mathfrak{o} \subset \mathbb{C}^3$, $v = \operatorname{Im} z_3$):

$$v = \ln(1 + |z_1|^2) + b \ln(1 + |z_2|^2), \quad b \in (0, 1]; \quad (0.1)$$

$$v = \ln(1 + |z_1|^2) - b \ln(1 - |z_2|^2), \quad b \in (0, 1) \cup (1, \infty); \quad (0.2)$$

$$v = \ln(1 - |z_1|^2) + b \ln(1 - |z_2|^2), \quad b \in (0, 1]; \quad (0.3)$$

$$v = |z_2|^2 + \varepsilon \ln(1 + \varepsilon |z_1|^2), \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (0.4)$$

В связи с формулировкой теоремы напомним, что *группой изотропии* поверхности M в точке $\xi \in M$ называется группа $\operatorname{Aut}_\xi M$ биголоморфных преобразований поверхности M , определенных вблизи точки ξ и оставляющих эту точку неподвижной. Для разных точек однородной поверхности M все такие группы изоморфны друг другу. Любую из таких точек мы связываем с началом координат пространства $\mathbb{C}^3$ и обсуждаем группу изотропии M в этой точке.

Максимум размерности группы изотропии для невырожденных по Леви гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств равен 10 и достигается, например, на сфере в $\mathbb{C}^3$ (см. [7]). А для любой не эквивалентной сфере 5-мерной однородной гиперповерхности M с положительно определенной формой Леви размерность ее группы изотропии $\operatorname{Aut}_0 M$ удовлетворяет (см. [8]) неравенству

$$\dim \operatorname{Aut}_0 M \leq 2.$$

В силу этого наш результат дает описание строго псевдовыпуклых несферических гиперповерхностей, допускающих максимальные по размерности транзитивные группы голоморфных преобразований.

Укажем здесь еще на однородную поверхность из [9]

$$v = (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) + |z_1|^4, \quad (0.5)$$

имеющую невырожденную знаконеопределенную форму Леви и 3-мерную группу изотропии. Для невырожденных однородных гиперповерхностей 3-мерных комплексных пространств, не сводимых к квадрикам, такая размерность $\operatorname{Aut}_0 M$ является максимумом, достигающимся только на поверхности (0.5) и ее голоморфных образах.

Явное описание гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$, имеющих знаконеопределенные формы Леви и 7-мерные транзитивные группы (и, тем самым, 2-мерные группы изотропии), анонсировано в [10] и [11].

Все упомянутые списки однородных поверхностей получены автором на основе использования локальных нормальных уравнений, задающих изучаемые многообразия. В связи с этим в статье приводится подробное описание метода нормальных форм и деталей его применения к задаче классификации однородных гиперповерхностей 3-мерных комплексных многообразий.

Этому описанию полностью посвящен §1 статьи. В §2 изучаются свойства голоморфных векторных полей на поверхностях, заданных нормальными уравнениями. В третьем параграфе доказывается, что всякая однородная поверхность из обсуждаемого класса полностью определяется двумя многочленами из своего нормального уравнения (теорема 2). Доказательству теоремы 1 посвящен последний, четвертый параграф статьи.

Упомянем также возможность применения метода нормальных форм при изучении так называемой слабой однородности (см., например, [12]), когда наличие структуры группы Ли у транзитивного семейства преобразований многообразия не предполагается.

Отметим, что применение метода нормальных уравнений к изучению проблемы голоморфной однородности в 2-мерном комплексном пространстве описано в [13]–[15]. Аффинная однородность гиперповерхностей в 3-мерном вещественном и комплексном пространствах изучалась методом нормальных уравнений в [16] и [17]. Этими работами, в частности, подтверждена полнота описания таких многообразий, полученного лишь недавно в [18] чисто алгебраическими методами.

§ 1. Нормальные формы псевдовыпуклых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$

Согласно [7] уравнение строго псевдовыпуклой вещественно-аналитической гиперповерхности $M \in \mathbb{C}^3$ вблизи ее произвольной точки можно привести голоморфными преобразованиями к так называемому нормальному виду

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \sum_{k,l \geq 2, m \geq 0} h_{klm}(z, \bar{z}) u^m. \quad (1.1)$$

Здесь h_{klm} – однородные многочлены степеней k по $z = (z_1, z_2)$ и l по $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ и при этом $h_{22m}, h_{32m}, h_{33m}$ являются элементами специальных подпространств $\mathfrak{N}_{22}, \mathfrak{N}_{32}, \mathfrak{N}_{33}$ пространств $\mathcal{F}_{22}, \mathcal{F}_{32}, \mathcal{F}_{33}$ однородных многочленов бистепеней $(2, 2), (3, 2)$ и $(3, 3)$ соответственно.

Эти подпространства определяются условиями

$$\text{tr } h_{22} = 0, \quad \text{tr}^2 h_{32} = 0, \quad \text{tr}^3 h_{33} = 0,$$

где tr – оператор свертки многочлена с матрицей формы Леви $\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2$, совпадающей в нашем случае с $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1. Пространства $\mathfrak{N}_{22}, \mathfrak{N}_{32}, \mathfrak{N}_{33}$. Несложные вычисления показывают, что пространство $\mathcal{F}_{22}$ вещественных многочленов бистепени $(2, 2)$ по $z, \bar{z}$ имеет размерность 9. В то же время справедливо (см., например, [8])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подпространство $\mathfrak{N}_{22}(z, \bar{z}) \in \mathcal{F}_{22}$ 5-мерно, а его базис составляют многочлены*

$$\begin{aligned} E_0 &= |z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4, \\ E_1 &= z_1^2 \bar{z}_2^2 + z_2^2 \bar{z}_1^2, \quad E_2 = i(z_1^2 \bar{z}_1^2 - z_2^2 \bar{z}_1^2), \\ E_3 &= (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2), \quad E_4 = i(z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1)(|z_1|^2 - |z_2|^2). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда (см., например, [19]) удобнее работать с комбинациями этих многочленов (с комплексными коэффициентами)

$$\begin{aligned}\eta_{-2} = \bar{\eta}_2 = z_1^2 \bar{z}_2^2, \quad \eta_{-1} = \bar{\eta}_1 = \frac{1}{2}(z_1 z_2 \bar{z}_2^2 - z_1^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2), \\ \eta_0 = \frac{1}{6}(|z_1|^4 - 4|z_1|^2 |z_2|^2 + |z_2|^4).\end{aligned}$$

Дополнительными к подпространствам $\mathfrak{N}_{22}$, $\mathfrak{N}_{32}$, $\mathfrak{N}_{33}$ являются подпространства функций, содержащих множителем форму Леви

$$\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

соответственно в первой, второй или третьей степени.

В [7] эти дополнения обозначаются через $\mathfrak{R}_{22}$, $\mathfrak{R}_{32}$, $\mathfrak{R}_{33}$, так что

$$\mathcal{F}_{kl} = \mathfrak{N}_{kl} \oplus \mathfrak{R}_{kl} \quad (1.2)$$

для всех названных пар $(k, \bar{l})$.

Мы часто будем пользоваться проекциями в пространства $\mathfrak{N}_{kl}$ параллельно $\mathfrak{R}_{kl}$ и наоборот, обозначая такие проектирования индексом $\mathfrak{N}$ или $\mathfrak{R}$. Например, ниже нам понадобятся равенства

$$(|z_1|^4)_{\mathfrak{N}} = \frac{1}{6}E_0, \quad (|z_1|^4)_{\mathfrak{R}} = \frac{1}{6}(5|z_1|^2 - |z_2|^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Коэффициенты многочленов от $z, \bar{z}$ других бистепеней $(k, \bar{l})$ будем представлять в виде прямоугольных матриц размеров $(k+1) \times (l+1)$. В каждой i -й строке такой матрицы будем размещать коэффициенты при

$$z_1^{k+1-i} z_2^{i-1} \bar{z}_1^{j-1} \bar{z}_2^{l+1-j}, \quad 1 \leq j \leq l+1.$$

Например, произвольный многочлен из пространства $\mathcal{F}_{32}$ содержит 12 слагаемых и имеет вид

$$\begin{aligned}F_{(3, \bar{2})} = & \omega_1 z_1^3 \bar{z}_1^2 + \omega_2 z_1^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \omega_3 z_1^3 \bar{z}_2^2 \\ & + \omega_4 z_1^2 z_2 \bar{z}_1^2 + \omega_5 z_1^2 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \omega_6 z_1^2 z_2 \bar{z}_2^2 \\ & + \omega_7 z_1 z_2^2 \bar{z}_1^2 + \omega_8 z_1 z_2^2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \omega_9 z_1 z_2^2 \bar{z}_2^2 \\ & + \omega_{10} z_2^3 \bar{z}_1^2 + \omega_{11} z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + \omega_{12} z_2^3 \bar{z}_2^2.\end{aligned} \quad (1.3)$$

Базисные мономы $z^A \bar{z}^B$ ($|A| = 3, |B| = 2$) пространства $\mathcal{F}_{32}$ будем обозначать в соответствии с этой записью через $\Omega_1, \dots, \Omega_{12}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $\mathfrak{N}$ -проекция в пространстве $\mathcal{F}_{32}$ отличается от тождественного преобразования только на диагоналях $(\omega_1, \omega_5, \omega_9)$ и $(\omega_4, \omega_8, \omega_{12})$ многочлена (1.3) и имеет здесь вид

$$\begin{aligned}(\omega_1^*, \omega_5^*, \omega_9^*) &= \frac{1}{6}((3\omega_1 - \omega_5 - \omega_9), (-6\omega_1 + 4\omega_5 - 2\omega_9), (-3\omega_1 - \omega_5 + 5\omega_9)); \\ (\omega_4^*, \omega_8^*, \omega_{12}^*) &= \frac{1}{6}((5\omega_4 - \omega_8 - 3\omega_{12}), (-2\omega_4 + 4\omega_8 - 6\omega_{12}), (-\omega_4 - \omega_8 + 3\omega_{12})).\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Условия принадлежности многочлена (1.3) пространству $\mathfrak{N}_{32}$ имеют вид

$$\begin{cases} 3\omega_1 + \omega_5 + \omega_9 = 0, \\ 3\omega_{12} + \omega_8 + \omega_4 = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь $\mathfrak{N}$ -проекцию в пространстве $\mathcal{F}_{33}$. Обозначим для этого в соответствии с нашими договоренностями матрицу коэффициентов многочлена h_{330} через $\|t\|$, так что

$$h_{330} \sim \begin{vmatrix} \bar{1}\bar{1}\bar{1} & \bar{1}\bar{1}\bar{2} & \bar{1}\bar{2}\bar{2} & \bar{2}\bar{2}\bar{2} \\ 111 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ 112 & t_5 & t_6 & t_7 & t_8 \\ 122 & t_9 & t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ 222 & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \end{vmatrix}.$$

Тогда справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Матрица $\|t\|$ коэффициентов многочлена из подпространства $\mathfrak{N}_{33}$ характеризуется в $\mathcal{F}_{33}$ условием

$$3t_1 + t_6 + t_{11} + 3t_{16} = 0;$$

при проектировании в это подпространство параллельно $\mathfrak{R}_{33}$ изменяются лишь диагональные коэффициенты многочлена, переходящие в

$$\begin{aligned} t_1^* &= \frac{1}{12}(9t_1 - t_6 - t_{11} - 3t_{16}), & t_6^* &= \frac{1}{12}(-9t_1 + 9t_6 - 3t_{11} - 9t_{16}), \\ t_{11}^* &= \frac{1}{12}(-9t_1 - 3t_6 + 9t_{11} - 9t_{16}), & t_{16}^* &= \frac{1}{12}(-3t_1 - t_6 - t_{11} + 9t_{16}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через $\mathfrak{N}$ пространство вещественно-аналитических функций $F(z, \bar{z}, u) = \sum_{k,l \geq 2, m \geq 0} h_{klm}(z, \bar{z})u^m$, для которых

$$h_{22m} \in \mathfrak{N}_{22}, \quad h_{32m} \in \mathfrak{N}_{32}, \quad h_{33m} \in \mathfrak{N}_{33}.$$

Тогда нормальное уравнение поверхности M — это уравнение вида

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + N(z, \bar{z}, u),$$

где $N(z, \bar{z}, u) \in \mathfrak{N}$.

1.2. Различные нормальные координатные системы. Координаты, в которых уравнение поверхности M имеет нормальный вид, определяются неединственным образом. Пусть, например, аналитическая поверхность M задана уравнением

$$v = \langle z, z \rangle + \sum_{k,l \geq 2, m \geq 0} F_{klm}(z, \bar{z})u^m, \quad (1.5)$$

не обязательно нормальным. Любая голоморфная замена

$$z = f(z, w), \quad w = g(z, w),$$

нормализующая уравнение (1.5), полностью определяется, как показано в [7], набором параметров (C, a, r) , где

$$C = \frac{\partial f}{\partial z}(0) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \quad a = C^{-1} \frac{\partial f}{\partial w}(0) \in \mathbb{C}^2, \quad r = \mathrm{Re} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial w^2}(0) \right) \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

При этом матрица C обязана сохранять с точностью до постоянного множителя форму Леви поверхности M , т.е.

$$\langle Cz, Cz \rangle = \rho \langle z, z \rangle. \quad (1.7)$$

Там же доказано, что для каждого набора (C, a, r) , удовлетворяющего (1.6), (1.7), существует единственная нормализация уравнения (1.5). Будем обозначать ее через $\varphi_{(C, a, r)}$, а в случае

$$C = E, \quad a = 0, \quad r = 0$$

будем говорить о *простейшей* нормализации.

Нам потребуется далее информация о нормализации так называемых *жестких* или *цилиндрических* поверхностей, уравнения (1.5) для которых не зависят в некоторых координатах от переменной $u = \mathrm{Re} w$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Уравнение*

$$v = \langle z, z \rangle + F(z, \bar{z}) = \langle z, z \rangle + \sum_{k, l \geq 2} F_{kl}(z, \bar{z}) \quad (1.8)$$

жесткой гиперповерхности в $\mathbb{C}^{n+1}$ ($n \geq 2$) можно привести к нормальной форме Мозера так, что

$$h_{220} = (F_{22})_{\Re}; \quad h_{320} = (F_{32})_{\Re}; \quad h_{420} = F_{42}; \quad h_{520} = F_{52}.$$

Доказательства этого и следующего утверждений являются чисто техническими и связаны с вычислением отдельных слагаемых нормального уравнения, получающегося именно при простейшей нормализации исходного жесткого уравнения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть для жесткого уравнения (1.8) многочлены $G_{11} = G_{11}(z, \bar{z})$ и $A(z)$ определяются формулами*

$$G_{11} \langle z, z \rangle = (F_{22}(z, \bar{z}))_{\Re}, \quad \langle A(z), z \rangle = -\frac{i}{2} G_{11}.$$

Тогда простейшая нормализация уравнения (1.8) приводит слагаемое бистепенности $(3, \bar{3})$ к виду

$$h_{330} = (F_{33} - F_{22}G_{11} - 2\langle A(z), A(z) \rangle \langle z, z \rangle^2 - 2\langle z, z \rangle \mathrm{Re}(i\partial h_{220}(A(z))))_{\Re}.$$

1.3. Специальная нормальная форма. Заметим, что семейство нормализующих отображений $\varphi_{(C,a,r)}$, связанных условиями (1.6), (1.7) на параметры (C, a, r) , является 10-мерным. В силу этого имеется много различных нормальных уравнений для изучаемых нами поверхностей с 2-мерными группами изотропии.

Пусть вещественно-аналитическая гиперповерхность $M \subset \mathbb{C}^3$ имеет положительно определенную форму Леви и задана одним из нормальных уравнений Мозера вида (1.1).

Нижемы будем рассматривать только неомбилические поверхности, удовлетворяющие условию

$$h_{220}(z, \bar{z}) \neq 0.$$

Дело в том, что равенство $h_{220} = 0$, выполняющееся для нормального уравнения поверхности M в некоторой ее точке, переносится в случае однородности на соседние точки M . В силу [7] такие поверхности локально эквивалентны сфере. Мы же обсуждаем здесь только несферические многообразия.

В [19] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Ненулевой многочлен $h_{220}(z, \bar{z}) \neq 0$ из нормального уравнения (1.1) строго псевдовыпуклой вещественной гиперповерхности $M \in \mathbb{C}^3$ может быть приведен к одному из следующих видов:*

- 1) $\pm(\eta_{-2} + a\eta_{-1} - 2\eta_0 + a\eta_1 + \eta_2) \quad (a \geq 0),$
- 2) $\pm(\eta_{-1} + \eta_1).$

Обсуждая здесь однородные поверхности с 2-мерными группами изотропии, мы рассматриваем только случай $h_{220} = \pm E_0$. Объяснением этого служит следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если $\dim \text{Aut}_0 M = 2$ для неомбилической строго псевдовыпуклой вещественной гиперповерхности M , то многочлен h_{220} из ее нормального уравнения можно привести к виду $\pm E_0$.*

Доказательство этого факта следует из вложения (см. [20]–[22]) группы изотропии $\text{Aut}_0 M$ произвольной неомбилической ($h_{220} \neq 0$) поверхности в группу $G_1 \subset \text{GL}(2, \mathbb{C})$ матриц, сохраняющих с точностью до множителя пару многочленов $\{z, \bar{z}\}$. Размерность группы таких матриц обсуждается в статье [8]. Непосредственными вычислениями проверяется, что из всех многочленов h_{220} , упоминаемых в предложении 6, только

$$h_{220} = \pm \left(z_1^2 \bar{z}_2^2 - \frac{1}{3}(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) + z_2^2 \bar{z}_1^2 \right) \quad (1.9)$$

дают двумерную группу G_1 .

Заменой $z_1^* = z_1 - z_2$, $z_2^* = z_1 + z_2$ и последующими растяжениями координат многочлен (1.9) превращается в более простой базисный многочлен $\pm E_0$, а форма Леви $\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2$ обсуждаемой поверхности при этом сохраняется.

Следующие уточнения касаются слагаемого h_{320} из нормального мозеровского уравнения и реализуются за счет преобразования $\varphi_{(E,a,r)}$, сохраняющего нормальный вид уравнения поверхности (см. для сравнения [20], [21], [23], [24]). Для

формулировки результата обозначим

$$\partial h(a) = \sum_{k=1,2} \frac{\partial h}{\partial z_k} a_k, \quad \bar{\partial} h(\bar{a}) = \sum_{k=1,2} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_k} \bar{a}_k$$

для произвольной функции $h = h(z, \bar{z})$ и вектора $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *При преобразовании $\varphi_{(E,a,r)}$, сохраняющем нормальный вид исходного уравнения поверхности, многочлен h_{320} изменяется следующим образом:*

$$h_{320}^* - h_{320} = 2i(\langle z, a \rangle h_{220} - \langle z, z \rangle \bar{\partial} h_{220}(\bar{a})). \quad (1.10)$$

Доказательство этого предложения можно получить традиционными рассуждениями в духе работ [22], [25]. Несложно убедиться, что многочлен из правой части формулы (1.10) является элементом пространства $\mathfrak{N}_{32}$ и содержит при $h_{220} \neq 0$ не менее двух ненулевых коэффициентов разложения по базису пространства $\mathcal{F}_{32}$.

В частности, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если $h_{220} = \pm E_0$, то можно считать равными нулю коэффициенты*

$$\omega_1, \omega_{12}$$

многочлена h_{320} из нормального уравнения.

Наконец, можно подчинить еще одному условию многочлен $h_{221} = \sum_{k=0}^4 \lambda'_k E_k$ в силу следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Если $h_{220} = \pm E_0$, то можно считать равным нулю коэффициент λ'_0 многочлена h_{221} из нормального уравнения.*

Этот факт следует из описания изменения многочлена h_{221} под действием аналогичного преобразования $\varphi_{(E,0,r)}$. Необходимая формула

$$h_{221}^* = h_{221} + r h_{220} + (\text{слагаемые, не зависящие от } r)$$

получена в [25].

Нормальную форму Мозера для неомбилической поверхности M с $h_{220} = \pm E_0$, в которой многочлены h_{320} , h_{221} удовлетворяют условиям предложений 9 и 10 соответственно, будем называть *специальной нормальной формой*.

В силу всего вышесказанного можно далее задавать однородную несферическую строго псевдовыпуклую поверхность с 2-мерной группой изотропии специальной нормальным уравнением вида

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) \pm (|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) + \sum_{k+l+2m \geq 5} h_{klm}(z, \bar{z}) u^m. \quad (1.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ссылаясь на работу [7], можно утверждать единственность специальной нормальной формы с точностью до линейных преобразований, сохраняющих пару многочленов

$$\{\langle z, z \rangle, E_0\}.$$

§ 2. Голоморфные поля на нормальных формах

Пусть M – вещественно-аналитическая гиперповерхность, заданная нормальным уравнением

$$\Phi(z, \bar{z}, u, v) = v - \langle z, z \rangle - N(z, \bar{z}, u) = 0,$$

а

$$Z = f(z, w) \frac{\partial}{\partial z} + g(z, w) \frac{\partial}{\partial w}$$

– голоморфное векторное поле вблизи M .

Ниже мы будем рассматривать лишь касательные к M векторные поля. Каждое из них удовлетворяет естественному равенству

$$\operatorname{Re}(ig + 2\langle f, z \rangle)|_M + \operatorname{Re}(2\partial N(f) + gN_u)|_M = 0, \quad (2.1)$$

которое мы будем называть *основным тождеством*.

Такие поля мы будем называть далее *голоморфными векторными полями* на M , обозначая их для краткости через $Z = (f, g)$.

Компоненты f, g будем разлагать по степеням z :

$$f(z, w) = \sum_k f_k(z, w), \quad g(z, w) = \sum_k g_k(z, w),$$

где каждое $f_k(z, w)$ и $g_k(z, w)$ – однородный многочлен степени k по $z = (z_1, z_2)$ с коэффициентами, аналитически зависящими от w .

Заметим здесь, что левая часть (2.1) является аналитической функцией от переменных $z, \bar{z}, u$. Обозначая ее через $H(z, \bar{z}, u)$ и учитывая тейлоровские разложения

$$H = \sum_{k,l} H_{kl}(z, \bar{z}) = \sum_{k,l,m} H_{klm}(z, \bar{z}) u^m,$$

можно говорить о равносильности основного тождества (2.1) бесконечной совокупности соотношений

$$H_{kl} \equiv 0 \quad (k, l \geq 2).$$

Любое такое равенство будем называть $(k, \bar{l})$ -компонентой или $(k, \bar{l})$ -следствием основного тождества. Аналогично определяются $(k, \bar{l}, m)$ -, $(k, \bar{l})_{\mathfrak{N}}$ - и $(k, \bar{l})_{\mathfrak{N}}$ -компоненты того же тождества (2.1).

Интересующие нас ниже результаты получаются из рассмотрения некоторых таких компонент для поверхностей, на которых имеется “много” голоморфных полей.

В соответствии с традиционным определением однородности (см. [26]) мы считаем, что на обсуждаемой поверхности транзитивно действует локальная группа Ли биголоморфных преобразований. Этой группе соответствует алгебра голоморфных векторных полей (см. [27], [28]), имеющая ту же размерность, что и сама группа. В частности, для однородной поверхности размерность такой алгебры превышает размерность самой поверхности на $\dim \operatorname{Aut}_0 M$.

Отметим еще, что первое слагаемое (2.1) совпадает с оператором, изученным в работах [7], [22], [25]. В силу этого получаемые здесь следствия из основного тождества близки к соответствующим утверждениям из [7].

2.1. Основные соотношения для полей. Сначала мы изучим зависимость произвольного поля на M от его младших производных. Рассуждения этого раздела справедливы для любых вещественно-аналитических поверхностей и не опираются на свойство их однородности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Всякое голоморфное поле $Z = (f, g)$ на M однозначно определяется набором параметров*

$$\{f_0(0), f'_0(0), f_1(0), g_0(0), g'_0(0), g''_0(0)\} \quad (2.2)$$

и функциями

$$h_{k2}(z, \bar{z}, u) \quad (k \geq 2), \quad h_{33}(z, \bar{z}, u), \quad h_{43}(z, \bar{z}, u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим систему $(k, \bar{0})$ - и $(l, \bar{1})$ -следствий основного тождества при $k \geq 0, l \geq 2$. Из нее легко получаются следующие простые факты:

$$\begin{aligned} g_k(z, u) &= 0 \quad \text{при } k \geq 2; \\ \langle f_l(z, u), z \rangle &= -\bar{\partial} h_{l2}(\bar{f}_0(z, u)) \quad \text{при } l \geq 3; \\ g_1 &= 2i \langle z, f_0 \rangle; \\ f_2(z, u) &= 2i \langle z, f'_0(z, u) \rangle z + f_2^*(z, u), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\langle f_2^*(z, u), z \rangle = -\bar{\partial} h_{22}(\bar{f}_0(z, u))$.

Из (2.3) следует, что поле $Z = (f, g)$ однозначно определяется своими компонентами f_0, f_1, g_0 .

Далее рассмотрим $(2, \bar{2})_{\mathfrak{A}}$ -, $(3, \bar{2})_{\mathfrak{A}}$ - и $(3, \bar{3})_{\mathfrak{A}}$ -компоненты основного тождества. Их совокупность представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (см. также [7]) относительно неизвестных функций f_0, f_1, g_0 . Так как параметры (2.2) являются начальными условиями для этой системы, то доказательство предложения 11 завершено.

Нам потребуются еще некоторые уточнения, связанные с этим предложением, в частности со структурой квадратной матрицы $f_1(z, u)$ и с функцией $g_0(u)$.

Например, из $(0, \bar{0})$ -компоненты основного тождества следует вещественность $g_0(u)$. Кроме того, справедлив следующий факт.

ЛЕММА 1. *Функции f_1, g_0 , удовлетворяющие $(1, \bar{1})$ -следствию основного тождества (2.1), можно записать в следующем виде:*

$$f_1(z, u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ -\beta_1 + i\beta_2 & \alpha_1 + i\delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad g'_0(u) = 2\alpha_1(u),$$

где все пять функций

$$\alpha_1(u), \alpha_2(u), \beta_1(u), \beta_2(u), \delta_2(u) \quad (2.4)$$

вещественнозначны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что обсуждаемое $(1, \bar{1})$ -соотношение имеет вид

$$\operatorname{Re}\{-g'_0\langle z, z \rangle + 2\langle f_1, z \rangle\} = 0.$$

По форме это уравнение совпадает с описанием 5-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_5$, соответствующей группе Ли $G_5 = U(2) \times \mathbb{R}_+$ линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^2$, которые сохраняют (с точностью до множителя) эрмитову форму $\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Из этого замечания выводится требуемый вид $f_1(z, u)$.

Отметим еще, что разложения (1.2) инвариантны относительно линейных преобразований, сохраняющих $\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Отсюда получаем еще одно утверждение для пространств $\mathfrak{N}_{kl}$ многочленов бистепеней $(2, \bar{2})$, $(3, \bar{2})$, $(3, \bar{3})$.

ЛЕММА 2. Если $h_{kl} \in \mathfrak{N}_{kl}$, то $\partial h_{kl}(f_1) + \bar{\partial} h_{kl}(\bar{f}_1) \in \mathfrak{N}_{kl}$.

В силу леммы 1 в предложении 11 вместо набора (2.2) можно говорить о параметрах

$$\begin{aligned} p &= f_0(0) \in \mathbb{C}^2, \quad q = g_0(0) \in \mathbb{R}, \\ C &= f_1(0) \in \mathfrak{g}_5, \quad a = f'_0(0) \in \mathbb{C}^2, \quad r = g''(0) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для сферических поверхностей все эти 15 вещественных параметров свободны. Алгебра $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей на такой поверхности порождает 15-мерную локальную группу голоморфных преобразований квадрики (или ее голоморфного образа).

Для неомбилических (и, следовательно, несферических) поверхностей размерность аналогичной алгебры, так же как и соответствующей ей группы $\operatorname{Aut} M$, меньше 15 за счет возникающих связей на параметры.

Такое уменьшение размерности за счет неомбиличности является давно известным фактом (см., например, [7], [25]). Но здесь нам потребуется более точная информация о параметрах (2.5) обсуждаемой алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Для неомбилической поверхности, заданной специальным нормальным уравнением (1.11), параметры $\alpha_1(0), \beta_1(0), \beta_2(0)$ выражаются через коэффициенты многочленов h_{320}, h_{221} и параметры $p, \bar{p}, q$.

Здесь и далее мы будем обозначать выражения, аналитически зависящие от своих аргументов, через φ , так что

$$\begin{aligned} \alpha_1(0) &= \varphi(p, q; h_{22}(0), h'_{22}(0), h_{32}(0)), \\ \beta_1(0) &= \varphi(p, q; h_{22}(0), h'_{22}(0), h_{32}(0)), \\ \beta_2(0) &= \varphi(p, q; h_{22}(0), h'_{22}(0), h_{32}(0)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11. Рассмотрим $(2, \bar{2}, 0)_{\mathfrak{N}}$ -компоненту основного тождества, т.е. подставим $u = 0$ в равенство

$$(g_0 h'_{22} - g'_0 h_{22}) + 2 \operatorname{Re}\{\partial h_{22}(f_1)\} + 2 \operatorname{Re}\{\partial h_{32}(f_0)\}_{\mathfrak{N}} \equiv 0. \quad (2.6)$$

Вычислениями проверяется, что

$$-g'_0 E_0 + 2 \operatorname{Re}\{\partial E_0(f_1)\} = 2\alpha_1(0) E_0 + 6\beta_1(0) E_3 - 6\beta_2(0) E_4.$$

Рассматривая в равенстве (2.6) коэффициенты при базисных многочленах E_0, E_3, E_4 , получаем требуемое утверждение.

Аналогичным уточнением является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Для неомбилической поверхности M , заданной специальным нормальным уравнением (1.11), параметры a , r любого поля Z на M определяются формулами

$$a = \varphi(p, q; h_{22}(0), h'_{22}(0), h_{32}(0), h'_{32}(0), h_{42}(0), h_{33}(0)), \quad (2.7)$$

$$r = \varphi(p, q; h_{22}(0), h'_{22}(0), h''_{22}(0), h_{32}(0), h'_{32}(0), h_{42}(0), h_{33}(0)). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим компоненты основного тождества: $(3, \bar{2}, 0)_{\mathfrak{N}}$ и $(2, \bar{2}, 1)_{\mathfrak{N}}$.

Первая из них получается подстановкой $u = 0$ в $(3, \bar{2})_{\mathfrak{N}}$ -тождество, т.е. в

$$\begin{aligned} & (g_0 h'_{32} - g'_0 h_{32}) + (2i \langle z, f'_0 \rangle h_{22} - 2i \langle z, z \rangle \bar{\partial} h_{22}(\bar{f}'_0)) \\ & + (i \langle z, f_0 \rangle h'_{22} - i \langle z, z \rangle \bar{\partial} h'_{22}(\bar{f}_0)) \\ & + \{\partial h_{22}(f_2^*)\}_{\mathfrak{N}} + \{\partial h_{42}(f_0)\}_{\mathfrak{N}} \\ & + \{\bar{\partial} h_{33}(\bar{f}_0)\}_{\mathfrak{N}} + (\partial h_{32}(f_1) + \bar{\partial} h_{32}(\bar{f}_1)) \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

а вторая – дифференцированием при $u = 0$ $(2, \bar{2})_{\mathfrak{N}}$ -соотношения (2.6).

В формуле (2.9) параметр a (а точнее, $\bar{a}$) содержится только в первой строке. В частности, в коэффициенты при Ω_1, Ω_{12} многочлена из левой части (2.9) входят выражения $-2i\bar{a}_1$ и $-2i\bar{a}_2$ соответственно.

А в силу равенств $\omega_1 = \omega_{12} = 0$, выполняющихся для специального нормального уравнения, в те же коэффициенты при Ω_1, Ω_{12} не входят остающиеся пока свободными параметры $\alpha_2(0), \delta_2(0)$ матрицы $C = f_1(0)$.

Это означает справедливость формулы (2.7).

В $(2, \bar{2}, 1)$ -тождестве имеем:

$$\begin{aligned} & g_0(0)h_{222} - g''_0(0)h_{220} + \operatorname{Re}\{2\partial h_{221}(f_1(0)) + 2\partial h_{220}(f'_1(0)) \\ & + 2\partial h_{321}(f_0(0)) + 2\partial h_{320}(f'_0(0))\}_{\mathfrak{N}} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Учтем здесь следующие соображения:

- а) $g''_0(0) = r$,
- б) $\operatorname{Re}(2\partial h_{220}(f'_1(0))) = 2rh_{220} + \varphi(f_0, h_{220}, h_{320})$

в силу $(1, \bar{1})$ -следствия из (2.1).

Тогда, рассматривая из всего тождества (2.10) лишь равенство нулю коэффициента при многочлене E_0 , получаем второе утверждение предложения 13.

В силу двух последних предложений через p, q выражаются восемь из пятнадцати параметров, определяющих поле Z , а также набор

$$J = \{h_{220}, h_{221}, h_{222}, h_{320}, h_{321}, h_{420}, h_{330}\}$$

многочленов из специального нормального уравнения однородной поверхности M .

2.2. Необходимые условия 2-мерности изотропии. Выше в §1 было доказано, что равенство $h_{220} = \pm E_0$ является необходимым для 2-мерности группы изотропии однородной строго псевдовыпуклой гиперповерхности M . Здесь мы обсудим необходимые условия, связанные с другими коэффициентами специального нормального уравнения. В частности, нас будут интересовать многочлены, входящие в набор J .

Напомним, что в случае 2-мерных изотропий параметры поля p, q , а также $\alpha_2(0)$, $\delta_2(0)$ должны быть свободными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Если однородная поверхность M с положительно определенной формой Леви имеет 2-мерную группу изотропии, то при любых $k > l \geq 2$, $m > 0$ многочлен h_{klm} из ее специального нормального уравнения (1.11) равен нулю. Матрица любого многочлена h_{kkk} ($k \geq 3$) из специального нормального уравнения такой поверхности содержит ненулевые элементы только на главной диагонали.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную $(k, l, m)_{\mathfrak{H}}$ -компоненту основного тождества. Она имеет вид

$$\begin{aligned} & (g_0 h_{k,l,m+1} - g'_0 h_{klm}) + (\partial h_{k+1,l,m}(f_0) + \bar{\partial} h_{k,l+1,m}(\bar{f}_0))_{\mathfrak{H}} \\ & + (\partial h_{k,l,m}(f_1) + \bar{\partial} h_{k,l,m}(\bar{f}_1)) \\ & + (\text{выражения, зависящие от младших } h_{stn} \text{ и от } p, q) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В этом равенстве нас интересуют в первую очередь параметры $\alpha_2(0)$ и $\delta_2(0)$. Например, входящий в h_{klm} моном Q степеней k_1, k_2, l_1, l_2 по переменным $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ соответственно порождает следующее выражение с этими параметрами в левой части (2.11):

$$i((k_1 - l_1)\alpha_2(0) + (k_2 - l_2)\delta_2(0))Q.$$

Ясно, что наличие в многочлене h_{klm} хотя бы одного монома Q с ненулевой разностью $k_1 - l_1$ или $k_2 - l_2$ приводит к связыванию параметров $\alpha_2(0)$, $\delta_2(0)$ и к уменьшению размерности группы $\text{Aut}_0 M$.

Другими словами, специальное нормальное уравнение однородной поверхности M вида (1.11), имеющей 2-мерную группу изотропии, не может содержать ненулевых мономов несимметричных по z и $\bar{z}$ бистепеней $(k, \bar{l})$.

Предложение 14 доказано.

Завершает описание набора J следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Для однородной поверхности (1.11), имеющей двумерную группу изотропии, выполняются следующие условия:*

- 1) набор коэффициентов $(t_1, t_6, t_{11}, t_{16})$ многочлена h_{330} допускает представление в виде

$$t_1(1, 3, -3, -1), \quad t_1 \in \mathbb{R};$$

- 2) $h_{221} = 0$;
- 3) $h_{222} = \lambda_0'' E_0$, где коэффициент λ_0'' однозначно выражается через h_{220} и h_{330} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два первых утверждения этого предложения следуют из координатного рассмотрения $(3, \bar{2}, 0)$ -тождества. Детали этого рассмотрения мы здесь опускаем, так как, несмотря на упрощения, связанные с равенством $h_{320} = 0$, оно все же остается весьма утомительным.

Дальнейшее рассмотрение $(2, \bar{2}, 1)$ -тождества приводит к равенствам $h_{222} = \lambda_0'' h_{220}$, $r = q\lambda_0''$ с некоторым вещественным коэффициентом λ_0'' .

Из $(3, \bar{3}, 0)$ -тождества легко получается формула $h_{331} = 0$.

Остается рассмотреть еще $(3, \bar{2}, 1)$ -тождество. С учетом уже полученной информации и, в частности, равенства $h_{331} = 0$ коэффициент λ_0'' многочлена h_{222} выражается теперь через h_{220} и h_{330} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Заменой $z_1 \leftrightarrow z_2$, сохраняющей $\langle z, z \rangle$ и $h_{220} = \varepsilon E_0$ ($\varepsilon = \pm 1$), можно изменить на противоположный знак коэффициента t_1 многочлена

$$h_{330} = t_1(|z_1|^6 + 3|z_1|^4|z_2|^2 - 3|z_1|^2|z_2|^4 - |z_2|^6)$$

из специального нормального уравнения. В силу этого можно считать в дальнейшем, что $t_1 \geq 0$.

В силу предложений 14, 15 набор J коэффициентов специального нормального уравнения

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \varepsilon(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) + \sum_{2k+2m \geq 6} h_{kkm}(z, \bar{z}, u) \quad (2.12)$$

полностью определяется двумя его элементами h_{220} и h_{330} .

Следовательно, только этими двумя многочленами (по сути, значениями ε и t_1), а также параметрами p, q определяются значения параметров a, r .

§ 3. Теорема об опорном наборе

Содержание этого параграфа составляет доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – однородная вещественная гиперповерхность трехмерного комплексного пространства с положительно определенной формой Леви и

$$\dim \text{Aut}_0 M = 2.$$

Тогда специальное нормальное уравнение M однозначно определяется набором многочленов $J_0 = \{h_{220}, h_{330}\}$ из этого уравнения.

СЛЕДСТВИЕ. Однородная поверхность из обсуждаемого класса однозначно определяется парой коэффициентов (ε, t_1) , $\varepsilon = \pm 1$, $t_1 \in \mathbb{R}$, многочленов

$$\begin{aligned} h_{220} &= \varepsilon(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4), \\ h_{330} &= t_1(|z_1|^6 + 3|z_1|^4|z_2|^2 - 3|z_1|^2|z_2|^4 - |z_2|^6) \end{aligned}$$

из специального нормального уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 мы начнем с обсуждения некоторой дополнительной информации о компонентах полей $Z = (f, g)$ на поверхностях M .

Например, из наличия в уравнениях таких поверхностей только слагаемых h_{kkm} следует, что $\langle f_k, z \rangle = -\bar{\partial}h_{k2}(\bar{f}_0) = 0$ при $k \geq 3$, так что

$$Z = (f, g) = (f_0 + f_1 + f_2, g_0 + g_1). \quad (3.1)$$

Рассмотрим сначала компоненты $f_1(u)$ и $g_0(u)$ набора (3.1).

С учетом предложения 14 $(3, \bar{3})_{\mathfrak{N}}$ -компонента основного тождества сводится к уравнению

$$g_0'''(u) = 0. \quad (3.2)$$

Еще одна, $(2, \bar{2})_{\mathfrak{N}}$ -компонента основного тождества также имеет в нашем случае простой вид

$$\operatorname{Re}\{2i\langle f_1', z \rangle \langle z, z \rangle\} = 0. \quad (3.3)$$

Из этого тождества получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_2'(u) &= \delta_2'(u) = 0, \\ \beta_1'(u) &= \beta_2'(u) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из $(2, \bar{2})_{\mathfrak{N}}$ -тождества при $h_{320} = 0$ легко получаются равенства

$$\alpha_1'(0) = \beta_1'(0) = \beta_2'(0) = 0. \quad (3.5)$$

И кроме того, мы уже использовали равенство $2\alpha_1(u) = g_0'(u)$.

Из всего сказанного следует, что все производные $f_1^{(k)}(0)$, $g_0^{(l)}(0)$, кроме $f_1(0)$, выражаются через пятерку основных параметров p, q .

Этот факт является основой доказательства следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *В условиях теоремы 2 справедливы зависимости*

$$\begin{aligned} h_{22k} &= \varphi_{2k}(J_0) = \varphi_{2k}(h_{220}, h_{330}), \\ h_{33k} &= \varphi_{3k}(J_0) = \varphi_{3k}(h_{220}, h_{330}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

для всех $k > 0$ при некоторых функциях $\varphi_{2k}, \varphi_{3k}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $(2, \bar{2})_{\mathfrak{N}}$ - и $(3, \bar{3})_{\mathfrak{N}}$ -компоненты основного тождества. Учитывая их существенные упрощения для обсуждаемых уравнений, имеем:

$$(2, \bar{2})_{\mathfrak{N}}: (g_0 h_{22}' - g_0' h_{22}) + 2 \operatorname{Re}(\partial h_{22}(f_1)) = 0, \quad (3.7)$$

$$(3, \bar{3})_{\mathfrak{N}}: (g_0 h_{33}' - g_0' h_{33}) + 2 \operatorname{Re}(\partial h_{33}(f_1)) = 0. \quad (3.8)$$

Единственный коэффициент λ_0'' многочлена $h_{222} = \lambda_0'' h_{220}$ выражается в соответствии с предложением 15 через J_0 . Опираясь на это свойство, перейдем к индуктивному рассмотрению производных d^k/du^k тождества (3.7) при $u = 0$.

После такого дифференцирования левая часть тождества (3.7) содержит сумму выражений двух типов:

$$g_0^{(s)} h_{22}^{(k-s+1)} \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}(\partial h_{22}^{(l)}(f_1^{(k-l)})).$$

Все слагаемые такой суммы, кроме

$$g_0 h_{22}^{(k+1)}, \quad g_0'' h_{22}^{(k-1)}, \quad \operatorname{Re}(\partial h_{22}^{(k)}(f_1)), \quad \operatorname{Re}(\partial h_{22}^{(k-1)}(f_1')), \quad (3.9)$$

обращаются в нуль по причине равенства нулю производных $f_1^{(k)}(0), g_0^{(l)}(0)$.

Так как $\operatorname{Re}(\partial h_{220}(f_1)) = 0$, то по индукции такое же равенство выполняется и для третьего выражения в (3.9). Второе и четвертое слагаемые здесь, очевидно, выражаются через p, q, J_0 . Тогда и многочлен $h_{22,k+1}$ из первого слагаемого должен выражаться через J_0 .

Аналогично рассматривается тождество (3.8), и тем самым доказывается предложение 16.

Опираясь на него, мы рассмотрим теперь компоненту f_0 поля Z .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *В условиях теоремы 2 все производные $f_0^{(s)}(0)$ ($s \geq 0$) представляются в виде*

$$f_0^{(s)}(0) = \varphi_s(p, \bar{p}, q; h_{220}, h_{330}) \quad (3.10)$$

с некоторыми функциями φ_s , линейно зависящими от $p, \bar{p}, q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $(3, \bar{2})_{\mathfrak{A}}$ -компоненту основного тождества. С учетом несложных упрощений это уравнение можно записать в виде

$$f_0''(u) = \varphi(f_0(u), f_0'(u); h_{22}, h_{33}). \quad (3.11)$$

Будем дифференцировать при $u = 0$ это уравнение. Получаемые таким образом значения производных $f_0^{(s)}(0)$ в левой части формулы (3.11) оказываются выраженными при $s \geq 3$ через младшие производные f_0 . Учитывая равенства $f_0(0) = p$ и $f_0'(0) = a$, предложение 16, а также само уравнение (3.11), получаем по индукции зависимости

$$f_0^{(s)} = \varphi(p, \bar{p}, q; J_0) \quad \text{для всех } s \geq 0. \quad (3.12)$$

Этим рассуждением доказывается предложение 17.

Наконец, используя предложения 16 и 17, мы докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *В условиях теоремы 2*

$$h_{kkm} = \varphi_{km}(J_0) = \varphi_{km}(h_{220}, h_{330}) \quad (3.13)$$

при всех $k \geq 4, m \geq 0$ и некоторой функции φ_{km} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого предложения также опирается на индукцию по k и m .

Сначала рассмотрим $(k, \overline{k-1})$ -уравнение, получаемое при $k \geq 4$ из основного тождества:

$$\operatorname{Re}\{ig + 2\langle f, z \rangle\} + 2\partial N(f) + gN_u \Big|_{v=\langle z, z \rangle + N(z, z, u)} \equiv 0.$$

В силу четности специальных нормальных уравнений обсуждаемых поверхностей интересующая нас $(k, \overline{k-1})$ -компонента не содержит ни функцию $g_0(u)$, ни ее производные. Точно так же не входит в это уравнение f_1 .

В силу этого имеем уравнение

$$\bar{\partial}h_{kk}(\bar{f}_0) = \varphi(f_0^{(s)}; \{h_{k-1, k-1}\}), \quad (3.14)$$

где через $f_0^{(s)}$ обозначен набор некоторых производных функции $f_0(u)$, а через $\{h_{k-1, k-1}\}$ – некоторые из функций $h_{ss}(z, \bar{z}, u)$ и их производные с единственным условием $s < k$.

Вследствие уже рассмотренных предложений 16 и 17 и индуктивного допущения правая часть уравнения (3.14) представляет собой при $u = 0$ выражение вида

$$A_1(J_0)p_1 + A_2(J_0)p_2 + B_1(J_0)\bar{p}_1 + B_2(J_0)\bar{p}_2 + D(J_0)q.$$

Левая же часть зависит только от $\bar{p}_1, \bar{p}_2$. Это, с одной стороны, означает, что $A_1(J_0), A_2(J_0), D(J_0)$ равны нулю, так что (3.14) принимает вид

$$\bar{\partial}h_{kk}(\bar{p}) = B_1(J_0)\bar{p}_1 + B_2(J_0)\bar{p}_2.$$

С другой стороны, сошлемся на следующее несложное утверждение.

ЛЕММА 3 (о единственности). *Если для многочлена h_{kk} степеней k по z и $\bar{z}$ равенство*

$$\bar{\partial}h_{kk}(\bar{p}) = 0$$

выполняется тождественно при $(p_1, p_2) \in \mathbb{C}^2$, то $h_{kk} = 0$.

Применяя эту лемму к m раз продифференцированному по переменной u тождеству (3.14), получаем требуемое в предложении 18 утверждение.

Предложения 16–18 позволяют однозначно восстановить все специальное уравнение

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \sum h_{kkm}(z, \bar{z})u^m$$

однородной поверхности M по паре многочленов $J_0 = \{h_{220}, h_{330}\}$ и тем самым доказать теорему 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу приведенных в этом параграфе рассуждений однородную строго псевдовыпуклую гиперповерхность в $\mathbb{C}^3$, обладающую 2-мерной группой изотропии, можно определить по ее конечной струе – отрезку ряда Тейлора, задающего поверхность. В связи с этим теорема 2 может рассматриваться как одно из проявлений общего “принципа конечности”, справедливого для большого круга аналитических задач (см. для сравнения [29]).

§ 4. Доказательство теоремы 1

После обсуждений необходимых условий однородности мы теперь готовы доказать основной результат статьи, т.е. теорему 1.

Во-первых, установим однородность логарифмических поверхностей (0.1)–(0.4). Проверка этого свойства осуществляется простыми сдвигами вдоль рассматриваемых многообразий и последующим приведением получающихся уравнений к исходному виду. При этом основой рассуждений является следующее свойство “инвариантности” выражения $1 + |z|^2$:

$$1 + |z + a|^2 = (1 + |a|^2) \left(1 + \frac{\bar{a}z}{1 + |a|^2} \right) \left(1 + \frac{a\bar{z}}{1 + |a|^2} \right) \left(1 + \left| \frac{z}{(1 + |a|^2) + \bar{a}z} \right|^2 \right). \quad (4.1)$$

Логарифм от левой части равенства (4.1) совпадает с точностью до голоморфных и антиголоморфных слагаемых с логарифмом исходного выражения $1 + |z|^2$, вычисленным после дробно-линейного преобразования переменной z .

В силу этого правая часть уравнения любой из поверхностей (0.1)–(0.3) после смещения по z_1 и z_2 и дробно-линейной замены координат совпадает с исходным выражением с точностью до нескольких слагаемых. Каждое из них есть либо

$$\ln \left(1 + \frac{\bar{a}_k z_k}{1 + |a_k|^2} \right),$$

либо сопряженное к нему выражение. Все такие слагаемые переносятся в левую часть уравнения, и за счет замены

$$z_k^* = \frac{z_k}{(1 + |a_k|^2) + \bar{a}_k z_k}, \quad k = 1, 2,$$

$$w^* = w + i \ln \left(1 + \frac{\bar{a}_1 z_1}{1 + |a_1|^2} \right) + ib \ln \left(1 + \frac{\bar{a}_2 z_2}{1 + |a_2|^2} \right)$$

мы сохраняем, например, исходный вид уравнения (0.1).

Однородность поверхностей (0.4) при $\varepsilon = \pm 1$ доказывается еще проще.

Во-вторых, заметим, что логарифмические поверхности (0.1)–(0.4) сохраняют свой вид при независимых вращениях переменных z_1, z_2 . Следовательно, группа изотропии для каждой из них не менее, чем двумерна. Невозможность большей размерности для этих поверхностей следует из их неомбиличности.

Для установления последней и проверки остальных необходимых условий приведем уравнения (0.1)–(0.4) к нормальной форме.

Сначала воспользуемся степенным разложением функции $\ln(1 + t)$, которое дает нам для поверхностей (0.1)–(0.4) однотипные уравнения вида

$$v = (a_1 |z_1|^2 + b_1 |z_2|^2) + (a_2 |z_1|^4 + b_2 |z_2|^4) + (a_3 |z_1|^6 + b_3 |z_2|^6) + \dots \quad (4.2)$$

Нормируя здесь пару коэффициентов a_1, b_1 растяжением координат, мы в каждом случае приходим к уравнению

$$v = (|z_1|^2 + |z_2|^2) + (a_2 |z_1|^4 + b_2 |z_2|^4) + (a_3 |z_1|^6 + b_3 |z_2|^6) + \dots \quad (4.3)$$

с некоторыми новыми a_k, b_k . Отметим, что это уравнение является жестким, т.е. не зависит от переменной $u = \operatorname{Re} w$.

При его нормализации мы воспользуемся предложениями 4 и 5. Результатом соответствующих вычислений является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Простейшая нормализация уравнения (4.3) приводит его к виду*

$$\begin{aligned} v = & (|z_1|^2 + |z_2|^2) + \frac{1}{6}(a_2 + b_2)(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4) \\ & + t_1(|z_1|^6 + 3|z_1|^4|z_2|^2 - 3|z_1|^2|z_2|^4 - |z_2|^6) \\ & + \sum_{k+l+2m \geq 7} h_{klm}(z, \bar{z})u^m, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$t_1 = \frac{b^2 - 1}{48b^2}. \quad (4.5)$$

В формулу (4.4) надо еще подставить пару конкретных значений a_2, b_2 , которая в зависимости от уравнения (0.1)–(0.3) имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2b}\right), \quad b \in (0, 1], \\ & \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2b}\right), \quad b \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2b}\right), \quad b \in (0, 1]. \end{aligned}$$

А значения пары (a_3, b_3) , во всех случаях равной $(1/3, 1/(3b^2))$, уже подставлены в (4.5).

Нормируя уравнения (4.4) растяжением координат, получаем в двух из четырех обсуждаемых случаев уравнение

$$\begin{aligned} v = & (|z_1|^2 + |z_2|^2) - E_0 + t_1(|z_1|^6 + 3|z_1|^4|z_2|^2 - 3|z_1|^2|z_2|^4 - |z_2|^6) \\ & + \sum_{k+l+2m \geq 7} h_{klm}(z, \bar{z})u^m, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $t_1 = 3 \left(\frac{1-b}{1+b} \right)$, $b \in (0, 1]$, для поверхностей (0.1) или

$t_1 = 3 \left(\frac{1+b}{1-b} \right)$, $b \in (1, \infty)$, для поверхностей (0.2).

В двух других случаях имеем специальное нормальное уравнение

$$\begin{aligned} v = & (|z_1|^2 + |z_2|^2) + E_0 + t_1(|z_1|^6 + 3|z_1|^4|z_2|^2 - 3|z_1|^2|z_2|^4 - |z_2|^6) \\ & + \sum_{k+l+2m \geq 7} h_{klm}(z, \bar{z})u^m, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $t_1 = 3 \left(\frac{1+b}{1-b} \right)$, $b \in (0, 1)$, для поверхностей (0.2) или

$$t_1 = 3 \left(\frac{1-b}{1+b} \right), \quad b \in (0, 1], \text{ для поверхностей (0.3).}$$

В первом случае параметр t_1 покрывает промежуток $[0, 3)$, а во втором $t_1 \in (-\infty, -3)$. Заменой $z_1 \leftrightarrow z_2$ во втором случае знак коэффициента t_1 изменяется на противоположный, так что в целом мы получаем проколотую в точке $t_1 = 3$ полуось $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Значению $t_1 = 3$ соответствует, как несложно убедиться, однородная поверхность (0.4) при $\varepsilon = 1$, т.е.

$$v = |z_2|^2 + \ln(1 + |z_1|^2).$$

Аналогично уравнениями из двух последних случаев покрывается проколотая в той же точке $t_1 = 3$ полуось $\mathbb{R}_+$, а прокол закрывается поверхностью

$$v = |z_2|^2 - \ln(1 - |z_1|^2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что результат простейшей нормализации уравнения (4.3) не удовлетворяет условиям специального нормального вида в многочлене h_{221} . Однако, исправляя этот многочлен и сохраняя $h_{220} = \pm E_0$ и $h_{320} = 0$ еще одним отображением $\varphi_{(E, 0, r)}$, мы одновременно сохраняем неизменным и h_{330} .

Пусть теперь M — строго псевдовышуклая гиперповерхность какого-либо 3-мерного комплексного пространства, являющаяся однородной вблизи некоторой своей точки и имеющая 2-мерную группу изотропии в этой точке (и, следовательно, во всех близких точках).

Приведем M к нормальной форме Мозера. Так как группа $\text{Aut}_0 M$ 2-мерна, то M несферична (см. §2), а значит, и неомбилична. Следовательно, многочлен h_{220} из нормального уравнения M отличен от нуля.

В силу предложения 7 голоморфной заменой координат этот многочлен превращается в $\pm E_0$, а все уравнение M доводится до специального нормального вида (1.11).

По теореме 2 и предложению 15 все коэффициенты этого уравнения однозначно определяются парой многочленов

$$\begin{aligned} h_{220} &= \varepsilon(|z_1|^4 - 4|z_1|^2|z_2|^2 + |z_2|^4), \\ h_{330} &= t_1(|z_1|^6 + 3|z_1|^4|z_2|^2 - 3|z_1|^2|z_2|^4 - |z_2|^6), \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $t_1 \in \mathbb{R}$.

В то же время логарифмическими поверхностями (0.1)–(0.4) исчерпываются, как показано выше, все возможные пары (ε, t_1) . Следовательно, обсуждаемая поверхность M имеет специальное нормальное уравнение, совпадающее с нормальным уравнением одного из многообразий (0.1)–(0.4).

Это означает, что M голоморфно эквивалентна соответствующей логарифмической поверхности.

Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. *Cartan E.* Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1932. V. 11. P. 17–90.
2. *Tanaka N.* On the pseudo-conformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14. P. 397–429.
3. *Morimoto A., Nagano T.* On pseudo-conformal transformations of hypersurfaces // J. Math. Soc. Japan. 1963. V. 15. №3. P. 289–300.
4. *Rossi H.* Homogeneous strongly pseudoconvex hypersurfaces // Rice Univ. Studies. 1973. V. 59. №1. P. 131–145.
5. *Takagi R.* On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space // Osaka J. Math. 1973. V. 19. P. 495–506.
6. *Azad H., Huckleberry A., Richthofer W.* Homogeneous CR manifolds // J. Reine Angew. Math. 1985. V. 358. P. 125–154.
7. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds // Acta Math. 1974. V. 133. №3. P. 219–271.
8. *Лобода А. В.* О размерности группы, транзитивно действующей на гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ // Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. №1. С. 68–71.
9. *Winkelmann J.* The classification of 3-dimensional homogeneous complex manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1995. (Lecture Notes in Math. V. 1062.)
10. *Лобода А. В.* Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии // Воронежская зимняя матем. школа. Тезисы докладов. Воронеж, 2000. С. 111–112.
11. *Лобода А. В.* Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с “большими” группами изотропии // Международная школа-семинар, посвященная 90-летию Н. В. Ефимова. Тезисы докладов. Абрау-Дюрсо, 2000. С. 105–106.
12. *Kaup W.* Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Raumen // Invent. Math. 1967. V. 3. P. 43–70.
13. *Белощанка В. К.* Однородные гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №5. С. 760–764.
14. *Лобода А. В.* О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №2. С. 211–223.
15. *Лобода А. В.* Локальное описание однородных вещественных гиперповерхностей двумерного комплексного пространства в терминах их нормальных уравнений // Функц. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. №2. С. 33–42.
16. *Лобода А. В.* Об определении аффинно-однородной седловидной поверхности пространства $\mathbb{R}^3$ по коэффициентам ее нормального уравнения // Матем. заметки. 1999. Т. 65. №5. С. 793–796.
17. *Eastwood M., Ezhov V. V.* On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space // Geom. Dedicata. 1999. V. 77. P. 11–69.
18. *Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M.* Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry // Prepr. Ser. Pure Math. / Inst. Math. Univ. Oslo. 1995. V. 4. P. 1–26.
19. *Ежов В. В., Лобода А. В., Шмальц Г.* Каноническая форма многочлена четвертой степени в нормальном уравнении вещественной гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №4. С. 624–626.
20. *Webster S. M.* On the Moser normal form at a nonumbilic point // Math. Ann. 1978. V. 233. №2. P. 97–102.
21. *Burns D., Shneider S., Wells R. O.* Deformations of strictly pseudoconvex domains // Invent. Math. 1978. V. 46. №3. P. 237–253.
22. *Лобода А. В.* О локальных автоморфизмах вещественно-аналитических гиперповерхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. №3. С. 620–645.
23. *Ежов В. В.* Линеаризация группы стабильности одного класса гиперповерхностей // УМН. 1986. Т. 41. №3. С. 181–182.

24. *Лобода А. В.* О нормальных формах несферических поверхностей // Материалы Всесоюзной школы по теории функций. Кемерово, 1983. С. 65. (Деп. в ВИНТИ. № 3254-84. 1984 г.)
25. *Белошанка В. К.* О размерности групп автоморфизмов аналитической гиперповерхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 243–266.
26. *Montgomery D., Zippin L.* Topological transformation groups. New York: Interscience Publ., 1955.
27. *Stanton N. K.* A normal form for rigid hypersurfaces in $\mathbb{C}^2$ // Amer. J. Math. 1991. V. 113. № 5. P. 877–910.
28. *Stanton N. K.* Infinitesimal CR automorphisms of rigid hypersurfaces // Amer. J. Math. 1995. V. 117. № 1. P. 141–167.
29. *Zaitsev D.* Germs of local automorphisms of real-analytic CR structures and dependence on k -jets // Math. Res. Lett. 1997. V. 4. № 6. P. 823–842.

Воронежский государственный
архитектурно-строительный университет
E-mail: lob@vgasa.voronezh.su

Поступила в редакцию
25.01.2001