Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Матевосян, О решениях внешних краевых задач для системы теории упругости в весовых пространствах, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 12, 25–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm615>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 06:12:27

УДК 517.95

О. А. Матевосян

О решениях внешних краевых задач для системы теории упругости в весовых пространствах

В работе изучаются свойства обобщенных решений краевых задач Дирихле и Неймана для стационарной линейной системы теории упругости в неограниченных областях в предположении, что обобщенные решения этих задач обладают конечным интегралом энергии с весом $|x|^a$. В зависимости от значения параметра a доказаны теоремы единственности, а также найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений внешних краевых задач.

Библиография: 20 названий.

Введение

Рассмотрим систему уравнений теории упругости

$$Lu \equiv (Lu)_i = \sum_{j,k,h=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

в области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus G$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, где G — ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ — замыкание Ω , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Здесь и далее суммирование проводится по повторяющимся индексам от 1 до n . Предполагается, что коэффициенты постоянны и выполнены условия:

$$a_{kh}^{ij} = a_{hk}^{ji} = a_{ih}^{kj}, \quad \lambda_1 |\xi|^2 \leq a_{kh}^{ij} \xi_k^i \xi_h^j \leq \lambda_2 |\xi|^2,$$

где ξ — произвольная симметрическая матрица $\{\xi_k^i\}$, $\xi_k^i = \xi_i^k$, $|\xi|^2 = \xi_k^i \xi_k^i$, λ_1, λ_2 — положительные постоянные.

Введем обозначения:

$C_0^\infty(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций в Ω , имеющих компактный носитель в Ω ;

$H^1(\Omega)$ — пространство функций, полученное пополнением $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|u(x); H^1(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2) dx \right)^{1/2};$$

$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ — пространство функций, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$;

$\overset{\circ}{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ – пространство функций в Ω , полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\|u(x); H^1(K_0)\|$, где $K_0 \subset \overline{\Omega}$ – произвольный компакт.

Положим

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Обозначим через

$$\begin{aligned} D(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx, & E(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |e(u)|^2 dx, \\ D_a(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |x|^a |\nabla u(x)|^2 dx, & E_a(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |x|^a |e(u)|^2 dx, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2, & |e(u)|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2; \\ \Omega_R &= \Omega \cap \{x : |x| < R\}, & \partial\Omega_R &= \partial\Omega \cup \{x : |x| = R\}. \end{aligned}$$

Под конусом K в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат будем понимать такую область, что если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при всех $\lambda > 0$. Считаем, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\overline{\Omega}$.

Для системы (1) будем рассматривать задачи Дирихле и Неймана со следующими граничными условиями соответственно:

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\sigma(u)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

где $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \dots, \sigma_n(u))$, $\sigma(u(x)) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \nu_k$, $i = 1, \dots, n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Одной из первых работ, положивших начало систематическому изучению этих проблем, была классическая работа Фредгольма [1], в которой первая краевая задача для линейной системы теории упругости в случае однородных изотропных тел изучалась методом интегральных уравнений. Вторую краевую задачу для системы теории упругости в случае ограниченной области исследовал Корн [2]. В этой работе впервые установлены неравенства между интегралом Дирихле $D(u(x), \Omega)$ от решения и энергией $E(u(x), \Omega)$ системы, которые сейчас известны под названием неравенств Корна. Большую роль в разработке математических вопросов стационарной теории упругости сыграла работа К. Фридрихса [3], в которой доказаны неравенства Корна и вариационным методом исследованы первая и вторая краевые задачи теории упругости в ограниченной области. Отметим также работу Г. Фикеры [4], в которой с использованием неравенств Корна и функциональных методов изучаются различные краевые задачи для системы теории упругости. В работах В. А. Кондратьева и О. А. Олейник [5]–[9] для широкого класса неограниченных областей установлены

обобщения неравенств Корна и Харди, с помощью которых исследованы основные краевые задачи для системы теории упругости. В частности, изучены вопросы существования, единственности и устойчивости решений краевых задач с условием конечности интеграла энергии.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле $D(u(x), \Omega)$ или интеграла энергии $E(u(x), \Omega)$, либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \rightarrow \infty$.

Подобного рода “условия на бесконечности” продиктованы соображениями, заимствованными из физики, являются “естественными” и изучались рядом авторов (см., например, [5]–[7], [10]).

В настоящей работе таким условием является ограниченность интеграла энергии с весом

$$E_a(u(x), \Omega) < \infty, \quad a \in \mathbb{R}^1.$$

При том же условии на поведение решения на бесконечности в разных классах неограниченных областей автором [11], [12] изучены вопросы единственности и найдены размерности пространства решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения.

Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Корна и Харди [5]–[9], в представляемой статье удалось получить критерий единственности решений краевых задач для системы теории упругости. Для построения решений используется вариационный метод, т.е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Эту работу автор посвящает своему учителю В. А. Кондратьеву в связи с его 65-летием.

Прежде чем перейти к рассмотрению краевых задач для системы (1), установим две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$. Тогда

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m = \max\{1, 1 - n/2 - a/2\}$, $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение системы (1), $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1 - n/2 + a/2$, $\beta \geq 0$ – целое число, а для функции $u^\beta(x)$ справедлива оценка:

$$|D^\gamma u^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta}(a, u) |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}$$

для любого мультииндекса γ , $C_{\gamma\beta} = \text{const}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно [13], существует фундаментальное решение $\Gamma(x)$, для которого при $n > 2$ имеет место следующая оценка:

$$|D^\alpha \Gamma(x)| \leq C(\alpha) |x|^{2-n-|\alpha|}, \quad C(\alpha) = \text{const}.$$

В случае $n = 2$ фундаментальное решение представляется в виде

$$\Gamma(x) = S(x) \ln |x| + T(x),$$

где $S(x)$ и $T(x)$ – квадратные матрицы порядка 2, элементы которых есть однородные функции порядка нуль [14].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Рассмотрим вектор-функцию $v(x) = \theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 1$ при $s \geq 2$, причем $N \gg 1$ и $G \subset \{x : |x| < N\}$. Продолжим $v(x)$ на $\mathbb{R}^n$, полагая $v(x) = 0$ на $G = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Тогда вектор-функция $v(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет системе

$$Lv(x) = F_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $F_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } F_i \subset \{x : |x| < 2N\}$. Легко видеть, что $E_a(v(x), \mathbb{R}^n) < \infty$. Если $a + n \neq 0$, то из неравенства Корна [5; § 3, неравенство (1)] следует, что $v(x) = w(x) + Ax$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, а $w(x)$ такова, что $D_a(w(x), \Omega) < \infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [15], поскольку она основывается на лемме 2 из [15], в которой никаких ограничений на знак σ' нет. Следовательно, разложение

$$w(x) = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + w^\beta(x)$$

справедливо для любого a , где $P_0(x)$ – многочлен, $\text{ord } P_0(x) \leq \max\{1, 1 - n/2 - a/2\}$, $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1 - n/2 + a/2$ и

$$|D^\gamma w^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Отсюда и из определения функции $v(x)$ следует равенство (4) с $P(x) = P_0(x) + Ax$.

Пусть теперь $a + n = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$E_{-n-\varepsilon}(v(x), \mathbb{R}^n) \leq E_{-n}(v(x), \mathbb{R}^n) < \infty.$$

По неравенству Корна [5; § 3, неравенство (1)] существует постоянная кососимметрическая матрица A такая, что

$$D_{-n-\varepsilon}(v(x) - Ax, \mathbb{R}^n) \leq C E_{-n-\varepsilon}(v(x), \mathbb{R}^n) < \infty,$$

где постоянная C не зависит от $v(x)$. Следовательно, используя теорему 1 из [15], имеем

$$v(x) - Ax = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x),$$

причем $P_0(x)$ – многочлен, $\text{ord } P_0(x) \leq 1$, $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1 - n/2 + a/2$ и

$$|D^\gamma v^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Таким образом,

$$v(x) - Ax = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x),$$

откуда следует утверждение леммы при $a = -n$.

ЛЕММА 2. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ для некоторого $a \geq 0$. Тогда для любого $x \in \Omega$ имеет место равенство (4) с оценкой для $u^\beta(x)$ из леммы 1, причем $P(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в Ω . Тогда согласно лемме 1 имеем

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq 1$,

$$R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad R(x) = O(|x|^{2-n}), \quad n > 2.$$

Докажем, что $P(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. Очевидно, что если $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ и $a \geq 0$, то $E(u(x), \Omega) < \infty$.

Пусть $n > 2$. Легко проверить, что $E(R(x), \Omega) < \infty$ при $n > 2$. Следовательно, по неравенству треугольника $E(P(x), \Omega) < \infty$.

Пусть $P(x) = Ax + B$, т.е. $P_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i$. Имеем

$$E(P(x), \Omega) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + a_{ji})^2 dx,$$

где a_{ij} – элементы матрицы A . Последний интеграл сходится только в том случае, если $a_{ij} = -a_{ji}$, т.е. A – постоянная кососимметрическая матрица.

Рассмотрим случай $n = 2$. Известно [14], что $\Gamma(x) = S(x) \ln |x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ – матрицы 2×2 , элементы которых есть однородные функции порядка нуля. Тогда $\nabla \Gamma(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|)$, следовательно, $\nabla R(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|)$. Пусть существуют такие k, l , что $a_{kl} + a_{lk} \neq 0$. Тогда

$$|e_{kl}(u)| = |a_{kl} + a_{lk} + O(|x|^{-1} \ln |x|)| \geq \frac{1}{2} |a_{kl} + a_{lk}|$$

при $|x| \gg 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \infty > E(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n |e_{ij}(u)|^2 dx \geq \int_{\Omega} |e_{kl}(u)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{|x| > H} |a_{kl} + a_{lk}|^2 dx = \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что $a_{kl} = -a_{lk}$ для любых k, l . Лемма доказана.

§ 1. Внешняя задача Дирихле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением задачи Дирихле для системы (1) с граничным условием (2) будем называть вектор-функцию $u(x) \in \mathring{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ такую, что для всякой вектор-функции $\psi(x) \in \mathring{H}^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x_k} dx = 0. \quad (5)$$

Обозначим через $\text{Ker}_0(L)$ пространство обобщенных решений внешней задачи Дирихле для системы (1) с граничным условием (2), имеющих конечный интеграл энергии, т.е.

$$\text{Ker}_0(L) = \{u(x) : Lu = 0, u(x)|_{\partial\Omega} = 0, E(u(x), \Omega) < \infty\}.$$

Положим по определению

$$\text{Ker}_a(L) = \{u(x) : Lu = 0, u(x)|_{\partial\Omega} = 0, E_a(u(x), \Omega) < \infty\}.$$

Через $\dim \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L)$ обозначим размерности пространств $\text{Ker}_0(L)$ и $\text{Ker}_a(L)$ соответственно.

Будем вычислять значения $\dim \text{Ker}_a(L)$ в зависимости от параметра a .

Докажем, что если $a \geq 0$, то $\dim \text{Ker}_a(L) \leq n(n+1)/2$ при $n > 2$ и $\dim \text{Ker}_a(L) \leq 1$ при $n = 2$.

Действительно, если $a \geq 0$, то $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) \leq \dim \text{Ker}_0(L)$. Отсюда и из теоремы 7 работы [6; §2] следуют указанные выше неравенства.

ТЕОРЕМА 1. Если $-n \leq a < n-2$, $n \geq 2$, то

$$\dim \text{Ker}_a(L) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $0 \leq a < n-2$ при $n > 2$. Очевидно, что $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$, если $a \geq 0$.

Докажем, что $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$, если $a < n-2$. Действительно, пусть $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$. Согласно лемме 2 имеет место равенство (4):

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x) = Ax + B$, A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Легко проверить, что $E_a(R(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(P(x), \Omega) = 0$ при $0 \leq a < n-2$. Отсюда следует, что $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, т.е. $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$. Таким образом, $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$. Итак, $\text{Ker}_a(L) = \text{Ker}_0(L)$, следовательно, $\dim \text{Ker}_a(L) = \dim \text{Ker}_0(L)$ и согласно теореме 7 из [6; §2] $\dim \text{Ker}_a(L) = n(n+1)/2$.

Теперь рассмотрим случай, когда $-n \leq a < 0$ и $n > 2$. Пусть $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$, где $-n \leq a < 0$. Согласно неравенству Корна [5; §3, неравенство (43)] существует постоянная кососимметрическая матрица A такая, что

$$D_a(u(x) - Ax, \Omega) \leq C E_a(u(x), \Omega),$$

где постоянная C не зависит от u . Для функции $v(x) = u(x) - Ax$ имеем $D_a(v(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(v(x), \Omega) < \infty$.

Кроме того, $v(x)$ – решение системы (1) в Ω , следовательно, по лемме 1 оно имеет вид (4):

$$v(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$.

Докажем, что $\text{ord } P(x) = 0$. Сначала установим неравенство $D_a(P(x), \Omega) < \infty$. Имеем $D_a(v(x), \Omega) < \infty$, и легко проверить, что $D_a(R(x), \Omega) < \infty$ при $-n \leq a < 0$. Тогда по неравенству треугольника $D_a(P(x), \Omega) < \infty$.

Пусть $\text{ord } P(x) = k$ и $k \neq 0$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|\nabla P(x)| \geq C|x|^{k-1}$. Следовательно,

$$\infty > D_a(P(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |\nabla P(x)|^2 dx \geq C \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{a+2k-2+n} |x|^{-1} d|x|.$$

Последний интеграл сходится только в том случае, если $a + 2k - 2 + n < 0$, т.е. $k < 1$, значит, $\text{ord } P(x) = 0$ и $P(x) = B$, где B – постоянный вектор. Тем самым, $v(x) = B + R(x)$.

С другой стороны, $v(x) = u(x) - Ax$. Таким образом, $u(x) = Ax + B + R(x)$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. Легко проверить, что $E(R(x), \Omega) < \infty$ и $E(Ax + B, \Omega) = 0$. Следовательно, $E(u(x), \Omega) < \infty$, т.е. $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$. Получили, что $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$.

Кроме того, очевидно, что $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$, если $a < 0$.

Итак, $\text{Ker}_a(L) = \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) = \dim \text{Ker}_0(L)$. В силу теоремы 7 из [6; §2] имеем $\dim \text{Ker}_0(L) = n(n+1)/2$. Следовательно, $\dim \text{Ker}_a(L) = n(n+1)/2$.

Пусть теперь $n = 2$. Для нетривиальной постоянной кососимметрической матрицы A построим обобщенное решение $u_A(x)$ задачи Дирихле для системы (1) в Ω с граничным условием $u_A(x)|_{\partial\Omega} = Ax$, минимизируя функционал

$$J(v) = \int_{\Omega} a_{ij}^{kh} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j(x)}{\partial x_h} dx$$

в классе допустимых функций $\{v(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}), v_A(x)|_{\partial\Omega} = Ax, v(x) \text{ имеет компактный носитель в } \overline{\Omega}\}$. Так, полученное решение удовлетворяет условиям $E(u_A(x), \Omega) < \infty, D(u_A(x), \Omega) < \infty$. Согласно неравенству Харди [9] получим

$$\int_{|x| > N} |u_A(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty,$$

где $N \gg 1$ и $G \subset \{x : |x| < N\}$.

Таким же путем находим обобщенные решения задачи Дирихле для системы (1) в Ω с граничным условием

$$u_i(x)|_{\partial\Omega} = \Gamma(x)\tilde{C}_i, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и с условиями $E(u_i(x), \Omega) < \infty$, $D(u_i(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_{|x|>N} |u_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Решения $u_A(x) - Ax$, $u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i$, $i = 1, 2$, линейно независимы. Действительно, если $(u_A(x) - Ax)d_0 + \sum_{i=1}^2 (u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i)d_i = 0$, где d_0, d_i , $i = 1, 2$, — некоторые постоянные, то $v(x) \equiv d_0 Ax + \Gamma(x)(d_1\tilde{C}_1 + d_2\tilde{C}_2) = 0$, так как $v(x) = d_0 u_A(x) + \sum_{i=1}^2 d_i u_i(x)$ имеет конечный интеграл Дирихле $D(v(x), \Omega) < \infty$ и

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx < \infty.$$

Таким образом, $Axd_0 + \Gamma(x)\vec{d} = 0$, где $\vec{d} = d_1\tilde{C}_1 + d_2\tilde{C}_2$. Так как $|Ax| \geq |x|$ и $|\Gamma(x)\vec{d}| \leq C \ln|x|$, то $d_0 = 0$. Следовательно, $\Gamma(x)\vec{d} = 0$ и, применяя к этому равенству оператор теории упругости, получаем

$$0 = L(\Gamma(x)\vec{d}) = L(\Gamma(x))\vec{d} = E\delta(x)\vec{d} = \begin{pmatrix} \delta(x) & 0 \\ 0 & \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

отсюда следует, что $d_1 = d_2 = 0$. Легко проверить, что $E_a(u_A(x) - Ax, \Omega) < \infty$ и $E_a(u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i, \Omega) < \infty$, $i = 1, 2$, при $-2 \leq a < 0$. Следовательно, задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере 3 линейно независимых решения. Покажем, что всякое обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле для системы (1) с граничным условием (2) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ является линейной комбинацией построенных решений. Согласно неравенству Корна [5; § 3, неравенство (1)] существует постоянная кососимметрическая матрица A_1 такая, что

$$D_a(u(x) - A_1x, \Omega) \leq CE_a(u(x), \Omega),$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$. Для функции $v_1(x) = u(x) - A_1x$ имеем $D_a(v_1(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(v_1(x), \Omega) < \infty$. Так как $v_1(x)$ является решением системы (1) в Ω , то согласно лемме 1

$$v_1(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ — многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Аналогичным образом, как и выше, можно показать, что $\text{ord } P(x) = 0$ и $P(x) = B_1$, B_1 — постоянный вектор.

Таким образом, $u(x) = A_1x + B_1 + \Gamma(x)C_0 + R_1(x)$,

$$R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad R_1(x) = O(|x|^{-1} \ln|x|).$$

Пусть $A_1 = CA$ и $C_0 = d_1\tilde{C}_1 + d_2\tilde{C}_2$. Положим

$$w(x) = u(x) + C(u_A(x) - Ax) + \sum_{i=1}^2 d_i(u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i).$$

Очевидно, что $w(x)$ – решение системы (1) в Ω , $w(x)|_{\partial\Omega} = 0$ и

$$w(x) = B_1 + R_1(x) + Cu_A(x) + \sum_{i=1}^2 d_i u_i(x).$$

Легко видеть, что $D(w(x), \Omega) < \infty$ и $\int_{\Omega} |w(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty$. Таким образом, $w(x)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} Lw(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ w(x)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ D(w(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_{\Omega} |w(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty. \end{aligned} \tag{w}$$

Докажем, что решение $w(x)$ задачи (w) единственно, т.е. $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого в интегральном тождестве (5) подставим вектор-функцию $\psi(x) = w(x)\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta\left(\frac{\ln |x|}{\ln N}\right)$, $\theta(s) = 1$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \geq 2$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, и получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(w(x))\theta_N(x) dx = - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} w(x) dx, \tag{6}$$

где $\mathcal{E}(w(x)) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i(x)}{\partial x_k}$.

Покажем, что правая часть равенства (6) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. По неравенству Коши–Буняковского имеем:

$$\begin{aligned} \left| - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} w(x) dx \right| &\leq C \int_{\Omega \cap \{x: N < |x| < N^2\}} |\nabla w(x)| \frac{|w(x)|}{|x| \ln N} dx \\ &\leq 2C J_1(w(x)) J_2(w(x)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1(w(x)) &\equiv \left(\int_{|x| > N} |\nabla w(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \\ J_2(w(x)) &\equiv \left(\int_{N < |x| < N^2} |w(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{\Omega} |w(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad D(w(x), \Omega) < \infty,$$

то $J_2(w(x)) \rightarrow 0$ и $J_1(w(x), \Omega) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(w(x)) \theta_N(x) dx \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

откуда $\mathcal{E}(w(x)) = 0$ в Ω . Отсюда следует [4], что $w(x) = A_2 x + B_2$, где A_2 – постоянная кососимметрическая матрица, B_2 – постоянный вектор. Так как $w(x)|_{\partial\Omega} = 0$, $D(w(x), \Omega) < \infty$, то $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, т.е. $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $n - 2 \leq a < n$, $n \geq 2$, то

$$\dim \text{Ker}_a(L) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n > 2$. Для любого постоянного вектора $\vec{e} \neq 0$ построим обобщенное решение $u_e(x)$ системы (1) с граничным условием

$$u_e(x)|_{\partial\Omega} = \vec{e} \quad (7)$$

и с условиями $E(u_e(x), \Omega) < \infty$, $D(u_e(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_{\Omega} |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \quad (8)$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{v(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}), v_e(x)|_{\partial\Omega} = \vec{e}, v(x) \text{ имеет компактный носитель в } \overline{\Omega}\}$. Ограниченность интеграла Дирихле следует из неравенства Корна [5]. Условие (8) является следствием неравенства Харди [8]. Согласно лемме 2 решение $u_e(x)$ имеет вид

$$u_e(x) = P_e(x) + R_e(x), \quad (9)$$

где $P_e(x)$ – многочлен, $P_e(x) = Ax + B$, причем A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор,

$$R_e(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C'_\alpha + u_e^\beta(x), \quad R_e(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Покажем, что $P_e(x) \equiv 0$. Пусть $P_e(x) \not\equiv 0$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|P_e(x)| > C$ и

$$\infty > \int_{\Omega \cap K} |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx > \frac{C^2}{2} \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{-2} dx = \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $P_e(x) \equiv 0$. Таким образом,

$$u_e(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C'_\alpha + u_e^\beta(x). \quad (10)$$

Докажем, что

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} dx = \int_{\partial\Omega} u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds. \quad (11)$$

Для этого рассмотрим шар $Q_R = \{x : |x| < R\}$ с центром в начале координат такой, что $G \Subset Q_R$. Обозначим $\Omega_R = \Omega \cap Q_R$, $\partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \{x : |x| = R\}$. Тогда

$$\int_{\Omega_R} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} dx = \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds. \quad (12)$$

Существует последовательность областей Ω_{R_k} такая, что $\Omega_{R_k} \subset \Omega_{R_{k+1}} \subset \dots \subset \Omega_{R_n} \subset \mathbb{R}^n$ и $\bigcup_k \Omega_{R_k} = \Omega$.

Покажем, что интегралы в левой и правой частях равенства (12) сходятся. Действительно, по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega_R} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} dx \right| \\ & \leq C \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \right|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

так как $\Omega_R \subset \Omega$ и $\int_{\Omega} |\nabla u_e(x)|^2 dx < \infty$.

Докажем, что

$$\int_{|x|=R} u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Действительно, в силу неравенства Коши–Буняковского и оценок

$$|u_e(x)| \leq C|x|^{2-n}, \quad |\nabla u_e(x)| \leq C|x|^{1-n}$$

имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|x|=R} u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds \right| \leq C \int_{|x|=R} |u_e(x)| |\nabla u_e(x)| ds \\ & \leq C \left[C \int_{|x|=R} |x|^{4-2n} ds \right]^{1/2} \left[C \int_{|x|=R} |x|^{2-2n} ds \right]^{1/2} = \text{const} \cdot R^{2-n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $R \rightarrow \infty$ и $n > 2$, постоянная C не зависит от R . Устремляя R к бесконечности в формуле (12), получаем требуемое равенство (11) и с учетом $u_e(x)|_{\partial\Omega} = \vec{e}$

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u_e(x)) dx = \vec{e} \int_{\partial\Omega} \sigma(u_e(x)) ds,$$

где $\sigma(u_e(x)) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k$.

Покажем теперь, что в разложении (10) постоянная $C'_0 \neq 0$. Пусть $C'_0 = 0$, тогда $|u_e(x)| \leq C|x|^{1-n}$ и $|\sigma(u_e(x))| \leq C|x|^{-n}$. Умножая систему (1) на 1 и интегрируя по Ω_R , получаем

$$\left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) \sigma(u_e(x)) ds = 0.$$

Так как

$$\left| \int_{|x|=R} \sigma(u_e(x)) ds \right| \leq \text{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n} ds = \text{const} \cdot R^{-1} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$, то

$$\int_{|x|=R} \sigma(u_e(x)) ds \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(u_e(x)) ds \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

и из равенства (11) получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u_e(x)) dx = \vec{e} \cdot 0 = 0,$$

т.е. $\mathcal{E}(u_e(x)) = 0$. Отсюда следует [4], что $u_e(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

С другой стороны (из формулы (10) при $\alpha = 0, \beta = 0$), $u_e(x) = C'_0 \Gamma(x) + u_e^0(x)$. Следовательно, $Ax + B = C'_0 \Gamma(x) + u_e^0(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, т.е. $Ax + B \rightarrow 0$, а это возможно, только если $A = 0, B = 0$, т.е. $u_e(x) \equiv 0$. Но $u_e(x)|_{\partial\Omega} = \vec{e} \neq 0$. Противоречие означает, что если $\vec{e} \neq 0$, то $C'_0 \neq 0$.

Пусть $\vec{e} \neq 0$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Построим решение $u_e(x)$ такое, что $u_e(x)|_{\partial\Omega} = \vec{e}$ и $u_e(x) = C'_0 \Gamma(x) + u_e^0(x)$, где $\vec{C}'_0 \neq 0$. Тогда каждому вектору $\vec{e}$ из $\mathbb{R}^n$ соответствует вектор $\vec{C}'_0$ из $\mathbb{R}^n$, т.е. существует преобразование $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $S: \vec{e} \rightarrow \vec{C}'_0$, где $\vec{e} \neq 0, \vec{C}'_0 \neq 0$. Легко заметить, что преобразование S линейно и невырождено.

Пусть $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^n$. Для любых линейно независимых векторов $C'_0 = \{C'_{01}, \dots, C'_{0n}\}$ существует единственное линейное преобразование S такое, что $\vec{C}'_0 = S\vec{e}$, где S – некоторая матрица. Тогда

$$\vec{e} = S^{-1}\vec{C}'_0. \quad (*)$$

Рассмотрим теперь систему теории упругости (1) в Ω с граничным условием

$$u_A(x)|_{\partial\Omega} = Ax, \quad (13)$$

где A – постоянная кососимметрическая матрица. Для любой постоянной кососимметрической матрицы A построим обобщенное решение системы (1) с граничным условием (13) и с условиями $E(u_A(x), \Omega) < \infty, D(u_A(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_{\Omega} |u_A(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \quad (14)$$

Такое решение можно построить, используя вариационный метод и минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{u(x) : u(x) \in H^1(\Omega), u(x)|_{\partial\Omega} = Ax, u(x) \text{ имеет компактный носитель в } \bar{\Omega}\}$. Ограниченность интеграла Дирихле следует из неравенства Корна [5]. Условие (14) является следствием неравенства Харди [8]. Согласно лемме 2 имеет место разложение

$$u_A(x) = P_A(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x). \quad (15)$$

Так же как и выше, доказывается, что $P_A(x) \equiv 0$. Следовательно,

$$u_A(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x). \quad (16)$$

Рассмотрим разность:

$$v(x) = (u_A(x) - Ax) - (u_e(x) - \vec{e}), \quad (17)$$

где $\vec{e} = S^{-1}\vec{C}_0$, $u_e(x)$ и $u_A(x)$ определяются формулами (10) и (16) соответственно. Очевидно, что $v(x)$ – решение системы (1) в Ω и $v(x)|_{\partial\Omega} = 0$.

Докажем, что $E_a(v(x), \Omega) < \infty$ при $n - 2 \leq a < n$. Так как $\vec{C}'_0 = S\vec{e} = S(S^{-1}\vec{C}_0) = SS^{-1}\vec{C}_0 = \vec{C}_0$, то из формул (10) и (16) получим

$$u_A(x) - u_e(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C''_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $C''_\alpha = C_\alpha - C'_\alpha$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Легко проверить, что $E_a(D^\alpha \Gamma(x) C''_\alpha, \Omega) < \infty$, $E_a(u_0^\beta(x), \Omega) < \infty$. Тогда $E_a(u_A(x) - u_e(x), \Omega) < \infty$. Заметим также, что $E_a(Ax, \Omega) = 0$, $E_a(S^{-1}\vec{C}_0, \Omega) = 0$. Следовательно, $E_a(v(x), \Omega) < \infty$.

Покажем теперь, что $v(x) \not\equiv 0$. Пусть $v(x) \equiv 0$, т.е. $u_A(x) - Ax - u_{S^{-1}\vec{C}_0}(x) + S^{-1}\vec{C}_0 \equiv 0$, причем $u_A(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $u_{S^{-1}\vec{C}_0}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда $|Ax| = |u_A(x) - u_{S^{-1}\vec{C}_0}(x) + S^{-1}\vec{C}_0| < \text{const}$. С другой стороны, $|Ax| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, $Ax \neq 0$. Полученное противоречие означает, что $v(x) \not\equiv 0$.

Пусть $A_1, \dots, A_p$, $p = (n^2 - n)/2$, – линейно независимые постоянные кососимметрические $(n \times n)$ -матрицы. Построим решение $v_{A_1}(x), \dots, v_{A_p}(x)$.

Докажем, что если $A_1, \dots, A_p$ – базис в пространстве кососимметрических матриц, то $v_{A_1}(x), \dots, v_{A_p}(x)$ – линейно независимые решения, т.е. из равенства $\sum_{i=1}^p c_i v_{A_i}(x) = 0$, где $c_i = \text{const}$, следует, что $c_i = 0$, $i = 1, \dots, p$. Действительно, пусть

$$\sum_{i=1}^p c_i [u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x) - A_i x + e_i] = 0,$$

где $c_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, p$, т.е. $\sum_{i=1}^p c_i A_i x = \sum_{i=1}^p c_i u_{A_i}(x) - \sum_{i=1}^p c_i (u_{e_i}(x) - e_i)$.

Обозначим $W_1(x) \equiv \sum_{i=1}^p c_i A_i x$, тогда

$$W_1(x) = \sum_{i=1}^p c_i u_{A_i}(x) - \sum_{i=1}^p c_i (u_{e_i}(x) - e_i), \quad D_a(W_1(x), \Omega) < \infty.$$

Покажем, что $W_1(x) \equiv \sum_{i=1}^p c_i A_i x \equiv 0$.

Пусть $T = \sum_{i=1}^p c_i A_i$, $Tx = \sum_{i=1}^p c_i A_i x$, где $T = \|t_{ij}\|_{n \times n}$. Тогда

$$\int_{\Omega} |x|^a |\nabla Tx|^2 dx < \infty,$$

так как $Tx = W_1(x)$ и $\int_{\Omega} |x|^a |\nabla W_1|^2 dx < \infty$. С другой стороны,

$$\infty > \int_{\Omega} |x|^a |\nabla Tx|^2 dx = \int_{\Omega} |x|^a |t_{ij}|^2 dx,$$

а интеграл в правой части конечен только в том случае, если $t_{ij} = 0$, т.е. $T = 0$ и $\sum_{i=1}^p c_i A_i = 0$, следовательно, $c_i = 0$, $i = 1, \dots, p$. Таким образом, задача Дирихле (1), (2) имеет по крайней мере $p = (n^2 - n)/2$ линейно независимых обобщенных решений.

Докажем теперь, что всякое обобщенное решение $u(x)$ однородной задачи (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ является линейной комбинацией построенных решений $v_{A_1}(x), \dots, v_{A_p}(x)$, т.е.

$$u(x) = \sum_{i=1}^p c'_i v_{A_i}(x),$$

где $c'_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, p$. Согласно лемме 2 решение системы (1) в Ω можно представить в виде (4). Докажем, что существуют такие $c'_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, p$, что при $x \in \Omega$ имеет место равенство

$$P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) = \sum_{i=1}^p c'_i (u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x) - A_i x + e_i).$$

Так как $A_1, \dots, A_p$, $p = (n^2 - n)/2$, — базис в пространстве кососимметрических матриц, то существуют такие $c_1, \dots, c_p$, что $A = \sum_{i=1}^p c_i A_i$. Положим

$$u_1(x) \equiv \sum_{i=1}^p c'_i (u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x) - A_i x + e_i),$$

где $c'_i = -c_i$. Очевидно, что $u_1(x)$ — решение системы (1) в Ω , $u_1(x)|_{\partial\Omega} = 0$ и $E_a(u_1(x), \Omega) < \infty$ при $n - 2 \leq a < n$.

Рассмотрим разность $W(x) = u(x) - u_1(x)$. По построению $W(x)|_{\partial\Omega} = 0$. Из неравенства треугольника следует, что $E_a(W(x), \Omega) < \infty$ при $n - 2 \leq a < n$.

Докажем, что $W(x) \equiv 0$ в Ω . Действительно, пусть $A = \sum_{i=1}^p c_i A_i$. Тогда

$$W(x) = b + Z(x),$$

где

$$b = B - \sum_{i=1}^p c'_i e_i, \quad Z(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) - \sum_{i=1}^p c'_i [u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x)],$$

т.е. $Z(x) = W(x) - \vec{b}$ и $Z(x)|_{\partial\Omega} = -\vec{b}$. Легко заметить, что $D(Z(x), \Omega) < \infty$ и $\int_{\Omega} |Z(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty$. Итак, получили задачу

$$\begin{aligned} LZ(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ Z(x)|_{\partial\Omega} &= -\vec{b}, \\ D(Z(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_{\Omega} |Z(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned} \quad (Z_b)$$

По построению имеем задачу

$$\begin{aligned} Lu_e(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u_e(x)|_{\partial\Omega} &= \vec{e}, \\ D(u_e(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_{\Omega} |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned} \quad (e)$$

Докажем, что

$$E_a(u_e(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |e(u_e(x))|^2 dx = \infty, \quad \vec{e} \neq 0. \quad (18)$$

Сначала покажем, что если $C'_0 \neq 0$ в (10), то

$$E_a(C'_0 \Gamma(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |e(C'_0 \Gamma(x))|^2 dx = \infty.$$

Из свойств фундаментального решения системы теории упругости [13] следует, что $\Gamma(x) = |x|^{2-n} U(x)$, где $U(x)$ — однородная функция порядка нуль, тогда $|x|^a |e(C'_0 \Gamma(x))|^2$ — однородная функция порядка $a + 2(1 - n)$, т.е.

$$0 \neq |x|^a |e(C'_0 \Gamma(x))|^2 \stackrel{\text{def}}{=} f(x) = C(C'_0) |x|^{a+2-2n} f_0(x),$$

где $f_0(x)$ — однородная функция порядка нуль. Зафиксируем какую-нибудь точку x_0 , где $f_0(x_0) \neq 0$. Из непрерывности следует, что $f_0(x) \neq 0$ в окрестности $Q_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 . Построим конус K с вершиной в начале координат такой, что $Q_\varepsilon(x_0) \subset K$. Тогда

$$E_a(C'_0 \Gamma(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |e(C'_0 \Gamma(x))|^2 dx \geq C(C'_0) \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{a+2-2n} dx = \infty$$

при $C'_0 \neq 0$.

Применяя неравенство треугольника к формуле вида (10) $C'_0 \Gamma(x) = u_e(x) - R_{1e}(x)$, где $R_{1e}(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C'_\alpha + u_e^\beta(x)$, получаем

$$\infty = E_a(C'_0 \Gamma(x), \Omega) \leq E_a(u_e(x), \Omega) + E_a(R_{1e}(x), \Omega).$$

Легко проверить, что $E_a(R_{1e}(x), \Omega) < \infty$. Следовательно, $E_a(u_e(x), \Omega) = \infty$ при $\vec{e} \neq 0$. Таким образом, имеем задачу

$$\begin{aligned} Lu_e(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u_e(x)|_{\partial\Omega} &= \vec{e}, \\ D(u_e(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_{\Omega} |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty, \\ E_a(u_e(x), \Omega) &= \infty \quad \text{при } \vec{e} \neq 0 \end{aligned} \quad (e_a)$$

($u_e(x)$ – решение). Докажем единственность решения задачи (e). Пусть $u'_e(x)$ и $u''_e(x)$ – два решения такие, что

$$u'_e(x)|_{\partial\Omega} = \vec{e}, \quad u''_e(x)|_{\partial\Omega} = \vec{e}.$$

Тогда функция $u_2(x) = u'_e(x) - u''_e(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} u_2(x)|_{\partial\Omega} &= 0, \quad E(u_2(x), \Omega) < \infty, \quad D(u_2(x), \Omega) < \infty, \\ \int_{\Omega} |u_2(x)|^2 |x|^{-2} dx &< \infty. \end{aligned}$$

Покажем, что $u_2(x) \equiv 0$ в Ω . Для этого в интегральном тождестве (5) для $u_2(x)$ подставим вектор-функцию $\psi(x) = u_2(x)\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta(s) = 1$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \geq 2$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, и получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u_2(x))\theta_N(x) dx = - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{2j}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} u_2(x) dx. \quad (19)$$

Таким же образом, как в равенстве (6) (теорема 1, случай $n = 2$), можно показать, что правая часть равенства (19) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u_2(x))\theta_N(x) dx \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

откуда $\mathcal{E}(u_2(x)) = 0$ в Ω . Как известно [4], $u_2(x) = A_2 x + B_2$, где A_2 – постоянная кососимметрическая матрица, B_2 – постоянный вектор. Так как $u_2(x)|_{\partial\Omega} = 0$,

$$D(u_2(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |u_2(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty,$$

то $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, т.е. $u_2(x) \equiv 0$. Таким образом, решение задачи (e) единственно. Из формулы (18) следует, что

$$\int_{\Omega} |x|^a |e(Z(x))|^2 dx = \infty, \quad \vec{b} \neq 0 \quad (\vec{e} \neq 0).$$

Для функции $Z(x) = W(x) - \vec{b}$ имеем

$$\infty = \int_{\Omega} |x|^a |e(Z)|^2 dx = \int_{\Omega} |x|^a |e(W)|^2 dx < \infty.$$

Полученное противоречие означает, что $\vec{b} = 0$, т.е. $\vec{e} = 0$. Следовательно, $W(x) = Z(x)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} LZ(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ Z(x)|_{\partial\Omega} &= 0, \\ D(Z(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_{\Omega} |Z(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned} \tag{z_0}$$

В силу единственности решения задачи (e) $Z(x) \equiv 0$ в Ω . Отсюда следует, что $W(x) = 0$, и так как $W(x)|_{\partial\Omega} = 0$, то $W(x) \equiv 0$ в Ω . Теорема в случае $n > 2$ доказана.

Доказательство теоремы для случая $n = 2$ проводится аналогично. Для не-тривиальной постоянной кососимметрической матрицы A построим обобщенное решение $u_A(x)$ задачи Дирихле для системы (1) в Ω с граничным условием (13), минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{u(x) : u(x) \in H^1(\Omega), u(x)|_{\partial\Omega} = Ax, u(x) \text{ имеет компактный носитель в } \overline{\Omega}\}$. Так, полученное решение удовлетворяет условиям $E(u_A(x), \Omega) < \infty, D(u_A(x), \Omega) < \infty$. Согласно неравенству Харди [9] получим

$$\int_{|x| > N} |u_A(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \tag{20}$$

где $N \gg 1$ и $G \subset \{x : |x| < N\}$.

Покажем, что любое обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, имеет вид

$$u(x) = u_A(x) - Ax,$$

где A – постоянная кососимметрическая матрица. Согласно лемме 2 решение системы (1) имеет вид (15) с $P_A(x) = Ax + B$, причем A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

Докажем, что $A = 0$. Предположим, что $A \neq 0$. Запишем равенство (15) в виде

$$u_A(x) = Ax + B + \Gamma(x)C_0 + R_1(x), \quad R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

По построению $D(u_A(x), \Omega) < \infty$, т.е.

$$\int_{r < |x| < R} |\nabla u_A(x)|^2 dx < C'_1$$

при любом R . Легко проверить, что

$$\int_{\Omega} |\nabla R_1(x)|^2 dx < \infty.$$

Следовательно,

$$\int_{r < |x| < R} |\nabla R_1(x)|^2 dx < C'_2$$

для любого R . Так как $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение системы (1), $\Gamma(x) = S(x) \ln |x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ – матрицы 2×2 , элементы которых есть однородные функции порядка нуль [14], то $|\nabla(\Gamma(x)C_0)| \leq C(C_0) |\ln |x|| |x|^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\int_{r < |x| < R} |\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 dx \leq C'(C_0) \int_{r < |x| < R} |x|^{-2} |\ln |x||^2 dx \leq C'(C_0) (\ln R)^3.$$

Из формулы (15) и неравенства треугольника следует, что

$$\int_{|x| < R} |\nabla P_A(x)|^2 dx \leq C'_1 + C'_2 + C'(C_0) (\ln R)^3.$$

С другой стороны,

$$\nabla P_A(x) = A, \quad \int_{|x| < R} |\nabla P_A(x)|^2 dx = \int_{|x| < R} |A|^2 |x| d|x| = C'_3 R^2.$$

Таким образом, $C'_3 R^2 \leq C'_1 + C'_2 + C'(C_0) (\ln R)^3$ для любого $R \gg 1$. Полученное противоречие означает, что $A = 0$ и $P_A(x) = B$. Итак, $u_A(x) = B + \Gamma(x)C_0 + R_1(x)$.

Докажем теперь, что в (15) постоянная $C_0 = 0$. Предположим, что $C_0 \neq 0$. Тогда по неравенству треугольника имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 dx < \infty.$$

С другой стороны, $\Gamma(x)C_0 = (S(x) \ln |x| + T(x))C_0$. Тогда в некотором конусе K справедливо неравенство: $|\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 \geq C(C_0) |x|^{-2} (\ln |x|)^2$. Следовательно,

$$\infty > \int_{\Omega} |\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 dx \geq C(C_0) \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |\ln |x||^2 |x|^{-2} dx = \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $C_0 = 0$. Итак, $u_A(x) = B_2 + R_1(x)$.

Легко проверить, что $E_a(u_A(x), \Omega) < \infty$ при $0 \leq a < 2$.

Тогда $E_a(u_A(x) - Ax, \Omega) < \infty$ и $u_A(x) - Ax \in \text{Ker}_a(L)$, т.е. задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, $0 \leq a < 2$, имеет по крайней мере одно ненулевое решение, значит, $\dim \text{Ker}_a(L) \geq 1$.

С другой стороны, $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$ при $a \geq 0$. Следовательно, $\dim \text{Ker}_a(L) \leq \dim \text{Ker}_0(L)$. В силу теоремы 7 из [6; § 2] $\dim \text{Ker}_0(L) = 1$.

Таким образом, $\dim \text{Ker}_a(L) = 1$ при $0 \leq a < 2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если $n \leq a < \infty$, $n \geq 2$, то

$$\dim \text{Ker}_a(L) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $n > 2$. Пусть $a = n$. Теорему докажем от противного. Пусть $\dim \text{Ker}_a(L) > 0$. Это значит, что существует $u(x)$ такое, что $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$ и $u(x) \neq 0$. Так как $a = n$, то $u(x) \in \text{Ker}_n(L) \subset \text{Ker}_{n-2}(L)$. Тогда в силу теоремы 2 имеет место формула

$$u(x) = u_A(x) - Ax - u_e(x) + \vec{e}, \quad (21)$$

где $\vec{e} = S^{-1}\vec{C}_0$ (см. (*)), $\vec{C}_0$ определяется из формулы (16). Подставляя формулы (10) и (16) в (21), получаем

$$u(x) = P(x) + (\vec{C}_0 - \vec{C}'_0)\Gamma(x) + \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) \tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $P(x) = -Ax + \vec{e}$, $\tilde{C}_\alpha = C_\alpha - C'_\alpha$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$. Так как $\vec{C}'_0 = S\vec{e} = S(S^{-1}\vec{C}_0) = SS^{-1}\vec{C}_0 = \vec{C}_0$, то $\vec{C}_0 - \vec{C}'_0 = 0$. Следовательно,

$$u(x) = P(x) + (\tilde{C}_1 \nabla) \Gamma(x) + R_2(x), \quad (22)$$

где $R_2(x) = \sum_{1 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) \tilde{C}_\alpha + u^\beta(x)$.

Теперь докажем, что в (22) постоянная $\tilde{C}_1 \neq 0$. Предположим, что $\tilde{C}_1 = 0$. Умножая систему (1) на $u(x)$ и интегрируя по Ω_R , получаем

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx = \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) u(x) \sigma(u) ds. \quad (23)$$

Покажем, что

$$\int_{|x|=R} u(x) \sigma(u) ds \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Легко проверить, что $|u(x)| \leq C|x|$ и $|\sigma(u)| \leq C|x|^{-n-1}$ при $\tilde{C}_1 = 0$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=R} u(x) \sigma(u) ds \right| &\leq \text{const} \int_{|x|=R} |u(x)| |\sigma(u)| ds \\ &\leq \text{const} \left[\int_{|x|=R} |x|^2 ds \right]^{1/2} \left[\int_{|x|=R} |x|^{2(-n-1)} ds \right]^{1/2} \\ &= \text{const} \cdot R^{-1} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Существует последовательность областей Ω_{R_k} такая, что $\Omega_{R_k} \subset \Omega_{R_{k+1}} \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$, $\bigcup_k \Omega_{R_k} = \Omega$.

В равенстве (23) перейдем к пределу при $R = R_k \rightarrow \infty$. По неравенству Коши–Буняковского

$$\left| \int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx \right| \leq \text{const} \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \right|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{1/2} < \infty,$$

так как $\Omega_R \subset \Omega$ и $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$.

Таким образом,

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(u) ds.$$

С другой стороны, $u(x) = u_A(x) - Ax - (u_e(x) - \vec{e})$ и $u(x)|_{\partial\Omega} = 0$. Следовательно,

$$\int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(u) ds = 0, \quad \int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx = 0,$$

т.е. $\mathcal{E}(u(x)) = 0$ в Ω . Как известно [4], отсюда вытекает, что $u(x) = A_0x + B_0$, где A_0 – постоянная кососимметрическая матрица, B_0 – постоянный вектор. Так как $D(u(x), \Omega) < \infty$, то $A_0 = 0$. В силу граничных условий $u(x)|_{\partial\Omega} = 0$ имеем $B_0 = 0$. Следовательно, $u(x) \equiv 0$. Получили противоречие, так как $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$ и $u(x) \not\equiv 0$; значит, $\tilde{C}_1 \neq 0$ в формуле (22).

По условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$. Легко проверить, что $E_a(R_2(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(P(x), \Omega) = 0$. Тогда в силу неравенства треугольника получим

$$E_a((\tilde{C}_1 \nabla) \Gamma(x), \Omega) < \infty, \quad a = n.$$

Из свойств фундаментального решения системы (1) [13] следует, что $\Gamma(x) = |x|^{2-n} U(x)$, где $U(x)$ – однородная функция порядка нуль, тогда $|x|^n |e((\tilde{C}_1 \nabla) \Gamma(x))|^2$ – однородная функция порядка $-n$, т.е.

$$0 \neq |x|^n |e((\tilde{C}_1 \nabla) \Gamma(x))|^2 \stackrel{\text{def}}{=} f(x) = |x|^{-n} f_0(x),$$

где $f_0(x)$ – однородная функция порядка нуль. Зафиксируем какую-нибудь точку x_0 , где $f_0(x_0) \neq 0$. Из непрерывности следует, что $f_0(x) \neq 0$ в окрестности $Q_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 . Построим конус K с вершиной в начале координат такой, что $Q_\varepsilon(x_0) \subset K$. Тогда

$$\infty > \int_{\Omega} |x|^n |e((\tilde{C}_1 \nabla) \Gamma(x))|^2 dx \geq C(\tilde{C}_1) \int_{\{x: |x| > H\}} |x|^{-n} dx = \infty.$$

Полученное противоречие означает, что $u(x) \equiv 0$. Теорема доказана при $n > 2$.

Рассмотрим теперь случай $n = 2$. Достаточно показать, что $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$ при $a = 2$. Предположим, что $\dim \text{Ker}_a(L) > 0$, т.е. существует $u(x)$ такое, что $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$ и $u(x) \not\equiv 0$. Так как $a = 2$, то $u(x) \in \text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$. Тогда по теореме 2 имеет место равенство

$$u(x) = u_A(x) - Ax$$

и для $u_A(x)$ в силу леммы 2 справедливо разложение (15), т.е.

$$u_A(x) = P_A(x) + R(x),$$

где $P_A(x) = Ax + B$, A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. Подставляя разложение $u_A(x)$ в представление для $u(x)$, получаем

$$u(x) = B + \Gamma(x)C_0 + R_1(x), \quad R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x).$$

Докажем, что $C_0 = 0$. Предположим, что $C_0 \neq 0$. Имеем $E_a(R(x), \Omega) = E_a(u(x), \Omega) < \infty$.

С другой стороны, $\Gamma(x) = S(x) \ln |x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ — матрицы 2×2 , элементы которых есть однородные функции порядка нуль [14]. Следовательно, $|e(R(x))|^2 \geq C|x|^{-2}(\ln |x|)^2$ в некотором конусе K , тогда

$$\begin{aligned} \infty > E_a(R(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |x|^a |e(R(x))|^2 dx \\ &\geq C(C_0) \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{a-2} (\ln |x|)^2 dx = \infty \end{aligned}$$

при $a \geq 2$. Противоречие означает, что $C_0 = 0$. Таким образом,

$$u(x) = B + R_1(x), \quad R_1(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|).$$

Умножая систему (1) на $u(x)$ и интегрируя по Ω_R , получаем

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx = \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) u(x) \sigma(u) ds.$$

В силу граничных условий $u(x)|_{\partial\Omega} = 0$ и $\int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(u) ds = 0$ имеем

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx = \int_{|x|=R} u(x) \sigma(u) ds. \quad (24)$$

Так как $|u(x)| \leq C$ и $|\sigma(u)| \leq C|x|^{-2} \ln |x|$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=R} u(x) \sigma(u) ds \right| &\leq \int_{|x|=R} |u(x)| |\sigma(u)| ds \\ &\leq C \int_{|x|=R} |x|^{-2} \ln |x| ds = CR^{-1} \ln R \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в равенстве (24) при $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx = 0,$$

т.е. $\mathcal{E}(u(x)) = 0$ в Ω . Как известно [4], отсюда следует, что $u(x) = A_1 x + B_1$, где A_1 — постоянная кососимметрическая матрица, B_1 — постоянный вектор. Следовательно,

$$A_1 x + B_1 = B + R_1(x),$$

причем $R_1(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Значит, $A_1 x + (B_1 - B) \rightarrow 0$, а это возможно только в том случае, если $A_1 = 0$, $B_1 = B$. В силу граничных условий (2) $B = 0$ и $u(x) \equiv 0$. Таким образом, $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$ при $n = 2$ и $2 \leq a < \infty$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Задача Дирихле для системы (1) с граничным условием (2) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, т.е.*

$$\dim \text{Ker}_a(L) = k(r, n),$$

где

$$k(r, n) = \begin{cases} n(C_{r+n-1}^{n-1} + C_{r+n-2}^{n-1}), & \text{если } n > 2, \\ 4r + 2, & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

причем $r > 0$, $k(0, n) = n$; C_r^s – число сочетаний из r по s , $C_r^s = 0$, если $s > r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n > 2$. Для доказательства теоремы нужно определить число линейно независимых полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Пусть $P = (P_1, \dots, P_n)$ – полиномиальное решение системы (1) степени r . Тогда степень многочлена P_i не превосходит r и P можно представить в виде

$$P = \sum_{s=0}^r P^{(s)}, \quad (P)$$

где $P^{(s)} = (P_1^{(s)}, \dots, P_n^{(s)})$ – однородный многочлен степени s , являющийся решением системы (1) [13].

Размерность всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $\frac{(r+n)!}{r!n!}$ [16]. Тогда размерность всех вектор-многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $\frac{n(r+n)!}{r!n!} = \frac{(r+n)!}{r!(n-1)!}$. Такие многочлены, являющиеся решениями системы теории упругости, образуют пространство размерности

$$\frac{(r+n)!}{r!(n-1)!} - \frac{(r+n-2)!}{(r-2)!(n-1)!} = n \left(\frac{(r+n)!}{r!n!} - \frac{(r+n-2)!}{(r-2)!n!} \right),$$

так как каждое уравнение из системы теории упругости представляет собой равенство нулю некоторого многочлена степени $r-2$.

Если через $k(r, n)$ обозначим число линейно независимых полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r , а через $l(r, n)$ – число линейно независимых однородных многочленов степени r , являющихся решениями системы (1), то из представления (P) имеем

$$k(r, n) = \sum_{s=0}^r l(s, n),$$

где $l(s, n) = n(C_{s+n-2}^{n-2} + C_{s+n-3}^{n-2})$, причем $s \geq 1$; $l(0, n) = n$.

Докажем, что справедливы следующие утверждения:

- i) задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений;
- ii) любая совокупность $k(r, n) + 1$ решений является линейно зависимой.

и) Пусть $w_1(x), \dots, w_k(x)$ – базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r . Так как $\text{ord } w_i(x) \leq r$, то $E_a(w_i(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$. По каждому $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, построим решение $v_i(x)$ системы (1) такое, что $v_i(x)|_{\partial\Omega} = w_i(x)$ и

$$D(v_i(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{v(x) : v(x) \in H^1(\Omega), v(x)|_{\partial\Omega} = w(x), v(x) \text{ имеет компактный носитель в } \bar{\Omega}\}$.

Рассмотрим разность: $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$.

Имеем $Lz_i(x) = 0$ в Ω , $z_i(x)|_{\partial\Omega} = 0$ и $E_a(z_i(x), \Omega) < \infty$.

Докажем, что $z_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, линейно независимы. Действительно, если

$$Z(x) \equiv \sum_{i=1}^k c_i z_i(x) = 0, \quad c_i = \text{const}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^k c_i (w_i(x) - v_i(x)) = 0,$$

т.е.

$$W(x) \equiv \sum_{i=1}^k c_i w_i(x) = \sum_{i=1}^k c_i v_i(x) = V(x).$$

Следовательно, $|W(x)|^2 = |V(x)|^2$, $|\nabla W(x)|^2 = |\nabla V(x)|^2$ и

$$\begin{aligned} D(W(x), \Omega) &= D(V(x), \Omega) < \infty, \\ \int_{\Omega} |W(x)|^2 |x|^{-2} dx &= \int_{\Omega} |V(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned} \tag{25}$$

Согласно лемме 1 решение $V(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$V(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$.

Легко проверить, что

$$D(R(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |R(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty, \quad n > 2.$$

В силу неравенства треугольника

$$D(P(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Докажем, что $P(x) \equiv 0$. Пусть $\text{ord } P(x) = r$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|\nabla P(x)| \geq C|x|^{r-1}$. Поэтому

$$\infty > D(P(x), \Omega) \geq C \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{2(r-1)} dx = C \int_{|x| > H} |x|^{2r-2+n} |x|^{-1} d|x|.$$

Полученный интеграл сходится только при $r < 0$. Следовательно, $P(x) \equiv 0$.

Таким образом, $V(x) = R(x)$, где $R(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, т.е. $V(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^k c_i w_i(x) \equiv W(x) = V(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, и в силу оценок (25) получим $\sum_{i=1}^k c_i w_i(x) \equiv 0$.

Так как $w_i(x)$ – базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r , то $c_i = 0$, $i = 1, \dots, k$; значит, задача имеет по крайней мере $k(r, n)$ линейно независимых решений.

ii) Докажем, что всякое решение $u(x)$ задачи (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений $z_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$. Согласно лемме 1 решение системы (1) в Ω можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m = [1 - n/2 - a/2]$, $R(x) = \sum_{|\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$. Так как $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, то $-n/2 - a/2 \leq r < 1 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [1 - n/2 - a/2] = m$. Таким образом, $\text{ord } P(x) \leq r$.

Покажем, что $P(x)$ – решение системы (1). Имеем

$$0 = Lu(x) = LP(x) + LR(x), \quad LR(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Так как $LP(x)$ – многочлен и $LP(x) = -LR(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $LP(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ – полиномиальное решение системы (1). Следовательно, оно представляется в виде линейных комбинаций функций $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k c_i w_i(x).$$

Докажем, что $u(x) = \sum_{i=1}^k c_i z_i(x)$.

Положим $u_1(x) = u(x) - \sum_{i=1}^k c_i z_i(x)$. По построению решений и после элементарных преобразований получим $u_1(x) = R(x) + \sum_{i=1}^k c_i v_i$.

Покажем, что $u_1(x) \equiv 0$. Имеем: $u_1(x)$ – решение, т.е. $Lu_1(x) = 0$ в Ω и $u_1(x)|_{\partial\Omega} = 0$. По построению решений $v_i(x)$ имеем

$$D(v_i(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty, \quad i = 1, \dots, k.$$

Кроме того, легко проверить, что

$$D(R(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |R(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$D(u_1(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |u_1(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

В силу единственности решения $u_e(x)$ задачи (e) из теоремы 2 получим, что $u_1(x) \equiv 0$. Теорема доказана для случая $n > 2$.

Доказательство теоремы для случая $n = 2$ проводится аналогично. Докажем, что

- i) задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - 2 \leq a < -2r$ имеет $k(r, 2)$ линейно независимых решений;
- ii) любая совокупность $k(r, 2) + 1$ решений является линейно зависимой.

и) Пусть $w_1(x), \dots, w_k(x)$ – базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r . Так как вектор-функции $u_1(x) = (\text{const}, 0)$ и $u_2(x) = (0, \text{const})$ являются линейно независимыми полиномиальными решениями системы (1), то, не ограничивая общности, можно считать, что $w_1(x) \equiv (1, 0)$, $w_2(x) \equiv (0, 1)$. Из условия $\text{ord } w_i(x) \leq r$ следует, что $|w_i(x)| \leq c|x|^r$, значит, $E_a(w_i(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - 2 \leq a < -2r$. По каждому $w_i(x)$, $i = 3, \dots, k$, построим решение $v_i(x)$ системы (1) такое, что $v_i(x)|_{\partial\Omega} = w_i(x)$, $D(v_i(x), \Omega) < \infty$ и в силу неравенства Харди [9]

$$\int_{|x|>N} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad N \gg 1, \quad G \subset \{x : |x| < N\}.$$

Такое решение можно построить, используя вариационный метод и минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций. Таким же путем построим решения системы (1) с граничным условием $v_i(x)|_{\partial\Omega} = \Gamma(x)\tilde{c}_i$, $i = 1, 2$, где $\tilde{c}_1 = (1, 0)$, $\tilde{c}_2 = (0, 1)$, и с условиями $E(v_i(x), \Omega) < \infty$, $D(v_i(x), \Omega) < \infty$. Согласно неравенству Харди [9] получим

$$\int_{|x|>N} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad N \gg 1, \quad G \subset \{x : |x| < N\}.$$

Обозначим $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$, $i = 3, \dots, k, k+1, k+2$, где $w_{k+1}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_1$, $w_{k+2}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_2$. Имеем $Lz_i(x) = 0$ в Ω , $z_i(x)|_{\partial\Omega} = 0$ и

$$E_a(z_i(x), \Omega) \leq CD_\alpha(z_i(x), \Omega) < \infty.$$

Докажем, что $z_i(x)$, $i = 3, \dots, k+2$, линейно независимы. Действительно, если

$$Z(x) \equiv \sum_{i=3}^{k+2} c'_i z_i(x) = 0, \quad c'_i = \text{const}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=3}^{k+2} c'_i (w_i(x) - v_i(x)) = 0,$$

т. е.

$$W(x) \equiv \sum_{i=3}^{k+2} c'_i w_i(x) = \sum_{i=3}^{k+2} c'_i v_i(x) \equiv V(x).$$

Следовательно, $|W(x)|^2 = |V(x)|^2$, $|\nabla W(x)|^2 = |\nabla V(x)|^2$ и

$$D(W(x), \Omega) = D(V(x), \Omega) < \infty,$$

$$\int_{|x|>N} |W(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^2 dx = \int_{|x|>N} |V(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty.$$

Согласно лемме 1 решение $V(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$V(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$.

Покажем, что $\text{ord } P(x) = 0$. Пусть $\text{ord } P(x) = k$ и $k \neq 0$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|P(x)| \geq C|x|^k$. Кроме того, $R(x) \sim \ln|x|$. Следовательно,

$$|V(x)| = |P(x) + R(x)| \geq |P(x)| - |R(x)| \geq C|x|^k - C \ln|x| \geq \frac{C}{2}|x|^k$$

при $|x| \gg 1$. Отсюда получим, что

$$\infty > \int_{|x|>N} |V(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx \geq \frac{C}{2} \int_{|x|>N} |x|^{2k-2} |\ln|x||^{-2} dx.$$

Полученный интеграл расходится только при $k \geq 1$. Следовательно, $\text{ord } P(x) = 0$ и $P(x) = C = \text{const}$. Таким образом,

$$V(x) = C + \Gamma(x)C_0 + R_1(x),$$

где $R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$.

Теперь покажем, что $C_0 = 0$. Если $C_0 \neq 0$, то

$$|V(x)| = |C + \Gamma(x)C_0 + R_1(x)| \geq \text{const}(C_0) \cdot |\ln|x|| - C - |R_1(x)| \geq \frac{\text{const}(C_0)}{2} \ln|x|,$$

так как $|R_1(x)| \ll 1$ при $|x| \gg 1$. В силу неравенства Харди [9]

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{|x|>N} |V(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx \\ &\geq \frac{\text{const}(C_0)}{2} \int_{|x|>N} |\ln|x||^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx = \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие означает, что $C_0 = 0$. Итак, получили

$$C + R_1(x) = \sum_{i=3}^{k+2} c'_i w_i(x),$$

следовательно,

$$\sum_{i=3}^{k+2} c'_i w_i(x) - C = R_1(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Пусть $C = -(c'_1, c'_2)$, тогда в силу выбора функций $w_1(x)$ и $w_2(x)$ имеем

$$-C = c'_1 w_1(x) + c'_2 w_2(x).$$

Отсюда и из (26) получим

$$\sum_{i=1}^{k+2} c'_i w_i(x) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{i=1}^k c'_i w_i(x) = -c'_{k+1} w_{k+1} - c'_{k+2} w_{k+2}.$$

Так как $w_{k+1}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_1$, $w_{k+2}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_2$, то

$$\sum_{i=1}^k c'_i w_i(x) = -c'_{k+1} \Gamma(x)\tilde{c}_1 - c'_{k+2} \Gamma(x)\tilde{c}_2. \quad (27)$$

Поскольку в равенстве (27) левая часть – многочлен, а правая часть имеет логарифмический рост при $|x| \rightarrow \infty$, то они равны нулю, т.е. $\sum_{i=1}^k c'_i w_i(x) = 0$.

В силу того что $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, – базис в пространстве полиномиальных решений, имеем $c'_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, $\Gamma(x)(c'_{k+1}\tilde{c}_1 + c'_{k+2}\tilde{c}_2) = 0$ и ввиду линейной независимости векторов $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ получим $c'_{k+1} = c'_{k+2} = 0$.

Таким образом, $z_i(x)$, $i = 3, \dots, k+2$, – линейно независимые решения, т.е. задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $k(r, 2)$ линейно независимых решений.

ii) Докажем, что любое решение $u(x)$ системы (1) с граничным условием (2) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - 2 \leq a < -2r$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений $z_i(x)$, $i = 3, \dots, k+2$, $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$.

Согласно лемме 1 решение $u(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$u(x) = P(x) + \Gamma(x)C_0 + R_1(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m = [-a/2]$, $R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x)C_\alpha + u^\beta(x)$.

Так как $-2r - 2 \leq a < -2r$, то $-1 - a/2 \leq r < -a/2$, следовательно, $r = [-a/2] = m$. Таким образом, $\text{ord } P(x) \leq r$.

Покажем, что $P(x)$ – решение системы (1). Имеем

$$0 = Lu(x) = LP(x) + LR(x), \quad LR(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Так как $LP(x)$ – многочлен и $LP(x) = -LR(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $LP(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ – полиномиальное решение системы (1). Следовательно, оно представляется в виде линейной комбинации функций $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k d_i w_i(x), \quad d_i = \text{const.}$$

Пусть $C_0 = d_{k+1}\tilde{c}_1 + d_{k+2}\tilde{c}_2$. Докажем, что $u(x) = \sum_{i=3}^{k+2} d_i z_i(x)$.

Положим $u_3(x) = u(x) - \sum_{i=3}^{k+2} d_i z_i(x)$. По построению решений и после элементарных преобразований получим

$$u_3(x) = P(x) + \Gamma(x)C_0 + R_1(x) - \sum_{i=3}^{k+2} d_i (w_i(x) - v_i(x)) = \Phi(x) + R_1(x) + \sum_{i=3}^{k+2} d_i v_i(x),$$

где $\Phi(x) = \sum_{i=1}^2 d_i w_i(x)$.

Покажем, что $u_3(x) \equiv 0$. Имеем $Lu_3(x) = 0$ в Ω , $u_3(x)|_{\partial\Omega} = 0$.

По построению решений $v_i(x)$

$$D(v_i(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{|x| > N} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad i = \overline{3, k+2}.$$

Легко проверить, что $D(R_1(x), \Omega) < \infty$, $D(\Phi(x), \Omega) < \infty$ и

$$\int_{|x| > N} |R_1(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad \int_{|x| > N} |\Phi(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty.$$

Тогда из неравенства треугольника следует, что $D(u_3(x), \Omega) < \infty$ и

$$\int_{|x| > N} |u_3(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty.$$

Следовательно, в силу единственности решения задачи (w) из теоремы 1 получим, что $u_3(x) \equiv 0$. Таким образом, $u(x) = \sum_{i=3}^{k+2} d_i(w_i(x) - v_i(x))$, т.е. задача (1), (2) имеет $(k+2) - 2 = k = k(r, 2)$ линейно независимых решений. Теорема доказана.

§ 2. Внешняя задача Неймана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным решением задачи Неймана* для системы (1) с граничным условием (3) будем называть вектор-функцию $u(x) \in \mathring{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ такую, что для всякой вектор-функции $\psi(x) \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество (5).

Аналогичным образом, как и в случае задачи Дирихле, обозначим

$$\begin{aligned} \text{Ker}_0(L) &= \{u(x) : Lu = 0, \sigma(u)|_{\partial\Omega} = 0, E(u(x), \Omega) < \infty\}, \\ \text{Ker}_a(L) &= \{u(x) : Lu = 0, \sigma(u)|_{\partial\Omega} = 0, E_a(u(x), \Omega) < \infty\}. \end{aligned}$$

Через $\dim \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L)$ обозначим размерности этих пространств соответственно. Вычислим значение $\dim \text{Ker}_a(L)$ в зависимости от параметра a .

ТЕОРЕМА 5. *Если $-n \leq a < \infty$, $n \geq 2$, то*

$$\dim \text{Ker}_a(L) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $a \geq 0$ и $n \geq 2$. Очевидно, что если $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ и $a \geq 0$, то $E(u(x), \Omega) < \infty$. Следовательно, $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) \leq \dim \text{Ker}_0(L)$. Согласно теореме 9 из [6; § 2]

$$\dim \text{Ker}_0(L) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\dim \text{Ker}_a(L) \leq \frac{n(n+1)}{2}. \quad (**)$$

С другой стороны, вектор-функция $u(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор, является решением задачи Неймана для системы (1) с граничным условием (3), причем

$$E_a(u(x), \Omega) = E_a(Ax + B, \Omega) = 0 < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\dim \text{Ker}_a(L) \geq \frac{n(n+1)}{2}. \quad (***)$$

Из (**) и (***) следует утверждение теоремы при $0 \leq a < \infty$ и $n \geq 2$.

Теперь рассмотрим случай, когда $-n \leq a < 0$ и $n \geq 2$.

Пусть $n > 2$ и $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$, где $-n \leq a < 0$. Согласно неравенству Корна [5; §3, неравенство (43)] существует постоянная кососимметрическая матрица A такая, что

$$D_a(u(x) - Ax, \Omega) \leq C E_a(u(x), \Omega) < \infty,$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$. Для функции $v(x) = u(x) - Ax$ имеем $D_a(v(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(v(x), \Omega) < \infty$. Кроме того, $v(x)$ – решение системы (1) в Ω , следовательно, по лемме 1 оно имеет вид

$$v(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Докажем, что $\text{ord } P(x) = 0$. Сначала установим неравенство $D_a(P(x), \Omega) < \infty$. Имеем $D_a(v(x), \Omega) < \infty$, и легко проверить, что $D_a(R(x), \Omega) < \infty$ при $-n \leq a < 0$. Тогда по неравенству треугольника $D_a(P(x), \Omega) < \infty$.

Пусть $\text{ord } P(x) = k$. Внутри некоторого конуса K имеет место неравенство: $|\nabla P(x)| \geq C|x|^{k-1}$. Следовательно,

$$\infty > D_a(P(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |\nabla P(x)|^2 dx \geq C \int_{|x| > H} |x|^{a+2k-2+n} |x|^{-1} d|x|.$$

Полученный интеграл сходится только в том случае, если $a + 2k - 2 + n < 0$, т.е. $k < 1$, значит, $\text{ord } P(x) = 0$ и $P(x) = B = \text{const}$. Таким образом, $v(x) = B + R(x)$. С другой стороны, $v(x) = u(x) - Ax$. Следовательно, $u(x) = Ax + B + R(x)$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

Легко проверить, что $E(R(x), \Omega) < \infty$ и $E(Ax + B, \Omega) = 0$. Отсюда следует, что $E(u(x), \Omega) < \infty$, т.е. $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$. Получили, что $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$.

Кроме того, очевидно, что $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$, если $a < 0$.

Итак, $\text{Ker}_a(L) = \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) = \dim \text{Ker}_0(L)$.

В силу теоремы 9 из [6; §2] имеем

$$\dim \text{Ker}_a(L) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пусть теперь $n = 2$. Так как $a < 0$, то $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$. Пусть $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$ при $-2 \leq a < 0$. Покажем, что $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$. Согласно лемме 1 решение $u(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq 1$, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Докажем, что $P(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. По условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2 \leq a < 0$. Легко проверить, что $E_a(R(x), \Omega) < \infty$ при $-2 \leq a < 0$. Следовательно, по неравенству треугольника $E_a(P(x), \Omega) < \infty$. Пусть теперь $P(x) = Ax + B$, т.е.

$$P_i(x) = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j + b_i.$$

Тогда

$$\infty > E_a(P(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |e(P(x))|^2 dx = \int_{\Omega} |x|^a \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij} + a_{ji}) dx.$$

Последний интеграл сходится только в том случае, если $a_{ij} = -a_{ji}$, т.е. A – постоянная кососимметрическая матрица. Таким образом,

$$u(x) = Ax + B + \Gamma(x)C_0 + R_1(x),$$

где $R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Докажем, что $C_0 = 0$. Умножим систему (1) на 1 и проинтегрируем по Ω_R , получим

$$\left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) \sigma(u) ds = 0.$$

По условию

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(u) ds = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{|x|=R} \sigma(u) ds = 0,$$

где $u(x) = Ax + B + \Gamma(x)\vec{C}_0 + R_1(x)$.

Как известно, $\sigma(Ax + B) = 0$ для любого жесткого перемещения $Ax + B$. Покажем, что

$$\int_{|x|=R} \sigma(R_1(x)) ds \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Действительно, $R_1(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|)$ и $\sigma(R_1(x)) = O(|x|^{-2} \ln |x|)$. Тогда

$$\int_{|x|=R} |\sigma(R_1(x))| ds \leq \int_{|x|=R} |x|^{-2} \ln |x| ds = CR^{-1} \ln R \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\int_{|x|=R} \sigma(\Gamma(x)\vec{C}_0) ds \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

Пусть $\vec{C}_0 \neq 0$. Тогда

$$\int_{|x| < R} L(\Gamma(x)\vec{C}_0) dx = \int_{|x| < R} (E\delta(x))\vec{C}_0 dx = \vec{C}_0 \neq 0$$

и

$$\int_{|x|<R} L(\Gamma(x)\vec{C}_0) dx = \int_{|x|<R} \sigma(\Gamma(x)\vec{C}_0) ds.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{|x|=R} \sigma(\Gamma(x)\vec{C}_0) ds = \vec{C}_0 \text{ не стремится к нулю при } R \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\vec{C}_0 = 0$ и $u(x) = Ax + B + R_1(x)$, где $R_1(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|)$.

Легко заметить, что $E(Ax + B, \Omega) = 0$ и $E(R_1(x), \Omega) < \infty$. Следовательно, $E(u(x), \Omega) < \infty$, т.е. $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$ и $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$. Таким образом, $\text{Ker}_a(L) = \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) = \dim \text{Ker}_0(L)$. В силу теоремы 9 из [6; § 2] имеем $\dim \text{Ker}_a(L) = 3$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Задача Неймана для системы (1) с граничным условием (3) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, $n \geq 2$, т.е.*

$$\dim \text{Ker}_a(L) = k(r, n),$$

где $k(r, n) = n(C_{r+n-1}^{n-1} + C_{r+n-2}^{n-1})$, причем $r > 0$, $k(0, n) = n$; C_r^s — число сочетаний из r по s , $C_r^s = 0$, если $s > r$.

Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Для любого полиномиального решения $Q(x)$ системы теории упругости (1) существует обобщенное решение следующей задачи:*

$$\begin{aligned} Lu(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ E(u(x), \Omega) &< \infty, \\ \sigma(u(x))|_{\partial\Omega} &= \sigma(Q(x)). \end{aligned} \tag{Q}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что для любой кососимметрической матрицы A и для любого постоянного вектора B имеет место равенство:

$$\int_{\partial\Omega} (Ax + B)\sigma(Q(x)) ds = 0. \tag{28}$$

Действительно, так как $Q(x)$ — решение системы (1), то, два раза интегрируя по частям, получаем

$$0 = \int_G (Ax + B)LQ(x) dx = \int_{\partial\Omega} (Ax + B)\sigma(Q(x)) ds,$$

откуда следует равенство (28).

Пусть $u_R(x)$ — решение системы (1) в Ω_R с граничными условиями

$$\sigma(u_R(x))|_{\partial\Omega} = \sigma(Q(x)), \quad \sigma(u_R(x))|_{|x|=R} = 0. \tag{29}$$

Существование такого решения $u_R(x)$ следует из [17; гл. I, § 3, теорема 3.5].

Зафиксируем произвольное R_0 такое, что $G \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_0\}$. Для любого $R \geq R_0$ функцию $u_R(x)$ можно выбрать так, чтобы для любой постоянной кососимметрической матрицы A и любого постоянного вектора B выполнялось равенство:

$$\int_{\Omega_{R_0}} u_R(x)(Ax + B) dx = 0.$$

Тогда по неравенству Корна [18] имеем

$$\int_{\Omega_{R_0}} (|u_R(x)|^2 + |\nabla u_R(x)|^2) dx \leq CE(u_R(x), \Omega_{R_0}), \quad (30)$$

где постоянная C не зависит от $u_R(x)$.

Известно [19], что любая функция $u_R(x) \in H^1(\Omega_{R_0})$ имеет след на $\partial\Omega$ и выполняется неравенство:

$$\|u_R(x); L^2(\partial\Omega)\| \leq C_1 \|u_R(x); H^1(\Omega_{R_0})\|,$$

где постоянная C_1 не зависит от R . Отсюда и из (30) следует, что

$$\|u_R(x); L^2(\partial\Omega)\|^2 \leq C_2 E(u_R(x), \Omega_{R_0}). \quad (31)$$

Докажем теперь, что $E(u_R(x), \Omega_R) < C_3$, где постоянная C_3 не зависит от R . Умножим систему (1) на $u_R(x)$ и проинтегрируем по Ω_R :

$$0 = \int_{\Omega_R} u_R(x) Lu_R(x) dx \equiv - \int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u_R(x)) dx + \int_{\partial\Omega_R} u_R(x) \sigma(u_R) ds.$$

Отсюда, учитывая граничные условия (29) и используя неравенство Шварца, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u_R(x)) dx &= \int_{\partial\Omega_R} u_R(x) \sigma(u_R) ds = \int_{\partial\Omega} u_R(x) \sigma(Q(x)) ds \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial\Omega} |u_R(x)|^2 ds + C_\varepsilon \int_{\partial\Omega} |\sigma(Q(x))|^2 ds, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ будет выбрано ниже. Отсюда и из неравенства (31) следует, что

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u_R(x)) dx \leq C_2 \varepsilon E(u_R(x), \Omega_{R_0}) + C_\varepsilon \int_{\partial\Omega} |\sigma(Q(x))|^2 ds.$$

Выберем $\varepsilon = 1/(2C_2)$, тогда

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u_R(x)) dx - \frac{1}{2} E(u_R(x), \Omega_{R_0}) \leq C_\varepsilon \int_{\partial\Omega} |\sigma(Q(x))|^2 ds = C_3,$$

причем постоянная C_3 не зависит от R . Отсюда следует требуемое неравенство, т.е. $E(u_R(x), \Omega_R) \leq C_3$.

По неравенству Корна [18] имеем

$$\|u_R(x); H^1(\omega)\| \leq C_4, \quad (32)$$

где постоянная C_4 не зависит от R , но зависит от ω .

Из неравенства (32) следует, что существует последовательность $u_{R_k}(x)$, которая стремится к $u_0(x)$ равномерно на каждом компакте со всеми производными [20]. Полученная предельная функция $u_0(x)$ является решением задачи (Q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть $n > 2$. Как и в случае задачи Дирихле, обозначим через $k(r, n)$ число линейно независимых полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r , а через $l(r, n)$ — число линейно независимых однородных многочленов степени r , являющихся решениями системы (1), тогда

$$k(r, n) = \sum_{s=0}^r l(s, n),$$

где $l(s, n) = n(C_{s+n-2}^{n-2} + C_{s+n-3}^{n-2})$ при $s \geq 1$, $l(0, n) = n$.

Докажем, что справедливы следующие утверждения:

- i) задача (1), (3) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, $n \geq 2$;
 - ii) любая совокупность $k(r, n) + 1$ решений является линейно зависимой.
- i) Пусть $Q_1(x), \dots, Q_k(x)$ — базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r . Тогда, очевидно,

$$E_a(Q_i(x), \Omega) \leq r, \quad i = 1, \dots, k.$$

Согласно лемме 3 для любого $i = 1, \dots, k$ существует решение $v_i(x)$ системы (1) такое, что

$$\sigma(v_i(x))|_{\partial\Omega} = \sigma(Q_i(x)), \quad E(v_i(x), \Omega) < \infty.$$

В силу неравенства Корна [5] существует постоянная кососимметрическая матрица A_i такая, что

$$D(v_i(x) - A_i x, \Omega) \leq C E(v_i(x), \Omega) < \infty,$$

где постоянная C не зависит от $v_i(x)$. Кроме того, из неравенства Харди [8] следует, что существует постоянный вектор B_i такой, что

$$\chi(v_i(x) - A_i x - B_i, \Omega) \equiv \int_{\Omega} |v_i(x) - A_i x - B_i|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Положим $w_i(x) = v_i(x) - A_i x - B_i$. Тогда $Lw_i(x) = 0$ в Ω ,

$$\begin{aligned} \sigma(w_i(x))|_{\partial\Omega} &= \sigma(v_i(x))|_{\partial\Omega} = \sigma(Q_i(x)), \\ D(w_i(x), \Omega) &< \infty, \quad \chi(w_i(x), \Omega) < \infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность: $z_i(x) = Q_i(x) - w_i(x)$.

Имеем $Lz_i(x) = 0$ в Ω , $\sigma(z_i)|_{\partial\Omega} = 0$ и $E_a(z_i(x), \Omega) < \infty$.

Покажем, что $z_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, линейно независимы. Действительно, если

$$Z(x) \equiv \sum_{i=1}^k c_i z_i(x) = 0, \quad c_i = \text{const}, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^k c_i (Q_i(x) - w_i(x)) = 0,$$

т. е.

$$Q(x) \equiv \sum_{i=1}^k c_i Q_i(x) = \sum_{i=1}^k c_i w_i(x) = W(x).$$

Следовательно,

$$|Q(x)|^2 = |W(x)|^2, \quad |\nabla Q(x)|^2 = |\nabla W(x)|^2, \\ D(Q(x), \Omega) = D(W(x), \Omega) < \infty, \quad \chi(Q(x), \Omega) = \chi(W(x), \Omega) < \infty.$$

Согласно лемме 1 решение $W(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$W(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + W^\beta(x)$.

Легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$ и $\chi(R(x), \Omega) < \infty$.

В силу неравенства треугольника $D(P(x), \Omega) < \infty$ и $\chi(P(x), \Omega) < \infty$.

Докажем, что $P(x) \equiv 0$. Пусть $\text{ord } P(x) = r$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство: $|\nabla P(x)| \geq c|x|^{r-1}$.

Следовательно,

$$\infty > D(P(x), \Omega) \geq C \int_{K \cap \{|x| > H\}} |x|^{2r-2} dx = C \int_{|x| > H} |x|^{2r-2+n} |x|^{-1} d|x|.$$

Полученный интеграл сходится только в том случае, если $2r-2+n < 0$, т.е. $r < 0$. Отсюда следует, что $P(x) \equiv 0$. Таким образом,

$$W(x) = R(x), \quad R(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

т.е. $W(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^k c_i Q_i(x) \equiv Q(x) = W(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Так как $Q(x)$ – многочлен, то $Q(x) \equiv 0$, т.е. $\sum_{i=1}^k c_i Q_i(x) = 0$.

Отсюда следует, что $c_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, в силу того, что $Q_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, – базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r . Таким образом, задача (1), (3) имеет по крайней мере $k(r, n)$ линейно независимых решений.

ii) Докажем, что всякое решение $u(x)$ системы (1) с условиями $\sigma(u)|_{\partial\Omega} = 0$ и $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений $z_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, $z_i(x) = Q_i(x) - w_i(x)$.

Согласно лемме 1 решение $u(x)$ системы (1) в Ω можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m = [1 - n/2 - a/2]$,

$$R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Так как $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, то $-n/2 - a/2 \leq r < 1 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [1 - n/2 - a/2] = m$. Таким образом, $\text{ord } P(x) \leq r$.

Покажем, что $P(x)$ – решение системы (1). Имеем

$$0 = Lu(x) = LP(x) + LR(x), \quad LR(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Так как $LP(x)$ – многочлен и $LP(x) = -LR(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $LP(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ – полиномиальное решение системы (1). Следовательно, оно представляется в виде линейной комбинации $Q_i(x)$, $i = 1, \dots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k c_i Q_i(x).$$

Докажем, что $u(x) = \sum_{i=1}^k c_i z_i(x)$.

Положим $u_1(x) = u(x) - \sum_{i=1}^k c_i z_i(x)$. По построению

$$u_1(x) = P(x) + R(x) - \sum_{i=1}^k c_i (Q_i(x) - w_i(x)) = R(x) + \sum_{i=1}^k c_i w_i(x).$$

Покажем, что $u_1(x) \equiv 0$. Имеем $Lu_1(x) = 0$ в Ω , $\sigma(u_1(x))|_{\partial\Omega} = 0$. По построению решения $w_i(x)$

$$D(w_i(x), \Omega) < \infty, \quad \chi(w_i(x), \Omega) < \infty.$$

Легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$, $\chi(R(x), \Omega) < \infty$. Отсюда следует, что $D(u_1(x), \Omega) < \infty$, $\chi(u_1(x), \Omega) < \infty$. Таким образом, $u_1(x)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} Lu_1 &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \sigma(u_1(x))|_{\partial\Omega} &= 0, \\ D(u_1(x), \Omega) &< \infty, \quad \chi(u_1(x), \Omega) < \infty. \end{aligned} \tag{u_1}$$

В силу теоремы 9 из [6; § 2] $u_1(x) \equiv 0$. При $n > 2$ теорема доказана. Случай $n = 2$ рассматривается так же, как и для задачи Дирихле.

В заключение хочу поблагодарить В. А. Кондратьева за ценные указания и полезные советы.

Список литературы

1. *Fredholm J.* Solution d'un problème fondamental de la théorie d'élasticité // *Ark. Math. Astronom. Fys.* 1906. V. 2. №28. P. 3–8.
2. *Korn A.* Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie d'élasticité dans le cas où les efforts sont données à la surface // *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse.* 1908. V. 10. P. 165–269.
3. *Friedrichs K. O.* On the boundary of value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // *Ann. of Math. (2).* 1947. V. 48. №2. P. 441–471.
4. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
5. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // *УМН.* 1988. Т. 43. №5. С. 55–98.
6. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О неравенствах Корна и единственности решений классических краевых задач в неограниченных областях для системы теории упругости // *Современные проблемы математической физики. Т. 1.* Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. С. 35–63.
7. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* Hardy's and Korn's type inequalities and their applications // *Rend. Mat. Appl. (7).* 1990. V. 10. P. 641–666.
8. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* Sur un problème de E. Sanchez-Palencia // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1984. V. 299. №15. P. 745–748.
9. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О периодических по времени решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1985. №4. С. 38–47.
10. *Кудрявцев Л. Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1967. Т. 31. №5. С. 354–366.
11. *Матевосян О. А.* О единственности решения первой краевой задачи теории упругости для неограниченных областей // *УМН.* 1993. Т. 48. №6. С. 159–160.
12. *Матевосян О. А.* О решениях краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения в полупространстве // *Дифференц. уравнения.* 1998. Т. 34. №6. С. 806–811.
13. *Бучужури Т. В., Гегелия Т. Г.* О единственности решений основных задач теории упругости для бесконечных областей // *Дифференц. уравнения.* 1989. Т. 25. №9. С. 1556–1565.
14. *Лопатинский Я. Б.* Теория общих граничных задач. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1984.
15. *Kondratiev V. A., Oleinik O. A.* On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1987. V. 99. №1. P. 75–99.
16. *Миллин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.
17. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
18. *Мосолов П. П., Мясников И. П.* Доказательство неравенства Корна // *Докл. АН СССР.* 1971. Т. 201. №1. С. 36–39.
19. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
20. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: matevossian@cswebmail.com

Поступила в редакцию
17.01.2000 и 30.01.2001