Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Приходько, Стохастические конструкции потоков ранга 1, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 12, 61–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 08:17:01

УДК 517.9

А. А. Приходько

Стохастические конструкции потоков ранга 1

Автоморфизмы ранга 1 появились в знаменитых работах Чакона (1965), построившего пример слабоперемешивающего автоморфизма, не обладающего свойством сильного перемешивания, и Орнштейна (1970), доказавшего существование перемешивающих автоморфизмов без квадратного корня. Конструкция Орнштейна – стохастическая по сути, так как ее параметры выбираются “достаточно случайно” в соответствии с некоторым случайным законом.

В настоящей работе устанавливается существование перемешивающих потоков ранга 1. Предложенная конструкция также является стохастической и в большей степени основана на идеях работы Орнштейна. В то же время она дополняет ее и делает более прозрачной. Данная конструкция с успехом может применяться и для построения автоморфизмов с теми или иными аппроксимационными и статистическими свойствами. При этом устанавливается, что новые примеры динамических систем не изоморфны автоморфизмам Орнштейна, т.е. являются качественно новыми.

Библиография: 19 названий.

Основополагающие идеи теории аппроксимации динамических систем – одного из активно развивающихся разделов современной эргодической теории – были заложены в конце 60-х годов в работах Катка, Оселедца, Степина (см. [1]–[5]) и спустя несколько лет получили широкое развитие и стали неотъемлемой частью многих исследований в области динамических систем, среди которых отметим работы Чакона, Кина, Орнштейна, Сатаева и др. (см. [6]–[9]). Метод теории аппроксимации состоит в приближении заданного действия с инвариантной мерой (каскада, потока и т.д.) действием с простой структурой, например периодическим. Данный метод оказывается очень полезным в спектральной теории динамических систем, например в вопросах, связанных со *спектральной кратностью* (см. [1], [9]), а также с введенным Колмогоровым *групповым свойством спектра*. Недавно Агеев и Рыжиков применили методы теории аппроксимации к решению проблемы Рохлина о существовании преобразования с однородным спектром кратности 2. Еще одной иллюстрацией к сказанному служит исследование ряда метрических свойств потоков на поверхностях рода $p \geq 1$ (см. [4], [5]) с помощью сведения к изучению *перекладываний отрезков* – систем, обладающих хорошими аппроксимационными свойствами [7], [10].

В основе теории аппроксимации динамических систем лежит известная лемма Рохлина–Халмоша (см. [11]), утверждающая, что если автоморфизм T пространства Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$ является аperiodическим, то для любых $\varepsilon > 0$ и $h \in \mathbb{N}$ существует $B \in \mathcal{A}$ такое, что множества $B, TB, \dots, T^{h-1}B$ дизъюнкты

и $\mu(B \sqcup TB \sqcup \dots \sqcup T^{h-1}B) > 1 - \varepsilon$. Множество вида $U = B \sqcup TB \sqcup \dots \sqcup T^{h-1}B$ называют башней Рохлина–Халмоша высоты h .

Изучение аппроксимационных свойств динамических систем естественно приводит к исследованию систем ранга 1. Говорят, что автоморфизм T является преобразованием ранга 1, если существует последовательность разбиений $\xi_n = \{C_n, TC_n, T^2C_n, \dots, T^{h-1}C_n, Y_n\}$ пространства X , сходящаяся к разбиению на точки (это означает, что любое измеримое множество сколь угодно точно приближается ξ_n -измеримыми множествами). Автоморфизмы ранга 1 впервые были рассмотрены Чаконом [6] и Орнштейном [12]. Действия ранга 1 включает множество классических динамических систем, таких как системы с чисто точечным спектром (см. [13]). Автоморфизмы ранга 1 также лежат в основе многих конструкций, в частности контрпримеров в эргодической теории. Например, известно, что перемешивающие преобразования ранга 1 коммутируют лишь со своими степенями T^k и как следствие не имеют корней.

В теории джойнингов системы ранга 1 и их обобщения – системы конечного и локального ранга – представляют собой один из наиболее хорошо изученных классов действий. *Джойнингом* (второго порядка) действия $\{T^g\}_{g \in G}$ группы G на пространстве $(X, \mathcal{A}, \mu)$ называется мера ν на прямом произведении $X \times X$, инвариантная относительно преобразований $T^g \times T^g, g \in G$, и обладающая следующим свойством: проекции ν на прямые сомножители совпадают с μ . В современной эргодической теории понятие джойнинга является одним из наиболее эффективных инструментов исследования динамических систем (см. [14], а также [15] и [16]).

Например, джойнинги естественно возникают в исследованиях, связанных со знаменитой проблемой Рохлина о кратном перемешивании [11]. Говорят, что автоморфизм T *перемешивает с кратностью r* , если

$$\mu(T^{t_0}A_0 \cap T^{t_1}A_1 \cap \dots \cap T^{t_r}A_r) \rightarrow \mu(A_0)\mu(A_1) \dots \mu(A_r)$$

при $|t_i - t_j| \rightarrow \infty$. Проблема Рохлина формулируется следующим образом: следует ли из простого перемешивания перемешивание всех порядков? Доказано, что для автоморфизмов конечного ранга ответ на вопрос Рохлина положителен (см. [17]). Более того, для автоморфизма ранга 1 из свойства перемешивания следует свойство *минимальности джойнингов* второго порядка, состоящее в том, что все такие джойнинги исчерпываются мерами $\mu \times \mu$ и $(\mathbb{I} \times T^k)\Delta$, где Δ – диагональный джойнинг,

$$\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B).$$

Обобщением этого понятия является свойство простоты (введенное Вичем, Рудольфом и дель Юнко, см. [18] и [19]), отличающееся тем, что допускается существование джойнингов вида $(\mathbb{I} \times S)\Delta$, где S – произвольный коммутирующий с T автоморфизм.

В настоящей работе предлагается конструкция перемешивающих потоков ранга 1. Тем самым, устанавливается существование таких потоков и приводятся новые примеры простых потоков.

За основу конструкции берется универсальная конструкция потоков ранга 1, которая подробно определяется в §1. Эта конструкция задается следующими параметрами: последовательностью высот h_n аппроксимирующих башен и множеством положительных чисел $s_{n,j}$, $0 \leq j \leq q_n$. Предлагаемая конструкция перемешивающих потоков ранга 1 является стохастической в следующем смысле. Параметры $s_{n,j}$ выбираются как реализации независимых случайных величин ξ_n (эта мысль уточняется в §2). Таким образом, строится случайное семейство (ансамбль) потоков $\{T_\omega^t\}$, где ω пробегает соответствующее вероятностное пространство Ω (являющееся пространством Лебега). Устанавливается, что при определенных ограничениях на последовательности h_n и $s_{n,j}$ поток $\{T_\omega^t\}$ является перемешивающим почти наверное.

§1. Универсальная конструкция потока ранга 1

Пусть $\mathbf{T} = (T^t)_{t \in \mathbb{R}}$ — измеримый поток на пространстве Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, т.е. семейство автоморфизмов T^t пространства X , удовлетворяющее условию $T^{t+u} = T^t T^u$. Поток $\mathbf{T}$ называется *измеримым*, если функция $F(t, x) := T^t x$ измерима как функция двух переменных x и t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $h > 0$ и $\mathcal{B}[0, h]$ обозначает σ -алгебру борелевских подмножеств $[0, h]$. Назовем *башней Рохлина–Халмоша* (или просто *башней*) высоты h отображение $\varphi: U \rightarrow [0, h]$, $U \in \mathcal{A}$, обладающее следующими свойствами:

- (а) отображение φ измеримо: $B \in \mathcal{B}[0, h] \Rightarrow \varphi^{-1}B \in \mathcal{A}$;
- (б) если $B \in \mathcal{B}[0, h]$ и $S^t B \subseteq [0, h]$, то $T^t \varphi^{-1}B = \varphi^{-1}S^t B$, где $S^t x := x + t$.

Иногда *башней* называют множество $[\varphi] := U = \varphi^{-1}[0, h]$. Каждой башне φ сопоставим σ -алгебру $\mathcal{A}(\varphi) \subseteq \mathcal{A}$, порожденную множествами $\varphi^{-1}B$, $B \in \mathcal{B}[0, h]$, и $X \setminus [\varphi]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что поток $\mathbf{T}$ является *потокм ранга 1*, если существует последовательность башен φ_n со следующими свойствами:

- (а) $\mu[\varphi_n] \rightarrow 1$;
- (б) $\mathcal{A}(\varphi_n) \rightarrow \mathcal{A}$, т.е. для любого множества $A \in \mathcal{A}$ существуют $A_n \in \mathcal{A}(\varphi_n)$ такие, что $\mu(A \triangle A_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Аппроксимирующая последовательность башен φ_n для потока ранга 1 может быть выбрана так, что $\mathcal{A}(\varphi_n) \subset \mathcal{A}(\varphi_{n+1})$.

Из этого простого факта следует, что любой поток ранга 1 может быть получен как результат следующей конструкции.

Универсальная конструкция потока ранга 1. Пусть $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ — возрастающая последовательность положительных чисел и I_n — окружность $\mathbb{R}/h_n\mathbb{Z}$, отождествляемая с отрезком $[0, h_n]$, у которого склеены концы. Предположим, что заданы множества $J_n \subset (0, h_{n+1})$, являющиеся дизъюнктным объединением интервалов $J_{n,k} = l_{n,k} + (0, h_n)$, $1 \leq k \leq q_n$. Пусть $\overleftarrow{\varphi}_n: I_{n+1} \rightarrow I_n$ — естественная проекция, действующая по правилу

$$\begin{aligned} \forall k, \forall t \in (0, h_n) \quad \overleftarrow{\varphi}_n: l_{n,k} + t &\mapsto t, \\ \forall t \notin J_n \quad \overleftarrow{\varphi}_n: t &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\overleftarrow{\varphi}_n$ — монотонное непрерывное отображение из I_{n+1} в I_n степени q_n . Положим $\varphi_{j,n} = \overleftarrow{\varphi}_n \circ \dots \circ \overleftarrow{\varphi}_{j-1}$, $j > n$. Пусть $M_0 = h_0$ и

$$M_{n+1} = \frac{\lambda(I_{n+1})}{\lambda(J_n)} M_n, \quad \text{где } \lambda - \text{мера Лебега на } \mathbb{R}.$$

Предположим, что

$$M := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n < \infty,$$

и определим величины $m_n := M_n/M$. Рассмотрим на окружности I_n вероятностную меру $\mu_n = (1 - m_n)\delta_0 + m_n\lambda_n$, где δ_0 — δ -функция с носителем в нуле и $\lambda_n := h_n^{-1}\lambda$ — нормированная мера Лебега на I_n . Заметим, что $\varphi_{j,n}\mu_k = \mu_n$. Рассмотрим множество X последовательностей $x = (t_0, t_1, \dots)$ со свойством $\overleftarrow{\varphi}_m t_{n+1} = t_n$. Пусть $\varphi_n: X \rightarrow I_n$ — естественная проекция, $\varphi_n: (t_1, t_2, \dots) \mapsto t_n$. Рассмотрим на множестве X семейство σ -алгебр

$$\mathcal{A}_n := \{\varphi_n^{-1}B : B \in \mathcal{B}(I_n)\}, \quad \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}, \quad \text{и пусть } \mathcal{A} := \bigvee_n \mathcal{A}_n.$$

Меры μ_n можно рассматривать как меры на σ -алгебрах $\mathcal{A}_n$. Точнее, положим $\varphi_n^*\mu_n(\varphi_n^{-1}(B)) := \mu_n(B)$, где $B \in \mathcal{B}[0, h_n]$. При этом меры $\varphi_n^*\mu_n$ согласованы в следующем смысле: $\varphi_j^*\mu_j|_{\mathcal{A}_n} = \varphi_n^*\mu_n$, если $j \geq n$. Значит, существует единственная мера μ , определенная на σ -алгебре $\mathcal{A}$, такая, что $\mu|_{\mathcal{A}_n} = \varphi_n^*\mu_n$, причем построенное пространство $(X, \mathcal{A}, \mu)$ является пространством Лебега. Это пространство называется *обратным пределом пространств* $(I_n, \mathcal{B}(I_n), \mu_n)$.

Определим поток $\mathbf{T} = (T^t)$ на пространстве X следующим образом. Пусть $x = (t_1, \dots, t_n, \dots)$ — точка пространства X . Рассмотрим последовательность $(u_1, \dots, u_n, \dots)$, где $u_n := t_1 + t \pmod{h_n}$. Нетрудно проверить, что для μ -почти всех точек x существует такое n_0 , что для всех $n > n_0$ выполнено $\overleftarrow{\varphi}_n u_{n+1} = u_n$. Пусть $T^t x$ — последовательность $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, \dots)$ такая, что $\tilde{u}_n := u_n$, если $n \geq n_0$, и $\tilde{u}_n := \varphi_{n_0,n} u_n$, если $n < n_0$. Легко показать, что T^t — сохраняющее меру μ отображение и что $T^t T^u x = T^{t+u} x$ для μ -почти всех x . Более того, $\mathbf{T} = (T^t)$ — поток ранга 1 с последовательностью аппроксимирующих башен $\varphi_n|_{U_n}$, где $U_n := \varphi_n^{-1}(0, h_n) = X \setminus \varphi_n^{-1}\{0\}$ и $\varphi_n|_{U_n}$ — ограничение функции φ_n на множество U_n .

§ 2. Стохастическая конструкция

Целью настоящего параграфа является детальное описание стохастической конструкции потоков ранга 1 и формулировка основной теоремы.

А именно мы построим семейство $\{\mathbf{T}_\omega\}$ потоков ранга 1, параметризованное точками ω некоторого вероятностного пространства Ω , для которого будет доказано, что при определенных условиях на параметры конструкции поток $\mathbf{T}_\omega$ почти наверное является перемешивающим.

В § 1 мы обсудили общую конструкцию потока ранга 1, основную роль в которой играют отображения $\overleftarrow{\varphi}_n: I_{n+1} \rightarrow I_n$, заданные параметрами h_n и $l_{n,k}$, $1 \leq k \leq q_n$. Замечая, что $l_{n,k+1} - l_{n,k} \geq h_n$, определим новые параметры

$s_{n,k} = l_{n,k+1} - l_{n,k} - h_n$, и пусть $s_{n,0} = l_{n,1}$ и $s_{n,q_n} = h_{n+1} - l_{n,q_n} - h_n$. Идея стохастической конструкции состоит в рассмотрении параметров $s_{n,k}$ как независимых реализаций случайной величины ξ_n . Эта идея уточняется следующим образом.

Фиксируем последовательность распределений ξ_n на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ таких, что $\xi_n \ll h_n$, т.е. $\xi_n \leq \rho_n h_n$, где $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 2.1. а) Существует стационарный случайный процесс Φ_n с непрерывным временем, удовлетворяющий следующим условиям:

- (1) $\Phi_n: \mathbb{R} \rightarrow I_n$ — непрерывное отображение;
- (2) если $\Phi_n(u) = a \in (0, h_n)$ и $t \leq h_n - a$, то $\Phi_n(u+t) = a+t$;
- (3) если $[t_1, t_2]$ — связная компонента множества $\Phi_n^{-1}(0)$, то длина этого отрезка распределена как ξ_n , т.е. $P\{t_2 \geq t \mid t_1\} = P\{\xi_n \geq t - t_1\}$.

б) Существует марковский процесс $\tilde{\Phi}_n$ такой, что

- (1) $\tilde{\Phi}_n: \mathbb{R} \rightarrow I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2$;
- (2) $\tilde{\Phi}_n(t) = \Phi_n(t)$, если и только если $\Phi_n(t) \neq 0$, и $\tilde{\Phi}_n(t) = (l^-, l^+)$, если и только если $\Phi_n(t) = 0$ и $[t - l^-, t + l^+]$ — компонента связности множества $\Phi_n^{-1}(0)$, содержащая t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Процессы Φ_n и $\tilde{\Phi}_n$ естественно изоморфны — реализация одного из этих процессов однозначно восстанавливается по реализации другого. В определении случайного потока ранга 1 будет участвовать процесс Φ_n , а в доказательствах мы будем использовать процесс $\tilde{\Phi}_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Для существования процессов Φ_n и $\tilde{\Phi}_n$ необходимым и достаточным условием является конечность дисперсии случайной величины ξ_n . Отметим также то важное обстоятельство, что вероятностное пространство реализаций процесса Φ_n — пространство Лебега.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. Итак, построим вспомогательный марковский процесс $\tilde{\Phi}_n: \mathbb{R} \rightarrow I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2$. Для этого удобно ввести в рассмотрение еще один марковский процесс Ψ , эквивалентный $\tilde{\Phi}_n$. А именно пусть прямая $\mathbb{R}$ разбита на полуинтервалы $[t_k, t_{k+1})$ точками t_k — левыми концами интервалов длины h_n , составляющих $\tilde{\Phi}_n^{-1}(0, h_n)$, — занумерованными произвольным образом. Процессы $\tilde{\Phi}_n$ и $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ связаны соотношением: $\Psi(t) = (l^-, l^+)$, если $t \in [t_k, t_{k+1})$ и $l^- = t - t_k$, $l^+ = t_{k+1} - t_k$, и пусть

$$P(s) := \begin{cases} p_n(s - h_n), & \text{если } s \geq h_n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что P — плотность случайной величины $h_n + \xi_n$. Рассмотрим функцию $\tilde{P}(l^\pm) = L^{-1}p_n(l^- + l^+)$, где $L = h_n + \bar{\xi}_n$, и покажем, что она является стационарной плотностью для марковского процесса Ψ , который мы зададим переходными вероятностями

$$\tau_\varepsilon(l^\pm, l_\varepsilon^\pm) = \begin{cases} \delta_{l^\pm + (\varepsilon, -\varepsilon)}(l_\varepsilon^\pm), & \text{если } l^+ > \varepsilon, \\ \delta_{\varepsilon - l^+}(l_\varepsilon^-)P(l_\varepsilon^- + l_\varepsilon^+), & \text{если } l^+ \leq \varepsilon, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < h_n$. Переходные вероятности τ_u для произвольного $u > 0$ определяются следующим образом. Рассмотрим некоторое разбиение полуинтервала $[0, u)$ на полуинтервалы $[u_{k-1}, u_k)$, $k = 1, \dots, K$, такое, что $u_k - u_{k-1} < h_n$, и положим

$$\tau_u(l^\pm, B) := \int_{\mathbb{R}_+^2} \tau_{u_1}(l^\pm, dl_1^\pm) \int_{\mathbb{R}_+^2} \tau_{u_2-u_1}(l_1^\pm, dl_2^\pm) \cdots \int_B \tau_{u_K-u_{K-1}}(l_{K-1}^\pm, dl_K),$$

где B – измеримое подмножество $\mathbb{R}_+^2$. Можно показать, что это определение корректно, т.е. определенные меры не зависят от выбора разбиения, и мы не останавливаемся на этой простой выкладке. Заметим только, что корректность достаточно проверить для $u \in (0, h_n)$, так как от любой пары разбиений можно перейти к их точной верхней грани, а для малых u корректность (эквивалентная условиям Колмогорова–Чэпмена) проверяется непосредственно.

Для $u < 0$ меры τ_u определяются аналогично.

Проверим, что плотность $\tilde{P}$ действительно стационарна. Пусть

$$\eta_\varepsilon(B) := \int_{\mathbb{R}_+^2} \tilde{P}(l^\pm) \tau_\varepsilon(l^\pm, B) dl^\pm.$$

Для измеримого множества $B \subset \{l_\varepsilon^- > \varepsilon\}$ имеем

$$\eta_\varepsilon(B) = \int_{(-\varepsilon, \varepsilon) + B} \tilde{P}(l^\pm) dl^\pm = \int_B \tilde{P}(l^\pm) dl^\pm,$$

а для $B \subset \{l_\varepsilon^- \leq \varepsilon\}$

$$\begin{aligned} & \int_{\{l^+ \leq \varepsilon\}} \tilde{P}(l^\pm) dl^\pm \int_{\{l_\varepsilon^+ : (\varepsilon - l^+, l_\varepsilon^+) \in B\}} P(\varepsilon - l^+ + l_\varepsilon^+) dl_\varepsilon^+ \\ &= \int_0^\varepsilon L^{-1} dl^+ \int_{\{l_\varepsilon^+ : (\varepsilon - l^+, l_\varepsilon^+) \in B\}} P(\varepsilon - l^+ + l_\varepsilon^+) dl_\varepsilon^+ \\ &= L^{-1} \int_B P(z, l_\varepsilon^+) dz dl_\varepsilon^+ = \int_B \tilde{P}(l_\varepsilon^\pm) dl_\varepsilon^\pm. \end{aligned}$$

Таким образом, стационарность распределения, задаваемого плотностью $\tilde{P}$, доказана.

Напомним, что существует взаимно однозначное соответствие между процессами Ψ и $\tilde{\Phi}_n$. Обозначим $\bar{m}_n := h_n / (h_n + \bar{\xi}_n)$. Вычислим стационарную плотность $\tilde{p}_n$ для процесса $\tilde{\Phi}_n$, т.е. плотность распределения случайной величины $\tilde{\Phi}_n(0)$, соответствующую плотности $\tilde{P}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(x) &= \int_0^\infty \tilde{P}(x, l^-) dl^- = L^{-1} = h_n^{-1} \bar{m}_n, \quad x \in I_n; \\ \tilde{p}_n(l^\pm) &= \tilde{P}(l^- + h_n, l^+) = h_n^{-1} \bar{m}_n p_n(l^- + l^+), \quad l^\pm \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

Для того чтобы из процесса $\tilde{\Phi}_n$ получить процесс Φ_n , достаточно положить $\Phi_n(t) = \tilde{\Phi}_n(t)$, если $\Phi_n(t) \in I_n$, и $\Phi_n(t) = 0$ в противном случае.

Свойства (2), (3) и (2̃) следуют непосредственно из определения переходных вероятностей τ_u .

Теперь мы имеем все необходимые данные для того, чтобы перейти к описанию стохастической конструкции потоков ранга 1. Пусть Ω – вероятностное пространство, являющееся прямым произведением пространств реализаций случайных процессов Φ_n , тогда Φ_n независимы в совокупности. Рассмотрим для каждого n реализацию случайного процесса $\Phi_n(t)$ и определим отображение $\tilde{\varphi}_n$ следующим образом. Если интервал $(t_0, t_0 + h_n)$, составляющий множество $\Phi^{-1}(I_n \setminus \{0\})$, целиком содержится внутри интервала $(0, h_{n+1})$, то полагаем $\tilde{\varphi}_n(t) := \Phi_n(t)$ для $t \in (t_0, t_0 + h_n)$; иначе $\tilde{\varphi}_n(t) := 0$.

Положим $\sigma_n := \sqrt{D\xi_n}$ и заметим, что, поскольку $\xi_n \geq 0$, из неравенства Коши–Буняковского–Шварца следует оценка

$$\bar{\xi}_n := E\xi_n \leq \sigma_n.$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $\bar{q}_n := h_{n+1}/h_n \rightarrow 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n/h_n < \infty$, тогда последовательность $\tilde{\varphi}_n$ почти наверное корректно определяет пространство X_ω с конечной мерой и поток T_ω ранга 1 на нем.

Определим $\kappa_n := h_n^2/\sigma_n^2$. Предположим также, что случайная величина ξ_n обладает плотностью p_n , являющейся функцией ограниченной вариации. Пусть $\hat{p}_n$ – преобразование Фурье функции p_n :

$$\hat{p}_n(x) := \int_0^\infty e^{-2\pi i x t} p_n(t) dt.$$

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть поток T_ω является результатом предложенной конструкции, зависящей от параметров h_n, ξ_n . И пусть для некоторых констант $0 < \chi < 1, \gamma, \epsilon, C_1, C_2 > 0$ выполнены следующие условия:

- (1) $\|(1 + C_1 \sigma_n^2 x^2)^{1/2} \hat{p}_n(x)\|_\infty \leq 1$;
- (2) $\prod_{j < n} \bar{q}_j \leq C_2 \bar{q}_n^\gamma$;
- (3) $\|\bar{q}_{n-1}^{-\chi} h_n p_n\|_\infty \rightarrow 0$;
- (4) $\frac{\kappa_n}{\bar{q}_n^{1-\chi-\epsilon}} \rightarrow 0$.

Тогда поток T_ω является перемешивающим с вероятностью 1.

§3. Пример семейства перемешивающих потоков ранга 1

Сейчас мы приведем следствие теоремы 2.5, дающее простой и в то же время достаточной общий пример ансамбля перемешивающих потоков ранга 1. Фиксируем распределение ξ на $\mathbb{R}_+$ с плотностью $p(t)$ такое, что $\xi \leq M < \infty$. Пусть ξ_n имеет плотность $p_n := p(t/\sigma_n)/\sigma_n$. В этом случае теорема 2.5 приобретает следующий вид.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если выполнены условия:

$$\bar{q}_{n-1}^{-\chi} \sqrt{\kappa_n} \rightarrow 0, \quad \frac{\kappa_n}{\bar{q}_n^{1-\chi-\epsilon}} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \prod_{j < n} \bar{q}_j \leq C_2 \bar{q}_n^\gamma,$$

то поток $\mathbf{T}_\omega$ является перемешивающим с вероятностью 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим выполнение условия (1) теоремы. Действительно, поскольку дисперсия случайной величины ξ конечна, найдется константа C_1 такая, что

$$\hat{p}(t) \leq (1 + C_1 x^2)^{-1/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Но $p_n(x) = p(\sigma_n x)$, значит,

$$\|(1 + C_1 \sigma_n^2 x^2)^{1/2} \hat{p}_n(x)\| \leq 1.$$

Условие (2) теоремы 2.5 приобретает указанный в следствии вид, потому что $\|p_n\|_\infty = \sigma_n^{-1} \|p\|_\infty$. Следствие доказано.

Рассмотрим теперь более конкретный пример. Пусть $h_n = 2^{m^n}$ и $\sigma_n = 2^{\alpha m^n}$. Тогда $\bar{q}_n = 2^{(m-1)m^n}$ и $\kappa_n = 2^{2(1-\alpha)m^n}$. Четвертое условие теоремы следует из оценки:

$$\prod_{j < n} \bar{q}_j = 2^{(m-1) \sum_{j < n} m^j} \leq \bar{q}_n^{1/(m-1)},$$

а условия (2) и (3) принимают вид:

$$\frac{\bar{q}_{n-1}^{-\chi} h_n}{\sigma_n} \rightarrow 0, \quad \frac{\bar{q}_n^{1-\chi-\epsilon}}{\kappa_n} \rightarrow \infty,$$

т. е.

$$-\frac{\chi(m-1)}{m} + 1 - \alpha < 0, \quad (1-\chi)(m-1) - 2(1-\alpha) > 0,$$

откуда

$$\frac{m(1-\alpha)}{m-1} < \chi < \frac{2\alpha + m - 3}{m-1}.$$

Очевидно, что искомая константа χ существует тогда и только тогда, когда $m(1-\alpha) < 2\alpha + m - 3$, т. е.

$$\alpha > \frac{3}{2+m}.$$

§ 4. Схема доказательства основной теоремы

Доказательство теоремы 2.5 построено следующим образом. Непосредственное доказательство теоремы, составляющее содержание § 7, предваряется рассмотрением необходимых вероятностных конструкций, формулируемых независимо от основного результата, и доказательством всех необходимых лемм. А именно в § 5 устанавливаются некоторые теоремы о больших отклонениях для специального типа случайных процессов с непрерывным временем, а затем в § 6 исследуется асимптотическое поведение случайных процессов Φ_n , участвующих в стохастической конструкции. И наконец, на основе полученных результатов в § 7 доказывается основная теорема.

§ 5. Леммы о больших отклонениях

Будем называть *дискретным случайным процессом* двустороннюю последовательность случайных величин η_j со значениями в некотором конечном алфавите $\mathbb{A}$. Процесс называется *стационарным*, если совместное распределение μ_k величин $\eta_{s+1}, \dots, \eta_{s+k}$ не зависит от s . Мера μ_k задана на конечном множестве k -блоков – последовательностей (слов) $a_1^k = a_1 a_2 \dots a_k$, где $a_j \in \mathbb{A}$. Пусть μ – соответствующая процессу η мера на $\mathbb{A}^\infty := \prod_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{A}$.

Рассмотрим n -блок $x_1^n = x_1 x_2 \dots x_n$. Мы будем использовать выражение x_i^j для обозначения подслова $x_i x_{i+1} \dots x_j$. *Эмпирическим распределением* порядка k относительно x_1^n называется мера $p_k(\cdot \mid x_1^n)$ на $\mathbb{A}^k$, определяемая соотношением

$$p_k(a_1^k \mid x_1^n) = \frac{N_k(a_1^k)}{n - k + 1}, \quad \text{где } N_k(a_1^k) := \#\{j : x_j^{j+k-1} = a_1^k\}.$$

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что случайные величины η_j независимы. Тогда существует абсолютная постоянная c_0 такая, что*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mu\{x : \|p_1(\cdot \mid x_1^n) - \mu_1\| > \varepsilon\} \leq (n+1)^{\#\mathbb{A}} e^{-c_0 n \varepsilon^2},$$

где $\|\cdot\|$ обозначает вариационную норму в пространстве мер.

Зафиксируем $s \in [0, k+g)$, где $g \leq k < n$ – натуральные числа, и рассмотрим (случайную) последовательность k -блоков

$$w_t^{(s)} := x_{s+t(k+g)}^{s+t(k+g)+k-1}, \quad 0 \leq t < \mathcal{T}^{(s)},$$

где $\mathcal{T}^{(s)}$ – общее число блоков $w_t^{(s)}$, входящих в x_1^n . Определим

$$N^{(s)}(a_1^k) := \#\{t : w_t^{(s)} = a_1^k\} \quad \text{и} \quad p_k^{(s)}(a_1^k) := \frac{N^{(s)}(a_1^k)}{\mathcal{T}^{(s)}}.$$

ЛЕММА 5.2. *Пусть $n > 8k$ и $g \leq k$, тогда*

$$\left| p_k(a_1^k \mid x_1^n) - \frac{1}{k+g} \sum_{s=0}^{k+g-1} p_k^{(s)}(a_1^k \mid x_1^n) \right| \leq \frac{10k}{n} p_k(a_1^k \mid x_1^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$N(a_1^k) = \sum_{s=0}^{k+g-1} N^{(s)}(a_1^k) \quad \text{и} \quad n - 2(k+g) \leq (k+g)\mathcal{T}^{(s)} \leq n.$$

Используя эти соотношения, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| p_k(a_1^k \mid x_1^n) - \frac{1}{k+g} \sum_{s=0}^{k+g-1} p_k^{(s)}(a_1^k \mid x_1^n) \right| \\ &= \left| \frac{N(a_1^k)}{n-k+1} - \frac{1}{k+g} \sum_{s=0}^{k+g-1} \frac{N^{(s)}(a_1^k)}{\mathcal{T}^{(s)}} \right| \\ &\leq \sum_{s=0}^{k+g-1} N^{(s)}(a_1^k) \left| \frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{(k+g)\mathcal{T}^{(s)}} \right| \\ &\leq \frac{k+2(k+g)}{n-2(k+g)} \sum_{s=0}^{k+g-1} \frac{N^{(s)}(a_1^k)}{n-k+1} \\ &\leq \frac{5k}{n-4k} p_k(a_1^k \mid x_1^n) \leq \frac{10k}{n} p_k(a_1^k \mid x_1^n), \end{aligned}$$

так как $4k < n/2$; что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Если $A \subseteq \mathbb{A}^k$ и $n > 8k$, то

$$\left| p_k(A \mid x_1^n) - \frac{1}{k+g} \sum_{s=0}^{k+g-1} p_k^{(s)}(A \mid x_1^n) \right| \leq \frac{10k}{n}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть $A \subseteq \mathbb{A}^k$ и $n > 8k$. Тогда в силу неравенства $|p_1(A \mid x_1^n) - p_k(A \mid x_1^n)| \leq 2k/n$ справедлива оценка

$$\left| p_1(A \mid x_1^n) - \frac{1}{k+g} \sum_{s=0}^{k+g-1} p_k^{(s)}(A \mid x_1^n) \right| \leq \frac{12k}{n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. Для слов (блоков) w' и w'' длин ℓ' и ℓ'' соответственно определим событие $w' \langle g \rangle w''$ как множество последовательностей x таких, что $x_1^{\ell_1} = w'$ и $x_{\ell_1+g+1}^{\ell_1+g+\ell_2} = w''$. Скажем, что процесс η_j является ψ -перемешивающим, $\psi: \mathbb{N} \rightarrow [1, +\infty]$, если

$$\mu(w' \langle g \rangle w'') \leq \psi(g) \mu(w') \mu(w'')$$

для любых w' и w'' указанного вида.

ЛЕММА 5.6. Пусть η – ψ -перемешивающий стационарный процесс с алфавитом $\mathbb{A}$, причем $n > 24k/\varepsilon$ и $\varepsilon < 1$. Тогда

$$\mu\{x : \|p_1(\cdot \mid x_1^n) - \mu_1\| > \varepsilon \# \mathbb{A}\} \leq \# \mathbb{A} \cdot 2k \left(\frac{n}{2k} + 1 \right)^2 \psi(k)^{n/(2k)} \exp\left(-\frac{c_0 \varepsilon^2}{8} \frac{n}{2k}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A := \{x : x_1 = a\}$ и $g := k$. Предположим, что

$$|p_1(A \mid x_1^n) - \mu(A)| > \varepsilon,$$

тогда в силу следствия 5.4 существует s такое, что

$$|p_k^{(s)}(A \mid x_1^n) - \mu(A)| > \varepsilon - \frac{12k}{n} > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим бернуллиевский случайный процесс $\tilde{\varkappa}_t \in \{0, 1\}$, заданный вероятностным вектором $(\mu(A), 1 - \mu(A))$, и будем сравнивать его с процессом

$$\varkappa_t = \begin{cases} 1, & \text{если } w_t^{(s)} \in A, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

индуцированным процессом η . По лемме 5.1

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \gamma\{\tilde{x} : \|\tilde{p}_1(\cdot \mid \tilde{x}_1^n) - \gamma_1\| > \varepsilon'\} \leq \mathcal{E} = (\mathcal{T}^{(s)} + 1)^2 \exp(-c_0 \varepsilon'^2 \mathcal{T}^{(s)}),$$

где γ – мера, соответствующая процессу $\tilde{\varkappa}_t$, а $\tilde{p}_k$ – эмпирические распределения, построенные по γ . Учитывая свойство ψ -перемешивания, получаем

$$\begin{aligned} \mu\left\{x : |p_k^{(s)}(A \mid x_1^n) - \mu(A)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} &\leq \psi(k)^{\mathcal{T}^{(s)}} \gamma\left\{\tilde{x} : \|\tilde{p}_1(\cdot \mid \tilde{x}_1^{\mathcal{T}^{(s)}}) - \gamma_1\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ &\leq \psi(k)^{\mathcal{T}^{(s)}} (\mathcal{T}^{(s)} + 1)^2 \exp\left(-c_0 \mathcal{T}^{(s)} \frac{\varepsilon^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность интересующего нас события оценивается величиной

$$\# \mathbb{A} \cdot 2k \left(\frac{n}{2k} + 1 \right)^2 \psi(k)^{n/(2k)} \exp\left(-\frac{c_0 \varepsilon^2}{8} \frac{n}{2k}\right), \text{ так как } g + k = 2k \text{ и } \mathcal{T}^{(s)} \geq \frac{n}{4k}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.7. Пусть фиксировано N , и пусть стационарный случайный процесс $\eta(t)$ удовлетворяет следующему более слабому, чем ψ -перемешивание, свойству:

$$\mu(w' \langle g \rangle w'') \leq \psi(g) \mu(w') \mu(w''),$$

если $w' = w'^{s'+l'}$ и $w'' = w''^{s''+l''}$ – блоки такие, что $s', s'', s' + l', s'' + l'' \in \{1, \dots, N\}$, а $\psi: \mathbb{N} \rightarrow [1, +\infty]$. Назовем это свойство $^{(N)}\psi$ -перемешиванием.

Нам понадобится следующая модификация леммы 5.6, охватывающая $^{(N)}\psi$ -перемешивающие процессы.

ЛЕММА 5.8. Пусть η — $(N)\psi$ -перемешивающий стационарный процесс с алфавитом $\mathbb{A}$, удовлетворяющий сформулированному выше требованию, и пусть $24k/\varepsilon < n < N$ и $\varepsilon < 1$. Тогда

$$\mu\{x : \|p_1(\cdot \mid x_1^n) - \mu_1\| > \varepsilon \#\mathbb{A}\} \leq \#\mathbb{A} \cdot 2k \left(\frac{n}{2k} + 1\right)^2 \psi(k)^{n/(2k)} \exp\left(-\frac{c_0\varepsilon^2}{8} \frac{n}{2k}\right).$$

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 5.6.

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть η — ψ -перемешивающий или $(N)\psi$ -перемешивающий стационарный процесс,

$$\psi(k) = \begin{cases} 1 + e^{c-\omega k}, & \text{если } k \geq k_0, \\ \infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

с алфавитом $\mathbb{A} = \{0, 1\}$ и выполнены условия леммы 5.6 или 5.8 соответственно. И пусть

$$k_0 \leq \frac{\ln n + c}{\omega} \leq n^{2/3}, \quad \frac{\omega n}{\ln n + c} > 24 \left(\frac{64}{c_0\varepsilon^2}\right)^2 > 24.$$

Тогда

$$\mu\{x : \|p_1(\cdot \mid x_1^n) - \mu_1\| > \varepsilon\} \leq C_1 \exp\left(-c_1\varepsilon^2 \frac{\omega n}{\ln n + c}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка вероятности большого уклонения имеет вид:

$$\mu\{x : \|p_1(\cdot \mid x_1^n) - \mu_1\| > \varepsilon\} \leq 4k \left(\frac{n}{2k} + 1\right)^2 (1 + e^{c-\omega k})^{n/(2k)} \exp\left(-\frac{c_0\varepsilon^2}{32} \frac{n}{2k}\right).$$

Полагая $k := (\ln n + c)/\omega$, имеем

$$\begin{aligned} \mu\{x : \|p_1(\cdot \mid x_1^n) - \mu_1\| > \varepsilon\} &\leq 4k \left(\frac{n}{2k} + 1\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/(2k)} \exp\left(-\frac{c_0\varepsilon^2}{32} \frac{n}{2k}\right) \\ &\lesssim 8 \left(\frac{n}{2k}\right)^2 \exp\left(-\frac{c_0\varepsilon^2}{32} \frac{n}{2k}\right) \stackrel{(b)}{\lesssim} \exp\left(-\frac{c_0\varepsilon^2}{64} \frac{n}{2k}\right) = \exp\left(-c_1\varepsilon^2 \frac{\omega n}{\ln n + c}\right), \end{aligned}$$

что и требовалось. Здесь мы воспользовались следующей цепочкой рассуждений. Во-первых, $(1 - n^{-1})^n \nearrow e$ при $n \rightarrow \infty$, а $k > 1$, поэтому последовательность $(1 - n^{-1})^{n/(2k)}$ равномерно ограничена. Далее, положим $z = n/(2k)$. Тогда $z \geq 3\gamma^{-1} \ln(24\gamma^{-1})$, где $\gamma := c_0\varepsilon^2/64$, поскольку по условию $z \geq 12\gamma^{-2} = 3\gamma^{-1} \cdot 4\gamma^{-1}$ и $4\gamma^{-1} \geq \ln(24\gamma^{-2})$ для любого $\gamma \leq 1$. Полученное неравенство можно переписать в виде $u \geq 3 \ln(3m)$, где $u = \gamma z$ и $m := 8\gamma^{-2}$. Из последнего неравенства следует, как нетрудно проверить, что $mu^2 \leq e^u$ или, что то же самое, $8z^2 \leq e^{\gamma z}$, а это и доказывает истинность неравенства (b).

Перейдем к рассмотрению стационарного случайного процесса $\eta(t) \in \mathbb{A} = \{0, 1\}$ с непрерывным временем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.10. Рассмотрим множества w' и w'' реализаций случайного процесса η , измеримые относительно координатных σ -алгебр, отвечающих отрезкам

$$[t', t' + l'] \text{ и } [t'', t'' + l''].$$

Предположим, что $t'' > t' + l'$. Скажем, что процесс η является $(N)\psi$ -перемешивающим, $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, +\infty]$, если для любых таких событий w' и w'' выполнено неравенство

$$\mu(w' \wedge w'') \leq \psi(t'' - (t' + l'))\mu(w')\mu(w'').$$

Итак, пусть процесс η является $(N)\psi$ -перемешивающим с функцией

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 + e^{\mathbf{c} - \omega t}, & \text{если } t \geq t_0, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предположим, что множество

$$\mathcal{J}_\eta = \{t \in \mathbb{R} : \eta(t) = 1\}$$

есть $(\mu$ -почти наврное) объединение отрезков.

ТЕОРЕМА 5.11. Пусть для некоторых констант ρ и $\mathbf{h}$

$$\#(\partial \mathcal{J}_\eta \cap [0, t]) \leq \frac{\rho t}{\mathbf{h}} \quad \text{и} \quad \omega \tau \leq \mathbf{c}, \quad \text{где} \quad \tau := \frac{\varepsilon \mathbf{h}}{4\rho},$$

и, кроме того,

$$\frac{t_0}{\tau} \leq \frac{\ln(T/\tau) + \mathbf{c}}{\omega \tau} \leq \left(\frac{T}{\tau}\right)^{2/3}, \quad \frac{\omega T}{\ln(T/\tau) + \mathbf{c}} > 24 \left(\frac{2^8}{c_0 \varepsilon^2}\right)^2 > 24.$$

Тогда существует константа c_3 такая, что

$$\mu \left\{ \left| \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt - \bar{\eta} \right| > \varepsilon \right\} \leq \exp \left(-c_3 \varepsilon^2 \frac{\omega T}{\ln T - \ln(\varepsilon \mathbf{h}/(4\rho)) + 2\mathbf{c}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\tau := \varepsilon \mathbf{h}/(4\rho)$, рассмотрим стационарную последовательность

$$\tilde{\eta}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \forall t \in [j\tau, (j+1)\tau] \quad \eta(t) = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Полагая

$$\eta^{(\tau)}(t) := \int_0^\tau \eta(t+u) du,$$

заметим, что $\mathbf{E} \eta^{(\tau)} = \bar{\eta}$. Поэтому в силу стационарности

$$|\mathbf{E} \tilde{\eta} - \bar{\eta}| = |\mathbf{E} \tilde{\eta} - \mathbf{E} \eta^{(\tau)}| \leq \mu\{\eta : \partial \mathcal{J}_\eta \cap [0, \tau] \neq \emptyset\} \leq \frac{\rho \tau}{\mathbf{h}} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из первого условия теоремы следует, что

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt - p_1(1 \mid x_1^n) \right| \leq \frac{\#(\partial \mathcal{J}_\eta \cap [0, T])}{T/\tau} \leq \frac{\rho T / \mathbf{h}}{T/(\varepsilon \mathbf{h}/(4\rho))} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, процесс η_j является $\tilde{\psi}$ -перемешивающим с функцией

$$\tilde{\psi}(j) = \psi((j-1)\tau).$$

В силу предыдущей леммы

$$\mu \left\{ x : |p_1(1 \mid x_1^n) - \mu_1(1)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leq \exp \left(-\frac{c_1 \varepsilon^2}{4} \frac{\omega T}{\ln T - \ln \tau + \omega \tau + \mathbf{c}} \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt - \bar{\eta} \right| &\leq \left| \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt - p_1(1 \mid x_1^n) \right| + |p_1(1 \mid x_1^n) - \mathbb{E} \eta_j| + |\mathbb{E} \eta_j - \bar{\eta}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Осталось положить $c_2 := c_1/4$. Теорема доказана.

§ 6. Некоторые предельные теоремы

В этом разделе будут исследованы свойства случайного процесса $\Phi_n(t)$, а именно будет установлено свойство процесса $\Phi_n(t)$, аналогичное свойству экспоненциального перемешивания. Поскольку теорема 2.5 по методам доказательства близка к утверждениям о сходимости сверток регулярных вероятностных мер на окружности, мы начнем с того, что в качестве иллюстрации рассмотрим этот более простой случай. Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. *Гауссовской мерой* на $\mathbb{T}$ называется мера вида

$$\zeta(B) = \int_{B+\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(u-a)^2/(2\sigma^2)} du, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{T}), \quad \mathbb{T} \simeq [0, 1),$$

где a и σ — константы.

Рассмотрим случайные величины

$$\zeta_n := \pi_n^*(\delta_{-\bar{\xi}_n} * \xi_n)^{* \lfloor \kappa_n \rfloor},$$

где $\pi_n: I_n \rightarrow \mathbb{T}$ — естественная проекция.

ЛЕММА 6.2. Пусть распределения ξ_n удовлетворяют условиям теоремы 2.5. Тогда плотности мер ζ_n равномерно сходятся к плотности $p_g(u)$ гауссовской меры с параметрами $(0, 1)$:

$$\|\pi_n^*(\delta_{-\bar{\xi}_n} * p_n)^{*\lfloor \kappa_n \rfloor} - p_g\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $\pi_n^*(\delta_{-\bar{\xi}_n} * p_n)$ – плотность меры $\pi_n^*(\delta_{-\bar{\xi}_n} * \xi_n)$:

$$\pi_n^*(\delta_{-\bar{\xi}_n} * p_n)(u) = h_n p_n(\bar{\xi}_n + u h_n).$$

Заметим, что $p_g(u) > 1/2$, поэтому без ограничения общности можно считать, что для любого n выполнено: $|p_n^{*\lfloor \kappa_n \rfloor}(t)| > 1/2$, где свертка определяется следующим естественным образом:

$$(p_1 * p_2)(t) := \int_{I_n} p_1(w) p_2(t - w) dw.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2. Обозначим через $P_n(t) = h_n p_n(\bar{\xi}_n + t h_n)$, $t \in I_n$, плотность меры $\pi_n^*(\delta_{-\bar{\xi}_n} * \xi_n)$. Для того чтобы установить равномерную сходимость плотностей мер ζ_n к плотности $p_g(u)$ гауссовской меры, достаточно доказать сходимость в $L^1(\mathbb{R})$ функций $\hat{P}_n^{[\kappa_n]}$ к функции $e^{-2\pi^2 x^2}$, где $\hat{P}_n(x)$ – преобразование Фурье функции $P_n(t)$:

$$\hat{P}_n(x) := \int_{I_n} e^{-2\pi i x t} P_n(t) dt, \quad x \in h_n^{-1} \mathbb{Z}.$$

Покажем сначала, что $\hat{P}_n^{[\kappa_n]}(x) \rightarrow e^{-2\pi^2 x^2}$ в любой точке x . Действительно,

$$\hat{P}_n(x) = 1 - \frac{2\pi^2 x^2}{\kappa_n} + \mathcal{E}_n(x), \quad \kappa_n = \frac{h_n^2}{\sigma_n^2}.$$

Для того чтобы оценить $\mathcal{E}_n(x)$, предположим на время, что P_n – функция на $\mathbb{R}$ (в этом случае $\hat{P}_n$ также определена на $\mathbb{R}$, а не только в точках вида $k h_n^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$). Тогда

$$\mathcal{E}_n(x) = \sum_{r \geq 3} \frac{\hat{P}_n^{(r)}(0)}{r!} x^r,$$

поскольку функция $\hat{P}_n$ целая. Замечая, что

$$\hat{P}_n^{(r)}(0) = (2\pi i)^r \int_0^{\rho_n} t^r P_n(t) dt, \quad \text{supp } \xi_n \subseteq [0, \rho_n h_n],$$

имеем

$$|\hat{P}_n^{(2)}(0)| \leq 4\pi^2 \int_0^{\rho_n} t^2 P_n(t) dt = \frac{4\pi^2}{\kappa_n} \implies |\hat{P}_n^{(r)}(0)| \leq \frac{(2\pi)^r \rho_n^{r-2}}{\kappa_n},$$

откуда

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_n(x)| &\leq \frac{1}{\kappa_n \rho_n^2} \sum_{r \geq 3} \frac{|2\pi \rho_n x|^r}{r!} = \frac{1}{\kappa_n \rho_n^2} \left(e^{|2\pi \rho_n x|} - |2\pi \rho_n x| - \frac{1}{2}|2\pi \rho_n x|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{\kappa_n \rho_n^2} \frac{(2\pi \rho_n x)^3}{6} (1 + o(1)) = o(\kappa_n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Значит,

$$\widehat{P}_n^{\lfloor \kappa_n \rfloor}(x) = \left(1 - \frac{2\pi^2 x^2}{\kappa_n} + \mathcal{E}_n(x) \right)^{\lfloor \kappa_n \rfloor} \rightarrow e^{-2\pi^2 x^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

по крайней мере в каждой точке x . Далее, по условию теоремы 2.5

$$(1 + C_1 \sigma_n^2 x^2)^{1/2} \widehat{p}_n(x) \leq 1,$$

откуда следует, что

$$|\widehat{P}_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/(C_1 \kappa_n)}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|\widehat{P}_n^{\lfloor \kappa_n \rfloor} - e^{-2\pi^2 x^2}\|_1 &\leq \int_{-a}^{+a} |\widehat{P}_n^{\lfloor \kappa_n \rfloor}(x) - e^{-2\pi^2 x^2}| dx \\ &\quad + \int_{|x| > a} \left(1 + \frac{x^2}{C_1 \kappa_n} \right)^{-\lfloor \kappa_n \rfloor/2} dx. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Первое слагаемое стремится к нулю в силу поточечной сходимости, а второе является бесконечно малым равномерно по n , потому что для любого k

$$\mathcal{J} := \int_a^\infty \left(1 + \frac{x^2}{C_1 k} \right)^{-k/2} dx = \sqrt{C_1} \frac{\sqrt{k}}{k-1} \left(\frac{\sqrt{k}}{a} \right)^{k-1} \cdot \mathbf{F} \left(\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}; \frac{k+1}{2}; -\frac{k}{a^2} \right),$$

где

$$\mathbf{F}(a, b; c; z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

— гипергеометрическая функция, значит,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \sqrt{C_1} \frac{\sqrt{k}}{k-1} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \left(1 + \frac{a^2}{kt} \right)^{-(k-1)/2} dt \\ &\lesssim \sqrt{\frac{C_1}{2\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-a^2/(2t)}}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \sqrt{C_1} \int_a^\infty e^{-z^2/2} dz, \end{aligned}$$

что и требовалось.

ЛЕММА 6.3. Если $a \geq \kappa_n$, то $\|p_n^{*a} - h_n^{-1}\|_\infty \leq h_n^{-1} 2^{-\lfloor a/\kappa_n \rfloor}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем сначала два общих наблюдения. Рассмотрим плотности ρ_1 и ρ_2 некоторых мер на окружности $\mathbb{T}$. Предположим, что $\|\rho_1 - 1\|_\infty \leq \varepsilon$. Тогда по теореме о среднем значении

$$\|\rho_1 * \rho_2 - 1\|_\infty = \max_t \left| \int_{\mathbb{T}} (\rho_1(u) - 1) \rho_2(t - u) du \right| = \max_t |\rho_1(\tilde{u}_t) - 1| \leq \varepsilon.$$

Пусть теперь $\|\rho_1 - 1\|_\infty \leq \varepsilon_1$ и $\|\rho_2 - 1\|_\infty \leq \varepsilon_2$. Положим $\delta_i(t) := \rho_i(t) - 1$. Тогда $\rho_1 * \rho_2 = (1 + \delta_1) * (1 + \delta_2) = 1 + \delta_1 * \delta_2$ и

$$\|\rho_1 * \rho_2 - 1\|_\infty = \|\delta_1 * \delta_2\|_\infty = \max_t \left| \delta_1(\tilde{u}_t) \int_{\mathbb{T}} \delta_2(w) dw \right| \leq \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Рассмотрим, как и раньше, плотность $P_n(t) = h_n p_n(\xi_n + th_n)$, тогда утверждение леммы эквивалентно неравенству $\|P_n^{*a} - 1\|_\infty \leq 2^{\lfloor a/\kappa_n \rfloor}$. Мы уже показали, что $\|P_n^{*\lfloor \kappa_n \rfloor} - 1\|_\infty \leq 2^{-1}$. Представим a в виде $a = \lfloor a/\kappa_n \rfloor \lfloor \kappa_n \rfloor + r$, тогда

$$\|P_n^{*a} - 1\|_\infty \leq \|P_n^{*\lfloor \kappa_n \rfloor} - 1\|_\infty^{\lfloor a/\kappa_n \rfloor} \leq 2^{-\lfloor a/\kappa_n \rfloor},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим случайные величины $\Phi_n(0)$ и $\Phi_n(A)$. Пусть

$$\overline{m}_n := \frac{h_n}{h_n + \xi_n}.$$

Заметим, что распределение $\Phi_n(t)$ совпадает с мерой $(1 - \overline{m}_n)\delta_0 + \overline{m}_n\lambda_n$, где λ_n — нормированная мера Лебега на I_n . Обозначим плотность абсолютно непрерывной компоненты их совместного распределения через $p_n^*(x, y; A)$.

Пусть $\tilde{\Phi}_n(t)$ — случайная величина, принимающая значения в множестве $I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2$, такая, что $\tilde{\Phi}_n(t) := \Phi_n(t)$, если $\Phi_n(t) \neq 0$, и $\tilde{\Phi}_n(t) := (l^-, l^+)$, если $\Phi_n(t) = 0$ и $[t - l^-, t + l^+]$ — компонента связности множества $\Phi_n^{-1}\{0\}$, содержащая t . В §2 мы проверили, что процесс $\tilde{\Phi}_n(t)$ марковский. Обозначим через $\tilde{p}_n^*(\cdot, \cdot; A)$ совместную плотность случайных величин $\tilde{\Phi}_n(0)$ и $\tilde{\Phi}_n(A)$. Тогда, очевидно, $p_n^*(\cdot, \cdot; A) = \tilde{p}_n^*(\cdot, \cdot; A)|_{I_n \times I_n}$. Пусть $\tilde{p}_n$ — функция на $I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2$, заданная соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(x) &:= h_n^{-1} \overline{m}_n, \quad x \in I_n; \\ \tilde{p}_n(l^\pm) &= h_n^{-1} \overline{m}_n p_n(l^- + l^+), \quad l^\pm \in \mathbb{R}_+^2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть $A \geq \kappa_n h_n$, тогда

$$\|\tilde{p}_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A) - \tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{y})\|_\infty \leq e^{c - \omega A / (\kappa_n h_n)} \tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{y})$$

и, в частности,

$$\|p_n^*(x, y; A) - h_n^{-2} \overline{m}_n^2\|_\infty \leq h_n^{-2} e^{c - \omega A / (\kappa_n h_n)},$$

где $c = \ln 2$ и $\omega = \ln 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с того, что исследуем асимптотическое поведение плотности $\tilde{p}_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A)$ при $n \rightarrow \infty$ для $A \sim \kappa_n h_n$. Пусть

$$p_g^{(\alpha)}(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t+k(1+\alpha))^2}{2}\right).$$

ЛЕММА 6.5. Пусть $A = \kappa_n h_n - v$, $0 \leq v \leq 2h_n$. Тогда

$$\left\| p_n^*(x, y; A) - h_n^{-2} \overline{m}_n p_g^{(h_n^{-1} \xi_n)}\left(\frac{x-y}{h_n}\right) \right\|_{\infty} = o(h_n^{-2}), \quad x, y \in I_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.5. Предположим, что $\Phi_n(0) = x \neq 0$. Будем нумеровать интервалы, составляющие множество $\Phi_n^{-1}(I_n \setminus \{0\})$, слева направо, присваивая номер 0 интервалу, содержащему точку 0. Пусть $\mathcal{I}(k)$ — k -й интервал. Пронумеруем также “вставки” — отрезки, составляющие множество $\Phi_n^{-1}\{0\}$, — слева направо, начиная с первого, расположенного правее точки $t = 0$. Сама точка $t = 0$ в нашем случае не принадлежит множеству $\Phi_n^{-1}\{0\}$. Заметим, что длины s_j вставок независимы при условии $\Phi_n(0) = x$.

Рассмотрим событие

$$\mathcal{S}_k = \left\{ (h_n - x) + (k-1)h_n + \sum_{j=1}^k s_j \in [A - h_n, A] \right\} = \{\Phi_n(A) \neq 0 \wedge A \in \mathcal{I}(k)\},$$

соответствующее тому, что отрезок $[0, A]$ содержит ровно k вставок, и заметим, что $\mathcal{S}_k$ не зависит от σ -алгебры, порожденной $s_{k+1}, s_{k+2}, \dots$. Значит, условная совместная плотность случайных величин $s_1, \dots, s_k$ относительно множества $\mathcal{S}_k$ есть функция $p_n(s_1) \cdots p_n(s_k) / P(\mathcal{S}_k)$. Поэтому плотность $\Phi_n(A) = y$ при условии $\mathcal{S}_k$ имеет вид

$$\frac{p_n^{*k}(A - kh_n + x - y)}{P(\mathcal{S}_k)}.$$

Пусть

$$\mathcal{I}_{n,k} := [A - (k+1)h_n + x, A - kh_n + x]$$

— интервал изменения аргумента сверточной степени $p_n^{*k}(A - kh_n + x - y)$. Таким образом,

$$p_n^*(x, y; A) = h_n^{-1} \overline{m}_n \sum_{k=0}^{\infty} p_n^{*k}(A - kh_n + x - y).$$

Пусть $\lambda_{n,k} := k/\kappa_n$.

ЛЕММА 6.6. *Найдутся $r_n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такие, что*

$$\begin{aligned} & \left\| p_n^{*k}(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda_{n,k} h_n} \exp\left(-\frac{(t - k\bar{\xi}_n)^2}{2\lambda_{n,k}^2 h_n^2}\right) \right\|_{\infty}^{(\mathcal{T}_{n,k})} \\ & \leq \varepsilon_n \min_{t \in \mathcal{T}_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} h_n} \exp\left(-\frac{(t - k\bar{\xi}_n)^2}{2h_n^2}\right), \end{aligned}$$

если $k \in K_n := \{k : |k - \kappa_n| \leq r_n\}$, где $\|\cdot\|_{\infty}^{(\mathcal{T}_{n,k})}$ обозначает равномерную норму на отрезке $\mathcal{T}_{n,k}$. Последовательности r_n и ε_n можно выбрать так, что будет выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda_{n,k} h_n} \exp\left(-\frac{(t - k\bar{\xi}_n)^2}{2\lambda_{n,k}^2 h_n^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi} h_n} \exp\left(-\frac{(t - k\bar{\xi}_n)^2}{2h_n^2}\right) \right\|_{\infty}^{(\mathcal{T}_{n,k})} \\ & \leq \varepsilon_n \min_{t \in \mathcal{T}_{n,k}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} h_n} \exp\left(-\frac{(t - k\bar{\xi}_n)^2}{2h_n^2}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.6. Пусть $P_n(t) := p_n(th_n - \bar{\xi}_n)$ и $\hat{P}_n(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x t} p_n(t) dt$. Представим, как и раньше, функцию $\hat{P}_n(x)$ в виде

$$\hat{P}_n(x) = 1 - \frac{2\pi^2 x^2}{\kappa_n} + \mathcal{E}_n(x), \quad \kappa_n = \frac{h_n^2}{\sigma_n^2},$$

причем $|\mathcal{E}_n(x)| = o(\kappa_n^{-1})$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\hat{P}_n^k(x) \sim e^{-2\pi^2 \lambda_{n,k}^2 x^2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad \lambda_{n,k} \rightarrow 1.$$

Повторяя рассуждение из доказательства леммы 6.2, устанавливаем поточечную сходимость

$$p_n^{*k}(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda_{n,k} h_n} \exp\left(-\frac{(t - k\bar{\xi}_n)^2}{2\lambda_{n,k}^2 h_n^2}\right)$$

и, следовательно, равномерную сходимость на отрезках $[(\kappa_n - r_n)h_n, (\kappa_n + r_n)h_n]$ для некоторой медленно растущей последовательности r_n , что и требовалось доказать.

Так как $r_n \rightarrow \infty$, вероятность $\mathbf{P}\{k \in K_n\} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Представим $p_n^*(x, y; A)$ в виде $\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1$, где

$$\mathcal{J}_0 = h_n^{-1} \bar{m}_n \sum_{k \in K_n} p_n^{*k}(A - kh_n + x - y),$$

а $\mathcal{J}_1$ — сумма по дополнению к множеству K_n . Оценим $\mathcal{J}_1$. Нетрудно показать, что

$$\|p_n^{*k}\|_{\infty} = O(\sigma_n^{-1} \kappa_n^{-1/2}) = O(h_n^{-1}), \quad \|(p_n^{*k})'\|_{\infty} = O(\sigma^{-2} \kappa_n^{-1}) = O(h_n^{-2}),$$

откуда следует, что $p_n^{*k}(A - kh_n + x - y)/P(\mathcal{S}_k) = O(h_n^{-1})$. Значит,

$$\mathcal{J}_1 = O(h_n^{-2}(1 - P\{k \in K\})) = o(h_n^{-2}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| p_n^*(x, y; A) - h_n^{-2} \overline{m}_n p_g^{(h_n^{-1} \bar{\xi}_n)} \left(\frac{x-y}{h_n} \right) \right\|_\infty \\ & \leq \left\| \mathcal{J}_0 - h_n^{-2} \overline{m}_n p_g^{(h_n^{-1} \bar{\xi}_n)} \left(\frac{x-y}{h_n} \right) \right\|_\infty + \mathcal{J}_1 \\ & \leq h_n^{-1} \sum_{k \in K_n} \left\| p_n^{*k}(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda_{n,k} h_n} \exp \left(-\frac{(t - k \bar{\xi}_n)^2}{2 \lambda_{n,k}^2 h_n^2} \right) \right\|_\infty \\ & \quad + h_n^{-1} \sum_{k \in K_n} \left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda_{n,k} h_n} \exp \left(-\frac{(t - k \bar{\xi}_n)^2}{2 \lambda_{n,k}^2 h_n^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi} h_n} \exp \left(-\frac{(t - k \bar{\xi}_n)^2}{2 h_n^2} \right) \right\|_\infty + \mathcal{J}_1 \leq \text{const} \cdot \varepsilon_n h_n^{-2} + \mathcal{J}_1 = o(h_n^{-2}) \end{aligned}$$

и лемма 6.5 доказана.

Пусть $\tilde{p}_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A) = \tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{y}) (1 + \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A))$. Предположим сначала, что $A = \kappa_n h_n$, и покажем, что

$$\|\delta_n^*(\cdot, \cdot; A)\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

при достаточно больших n . Лемма 6.5 утверждает, что

$$\left\| \delta^*(x, y, ; A) - \left(p_g^{(h_n^{-1} \bar{\xi}_n)} \left(\frac{x-y}{h_n} \right) - 1 \right) \right\|_\infty = o(1).$$

Легко проверить, что $\|p_g^{(0)}((x-y)/h_n) - 1\|_\infty < 1/2$ и, кроме того, для достаточно малых α

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \alpha} p_g^{(\alpha)}(t) \right\|_\infty \leq \text{const},$$

где константа не зависит от α . Значит, поскольку $h_n^{-1} \bar{\xi}_n \rightarrow 0$, начиная с некоторого n имеем $\|\delta_n^*(\cdot, \cdot; A)|_{I_n \times I_n}\|_\infty \leq 1/2$. Далее,

$$\tilde{p}_n^*(x, l^\pm; A) = \tilde{p}_n^*(x, h_n - l^-; A - h_n) p_n(l^- + l^+) = \frac{\tilde{p}_n^*(x, h_n - l^-; A - h_n)}{h_n^{-1} \overline{m}_n} \tilde{p}_n(l^\pm),$$

откуда

$$\|\delta_n^*(x, l^\pm; A)\|_\infty \leq \|\delta_n^*(x, h_n - l^-; A - h_n)\|_\infty \leq \frac{1}{2}.$$

Аналогично получаем оценки $\delta_n^*(l^\pm, x; A)$ и $\delta_n^*(l_1^\pm, l_2^\pm; A)$ для $A = \kappa_n h_n$.

Вычислим $\tilde{p}_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A_1 + A_2)$, используя формулу Колмогорова–Чэпмена:

$$\tilde{p}_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A_1 + A_2) = \tilde{p}_n(\tilde{x}) \int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \frac{\tilde{p}_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1) \tilde{p}_n^*(\tilde{z}, \tilde{y}; A_2)}{\tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{z})} d\tilde{z}.$$

Заметим, что

$$\int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1) \tilde{p}_n(\tilde{z}) d\tilde{z} = \int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \frac{p_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1)}{\tilde{p}_n(\tilde{x})} d\tilde{z} - 1 = 0,$$

так как по определению

$$\int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \tilde{p}_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1) d\tilde{z} = \tilde{p}_n(\tilde{x}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{y}) (1 + \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A_1 + A_2))}{\tilde{p}_n(\tilde{x})} \\ &= \int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \frac{\tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{z})^2 \tilde{p}_n(\tilde{y}) (1 + \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1)) (1 + \delta_n^*(\tilde{z}, \tilde{y}; A_2))}{\tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{z})} d\tilde{z}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 1 + \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A_1 + A_2) &= 1 + \int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1) \tilde{p}_n(\tilde{z}) d\tilde{z} \\ &+ \int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \delta_n^*(\tilde{z}, \tilde{y}; A_2) \tilde{p}_n(\tilde{z}) d\tilde{z} + \int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1) \delta_n^*(\tilde{z}, \tilde{y}; A_2) d\tilde{z} \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A_1 + A_2) = \int_{I_n \sqcup \mathbb{R}_+^2} \delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{z}; A_1) \delta_n^*(\tilde{z}, \tilde{y}; A_2) d\tilde{z}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\delta_n^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A)\|_\infty &\leq 2^{1 - \lfloor A/(\kappa_n h_n) \rfloor}, \\ \|\tilde{p}^*(\tilde{x}, \tilde{y}; A) - \tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{y})\|_\infty &\leq e^{c - \omega A/(\kappa_n h_n)} \tilde{p}_n(\tilde{x}) \tilde{p}_n(\tilde{y}), \end{aligned}$$

где $c = 2 \ln 2$, $\omega = \ln 2$ и $A \geq \kappa_n h_n$. Теорема 6.4 доказана.

Пусть $i \in \mathcal{B}(\tilde{I}_n)$ и $A \in [0, h_{n+1}]$. Рассмотрим случайный процесс

$$\begin{aligned} \eta_i(t) &:= \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_n(t, A) \in i \text{ и } \Phi_n(t), \Phi_n(A+t) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ \theta_n(t, A) &:= \Phi_n(A+t) - \Phi_n(t), \quad 0 \leq t \leq h_{n+1} - A. \end{aligned}$$

Математическое ожидание случайной величины $\eta_{\mathbf{i}}(t)$ выражается следующей формулой

$$\bar{\eta}_{\mathbf{i}} = \int_{D_n(\tilde{\Delta}_n)} p_n^*(x, y; A) dx dy, \quad D_n(B) = \{(x, y) \in I_n \times I_n : y - x \in B\}, \quad B \subseteq \tilde{I}_n.$$

Покажем, что случайный процесс $\eta_{\mathbf{i}}$ является ψ -перемешивающим, где ψ — некоторая экспоненциально убывающая функция. Пусть

$$t'' \geq t' + A + l'.$$

Введем следующие обозначения. Пусть $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ и $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$ — значения функции $\tilde{\Phi}_n$ в точках $t' + A, t' + A + l', t' + l', t'$ и $t'' + l'', t'', t'' + A, t'' + A'' + l''$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} P(w' \wedge w'') &= \int W'(\tilde{x}) W''(\tilde{y}) P(\tilde{x} | \tilde{x}_1) P(\tilde{y} | \tilde{y}_1) P_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) d\tilde{x} d\tilde{y}, \\ P(w') &= \int W'(\tilde{x}) P(\tilde{x} | \tilde{x}_1) \tilde{p}_n(\tilde{x}_1) d\tilde{x}, \quad P(w'') = \int W''(\tilde{y}) P(\tilde{y} | \tilde{y}_1) \tilde{p}_n(\tilde{y}_1) d\tilde{y}, \end{aligned}$$

где $P(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ — плотность совместного распределения $\tilde{x}_1$ и $\tilde{y}_1$:

$$P(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = \tilde{p}_n^*(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1; t'' - (t' + l' + A)).$$

Напомним, что

$$\|P(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) - \tilde{p}_n(\tilde{x}_1) \tilde{p}_n(\tilde{y}_1)\|_{\infty} \leq \tilde{p}_n(\tilde{x}_1) \tilde{p}_n(\tilde{y}_1) e^{c - \omega(t'' - (t' + l' + A)) / (\kappa_n h_n)},$$

если $t'' - (t' + l' + A) \geq \kappa_n h_n$. Значит,

$$|P(w' \wedge w'') - P(w') P(w'')| \leq P(w') P(w'') e^{c - \omega(t'' - (t' + l' + A)) / (\kappa_n h_n)}, \quad (6.2)$$

следовательно, процесс $\eta_{\mathbf{i}}$ является ψ -перемешивающим с функцией

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{c - \omega(t - A) / (\kappa_n h_n)}, & \text{если } t \geq A + \kappa_n h_n, \\ +\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предположим теперь, что

$$\begin{aligned} t' < t' + l' < t'' < t'' + l'' < t' + A < t' + A + l' < t'' + A < t'' + A + l'', \\ 0 \leq t' < t'' + l'' \leq \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Обозначим плотность совместного распределения x_0 и y_0 через

$$P_0(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \tilde{p}_n^*(\tilde{y}_0, \tilde{x}_0; t' + A - (t'' + l'')).$$

Рассмотрим условные плотности

$$P'_0(\tilde{x}_1 | \tilde{x}_0), P''_0(\tilde{y}_1 | \tilde{y}_0), P'_1(\tilde{x}_2 | \tilde{y}_1), P''_1(\tilde{y}_2 | \tilde{x}_1), P'_2(\tilde{x}_3 | \tilde{x}_2), P''_2(\tilde{y}_3 | \tilde{y}_2).$$

Пусть $W'(\tilde{x}) = P(w' | \tilde{x})$ и $W''(\tilde{y}) = P(w'' | \tilde{y})$. В силу марковости процесса $\tilde{\Phi}_n$ имеем

$$P(w' \wedge w'') = \int P_0 P'_0 P''_0 P'_1 P''_1 P'_2 P''_2 W'(\tilde{x}) W''(\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$P(w') = \int P_0 P'_0 P''_0 P'_1 P''_1 W'(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$P(w'') = \int P_0 P'_0 P''_0 P'_1 P''_1 W''(\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Для сокращения громоздких выражений мы опускаем аргументы у $P_0, P'_0, P''_0, \dots$. Положим

$$\mathcal{J}_1 = \int \tilde{p}_n(\tilde{x}_0) \tilde{p}_n(\tilde{y}_0) P'_0 P''_0 P'_1 P''_1 P'_2 P''_2 W'(\tilde{x}) W''(\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$\mathcal{J}'_1 = \int \tilde{p}_n(\tilde{x}_0) \tilde{p}_n(\tilde{y}_0) P'_0 P''_0 P'_1 P''_1 W'(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$\mathcal{J}''_1 = \int \tilde{p}_n(\tilde{x}_0) \tilde{p}_n(\tilde{y}_0) P'_0 P''_0 P'_1 P''_1 W''(\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}$$

и

$$\mathcal{J}_2 = \int \tilde{p}_n(\tilde{x}_0) \tilde{p}_n(\tilde{y}_0) \tilde{p}_n(\tilde{x}_1) \tilde{p}_n(\tilde{y}_1) P'_0 P''_0 P'_2 P''_2 W'(\tilde{x}) W''(\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$\mathcal{J}'_2 = \int \tilde{p}_n(\tilde{x}_0) \tilde{p}_n(\tilde{y}_0) \tilde{p}_n(\tilde{x}_1) \tilde{p}_n(\tilde{y}_1) P'_0 P''_0 P'_2 W'(\tilde{x}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$\mathcal{J}''_2 = \int \tilde{p}_n(\tilde{x}_0) \tilde{p}_n(\tilde{y}_0) \tilde{p}_n(\tilde{x}_1) \tilde{p}_n(\tilde{y}_1) P'_0 P''_0 P'_2 W''(\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Воспользуемся сначала тем, что совместное распределение $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ является почти равномерным, если промежуток между соответствующими моментами времени достаточно велик:

$$|P(w' \wedge w'') - \mathcal{J}_1| \leq \mathcal{J}_1 \mathcal{E}_0, \quad |P(w') - \mathcal{J}'_1| \leq \mathcal{J}'_1 \mathcal{E}_0, \quad |P(w'') - \mathcal{J}''_1| \leq \mathcal{J}''_1 \mathcal{E}_0,$$

где $\mathcal{E}_0 := e^{c-\omega(t'+A-(t''+l''))/(\kappa_n h_n)}$ и $t' + A - (t'' + l'') \geq \kappa_n h_n$. Замечая, что $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}'_2 \mathcal{J}''_2$, получаем

$$|P(w' \wedge w'') - P(w')P(w'')| \leq (\mathcal{J}_1 + P(w')\mathcal{J}''_1 + \mathcal{J}''_2 \mathcal{J}'_1) \mathcal{E}_0 + (\mathcal{J}_2 + P(w')\mathcal{J}''_2 + \mathcal{J}''_2 \mathcal{J}'_2) \mathcal{E}_1,$$

где $\mathcal{E}_1 := e^{c-\omega(t''-(t'+l'))/(\kappa_n h_n)}$ и $t'' - (t' + l') \geq \kappa_n h_n$. Отсюда нетрудно получить соотношение

$$|P(w' \wedge w'') - P(w')P(w'')| \leq (C_0 \mathcal{E}_0 + C_1 \mathcal{E}_1) P(w')P(w'').$$

В частности, если $\kappa_n h_n \leq |(t'' + l'') - t'| \leq A/2$, то

$$\begin{aligned} |P(w' \wedge w'') - P(w')P(w'')| &\leq (C_0 + C_1) \mathcal{E}_0 P(w')P(w'') \\ &= P(w')P(w'') e^{c_2 - \omega(t'' - (t' + l'))/(\kappa_n h_n)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Эта оценка понадобится нам в § 7.

§ 7. Доказательство свойства перемешивания

В этом разделе мы докажем теорему 2.5, а именно установим, что построенный поток $\mathbf{T}_\omega$ является Р-п.н. перемешивающим. Для этого достаточно показать, что для любого n_0 и функций $f, g \in C^1(I_{n_0})$ со свойствами $\Theta f = \Theta g = f(0) = g(0) = 0$ с вероятностью 1 выполнено:

$$R(A) = R_{f,g}(A) := \langle \widehat{T}^A f_\star, g_\star \rangle \rightarrow 0, \quad A \rightarrow \infty,$$

где $f_\star$ и $g_\star$ — соответствующие f и g функции на X :

$$f_\star(x) = f(\varphi_n(x)), \quad g_\star(x) = g(\varphi_n(x)).$$

В самом деле, можно выбрать счетное множество $\mathcal{F}$ функций такого вида, конечные линейные комбинации которых плотны в пространстве $L^2(X, \mu)$. Если $R_{f,g}(A) \rightarrow 0$ для всех пар функций $f, g \in \mathcal{F}$, то поток является перемешивающим; а перемешивание на всех парах f, g имеет место с вероятностью 1 в силу счетности множества $\mathcal{F}$.

Итак, фиксируем две функции $f, g \in C^1(I_{n_0})$ такие, что

$$\|f\|_\infty, \|g\|_\infty \leq 1, \quad \|f'\|_\infty, \|g'\|_\infty \leq b < \infty, \quad \Theta f = \Theta g = f(0) = g(0) = 0.$$

Поскольку функции $f_\star$ и $g_\star$ являются $\mathcal{A}(\varphi_n)$ -измеримыми, их можно рассмотреть как функции на пространстве $(X, \mathcal{A}(\varphi_n), \mu)$, которое естественно изоморфно пространству $(I_n, \mathcal{B}(I_n), \mu_n)$. Точнее, положим

$$\begin{aligned} f_{(n)}(t) &= f(\varphi_{n,n_0}(t)), \\ g_{(n)}(t) &= g(\varphi_{n,n_0}(t)), \quad t \in I_n. \end{aligned}$$

Пусть $I_n^\circ := (0, h_n)$ и $J_n^\circ = \varphi_n^{-1} I_n^\circ$. Множество J_n° есть объединение интервалов вида $l_{n,k} + I_n^\circ$, а множество $S^A J_n^\circ \cap J_n^\circ$ есть объединение интервалов, которые мы обозначим через $\mathcal{J}_{n,j}^\circ = u_{n,j} + \mathcal{J}_n^\circ(A_j)$, где

$$\mathcal{J}_n^\circ(A) := S^A(0, h_n) \cap (0, h_n) = \begin{cases} (0, h_n - A), & 0 \leq A \leq h_n, \\ (A, h_n), & -h_n \leq A \leq 0, \end{cases} \quad A \in \tilde{I}_{n+1}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(A) &:= \int_{\mathcal{J}_n^\circ(A)} f_{(n)}(t+A) \overline{g_{(n)}(t)} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{h_n - |A|} \int_0^{h_n - A} f_{(n)}(t+A) \overline{g_{(n)}(t)} dt, & 0 \leq t \leq h_n, \\ \frac{1}{h_n - |A|} \int_A^{h_n} f_{(n)}(t+A) \overline{g_{(n)}(t)} dt, & -h_n \leq t \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Функция $\tilde{R}_n$ задана на множестве $\tilde{I}_n := [-h_n, h_n]$, которое иногда удобно отождествлять с окружностью $\mathbb{R}/2h_n\mathbb{Z}$. Заметим, что если $A \ll h_n$, то $R(A) \approx \tilde{R}_n(A)$. Определим семейство мер $\tilde{\nu}_n(\cdot, A)$ на $\tilde{I}_n$ следующим образом: для борелевского подмножества B отрезка $\tilde{I}_n$ положим

$$\tilde{\nu}_n(B, A) := \frac{\ell}{h_{n+1} - |A|},$$

где ℓ – сумма длин интервалов $\mathcal{J}_{n,j}^\circ$ таких, что $A_j \in B$. Дискретная мера $\tilde{\nu}_n$ не является нормированной, однако $\tilde{\nu}_n(\tilde{I}_n, A) \geq 2m_n - 1 \rightarrow 1$. Из сделанных относительно f и g предположений следует, что

$$\tilde{R}_{n+1}(A) = \int_{\tilde{I}_n} \tilde{R}_n(t) \tilde{\nu}_n(dt, A). \quad (7.1)$$

В самом деле, поскольку $f(0) = g(0) = 0$, для $A > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n+1}(A) &= \frac{1}{h_{n+1} - |A_j|} \int_0^{h_{n+1}-A} f_{(n)}(t+A) \overline{g_{(n)}(t)} dt \\ &= \frac{1}{h_{n+1} - |A_j|} \sum_j \int_{\mathcal{J}_{n,j}^\circ} f_{(n)}(t+A) \overline{g_{(n)}(t)} dt \\ &= \frac{1}{h_{n+1} - |A_j|} \sum_j \int_{\mathcal{J}_n^\circ(A_j)} f(t+A_j) \overline{g(t)} dt \\ &= \sum_j \frac{\lambda(\mathcal{J}_n^\circ(A_j))}{h_{n+1} - |A_j|} \tilde{R}_n(A_j) = \int_{\tilde{I}_n} \tilde{R}_n(t) \tilde{\nu}_n(dt, A). \end{aligned}$$

Рассмотрим меры

$$\tilde{\nu}_n^\bullet(B, A) := S^{-A} \tilde{\nu}_n(B, A) = \tilde{\nu}(S^{-A}B, A).$$

Заметим, что, когда A меняется в пределах некоторого ограниченного промежутка, меры $\tilde{\nu}_n^\bullet(\cdot, A)$ сосредоточены на конечном множестве точек. Дадим более точное описание поведения меры $\tilde{\nu}_n^\bullet$. Имеет место представление

$$\tilde{\nu}_n^\bullet(\cdot, A) = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \mathfrak{a}(\cdot, A; \bar{\mathfrak{a}}_z, A_z),$$

где $\mathfrak{a}(\cdot, A; \bar{\mathfrak{a}}_z, A_z)$ – “*атом*” – мера вида $p(A; A_z) \delta_{\bar{\mathfrak{a}}_z}$, $A_z \in \tilde{I}_{n+1}$, $\bar{\mathfrak{a}}_z \in \tilde{I}_n$,

$$p(A; A_z) = \frac{h_n}{h_{n+1} - |A|} \begin{cases} 1 - h_n^{-1}|A - A_z|, & \text{если } |A - A_z| \leq h_n, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$\mathcal{Z}$ – некоторое конечное множество. Каждый атом соответствует одному интервалу $\mathcal{J}_{n,j}^\circ$. Нетрудно проверить следующее свойство функции $p(A; A_z)$:

$$p(A; A_z) \leq p(ah_n; A_z) + p((a+1)h_n; A_z), \quad \text{если } A \in [ah_n, (a+1)h_n].$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{a}(\cdot, A; \bar{\mathfrak{a}}, A_z) \leq \mathfrak{a}(\cdot, ah_n; \bar{\mathfrak{a}}, A_z) + \mathfrak{a}(\cdot, (a+1)h_n; \bar{\mathfrak{a}}, A_z)$$

и, следовательно,

$$\tilde{\nu}_n^\bullet(\cdot, A) \leq \tilde{\nu}_n^\bullet(\cdot, ah_n) + \tilde{\nu}_n^\bullet(\cdot, (a+1)h_n).$$

Пусть

$$\mathcal{A}_n = (2\delta_n h_{n+1}, 2\delta_{n+1} h_{n+2}], \quad \text{где } \delta_n = q_n^{-\chi} \ll 1.$$

Зафиксируем $A_0 \in \mathcal{A}_n$ и заметим, что $|\tilde{R}_{n+2}(A_0) - R(A_0)| \leq 8\delta_{n+1} \rightarrow 0$. Как и раньше, сопоставим A_0 пересечение $S^{A_0} J_{n+1}^\circ \cap J_{n+1}^\circ$, являющееся объединением интервалов $\mathcal{J}_{n+1,j}^\circ = u_{n+1,j} + \mathcal{J}_{n+1}^\circ(A_j)$. Покажем, что почти наверное доля тех A_j , что принадлежат множеству

$$\tilde{\Delta}_{n+1} := [-h_{n+1}, -(1-\delta_n)h_{n+1}] \cup [-\delta_n h_{n+1}, \delta_n h_{n+1}] \cup [(1-\delta_n)h_{n+1}, h_{n+1}],$$

мала (стремится к нулю). Точнее, мы оценим вероятность P_0 следующего события:

$$\forall A_0 \in \mathcal{A}_n \quad \tilde{\nu}_{n+1}(\tilde{\Delta}_{n+1}, A_0) \leq 8v_{n+1} + 16q_{n+1}^{-1}, \quad (7.2)$$

где $v_{n+1} \geq \delta_n h_{n+1} \|p_{n+1}\|_\infty$ — некоторая достаточно медленно стремящаяся к нулю последовательность. Рассмотрим множества $i = i(k)$ вида

$$k \cdot 2\bar{\delta}_n h_{n+1} + ([-h_{n+1}, -(1-\bar{\delta}_n)h_{n+1}] \cup [-\bar{\delta}_n h_{n+1}, \bar{\delta}_n h_{n+1}] \cup [(1-\bar{\delta}_n)h_{n+1}, h_{n+1}]),$$

образующие покрытие окружности $\tilde{I}_{n+1}$, где $\bar{\delta}_n$ — минимальное положительное число $\geq \delta_n$ такое, что $\bar{\delta}_n^{-1} \in \mathbb{N}$. Условие (7.2) выполнено, если:

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall i \quad ah_{n+1} \in \mathcal{A}_n \implies \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i, ah_{n+1}) \leq 2v_{n+1} + 4q_{n+1}^{-1}. \quad (7.3)$$

В самом деле, пусть сначала $A_0 \geq h_{n+1}$, а именно $ah_{n+1} \leq A_0 < (a+1)h_{n+1}$, тогда, поскольку любой сдвиг $\tilde{\Delta}_{n+1}$ накрывается двумя множествами i' и i'' , имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(S^{-A_0} \tilde{\Delta}_{n+1}, A_0) &\leq \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i', A_0) + \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i'', A_0) \\ &\leq \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i', ah_{n+1}) + \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i', (a+1)h_{n+1}) \\ &\quad + \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i'', ah_{n+1}) + \tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i'', (a+1)h_{n+1}) \\ &\leq 8v_{n+1} + 16q_{n+1}^{-1}, \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{N}$. Пусть теперь $2\delta_n h_{n+1} < A_0 < h_{n+1}$. В этом случае достаточно провести те же рассуждения, замечая лишь, что для данного A_0 интервалы $i', i'' \neq \tilde{\Delta}_{n+1}$, а мера $\tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(\cdot, 0)$ сосредоточена в точке 0.

Итак, зафиксируем a и интервал i , положим $A = ah_{n+1}$ и рассмотрим случайный процесс

$$\eta_i(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_{n+1}(t, A) \in i \text{ и } \Phi_{n+1}(t), \Phi_{n+1}(t+A) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\theta_{n+1}(t, A) := \Phi_{n+1}(A+t) - \Phi_{n+1}(t), \quad 0 \leq t \leq h_{n+2} - A.$$

Очевидно, что

$$\tilde{\nu}_{n+1}^\bullet(i, A) = \tilde{\nu}_{n+1}(i, A) = \frac{1}{h_{n+2} - A} \int_0^{h_{n+2} - A} \eta_i(t) dt + \mathcal{E}_{n+1},$$

где

$$|\mathcal{E}_{n+1}| \leq 4\bar{q}_{n-1}^{-1}.$$

Математическое ожидание случайной величины $\eta_i(t)$ может быть выражено формулой

$$\bar{\eta}_i = \int_{D_{n+1}(\tilde{\Delta}_{n+1})} p_{n+1}^\star(x, y; A) dx dy,$$

$$D_{n+1}(B) = \{(x, y) \in I_{n+1} \times I_{n+1} : y - x \in B\}, \quad B \subseteq \tilde{I}_{n+1}.$$

В §6 мы доказали, что

$$\|p_{n+1}^\star(\cdot; A) - \bar{m}_{n+1}^2 h_{n+1}^{-2}\|_\infty \leq \|p_{n+1}^\star(\cdot; h_{n+1}) - \bar{m}_{n+1}^2 h_{n+1}^{-2}\|_\infty,$$

значит,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_i &\leq \bar{m}_{n+1}^2 \tilde{\lambda}_{n+1}(i) + \|p_{n+1}^\star(\cdot; h_{n+1}) - \bar{m}_{n+1}^2 h_{n+1}^{-2}\|_\infty \cdot 4\delta_n h_n^2 \\ &\leq 2\bar{m}_{n+1}^2 \tilde{\lambda}_{n+1}(i) + \|p_{n+1}^\star(\cdot; h_{n+1})\|_\infty \cdot 4\delta_n h_n^2 \\ &\leq 2\bar{m}_n^2 \cdot 4\delta_n + \|\bar{m}_{n+1} h_{n+1}^{-1} p_{n+1}\|_\infty \cdot 4\delta_n h_n^2 \\ &\leq 8\delta_n + 4\|\delta_n h_{n+1} p_{n+1}\|_\infty \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Последовательность v_n может быть выбрана так, что $v_{n+1} \geq \bar{\eta}_i$.

Доказано, что процесс η_i является ψ -перемешивающим с функцией

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{c_2 - \omega(t-A)/(\kappa_{n+1} h_{n+1})}, & t \geq t_0 := A + \kappa_{n+1} h_{n+1}, \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{I} := \{t : \eta_i(t) = 1\}$. Применим теорему 5.11 к процессу η_i , полагая $\omega = \omega/(\kappa_{n+1} h_{n+1})$, $T = h_{n+2} - A$, $\mathbf{c} = c_2 + \omega A/(\kappa_{n+1} h_{n+1})$, $\mathbf{h} = h_{n+1}$, $\rho = 4$ и $\varepsilon = v_{n+1}$. Проверим условия теоремы. Очевидно, что имеет место оценка

$$\#(\partial \mathcal{I} \cap [0, t]) \leq \frac{4t}{h_{n+1}}.$$

Далее,

$$\omega\tau = \frac{\omega}{\kappa_{n+1}h_{n+1}} \frac{v_{n+1}h_{n+1}}{16} = \frac{\omega v_{n+1}}{16\kappa_{n+1}} \leq \mathbf{e};$$

$$\frac{t_0}{\tau} = \frac{A}{\tau} + \frac{16\kappa_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{\ln(T/\tau) + c_2}{v_{n+1}\omega/(16\kappa_{n+1})} + \frac{A}{\tau},$$

где $\tau = \varepsilon \mathbf{h}/(4\rho) = v_{n+1}h_{n+1}/16$, поскольку без ограничения общности можно считать, что $T > e^{\omega\tau}$; остальные условия очевидны. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\tilde{\nu}_{n+1}(i, A) > 2v_{n+1} + 4q_{n+1}^{-1}\} &\leq \mathbf{P}\left\{\frac{1}{h_{n+2} - A} \int_0^{h_{n+2} - A} \eta_i(t) dt - \bar{\eta}_i > v_{n+1}\right\} \\ &\leq \exp\left(-c_3 v_{n+1}^2 \frac{\omega(h_{n+2} - A)}{\kappa_{n+1}h_{n+1}(\ln h_{n+2} - \frac{\ln(v_{n+1}h_{n+1})}{16} + 2c_2 + 2\frac{\omega A}{\kappa_{n+1}h_{n+1}})}\right) \\ &\leq \exp\left(-c_3 v_{n+1}^2 \frac{\omega(q_{n+1} - a)}{\kappa_{n+1}(\ln q_{n+1} - \ln v_{n+1}/16) + 2c_2 + 2\omega a}\right). \end{aligned}$$

По условию теоремы $\kappa_{n+1} = o(q_{n+1}^{1-\chi-\epsilon})$. Кроме того, $a \leq \delta_{n+1}q_{n+1} = q_{n+1}^{1-\chi}$. Значит,

$$\mathbf{P}\{\tilde{\nu}_{n+1}(i, A) > 2v_{n+1} + 4q_{n+1}^{-1}\} \leq \exp\left(-c_3 v_{n+1}^2 \frac{\omega q_{n+1}^\chi}{\varkappa(q_{n+1})}\right),$$

где $\varkappa(q_{n+1}) = o(q_{n+1}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку эта величина экспоненциально убывает (относительно q_n) и общее число пар (a, i) оценивается полиномом от q_n , условие (7.2) выполнено почти наверное начиная с некоторого n .

Будем считать, что $A_0 \geq A_{00}$.

Выше мы показали, что для любого такого A_0 корреляционная функция $\tilde{R}_{n+2}$ определяется, в основном, значениями $\tilde{R}_{n+1}$ в точках A_j со свойством $\delta_n h_{n+1} \leq |A| \leq (1 - \delta_n)h_{n+1}$, которых п.н. большинство. Наша ближайшая цель – доказать, что с вероятностью 1

$$\sup_{\tilde{I}_{n+1} \setminus \tilde{\Delta}_{n+1}} |\tilde{R}_{n+1}(A)| \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для того чтобы убедиться в этом, мы поступим следующим образом. Мы выберем некоторую стремящуюся к нулю последовательность s_n и покажем, что $|\tilde{R}_{n+1}(A)| \rightarrow 0$ почти наверное для всех точек вида $A = js_n$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда в силу условия $\|f'\|_\infty \leq b$ будем иметь

$$\left| \tilde{R}_{n+1}(A) - \tilde{R}_{n+1}\left(\left\lfloor \frac{A}{s_n} \right\rfloor s_n\right) \right| \leq (1 + o(1))b \cdot s_n,$$

откуда

$$\sup_{\tilde{I}_{n+1} \setminus \tilde{\Delta}_{n+1}} |\tilde{R}_{n+1}(A)| \leq \sup_j |\tilde{R}_{n+1}(js_n)| + (1 + o(1))b \cdot s_n \rightarrow 0.$$

Доказательство же того факта, что функция $\tilde{R}_{n+1}$ п.н. равномерно стремится к нулю в точках js_n (при $n \rightarrow \infty$), основывается на следующем наблюдении. Количество точек js_n не превосходит h_{n+1}/s_n , а эта величина растет не быстрее полинома от q_n , в то время как вероятность того, что $|\tilde{R}_{n+1}(js_n)| > 4\tau_n$, убывает экспоненциально относительно q_n , где τ_n — некоторая медленно стремящаяся к нулю последовательность.

Итак, фиксируем некоторое $A = js_n \in \tilde{I}_{n+1} \setminus \tilde{\Delta}_{n+1}$. Без ограничения общности можно считать, что $A > 0$. Напомним, что

$$\tilde{R}_{n+1}(A) = \int_{\tilde{I}_n} \tilde{R}_n(t) \tilde{\nu}_n(dt, A)$$

и $\|\tilde{R}_n\|_\infty < 1$. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{I}_n} \tilde{R}_n(t) \tilde{\lambda}_n(dt) &= \int_{-h_n}^{h_n} \frac{h_n - |t|}{h_n^2} \tilde{R}_n(t) dt \\ &= \int_{-h_n}^{h_n} \frac{h_n - |t|}{h_n^2} dt \left(\frac{1}{h_n - |t|} \int_{\mathcal{I}_n^\circ(t)} f_{(n)}(u+t) \overline{g_{(n)}(u)} du \right) \\ &= \frac{1}{h_n^2} \int_{-h_n}^{h_n} \overline{g_{(n)}(u)} du \int_{-h_n}^{h_n} f_{(n)}(u+t) dt = 0. \end{aligned}$$

Разобьем полуинтервал $[-1, 1)$ возможных значений функции $\tilde{R}_n$ на полуинтервалы i длины τ_n (будем считать, что $\tau_n^{-1} \in \mathbb{N}$). Мы бы хотели рассмотреть множества $Z_i = \tilde{R}_n^{-1}(i)$ и оценить отклонение $|\tilde{\nu}_n(Z_i, A) - \tilde{\lambda}_n(Z_i)|$. Однако так определенные множества Z_i могут быть достаточно плохо устроены. Поэтому мы определим их по-другому. А именно пусть $i(t)$ — тот полуинтервал, в который попадает $\tilde{R}_n(t)$. Пусть $Z_{i(0)}$ по определению содержит 0. Пусть при движении вперед точка $\tilde{R}_n(t)$ выходит из множества $i(0) + [-\tau_n/2, \tau_n/2]$ в момент времени t_1 , т.е.

$$t_1 := \inf \{t > 0 : \tilde{R}_n(t) \notin i(0)\}.$$

В момент времени t_1 точка $\tilde{R}_n(t_1)$ находится в середине соседнего с $i(0)$ интервала $i(t_1)$. Будем считать, что $Z_{i(t_1)}$ содержит некоторый малый интервал $(t_1, t_1 + \epsilon)$, на котором $\tilde{R}_n(t) \in i(t_1)$. Продолжая эту процедуру, найдем момент t_2 первого выхода из $\tau_n/2$ -окрестности интервала $i(t_1)$. Тогда $(t_1, t_2]$ — связная компонента множества $Z_{i(t_1)}$, а множество $Z_{i(t_2)}$ содержит малый интервал $(t_2, t_2 + \epsilon)$ и т.д. В результате получим разбиение $\tilde{I}_n$ на множества Z_i , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) для любого $t \in Z_i$ выполнено $|\tilde{R}_n(t) - c(i)| \leq \tau_n$, где $c(i)$ — центр i ;
- 2) длина любой связной компоненты множества Z_i не меньше τ_n/b .

Предположим, что для данной реализации потока выполнено

$$|\tilde{\nu}_n(Z_i, A) - \overline{m}_n^2 \tilde{\lambda}_n(Z_i)| \leq \tau_n^2 \quad \text{для всех } i. \quad (7.4)$$

Тогда, обозначая через $z(t)$ центр полуинтервала i такого, что $t \in Z_i$, получаем:

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_{n+1}(A)| &\leq \int_{\tilde{I}_n} |\tilde{R}_n(t) - z(t)| \tilde{\nu}_n(dt, A) + \sum_i c(i) \cdot |\tilde{\nu}_n(Z_i, A) - \overline{m}_n^2 \tilde{\lambda}_n(Z_i)| \\ &\quad + \int_{\tilde{I}_n} |\tilde{R}_n(t) - z(t)| \overline{m}_n^2 \tilde{\lambda}_n(dt) \leq \tau_n + \tau_n^2 \cdot \frac{2}{\tau_n} + \tau_n = 4\tau_n. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\int_{\tilde{I}_n} \tilde{R}_n(t) \tilde{\lambda}_n(dt) = 0$. Полученная оценка — именно то, что нам нужно. Остается оценить вероятность осуществления условия (7.4). Рассмотрим случайный процесс

$$\eta_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta_n(t, A) \in Z_i \text{ и } \Phi_n(t), \Phi_n(t+A) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

и заметим, что

$$\tilde{\nu}_n(Z_i, A) = S_i + \mathcal{E}_n, \quad S_i := \frac{1}{h_{n+1} - A} \int_0^{h_{n+1} - A} \eta_i(t) dt,$$

где $|\mathcal{E}_n| \leq 4\overline{q}_n^{-1}$. Тогда требование (7.4) можно заменить условием

$$|S_i - \overline{m}_n^2 \tilde{\lambda}_n(Z_i)| \leq \frac{3}{4} \tau_n^2 \quad \text{для всех } i, \quad (7.5)$$

так как без ограничения общности можно считать, что $16\overline{q}_n^{-1} \leq \tau^2$. Как и выше, имеем

$$|\overline{\eta}_i - \overline{m}_n \tilde{\lambda}_n(Z_i)| = |\overline{\eta}_i - \overline{m}_n(\lambda_n \times \lambda_n)(D_{n+1}(Z_i))| \leq e^{c - \omega A / (\kappa_n h_n)}.$$

Но по условию (3) теоремы 2.5 $A \geq \delta_n h_{n+1} = q_n^{1-\chi} h_n \geq q_n^\epsilon \kappa_n h_n$. Поэтому $A / (\kappa_n h_n) \geq q_n^\epsilon$ и, выбирая должным образом τ_n , можно считать, что

$$|\overline{\eta}_i - \overline{m}_n \tilde{\lambda}_n(Z_i)| \leq \frac{1}{4} \tau_n^2.$$

Условие (7.5) (а следовательно, и (7.4)) будет выполнено, если мы потребуем следующее:

$$|S_i - \overline{\eta}_i| = \left| \frac{1}{h_{n+1} - A} \int_0^{h_{n+1} - A} \eta_i(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \tau_n^2. \quad (7.6)$$

Оценим вероятность (7.6). Полагая $a = A/h_n$, рассмотрим два случая.

Случай 1. $\delta_n q_n \leq a < \sqrt{\kappa_n q_n}$. Воспользуемся ψ -перемешиванием процесса η_i , где $\psi(t) = e^{c_1 - \omega(t-A)/(\kappa_n h_n)}$. Применим к процессу η_i теорему 5.11, рассматривая следующие значения параметров: $\omega = \omega / (\kappa_n h_n)$, $c = c_1 + A / (\kappa_n h_n)$, $h = h_n$, $\rho = 4$ и $\varepsilon = \tau_n^2/2$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{\nu}_n(Z_i, A) - \overline{\eta}_i| > \frac{1}{2} \tau_n^2 \right\} &\leq \exp \left(-c_1 \frac{\tau_n^4}{4} \frac{\omega(q_n - a)}{\kappa_n (\ln q_n - \ln \tau_n/32) + 2c_1 + 2\omega a} \right) \\ &\leq \exp \left(-\frac{q_n - a}{\varkappa_1(q_n) \cdot a} \right), \end{aligned}$$

где $\varkappa_1(q_n) = o(q_n^\delta)$ для любого $\delta > 0$.

Случай 2. $a \geq \sqrt{\kappa_n q_n}$. Без ограничения общности можно рассмотреть $a \ll q_n$ и $a \mid q_n$. Разобьем отрезок $[0, h_{n+1} - A]$ на интервалы длины $A/2$ и зафиксируем один из них $[t_0, t_0 + A/2]$. На нем процесс η_i ведет себя как ψ -перемешивающий с функцией $\psi(t) = e^{c_2 - \omega t / (\kappa_n h_n)}$. Положим $\omega = \omega / (\kappa_n h_n)$, $c = c_2$, $h = h_n$, $\rho = 4$ и $\varepsilon = \tau_n^2/2$ и опять применим теорему 5.11. Получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{\nu}_n(Z_i, A) - \bar{\eta}_i| > \frac{1}{2} \tau_n^2 \right\} &\leq \frac{2q_n}{a} \exp \left(-c_2 \frac{\tau_n^4}{4} \frac{\omega a}{\kappa_n (\ln a - \ln \tau_n/32) + 2c_2} \right) \\ &\leq \frac{2q_n}{a} \exp \left(-\frac{a}{\varkappa_2(a) \cdot \kappa_n} \right), \end{aligned}$$

где $\varkappa_2(q_n) = o(q_n^\gamma)$ для любого $\gamma > 0$.

Наконец, рассмотрим следующие две ситуации:

- (1) $\delta_n q_n \leq \sqrt{\kappa_n q_n}$;
- (2) $\delta_n q_n > \sqrt{\kappa_n q_n}$.

Для (1) необходимо рассмотреть как случай 1, так и случай 2, значит, вероятность оценивается величиной

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{\nu}_n(Z_i, A) - \bar{\eta}_i| > \frac{1}{2} \tau_n^2 \right\} &\leq \exp \left(-\frac{\sqrt{\kappa_n q_n}}{\varkappa_3(q_n) \cdot \kappa_n} \right) \\ &\leq \exp \left(-\frac{q_n^{(1-(1-\chi-\epsilon))/2}}{\varkappa_3(q_n)} \right) = \exp \left(-\frac{q_n^{(\chi+\epsilon)/2}}{\varkappa_3(q_n)} \right) \end{aligned}$$

(где $\varkappa_3(q_n) = o(q_n^\gamma)$ для любого $\gamma > 0$), которая экспоненциально мала.

В ситуации (2) нужно рассматривать лишь случай 2, и соответствующая оценка имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ |\tilde{\nu}_n(Z_i, A) - \bar{\eta}_i| > \frac{1}{2} \tau_n^2 \right\} &\leq \exp \left(-\frac{\delta_n q_n}{\varkappa_4(q_n) \cdot \kappa_n} \right) \\ &\leq \exp \left(-\frac{q_n^{1-\chi-(1-\chi-\epsilon)}}{\varkappa_4(q_n)} \right) = \exp \left(-\frac{q_n^\epsilon}{\varkappa_4(q_n)} \right) \end{aligned}$$

(где $\varkappa_4(q_n) = o(q_n^\gamma)$ для любого $\gamma > 0$), следовательно, искомая вероятность и в этом случае убывает экспоненциально быстро.

Для завершения доказательства необходимо применить рассуждение, аналогичное лемме Бореля–Кантелли. А именно мы оценили вероятность нарушения условия $\|\tilde{R}_{n+1}\|_\infty \leq \varepsilon_n$, где ε_n – некоторая бесконечно малая последовательность, при условии, что известны реализации процессов $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Причем семейство событий $\{\|\tilde{R}_{n+1}\|_\infty > \varepsilon_n\}$ измеримо относительно σ -алгебры, порожденной $\Phi_1, \dots, \Phi_n$. Наконец, ряд, составленный из оценок вероятностей этих событий, сходится (даже с экспоненциальной по $\bar{q}_n$ скоростью), таким образом, с вероятностью 1 начиная с некоторого n_0 имеем $\|\tilde{R}_{n+1}\|_\infty \leq \varepsilon_n$, а значит, и оценку корреляционной функции $R(A_0) \approx \tilde{R}_{n+2}(A_0)$.

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Каток А. Б., Степин А. М. Аппроксимация в эргодической теории // УМН. 1967. Т. 22. № 5(137). С. 81–106.
2. Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем. Фундам. напр. Динамические системы. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1985.
3. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
4. Каток А. Б., Сатаев Е. А. Стандартность автоморфизмов перекладываний отрезков и потоков на поверхностях // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 4. С. 479–488.
5. Сатаев Е. А. О числе инвариантных мер для потоков на ориентируемых поверхностях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 4. С. 860–878.
6. Chacon R. V. A geometric construction of measure preserving transformations // Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. 1965/66. V. 2. № 2. Berkeley: Univ. of California Press, 1967. P. 335–360.
7. Keane M. Interval exchange transformations // Math. Z. 1975. V. 141. № 1. P. 25–31.
8. Оселедец В. И. О спектре эргодических автоморфизмов // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168. № 5. С. 1009–1011.
9. Оселедец В. И. Автоморфизм с простым непрерывным спектром без группового свойства // Матем. заметки. 1969. Т. 5. № 5. С. 196–198.
10. Keane M. Nonergodic interval exchange transformations // Israel J. Math. 1977. V. 26. № 2. P. 188–196.
11. Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1959.
12. Ornstein D. S. On the root problem in ergodic theory // Proc. Sixth Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. 1970. V. 2. Berkeley: Univ. of California Press, 1972. P. 347–356.
13. Ferenczi S. Systems of finite rank // Colloq. Math. 1997. V. 73. № 1. P. 35–65.
14. Thouvenot J.-P. Some properties and applications of joinings in ergodic theory // Ergodic theory and its connections with harmonic analysis / ed. K. E. Petersen. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 207–235. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 205.)
15. King J. L. Joining rank and the structure of finite rank mixing transformations // J. Anal. Math. 1988. V. 51. P. 182–227.
16. King J. L., Thouvenot J.-P. A canonical structure theorem for finite joining-rank maps // J. Anal. Math. 1991. V. 56. P. 211–230.
17. Рыжиков В. В. Джойнинги и кратное перемешивание действий конечного ранга // Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 63–78.
18. Veech W. A. A criterion for a process to be prime // Monatsh. Math. 1982. V. 94. P. 335–341.
19. del Junco A., Rudolph D. On ergodic actions whose self-joinings are graphs // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1987. V. 7. P. 531–557.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
14.06.2001