Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Радзиевский, Характеризация векторных классов Адамара в терминах наименьших уклонений их элементов от векторов конечной степени, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 12, 93–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm617>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:15:54

УДК 517.43+517.5

Г. В. Радзиевский

Характеризация векторных классов Адамара в терминах наименьших уклонений их элементов от векторов конечной степени

Пусть линейный оператор A действует в комплексном банаховом пространстве X с областью определения $\mathfrak{D}(A)$. Элемент $g \in \mathfrak{D}_\infty(A) := \bigcap_{j=0}^\infty \mathfrak{D}(A^j)$ назовем *вектором степени не выше ξ (> 0) относительно A* , если $\|A^j g\| \leq c(g)\xi^j$, $j = 0, 1, \dots$. Множество векторов степени не выше ξ обозначим через $\mathfrak{G}_\xi(A)$, а наименьшее уклонение элемента f из X от множества $\mathfrak{G}_\xi(A)$ — через $E_\xi(f, A)$. По последовательности положительных чисел $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ зададим функцию $\gamma(\xi) := \min_{j=1,2,\dots} (\xi\psi_j)^{1/j}$. В работе найдены достаточные условия относительно последовательности $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ и оператора A , при которых для векторов $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ справедлива формула

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\|A^j f\|}{\psi_j} \right)^{1/j} = \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{\gamma(E_\xi(f, A)^{-1})}.$$

В случае если величина, находящаяся в левой части этой формулы, конечна, то f принадлежит *классу Адамара, заданному по оператору A и последовательности $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$* . Из приведенной формулы следует, например, формула для вычисления в терминах $E_\xi(f, A)$ радиуса голоморфности векторнозначной функции $F(zA)f$, где $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$, а $F(z) := \sum_{j=1}^\infty z^j/\psi_j$ — целая функция.

Библиография: 35 названий.

§ 1. Формулировки основных результатов

Постановка изучаемой здесь задачи восходит к работам Ж. Адамара [1], Ш. Валле Пуссена [2] и С. Н. Бернштейна [3]. Чтобы сформулировать ее, введем необходимые понятия и обозначения. Всюду в дальнейшем A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, а I — тождественный оператор в X и $A^0 := I$. Область определения и резольвентное множество оператора A обозначим соответственно через $\mathfrak{D}(A)$ и $\text{reg } A$, а $R(\lambda; A) := (A - \lambda I)^{-1}$ — резольвента оператора A , определенная при $\lambda \in \text{reg } A$. Символ $[X]$ обозначает множество ограниченных операторов, действующих в X , а нормы векторов и операторов обозначаются через $\|\cdot\|$ и снабжаются индексами лишь в случаях конкретных пространств.

Как обычно, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$ и $\mathbb{N}$ — это соответственно множества вещественных, вещественных положительных, целых, целых неотрицательных и целых положительных (натуральных) чисел.

Элемент $g \in \mathfrak{D}_\infty(A) := \bigcap_{j \in \mathbb{P}} \mathfrak{D}(A^j)$ назовем *вектором степени не выше $\xi > 0$ относительно оператора A* , если $\|A^j g\| \leq c(g)\xi^j$ при $j \in \mathbb{P}$. Множество векторов степени не выше ξ относительно оператора A обозначим через $\mathfrak{G}_\xi(A)$ и пусть $\mathfrak{G}_\infty(A) := \bigcup_{\xi > 0} \mathfrak{G}_\xi(A)$. Очевидно, что при каждом $\xi > 0$ множества $\mathfrak{G}_\xi(A)$ – линейные многообразия в X и справедливы включения

$$\mathfrak{G}_\zeta(A) \subseteq \mathfrak{G}_\xi(A) \subseteq \mathfrak{G}_\infty(A), \quad 0 < \zeta < \xi. \quad (1.1)$$

Определим *наименьшее уклонение индивидуального элемента f из X от линейного многообразия $\mathfrak{G}_\xi(A)$* посредством равенства

$$E_\xi(f, A) := \inf_{g \in \mathfrak{G}_\xi(A)} \|f - g\|, \quad \xi > 0.$$

В силу включений (1.1) $E_\xi(f, A)$ не возрастает по $\xi > 0$, а из определения $\mathfrak{G}_\infty(A)$ следует, что соотношение $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ справедливо тогда и только тогда, когда $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$, где $\overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ – замыкание линейного многообразия $\mathfrak{G}_\infty(A)$ по норме пространства X .

Сформулируем теперь задачи, которые будут решены в работе.

Далее $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность положительных чисел. Считаем, что некоторые члены этой последовательности могут равняться бесконечности (под “бесконечностью” всюду понимается “плюс бесконечность”), однако сама последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ содержит счетное число конечных членов. Кроме того, везде в работе, за исключением § 5 и теоремы 6.4 из § 6, требуется выполнение условия

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j^{1/j} = \infty. \quad (1.2)$$

Для каждого вектора $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ определим число

$$a(f, A; \psi_j) := \limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\|A^j f\|}{\psi_j} \right)^{1/j}, \quad (1.3)$$

где $(\|A^j f\|/\psi_j)^{1/j} := 0$, если $\psi_j = \infty$. Аналогичное соглашение принимается и в других несобственных случаях и далее не оговаривается. Если же вектор f не принадлежит $\mathfrak{D}_\infty(A)$, то $a(f, A; \psi_j) := \infty$.

По последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ формулами

$$\gamma(\xi) := \gamma(\xi; \psi_j) := \min_{j \in \mathbb{N}} (\xi \psi_j)^{1/j}, \quad \xi \geq 0, \quad (1.4)$$

$$\mu(\xi) := \mu(\xi; \psi_j) := \max_{j \in \mathbb{N}} \frac{\xi^j}{\psi_j}, \quad \xi \geq 0, \quad (1.5)$$

определим функции $\gamma(\cdot) := \gamma(\cdot; \psi_j)$ и $\mu(\cdot) := \mu(\cdot; \psi_j)$. Поскольку в дальнейших построениях последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, как правило, можно считать одной и той же (вплоть до §§ 6 и 7), то указание на эту последовательность в обозначениях

функций γ и μ для краткости будем опускать, если такое сокращение не вызовет недоразумений.

Формулы (1.4) и (1.5) корректны, так как в силу условия (1.2) соответствующие минимум и максимум в них существуют. Из определений (1.4) и (1.5) следует, что γ и μ – возрастающие функции, определенные на неотрицательной полуоси, и γ является обратной функцией к μ (тем самым γ и μ непрерывны), причем $\gamma(\xi) \rightarrow \infty$ и $\mu(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, а

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\xi)}{\xi^\tau} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^\tau} = \infty, \quad \tau > 0. \quad (1.6)$$

Если ψ_{j_0} – первый отличный от бесконечности элемент в последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, то

$$\lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{\gamma(\xi)}{\xi^{1/j_0}} = \psi_{j_0}^{1/j_0}, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0+} \frac{\mu(\xi)}{\xi^{j_0}} = \frac{1}{\psi_{j_0}}. \quad (1.7)$$

Для каждого вектора $f \in X$ введем число

$$b(f, A; \psi_j) := \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{\gamma(E_\xi(f, A)^{-1})}. \quad (1.8)$$

Понятно, что конечность числа $b(f, A; \psi_j)$ влечет соотношение $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, которое, в свою очередь, равносильно принадлежности вектора f подпространству $\mathfrak{G}_\infty(A)$.

Цель настоящей работы – привести достаточные условия относительно последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператора A , при которых выполняется равенство

$$a(f, A; \psi_j) = b(f, A; \psi_j) \quad (1.9)$$

или справедливы неравенства

$$c^{-1}a(f, A; \psi_j) \leq b(f, A; \psi_j) \leq ca(f, A; \psi_j) \quad (1.10)$$

с не зависящей от вектора f постоянной $c > 1$.

При формулировке достаточных условий относительно последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ понадобится понятие ее выпуклой регуляризации посредством логарифмов. А именно пусть

$$\check{\psi}_j := \max_{\xi \geq 0} \frac{\xi^j}{\mu(\xi)}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (1.11)$$

причем согласно вторым равенствам в (1.6) и (1.7) и непрерывности функции μ максимум в правой части (1.11) существует. При этом в формуле (1.11) ввиду второго равенства в (1.7) предполагается, что если $j_0 > 1$, то $\xi^j \mu(\xi)^{-1}|_{\xi=0} = \infty$ для

$j = 1, \dots, j_0 - 1$, а значит, в этом случае $\check{\psi}_j = \infty$ для $j = 1, \dots, j_0 - 1$. Определенная таким образом последовательность $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ называется¹ *выпуклой регуляризацией последовательности* $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ *посредством логарифмов* [4; гл. I, п. 8].

Приведем необходимые для дальнейшего свойства последовательности $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, которые установлены или элементарно выводятся из утверждений, имеющих в монографиях [4; гл. I, пп. 1–4, 8] и [5; п. 23].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Последовательность $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, как и последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяет условию $\lim_{j \rightarrow \infty} \check{\psi}_j^{1/j} = \infty$ и, более того, $\check{\psi}_j^{1/j} \leq \check{\psi}_{j+1}^{1/(j+1)}$ для достаточно больших j .*

Для элементов последовательности $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ справедливы неравенства

$$0 < \check{\psi}_j \leq \psi_j, \quad \check{\psi}_{j+1}^2 \leq \check{\psi}_j \check{\psi}_{j+2}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (1.12)$$

и эти элементы обладают следующим экстремальным свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Если какая-либо последовательность $\{\psi'_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям $0 < \psi'_j \leq \psi_j$ и $(\psi'_{j+1})^2 \leq \psi'_j \psi'_{j+2}$, то $\psi'_j \leq \check{\psi}_j$.*

Из неравенств (1.12) и предложения 1.2 вытекают два свойства регуляризованных последовательностей:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Выпуклая регуляризация последовательности $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ посредством логарифмов совпадает с этой же последовательностью.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *При $\varkappa > 0$ выпуклая регуляризация последовательности $\{\psi_j^\varkappa\}_{j \in \mathbb{N}}$ посредством логарифмов совпадает с последовательностью $\{\check{\psi}_j^\varkappa\}_{j \in \mathbb{N}}$.*

Функции γ и μ не изменятся, если в их определении заменить числа ψ_j на числа $\check{\psi}_j$, т.е.

$$\gamma(\xi) = \min_{j \in \mathbb{N}} (\xi \check{\psi}_j)^{1/j}, \quad \mu(\xi) = \max_{j \in \mathbb{N}} \frac{\xi^j}{\check{\psi}_j}, \quad \xi \geq 0, \quad (1.13)$$

причем согласно первому утверждению предложения 1.1 минимум и максимум в правых частях формул (1.13) существуют.

Из формул (1.3), (1.8), (1.13) и неравенств $\check{\psi}_j \leq \psi_j$, $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$a(f, A; \psi_j) \leq a(f, A; \check{\psi}_j), \quad b(f, A; \psi_j) = b(f, A; \check{\psi}_j). \quad (1.14)$$

И наконец, для положительного числа c определим $\ln^+ c := \max\{\ln c, 0\}$, окружность радиуса $\zeta > 0$ обозначим через $\mathcal{T}(\zeta) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \zeta\}$, а требование $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta$ означает, что резольвента $R(\zeta e^{i\theta}; A)$ определена (а значит, и непрерывна) при почти всех $\theta \in [0, 2\pi)$.

Сформулируем теперь основные утверждения работы, которые являются следствиями теоремы 4.1, доказанной в п. 4.2.

¹В настоящей работе термины и обозначения несколько изменены по сравнению с [4]–[6] и другой цитированной далее литературой, поскольку они в этой литературе подчас существенно различны. Использованные здесь обозначения ближе к [6; IV, гл. 1, §§ 1 и 2], однако в [6] нет в явном виде понятия выпуклой регуляризации последовательности посредством логарифмов.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.2) и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \check{\psi}_j^{1/j^2} = 1. \quad (1.15)$$

Предположим также, что оператор A подчинен следующим требованиям: существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} = 1, \quad (1.16)$$

$\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, и для всех положительных ε и η выполнено соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\mu(\zeta_m/\eta)}{\mu(e^\varepsilon \zeta_m/\eta)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta = 0. \quad (1.17)$$

Тогда для любого вектора $f \in X$ справедливо равенство (1.9).

Из предложений 1.1, 1.3, второго соотношения в (1.14) и теоремы 1.1, примененной к последовательностям $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, вытекает такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Тогда для любого вектора $f \in X$ справедливо равенство $a(f, A; \psi_j) = a(f, A; \check{\psi}_j)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В §2 установлено следующее достаточное условие справедливости соотношения (1.17): если при некотором вещественном τ

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{1}{\zeta_m^\tau} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta = 0, \quad (1.18)$$

то для любой последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющей требованиям (1.2) и (1.15), соотношение (1.17) выполнено при всех положительных ε и η .

При ослаблении требований теоремы 1.1 на последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удается вместо равенства (1.9) установить лишь оценки (1.10). А именно справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.2) и

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \check{\psi}_j^{1/j^2} < \infty. \quad (1.19)$$

Предположим также, что оператор A подчинен следующим требованиям: существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, такая, что

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} < \infty, \quad (1.20)$$

$\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, и для некоторого $c_0 > 1$ выполнено соотношение

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\mu(\zeta_m/\eta)}{\mu(c_0\zeta_m/\eta)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \leq c_1, \quad (1.21)$$

в котором постоянная $c_1 < \infty$ не зависит от $\eta > 0$. Тогда найдется такая постоянная $c > 1$, зависящая лишь от c_0 , c_1 и величин, находящихся в левых частях соотношений (1.19) и (1.20), что для любого вектора $f \in X$ справедливы неравенства (1.10).

Из формул (1.14) и теоремы 1.2, примененной к последовательностям $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удовлетворяют условиям теоремы 1.2, а постоянная $c > 1$ та же, что и в утверждении этой теоремы. Тогда для любого вектора $f \in X$ справедливы неравенства

$$a(f, A; \psi_j) \leq a(f, A; \check{\psi}_j) \leq c^2 a(f, A; \psi_j).$$

Приведем еще одно следствие теоремы 4.1, в котором утверждение теоремы 1.2 ослаблено за счет ослабления условия (1.21).

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.19); A — такой оператор, что существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, для которой

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} < \infty$$

и $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, а для некоторого $c_0 > 1$ выполнено соотношение

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\mu(\zeta_m)}{\mu(c_0\zeta_m)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta < \infty. \quad (1.22)$$

Тогда число $a(f, A; \psi_j)$ равно нулю в том и только том случае, когда равно нулю число $b(f, A; \psi_j)$.

Точно так же, как из теоремы 1.1 выводится следствие 1.1, из теоремы 1.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удовлетворяют условиям теоремы 1.3. Тогда число $a(f, A; \psi_j)$ равно нулю в том и только том случае, когда равно нулю число $a(f, A; \check{\psi}_j)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В §2 будет показано, что *если при некотором вещественном τ*

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{1}{\zeta_m^\tau} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta < \infty, \quad (1.23)$$

то для любой последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющей требованиям (1.2) и (1.19), найдутся постоянные $c_0 > 1$ и $c_1 > 0$, для которых соотношение (1.21) выполнено при всех $\eta > 0$, а значит, выполнено и соотношение (1.22).

Для формулировки двух утверждений, получающихся из теоремы 1.3, понадобятся следующие обозначения.

Для каждого вектора $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ определим число

$$\alpha(f, A; \psi_j) := \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \|A^j f\|}{\ln \psi_j}. \quad (1.24)$$

Считаем также, что если f не принадлежит $\mathfrak{D}_\infty(A)$, то $\alpha(f, A; \psi_j) := \infty$.

Для вектора $f \in X$ введем числа

$$\beta(f, A; \psi_j) := \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln \xi}{\ln \gamma(E_\xi(f, A)^{-1})}, \quad (1.25)$$

$$\sigma_E(f, A) := \inf \{ \xi > 0 : E_\xi(f, A) = 0 \}, \quad (1.26)$$

предполагая, что $\sigma_E(f, A) := \infty$, если $E_\xi(f, A) > 0$ для всех $\xi > 0$.

Понятно, что конечность числа $\beta(f, A; \psi_j)$ влечет принадлежность вектора f подпространству $\mathfrak{G}_\infty(A)$.

Из формул (1.13), (1.24), (1.25) и неравенств $\check{\psi}_j \leq \psi_j$, $j \in \mathbb{N}$, выводятся соотношения $\alpha(f, A; \psi_j) \leq \alpha(f, A; \check{\psi}_j)$ и $\beta(f, A; \psi_j) = \beta(f, A; \check{\psi}_j)$, справедливые для каждого вектора f из X .

В следующей теореме сформулированы достаточные условия относительно последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператора A , при которых выполнено равенство

$$\alpha(f, A; \psi_j) = \beta(f, A; \psi_j).$$

Отметим, что в этой теореме и далее символ $[[\lambda]]$ означает целую часть вещественного числа λ .

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.2); A — такой оператор, что существует возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, для которой

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} < \infty$$

и $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, а для некоторых чисел $\varkappa > 0$ и $c_0 > 1$ справедливо соотношение

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\mu(\zeta_m^{1/\varkappa})^\varkappa}{\mu(c_0 \zeta_m^{1/\varkappa})^\varkappa} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta < \infty. \quad (1.27)$$

Предположим также, что выполнено одно из следующих требований:

- 1) при некотором $\lambda > 1$ для исходной последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ справедливо соотношение

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \psi_{[\lambda j]}}{\ln \psi_j} \leq \lambda; \quad (1.28)$$

- 2) при некотором $\lambda > 1$ для регуляризованной последовательности $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ справедливо соотношение

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \check{\psi}_{[\lambda j]}}{\ln \check{\psi}_j} \leq \lambda. \quad (1.29)$$

Тогда если $\sigma_E(f, A) > 0$ и хотя бы одно из чисел $\alpha(f, A; \psi_j)$ или $\beta(f, A; \psi_j)$ меньше $\varkappa$, то $\alpha(f, A; \psi_j) = \beta(f, A; \psi_j)$.

Теорема 1.4 есть простое следствие леммы 4.2 и теоремы 4.2, которая, в свою очередь, выводится в §4 из теоремы 1.3. Другим следствием теоремы 4.2 является

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удовлетворяют условиям теоремы 1.4 за исключением требований 1) и 2), вместо которых предполагается выполненным соотношение (1.19). Тогда если $\sigma_E(f, A) > 0$ и хотя бы одно из чисел $\alpha(f, A; \psi_j)$ или $\alpha(f, A; \check{\psi}_j)$ меньше $\varkappa$, то $\alpha(f, A; \psi_j) = \alpha(f, A; \check{\psi}_j)$.

Приведем условия, облегчающие проверку требований теорем 1.4 и 1.5, а также поясним условие $\sigma_E(f, A) > 0$, присутствующее в теореме 1.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Из предположения 1.1 и замечания 2.2 несложно заключить, что справедливость требования (1.29) при некотором $\lambda > 1$ влечет за собой выполнение более сильного свойства: для произвольного $\lambda > 0$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \check{\psi}_{[\lambda j]}}{\ln \check{\psi}_j} = \lambda. \quad (1.30)$$

Согласно предложениям 2.11 и 2.12 это же свойство регуляризованной последовательности $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ будет выполнено, если исходная последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет при некотором $\lambda > 1$ требованию (1.28). Отсюда и из замечания 2.3 следует, что справедливость при некотором $\lambda > 1$ одного из требований (1.28) или (1.29) влечет за собой выполнение условия (1.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Если в теоремах 1.4 и 1.5 требование (1.27) заменить условием (1.23), то утверждения этих теорем останутся справедливыми без предположения о том, что хотя бы одно из чисел $\alpha(f, A; \psi_j)$, $\alpha(f, A; \check{\psi}_j)$ или $\beta(f, A; \psi_j)$ меньше $\varkappa$. Действительно, согласно замечанию 1.3 из требований 1) и 2) теоремы 1.4 вытекает условие (1.19). Значит, ввиду предложения 1.4 последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, равная последовательности $\{\psi_j^\varkappa\}_{j \in \mathbb{N}}$ (где $\varkappa > 0$), удовлетворяет условиям (1.2) и (1.19). Но если в требовании (1.22) функцию $\mu(\cdot) := \mu(\cdot; \psi_j)$ заменить на функцию $\mu(\cdot) := \mu(\cdot; \psi_j^\varkappa)$, то это требование совпадает с условием (1.27). Отсюда и из замечания 1.2 следует, что выполнение условия (1.23) влечет за собой выполнение условия (1.27) при всех $\varkappa > 0$ и некоторых $c_0 := c_0(\varkappa) > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Из условия $\sigma_E(f, A) > 0$ вытекает, что $\alpha(f, A; \psi_j) \geq 0$ для любой последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, подчиненной требованию (1.2). Действительно, если бы это было не так, то из определения (1.24) числа $\alpha(f, A; \psi_j)$ следовало бы существование $\alpha < 0$ и $j_0 \in \mathbb{N}$, для которых $\|A^j f\| \leq \psi_j^\alpha$ при $j \geq j_0$. Отсюда и из требования (1.2) имеем $\lim_{j \rightarrow \infty} \|A^j f\|^{1/j} = 0$, а значит, вектор f принадлежит $\mathfrak{G}_\varepsilon(A)$ для любого $\varepsilon > 0$, т.е. $E_\varepsilon(f, A) = 0$ при всех $\varepsilon > 0$. Согласно определению (1.26) числа $\sigma_E(f, A)$ это означает, что $\sigma_E(f, A) = 0$. Поясним теперь существенность условия $\sigma_E(f, A) > 0$, присутствующего в теореме 1.4. Отметим вначале, что из конечности $\sigma_E(f, A)$ вытекает равенство $\beta(f, A; \psi_j) = 0$. Однако, как следует из примера 1.1 работы [7], для последовательности $\{j^j\}_{j \in \mathbb{N}}$, которая подчинена требованиям (1.2) и (1.28), существует такой оператор A , удовлетворяющий условию (1.23) (а значит, и условию (1.27) при любом $\varkappa > 0$), что для каждого наперед заданного $\alpha \leq 0$ найдется вектор f_α , для которого $\sigma_E(f_\alpha, A) = 0$, а $\alpha(f_\alpha, A; j^j) = \alpha$. Тем самым, равенство $\alpha(f, A; \psi_j) = \beta(f, A; \psi_j)$ может не выполняться, если в условиях теоремы 1.4 опустить лишь одно требование $\sigma_E(f, A) > 0$.

И наконец, остановимся на структуре работы, состоящей из семи параграфов. В §2 приведены вспомогательные результаты о свойствах регуляризованных последовательностей и о свойствах функций γ и μ , заданных формулами (1.4) и (1.5). Многие из них известны или несложно выводятся из утверждений, приведенных в [4]–[6], и они существенно используются в последующих параграфах (как в этом параграфе использовались предложения 1.1–1.4). Отметим, что функция γ , по-видимому, впервые введена в нашей работе и, как показано, она играет важную роль в изучении поставленных здесь задач. Ее рассмотрение бывает полезным и в других вопросах. Например, после введения функции γ становится очевидной непрерывность функции μ . Доказательство этого факта в [5; п. 9] потребовало привлечения не столь тривиальных рассуждений.

Основным результатом §3 является лемма 3.2. В ней в терминах наименьших уклонений $E_\xi(f, A)$ сформулированы достаточные условия, при которых справедливо включение $f \in \mathfrak{D}(A^j)$. При этом установлена оценка сверху $\|A^j f\|$ через $E_\xi(f, A)$. Утверждение леммы 3.2 о справедливости включения $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ аналогично классическому результату С. Н. Бернштейна [8; работа 3] об условиях j раз дифференцируемости функции в терминах наименьших уклонений ее от множества тригонометрических полиномов степени не выше ξ . В этой конкретной ситуации аналогии оценки $\|A^j f\|$ выводятся из результатов статьи [9; теорема 10] или монографии [10; п. 6.1.3]. Следует отметить, что включение $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и оцен-

ка сверху $\|A^j f\|$ доказаны здесь при более жестких предположениях относительно $E_\xi(f, A)$, а сама оценка $\|A^j f\|$ хуже той, которую можно извлечь из [8]–[10]. Это связано с тем, что лемма 3.2 установлена при весьма общем условии, близком к требованию (1.22). А для получения соответствующих результатов из [8]–[10], как это показано в работе [11], достаточно рассмотреть оператор дифференцирования с периодическим краевым условием. Но этот оператор удовлетворяет требованию (1.18) при любом $\tau > -1$. Для оператора A , действующего в банаховом пространстве X , различные варианты леммы 3.2 имеются в [7; лемма 2.1] и [11; оценка (4.17)], причем, как следует из § 7, лемму 2.1 статьи [7] можно получить из леммы 3.2, если положить в ней функцию $\mu(\cdot) := \mu(\cdot; j^{j/\nu})$ с $\nu > 0$.

В § 4 доказана одна общая теорема 4.1, из которой уже просто выводятся сформулированные здесь теоремы 1.1–1.3. Далее в § 4 из теоремы 1.3 получена теорема 4.2, содержащая теорему 1.4. В этой теореме требования 1) и 2) теоремы 1.4 отсутствуют, однако и утверждение ее иное. А именно в теореме 4.2 установлено, что $\alpha(f, A; \psi_j) = \varphi(f, A; \psi_j)$, где число $\varphi(f, A; \psi_j)$ определяется по формуле (4.2) через функцию μ и наименьшие уклонения $E_\xi(f, A)$. Но для последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющей условию (1.2), всегда $\varphi(f, A; \psi_j) = \varphi(f, A; \check{\psi}_j)$; отсюда и из теоремы 4.2 вытекает теорема 1.5. Дополнительные требования 1) и 2) в теореме 1.4 (по сравнению с теоремой 4.2) потребовались для того, чтобы обеспечить равенство $\beta(f, A; \psi_j) = \varphi(f, A; \psi_j)$.

Результаты § 5 относятся к случаю, когда условие (1.2) не выполнено, а справедливо требование $0 < \liminf_{j \rightarrow \infty} \psi_j^{1/j} < \infty$. В этом случае выражение для числа $a(f, A; \psi_j)$ и его двусторонние оценки установлены в терминах чисел $d(\psi_j) := \liminf_{j \rightarrow \infty} \psi_j^{1/j}$ и $\sigma_E(f, A)$ или в терминах других характеристик множества положительных чисел ξ , для которых $E_\xi(f, A) = 0$ или $E_\xi(f, A) > 0$. Результаты этого параграфа содержат утверждения работ [7] и [11; § 5], относящиеся к вычислению в терминах $\sigma_E(f, A)$ типа целой векторнозначной функции

$$e^{zA} f := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j A^j f}{j!}, \quad f \in \mathfrak{D}_\infty(A),$$

в предположении, что $e^{zA} f$ имеет первый порядок роста (необходимые пояснения даны в конце § 5).

В § 6 приведены приложения результатов §§ 1 и 5 к вычислению в терминах $E_\xi(f, A)$ радиуса голоморфности векторнозначной функции

$$F(zA)f := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j A^j f}{\psi_j}, \quad f \in \mathfrak{D}_\infty(A).$$

Если $F(z) := \sum_{j=1}^{\infty} z^j / \psi_j$ – целая функция, т.е. выполнено условие (1.2), то в формулировках соответствующих утверждений участвуют функции G и M , где $M(\xi) := \max\{|F(z)| : |z| = \xi\}$, $\xi \geq 0$, а G – обратная к M функция. В § 6 функции G и M играют ту же самую роль, что соответственно функции γ и μ в результатах § 1. При выводе результатов § 6 использована лемма 6.1, показывающая,

на какую функцию M и обратную к ней функцию G возможно заменить функции μ и γ в условиях теорем 1.1–1.4 и в определениях (1.8) и (1.25) чисел $b(f, A; \psi_j)$ и $\beta(f, A; \psi_j)$ так, чтобы утверждения этих теорем не изменились. Иногда такая замена необходима, поскольку точное вычисление функции μ бывает не только затруднительно, но и нерационально из-за сложного вида μ . Рациональность такой замены продемонстрирована в § 7, где в случаях конкретных последовательностей $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ установлены уточнения некоторых результатов из [7] и [11; § 5]. В этом же параграфе пояснено, почему множество векторов f , принадлежащих банахову пространству X и удовлетворяющих условию $a(f, A; \psi_j) < \infty$, названо векторным классом Адамара. Кроме того, в § 7 приведен вывод утверждения С. Н. Бернштейна [3; работа 89, теорема 3], содержащего близкий результат Ш. Валле Пуссена из монографии [2]. В следствии 7.7 и сделанных к нему пояснениях показано, как из результатов нашей работы получаются некоторые обобщения теоремы 5 из [12] и теоремы 1 из [13].

Следует отметить, что указанные в § 7 уточнения соответствующих результатов из [7], [11]–[13] получены не только за счет значительно более общей постановки задачи, но и благодаря существенному усовершенствованию схемы доказательств. Таких усовершенствований достаточно много. Например, если при доказательстве леммы 3.2 следовать схеме получения аналогичных оценок из [7] и [11], то выкладки становятся трудно обозримыми. Здесь же благодаря более удачной, нежели в [7] и [11], записи абстрактного неравенства Бернштейна $\|A^j g\| \leq c \|g\|$ для $g \in \mathfrak{G}_\xi(A)$ (см. оценку (3.7) из леммы 3.1) по сути использован несколько модифицированный (модификация связана с введением параметра ε) прием С. Н. Бернштейна разложения вектора f в так называемый “телескопический ряд Бернштейна” по наилучшим приближениям. Аналогичное замечание можно сделать и о доказательствах оценок чисел $a(f, A; \psi_j)$ и $b(f, A; \psi_j)$ из теоремы 4.1. Однако здесь рассуждения полностью отходят от тех, которые использованы в [7] и [11; § 5], а также от тех, которые предложил С. Н. Бернштейн в [3; работа 89]. В данном случае упрощения возникают за счет иной записи числа $b(f, A; \psi_j)$, установленной в лемме 4.1.

В работе не дано сколько-нибудь существенных приложений теоремы 1.4, за исключением следствия 7.6, в котором установлены уточнения утверждений из [7; теорема 1.3] и [11; теорема 5.4]. Тем не менее, теорема 1.4 позволяет получить ряд совершенно новых теорем о сравнении роста $\max\{\|F(zA)f\| : |z| = \xi\}$, $\xi > 0$, с ростом функций, отличных от $\exp \xi^\rho$, через коэффициенты степенного ряда целой функции F и наименьшие уклонения $E_\xi(f, A)$. Для доказательства таких теорем достаточно, например, воспользоваться результатами из [14; гл. I, § 1], [15; § 2.2 и, в частности, п. 4⁰ в задачах и дополнениях к § 2.2], [16] и других работ, где теорема Адамара о вычислении порядка роста целой функции через коэффициенты ее степенного ряда получила ряд существенных уточнений и далеко идущих обобщений.

В заключение этого параграфа отметим упущение, сделанное в работах [11] и [17], где не упомянуты важные результаты статьи [18], с которой автор ознакомился сравнительно недавно. В [18; теоремы 2.5 и 2.9] имеются аналоги теоремы 1 из [17] и утверждения (1.7) теоремы 1.1 из [11]. Эти результаты в [18] установлены иным, нежели в [11] и [17], методом и при целом ряде дополнительных по сравнению

с [11] и [17] ограничений относительно оператора A . В частности, в [18] требуется, чтобы оператор A имел дискретный спектр, а норма его резольвенты допускала оценку $\|R(e^{i\theta}\lambda; A)\| \leq c |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$ при фиксированном $\theta \in [0, 2\pi)$, $c > 0$ и всех комплексных λ . Но эта оценка, очевидно, гарантирует выполнение требований теоремы 1 из [17] и теоремы 1.1 из [11]. Однако следует отметить, что имеется и разница в формулировках указанных теорем. В [11] и [17] фигурирует K -функционал

$$K(\delta, f; X, \mathfrak{D}(A^j)) := \inf_{g \in \mathfrak{D}(A^j)} (\|f - g\| + \delta \|A^j f\|),$$

а в [18] — r -й модуль гладкости вектора f , определенный посредством формулы

$$\omega_r(\delta, f; A^{1/s}) := \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|(T(h) - I)^r f\|$$

по сильно непрерывной полугруппе операторов $T(h)$, $h \geq 0$, генератором которой является s -й корень оператора A , $s \in \mathbb{N}$ (еще одно дополнительное требование по сравнению с [11] и [17]). Но согласно лемме 5 работы [19] такой модуль гладкости допускает двусторонние оценки через K -функционал $K(\delta^r, f; X, \mathfrak{D}(A^{r/s}))$. Если учесть это замечание, то и теорема 2.4 из [18] получается при $\gamma = 1$ из утверждения (42) теоремы 3 из [17] (обратное заключение неверно).

Кроме того, упомянем еще обзор [20], где имеется большая библиография, относящаяся к абстрактным неравенствам Бернштейна. Отметим, что требования на операторы, рассмотренные в [12], [13] и [20], значительно жестче условий, имеющих в настоящей работе и в [7], [11] и [17]. В частности, из результатов работ [12], [13], [18] и [20] принципиально нельзя получить утверждения нашей работы или даже те конкретные приложения абстрактных теорем, которые имеются в [7; следствие 1.1] и [11; §§2 и 5]. В связи со сказанным уместно заметить, что из [11; теоремы 1.1 и 1.2] можно вывести результаты работ [21; теорема 5], [22]–[24] о скорости сходимости разложений произвольной функции в ряд по системе корневых функций несамосопряженных дифференциальных операторов и об оценках наименьших отклонений этой функции от указанных систем корневых функций.

Автор глубоко признателен А. М. Степину за полезную дискуссию об абстрактных аналогах неравенства Бернштейна.

§ 2. О свойствах регуляризованной последовательности и связанных с нею функций

Везде в этом параграфе предполагается выполненным условие (1.2).

Наибольший индекс j , при котором для фиксированного ξ достигается максимум в определении (1.5) функции μ , обозначим через $\nu(\xi)$, т. е.

$$\nu(\xi) := \max \left\{ j \in \mathbb{N} : \mu(\xi) = \frac{\xi^j}{\psi_j} \right\}, \quad \xi > 0. \quad (2.1)$$

Из условия (1.2) следует, что максимум в (2.1) существует и $\nu(\xi)$ не убывает по $\xi > 0$.

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned}\omega(t) &:= \infty, & \alpha_j^{(\infty)} &:= \ln \psi_j, & \alpha_j^\infty &:= \ln \check{\psi}_j, \\ m(t) &:= \nu(e^t), & A(t) &\equiv A_c(t) := \ln \mu(e^t),\end{aligned}\quad (2.2)$$

то, переформулируя результаты [4; гл. I, пп. 3 и 8], получаем равенства

$$\mu(\xi) = \frac{\xi^{\nu(\xi)}}{\psi_{\nu(\xi)}} = \frac{\xi^{\nu(\xi)}}{\check{\psi}_{\nu(\xi)}}, \quad \xi > 0, \quad (2.3)$$

$$\ln \frac{\mu(\xi_2)}{\mu(\xi_1)} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\nu(t)}{t} dt, \quad \xi_1, \xi_2 > 0. \quad (2.4)$$

Функции μ , ν и последовательность $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ связаны рядом соотношений, которые сформулируем в виде предложений.

Далее для краткости положим

$$c_\psi := \limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\check{\psi}_{j+1}}{\check{\psi}_j} \right)^{1/j}. \quad (2.5)$$

Поскольку последовательность $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ логарифмически выпукла и стремится к бесконечности, то $\check{\psi}_j \leq \check{\psi}_{j+1}$ при достаточно больших j . Значит, постоянная $c_\psi \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Справедливы следующие утверждения:*

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln \xi}{\nu(\xi)} = \ln c_\psi, \quad (2.6)$$

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln \xi}{\nu(\xi)} \leq \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{(\ln \xi)^2}{\ln \mu(\xi)} \leq 4 \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln \xi}{\nu(\xi)}, \quad (2.7)$$

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{(\ln \xi)^2}{\ln \mu(\xi)} = 4 \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j^2} \ln \check{\psi}_j, \quad (2.8)$$

$$c_\psi^{1/4} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \check{\psi}_j^{1/j^2} \leq c_\psi. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (2.6) и (2.7) являются переформулировкой части утверждения 6.I из [4; гл. I]. При этом принимаются во внимание обозначения (2.2) и (2.5).

Если полностью повторить доказательство заключительной части утверждения 6.I из [4; гл. I] с учетом предположения $\omega(t) = \infty$, то получим

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{A(t)} = 4 \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha_j^{(\infty)}}{j^2},$$

откуда, принимая во внимание обозначения (2.2), выводим (2.8).

Соотношения (2.9) следуют из (2.5)–(2.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $c_\psi < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $\xi_\varepsilon > 0$, для которой

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(c\xi)} \leq \xi^{-\frac{\ln c}{\varepsilon + \ln c_\psi}}, \quad \xi \geq \xi_\varepsilon, \quad c \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения (2.6) следует, что

$$\frac{\ln \xi}{\varepsilon + \ln c_\psi} \leq \nu(\xi), \quad \xi \geq \xi_\varepsilon$$

при некотором $\xi_\varepsilon \geq 1$. Отсюда, принимая во внимание формулу (2.4) и неубывание положительной функции ν , имеем

$$\ln \frac{\mu(\xi)}{\mu(c\xi)} = - \int_\xi^{c\xi} \frac{\nu(t)}{t} dt \leq -\nu(\xi) \ln c \leq \frac{\ln c}{\varepsilon + \ln c_\psi} \ln \frac{1}{\xi},$$

что и показывает справедливость предложения 2.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть постоянная $c_\psi < \infty$, а возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ стремится к бесконечности и $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\mu(\zeta_m/\eta)}{\mu(c_0\zeta_m/\eta)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \\ \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{1}{\zeta_m^\tau} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \end{aligned} \quad (2.10)$$

при всех $c_0 > 1$, $\eta > 0$ и $\tau < (\ln c_0)/\ln c_\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем положительное ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau < \frac{\ln c_0}{\varepsilon + \ln c_\psi}. \quad (2.11)$$

Согласно предложению 2.2

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\mu(\zeta_m/\eta)}{\mu(c_0\zeta_m/\eta)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \\ \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\left(\frac{\eta}{\zeta_m} \right)^{\frac{\ln c_0}{\varepsilon + \ln c_\psi}} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \end{aligned}$$

и из предположения (2.11) получаем утверждение предложения 2.3.

Выведем из предложения 2.3 утверждения, сформулированные в замечаниях 1.1 и 1.2. Если последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.15) теоремы 1.1, то $c_\psi = 1$ согласно неравенствам $c_\psi \geq 1$ и (2.9). Поэтому неравенство (2.10) справедливо для любого вещественного τ и $c_0 = e^\varepsilon$. Отсюда и из (1.18) получаем соотношение (1.17). Если же последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.19) теоремы 1.2, то $1 \leq c_\psi < \infty$ согласно неравенствам (2.9), и поэтому для каждого вещественного τ найдется $c_0 > 1$, для которого $\tau < (\ln c_0)/\ln c_\psi$. Но величина, находящаяся в левой части неравенства (1.23), больше или равна величине, находящейся в правой части неравенства (2.10). Отсюда следует утверждение, сформулированное в замечании 1.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для любой постоянной $c > 1$ отношение $\mu(\xi)/\mu(c\xi)$ не возрастает по $\xi > 0$ и

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(c\xi)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Это предложение установлено в [6; IV, задачи 21 и 23]. Другое доказательство легко получить исходя из формулы (2.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для любых фиксированных ξ_1 и ξ_2 таких, что $1 \leq \xi_1 < \xi_2$, выражение $\mu(\xi_2^{1/\tau})^\tau \mu(\xi_1^{1/\tau})^{-\tau}$ не возрастает по $\tau > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (2.4)

$$\tau \ln \frac{\mu(\xi_2^{1/\tau})}{\mu(\xi_1^{1/\tau})} = \int_{\ln \xi_1}^{\ln \xi_2} \nu(e^{t/\tau}) dt$$

и из неубывания функции ν получается требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Найдется такая положительная постоянная ξ_1 , зависящая лишь от последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, что $\mu(\xi^{1/\tau})^\tau$ не возрастает по $\tau > 0$ при каждом фиксированном $\xi \geq \xi_1$. Кроме того, при всех τ_1, τ_2 и $\omega, 0 < \tau_1 < \tau_2, \omega > 0$, справедливо соотношение

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\mu((\omega\xi)^{1/\tau_2})^{\tau_2}}{\mu(\xi^{1/\tau_1})^{\tau_1}} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1.5) и второму соотношению в (1.6) для каждого $j_1 \in \mathbb{N}$ найдется такое $\xi_1 \geq 0$, что

$$\mu(\xi) = \max_{j \geq j_1} \frac{\xi^j}{\psi_j}, \quad \xi \geq \xi_1. \quad (2.12)$$

Поскольку $\psi_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то существует j_1 такое, что $\psi_j \geq 1$ для всех $j \geq j_1$. Следовательно, $\psi_j^{\tau_1} \leq \psi_j^{\tau_2}$ для всех $j \geq j_1$. По выбранному j_1 найдется такое $\xi_1 \geq 0$, что справедлива формула (2.12), поэтому

$$\mu(\xi^{1/\tau_2})^{\tau_2} = \max_{j \geq j_1} \frac{\xi^j}{\psi_j^{\tau_2}} \leq \max_{j \in \mathbb{N}} \frac{\xi^j}{\psi_j^{\tau_1}} = \mu(\xi^{1/\tau_1})^{\tau_1}$$

для $\xi \geq \xi_1$. Тем самым установлено первое утверждение предложения 2.6.

Чтобы доказать второе утверждение, для каждого положительного $\varepsilon < 1$ выберем натуральное $j_1 := j_1(\varepsilon, \tau_1, \tau_2, \omega)$ так, чтобы $\omega \leq \varepsilon \psi_j^{(\tau_2 - \tau_1)/j}$ при $j \geq j_1$. По выбранному j_1 найдем такое $\xi_1 := \xi_1(j_1)$, что справедлива формула (2.12). Значит, для всех $\xi \geq \xi_1 \max\{1/\omega; 1\}$ имеем

$$\mu((\omega\xi)^{1/\tau_2})^{\tau_2} = \max_{j \geq j_1} \frac{\omega^j \xi^j}{\psi_j^{\tau_2}} \leq \left(\max_{j \geq j_1} \frac{\omega^j}{\psi_j^{\tau_2 - \tau_1}} \right) \left(\max_{j \geq j_1} \frac{\xi^j}{\psi_j^{\tau_1}} \right) \leq \varepsilon \mu(\xi^{1/\tau_1})^{\tau_1}.$$

Из этих соотношений вытекает второе утверждение предложения 2.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Для каждого фиксированного $j \in \mathbb{N}$ найдутся неотрицательные числа ξ_j и ζ_j , для которых

$$\gamma(\xi_j) = (\xi_j \psi_j)^{1/j}, \quad \mu(\zeta_j) = \frac{\zeta_j^j}{\psi_j}, \quad (2.13)$$

причем ξ_j и ζ_j можно выбрать так, чтобы последовательности $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ не убывая стремились к бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование последовательности $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, для которой справедливо второе равенство в (2.13), установлено в монографии [5; п. 42], причем, как следует из доказательства этого факта, последовательность $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ можно выбрать неубывающей и стремящейся к бесконечности.

Если теперь положить числа $\xi_j = \mu(\zeta_j)$ и учесть, что функция μ возрастающая стремится к бесконечности и является обратной к функции γ , то из второго равенства в (2.13) получим первое.

Нам понадобятся понятия и свойства медленно меняющихся функций и последовательностей (см., например, [25; шп. 1.1 и 1.9]), которые приведем в виде, удобном для дальнейшего.

Функция ℓ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если для некоторого вещественного ξ_0 область определения ℓ содержит полуось $[\xi_0, \infty)$ и на этой полуоси ℓ измерима, принимает конечные положительные значения и

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ell(\lambda \xi)}{\ell(\xi)} = 1, \quad \lambda > 0. \quad (2.14)$$

Последовательность $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ называется *медленно меняющейся*, если для всех достаточно больших значений j числа α_j положительны, конечны и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{[\lambda j]}}{\alpha_j} = 1, \quad \lambda > 0. \quad (2.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Имеется и другое определение [26] медленно меняющейся последовательности, данное в терминах существования еще одной последовательности положительных чисел, обладающей определенными свойствами. Однако, как показано в [27], это определение равносильно приведенному здесь. В частности, из результатов работ [26] и [27] получается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Последовательность $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ медленно меняется в том и только том случае, когда функция $\ell: \xi \mapsto \alpha_{[\xi]}$, $\xi \in \mathbb{R}_+$, медленно меняется на бесконечности.

Результат, сформулированный в предложении 2.8, важен хотя бы потому, что с определением (2.14) работать значительно удобнее, чем с определением (2.15), поскольку отпадает необходимость постоянно оперировать с целыми частями чисел λj , где $\lambda > 0$, а $j \in \mathbb{N}$. Более того, теория медленно меняющихся функций развита лучше теории медленно меняющихся последовательностей [25].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Понятно, что выполнение соотношения (2.14) достаточно предположить либо при $0 < \lambda < 1$, либо при $1 < \lambda < \infty$. Более важное замечание относится к случаю, когда функция ℓ монотонна для достаточно больших значений аргумента. Тогда можно считать [25; лемма 1.15], что соотношение (2.14) выполнено при каком-либо фиксированном $\lambda > 0$ и $\lambda \neq 1$, например при $\lambda = 2$. Отсюда следует (и это часто будет использовано в дальнейшем), что в случае неубывающей и положительной для достаточно больших значений аргумента функции ℓ требование (2.14) ее медленного изменения на бесконечности равносильно условию

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ell(\lambda\xi)}{\ell(\xi)} \leq 1,$$

но уже при некотором фиксированном $\lambda > 1$. Согласно предложению 2.8 все предыдущие свойства медленно меняющейся на бесконечности функции ℓ относятся и к медленно меняющейся последовательности $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. В частности, для неубывающей и положительной при достаточно больших значениях индекса последовательности $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ требование (2.15) ее медленного изменения равносильно соотношению

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{[\lambda j]}}{\alpha_j} \leq 1,$$

но уже при некотором фиксированном $\lambda > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – последовательность положительных чисел, для которой при некотором $\lambda > 1$ справедливо соотношение (1.28) и

$$1 < \psi_j^{1/j} \leq \psi_{j+1}^{1/(j+1)} \quad (2.16)$$

для достаточно больших j . Тогда последовательность $\{j^{-1} \ln \psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ медленно меняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из тривиального равенства

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j^{-1} [[\lambda j]] = \lambda \quad (2.17)$$

получаем, что соотношение (1.28) равносильно соотношению

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \psi_{[[\lambda j]]}^{1/[[\lambda j]]}}{\ln \psi_j^{1/j}} \leq 1,$$

которое в силу требования (2.16) и замечания 2.2 означает медленное изменение последовательности $\{j^{-1} \ln \psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям предложения 2.9. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j^{1/j^{\tau+1}} = 1, \quad \tau > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о представлении [25; теорема 1.2] для медленно меняющейся на бесконечности функции ℓ следует, что $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{-\tau} \ell(\xi) = 0$ для каждого $\tau > 0$. Записав согласно предложению 2.8 это равенство для медленно меняющейся последовательности $\{j^{-1} \ln \psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, имеем $\lim_{j \rightarrow \infty} j^{-1-\tau} \ln \psi_j = 0$, откуда и выводим требуемое соотношение.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если при некотором $\lambda > 1$ выполнено соотношение (1.29), то в силу предложения 1.1 регуляризованная последовательность $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет требованиям предложений 2.9 и 2.10. Значит, из справедливости соотношения (1.29) следует выполнение соотношений (1.19) и (1.30) при всех $\lambda > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. Пусть функции γ и ℓ заданы соответственно формулами (1.4) и

$$\ell(\xi) := \ln \gamma(e^\xi), \quad \xi > -\infty. \quad (2.18)$$

Если последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет кроме условия (1.2) еще одному из требований (1.28) или (1.29) при некотором $\lambda > 1$, то функция ℓ медленно меняется на бесконечности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По функции ν , заданной формулой (2.1), определим функцию χ равенством

$$\chi(\xi) := \nu(\gamma(e^\xi)), \quad \xi > -\infty. \quad (2.19)$$

Поскольку γ и ν не убывая стремятся к бесконечности при стремлении аргумента к бесконечности, то таким же свойством обладает и функция χ . Кроме того, ν принимает свои значения в множестве натуральных чисел, поэтому значения функции χ также лежат в $\mathbb{N}$. Заменяя теперь в формуле (2.3) ξ на $\gamma(e^\xi)$, пользуясь тем, что γ — обратная к μ функция, и учитывая определение (2.19) функции χ , получаем $\gamma(e^\xi) = (\xi \psi_{\chi(\xi)})^{1/\chi(\xi)}$. Логарифмируя это равенство и пользуясь определением (2.18) функции ℓ , заключаем, что

$$\ell(\xi) = \frac{\xi + \ln \psi_{\chi(\xi)}}{\chi(\xi)}, \quad \xi > -\infty. \quad (2.20)$$

Из определения (1.4) функции γ имеем $\gamma(e^{\lambda\xi}) \leq (e^{\lambda\xi} \psi_{[\lambda\chi(\xi)]})^{1/[\lambda\chi(\xi)]}$. Значит,

$$\ell(\lambda\xi) \leq \frac{\lambda\xi + \ln \psi_{[\lambda\chi(\xi)]}}{[\lambda\chi(\xi)]}, \quad \xi > -\infty. \quad (2.21)$$

Если выполнено условие (1.28), то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется j_ε , для которого

$$\ln \psi_{[\lambda j]} \leq \lambda(1 + \varepsilon) \ln \psi_j, \quad j \geq j_\varepsilon. \quad (2.22)$$

Поскольку $\ell(\xi)$ и $\chi(\xi)$ стремятся к бесконечности при $\xi \rightarrow \infty$, то для выбранного таким образом j_ε найдется такое $\xi_\varepsilon > 0$, что $\ell(\xi) > 0$ и $\chi(\xi) \geq j_\varepsilon$ при $\xi \geq \xi_\varepsilon$. Используя теперь соотношения (2.20)–(2.22), получаем при $\xi \geq \xi_\varepsilon$ неравенства

$$\frac{\ell(\lambda\xi)}{\ell(\xi)} \leq \frac{\chi(\xi)}{[\lambda\chi(\xi)]} \cdot \frac{\lambda\xi + \lambda(1 + \varepsilon) \ln \psi_{\chi(\xi)}}{\xi + \ln \psi_{\chi(\xi)}} \leq \frac{\lambda\chi(\xi)}{[\lambda\chi(\xi)]} (1 + \varepsilon).$$

Значит, учитывая равенство (2.17) и стремление $\chi(\xi)$ к бесконечности при $\xi \rightarrow \infty$, имеем

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ell(\lambda\xi)}{\ell(\xi)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Так как здесь ε — произвольное положительное число, то это неравенство справедливо при $\varepsilon = 0$. Отсюда, принимая во внимание возрастание функции ℓ и замечание 2.2, приходим к утверждению предложения 2.11 в случае выполнения требования (1.28).

Если же выполнено требование (1.29), то доказательство фактически не меняется, поскольку в этом случае соотношения (2.20)–(2.22) остаются справедливыми при замене в них $\psi_{\chi(\xi)}$, $\psi_{[\lambda\chi(\xi)]}$ и ψ_j на $\check{\psi}_{\chi(\xi)}$, $\check{\psi}_{[\lambda\chi(\xi)]}$ и $\check{\psi}_j$ соответственно. А при выводе неравенства (2.21) с $\psi_{[\lambda\chi(\xi)]}$ надо вместо определения (1.4) функции γ воспользоваться ее представлением, данным первой формулой в (1.13).

Справедливо утверждение, в некотором смысле обратное к предложению 2.11. А именно верно следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Пусть ℓ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, заданная формулой (2.18). Тогда $\{j^{-1} \ln \check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — медленно меняющаяся последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ℓ медленно меняется на бесконечности, то для каждого положительного $\varepsilon < 1$ найдется положительное ξ_ε , для которого

$$\frac{\ell(\xi)}{\ell(4^{-1}\xi)} \leq 1 + \varepsilon < 2, \quad \xi \geq \xi_\varepsilon. \quad (2.23)$$

Пусть $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность из предложения 2.7, а натуральное число j_ε выбрано из условий: $\xi'_j := \ln \xi_j \geq \xi'_\varepsilon$ и $\check{\psi}_j > 1$ при всех $j \geq j_\varepsilon$. Тогда из первых формул в (1.13), (2.13), определения (2.18) функции ℓ и неравенства (2.23) имеем

$$\frac{\xi'_{2j} + \ln \check{\psi}_{2j}}{2^{-1}\xi'_{2j} + 2 \ln \check{\psi}_j} \leq \frac{\ell(\xi'_{2j})}{\ell(4^{-1}\xi'_{2j})} \leq 1 + \varepsilon < 2, \quad j \geq j_\varepsilon.$$

Следовательно, $\ln \check{\psi}_{2j} \leq 2(1 + \varepsilon) \ln \check{\psi}_j$ при $j \geq j_\varepsilon$ и поэтому

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \check{\psi}_{2j}}{2 \ln \check{\psi}_j} \leq 1 + \varepsilon. \quad (2.24)$$

В этом неравенстве ε — произвольное положительное число, меньшее единицы. Значит, (2.24) справедливо при $\varepsilon = 0$. Согласно второму утверждению предложения 1.1 последовательность $\{j^{-1} \ln \check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ не убывает при достаточно больших j . Отсюда, из замечания 2.2 и соотношения (2.24) при $\varepsilon = 0$ получаем утверждение предложения 2.12.

§3. Аналоги неравенств Джексона и Бернштейна

В этом параграфе приводятся утверждения об оценках сверху $E_\xi(f, A)$ через $\|A^j f\|$ в предположении, что $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ (аналог неравенства Джексона [28]), а также оценки сверху $\|A^j g\|$ через $\|g\|$ в предположении, что $g \in \mathfrak{G}_\xi(A)$ (аналог неравенства Бернштейна [8; работы 1 и 22]). Кроме того, в случае быстрого убывания $E_\xi(f, A)$ по ξ на бесконечности установлено включение $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и оценка сверху $\|A^j f\|$ через $E_\xi(f, A)$. Эти утверждения аналогичны результату С. Н. Бернштейна [8; работа 3] о достаточном условии дифференцируемости периодической функции в терминах наименьших уклонений ее от тригонометрических полиномов.

Начнем с предложения, содержащего два утверждения; первое из них фактически установлено в работе [17], а второе – в работе [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta$ для некоторого $\zeta > 0$, а при $\beta > 0$ постоянная $c(\beta, \zeta)$ задана формулой

$$c(\beta, \zeta) := \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\zeta}{\beta} \|R(\zeta e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta. \quad (3.1)$$

Тогда для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$E_\zeta(f, A) \leq \beta e^{c(\beta, \zeta)j} \zeta^{-j} \|A^j f\|, \quad f \in \mathfrak{D}(A^j), \quad (3.2)$$

$$\|A^j g\| \leq \beta e^{c(\beta, \zeta)j} \zeta^j \|g\|, \quad g \in \mathfrak{G}_\zeta(A). \quad (3.3)$$

Оценка (3.3) с точностью до переобозначения и незначительного огрубления совпадает с утверждением следствия 3.1 работы [11]. Неравенство (3.2) вытекает из определения и оценки функции Фавара, приведенных в [17; формулы (37) и (38)], и выводится из них с учетом [17; лемма 3] точно так же, как следствие 3.1 из теоремы 3.1 в [11].

Из предложения 3.1 вытекает

ЛЕММА 3.1. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.2) и постоянная c_ψ , заданная формулой (2.5), конечна. Предположим также, что оператор A подчинен следующим требованиям: найдется возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, для которой

$$c_\zeta := \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} < \infty, \quad (3.4)$$

$\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, и для некоторых фиксированных чисел $\eta > 0$, $c_0 > 0$ и $c_\mu \geq 1$ справедливо соотношение

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\mu(\zeta_m/\eta)}{\mu(c_0\zeta_m/\eta)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \leq \ln c_\mu. \quad (3.5)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая положительная постоянная ζ_ε , что для всех $\xi \geq \zeta_\varepsilon$ и $j \in \mathbb{N}$ выполнены оценки

$$E_\xi(f, A) \leq \frac{\mu(e^\varepsilon c_0 c_\psi \xi / \eta)}{\mu(\xi / \eta)} \left(\frac{e^\varepsilon c_\zeta c_\mu}{\xi} \right)^j \|A^j f\|, \quad f \in \mathfrak{D}(A^j), \quad (3.6)$$

$$\|A^j g\| \leq \frac{\mu(e^\varepsilon c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} (e^\varepsilon c_\zeta c_\mu \xi)^j \|g\|, \quad g \in \mathfrak{G}_\xi(A). \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (3.5) и предложения 2.2 получаем существование натурального числа m_ε такого, что при $m \geq m_\varepsilon$

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{\zeta_m \mu(\zeta_m / \eta)}{\mu(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi \zeta_m / \eta)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \leq \ln c_\mu + \varepsilon.$$

Полагая теперь в предложении 3.1 $\zeta := \zeta_m$, а

$$\beta := \frac{\mu(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi \zeta_m / \eta)}{\mu(\zeta_m / \eta)},$$

закключаем, что постоянная $c(\beta, \zeta)$, заданная формулой (3.1), меньше или равна $\ln e^\varepsilon c_\mu$. Тем самым, оценки (3.2) и (3.3) запишутся в виде

$$E_{\zeta_m}(f, A) \leq \frac{\mu(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi \zeta_m / \eta)}{\mu(\zeta_m / \eta)} \left(\frac{e^\varepsilon c_\mu}{\zeta_m} \right)^j \|A^j f\|, \quad (3.8)$$

$$f \in \mathfrak{D}(A^j), \quad j \in \mathbb{N}, \quad m \geq m_\varepsilon,$$

$$\|A^j g\| \leq \frac{\mu(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi \zeta_m / \eta)}{\mu(\zeta_m / \eta)} (e^\varepsilon c_\mu \zeta_m)^j \|g\|, \quad (3.9)$$

$$g \in \mathfrak{G}_{\zeta_m}(A), \quad j \in \mathbb{N}, \quad m \geq m_\varepsilon.$$

Ввиду условия (3.4) для некоторого натурального числа m'_ε выполнено неравенство

$$\frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} \leq e^\varepsilon c_\zeta, \quad m \geq m'_\varepsilon. \quad (3.10)$$

Заметим, что по условию последовательность $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ возрастает и стремится к бесконечности. Поэтому для каждого $\xi \geq \zeta_{m'_\varepsilon}$ найдется натуральное число $m \geq m'_\varepsilon$, для которого $\zeta_m \leq \xi < \zeta_{m+1}$. Отсюда и из неравенства (3.10) имеем

$$\frac{\xi}{\zeta_m} < e^\varepsilon c_\zeta, \quad \zeta_m \leq \xi < \zeta_{m+1}, \quad m \geq m'_\varepsilon, \quad (3.11)$$

$$\frac{\zeta_{m+1}}{\xi} < e^\varepsilon c_\zeta, \quad \zeta_m \leq \xi < \zeta_{m+1}, \quad m \geq m'_\varepsilon. \quad (3.12)$$

Так как $E_\xi(f, A)$ не возрастает по ξ , а согласно предложению 2.4 $\mu(c\xi)/\mu(\xi)$ не убывает по ξ при фиксированном $c > 1$, то из оценок (3.8) и (3.11) следует, что для всех $\xi \geq \zeta_\varepsilon := \max\{\zeta_{m_\varepsilon}; \zeta_{m'_\varepsilon}\}$, $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и $j \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$E_\xi(f, A) \leq E_{\zeta_m}(f, A) \leq \frac{\mu(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi \xi / \eta)}{\mu(\xi / \eta)} \left(\frac{e^{2\varepsilon} c_\zeta c_\mu}{\xi} \right)^j \|A^j f\|.$$

Поскольку здесь ε — произвольное положительное число, то, заменяя в последнем выражении 2ε на ε , приходим к утверждению (3.6).

Установим теперь оценку (3.7). Пусть m'_ε — то же натуральное число, что и раньше. Так как из $g \in \mathfrak{G}_\xi(A)$ и $\xi < \zeta_{m+1}$ вытекает включение $g \in \mathfrak{G}_{\zeta_{m+1}}(A)$, то, применяя оценку (3.9) при m равном $m+1$ и учитывая соотношения (3.12), а также неубывание $\mu(c\xi)/\mu(\xi)$ по ξ при фиксированном $c > 1$, получаем, что для всех $\xi \geq \zeta_\varepsilon := \max\{\zeta_{m_\varepsilon}; \zeta_{m'_\varepsilon}\}$, $g \in \mathfrak{G}_\xi(A)$ и $j \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|A^j g\| &\leq \frac{\mu(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi \zeta_{m+1} / \eta)}{\mu(\zeta_{m+1} / \eta)} \left(\frac{e^\varepsilon c_\mu \zeta_{m+1}}{\xi} \right)^j \xi^j \|g\| \\ &\leq \frac{\mu(e^{3\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(e^\varepsilon c_\zeta \xi / \eta)} (e^{2\varepsilon} c_\zeta c_\mu \xi)^j \|g\|. \end{aligned}$$

Но μ — возрастающая функция, и поэтому последнее выражение лишь увеличится, если в нем $\mu(e^\varepsilon c_\zeta \xi / \eta)$ заменить на $\mu(c_\zeta \xi / \eta)$. После указанной замены, полагая в полученном выражении 3ε равным ε , приходим к утверждению (3.7).

Используя теперь оценку (3.7), установим следующую лемму.

ЛЕММА 3.2. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удовлетворяют условиям леммы 3.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая положительная постоянная c_ε , что если при некотором $j \in \mathbb{N}$ вектор f удовлетворяет требованию

$$\int_1^\infty \frac{\mu(e^\varepsilon c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi < \infty, \quad (3.13)$$

то $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и

$$\|A^j f\| \leq c_\varepsilon^j \|f\| + \frac{6}{\varepsilon} (e^\varepsilon c_\zeta c_\mu)^j \int_1^\infty \frac{\mu(e^\varepsilon c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi. \quad (3.14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Подчеркнем, что постоянная c_ε ни от $j \in \mathbb{N}$, ни от f не зависит, и если требование (3.13) справедливо при всех $j \in \mathbb{N}$, то $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и оценка (3.14) справедлива при всех $j \in \mathbb{N}$. Именно в таком виде лемма 3.2 будет использована в дальнейшем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Вначале отметим, что согласно условию леммы 3.1 (а значит, и леммы 3.2) $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, резольвентное множество оператора A непусто, отсюда и из [29; теорема VII.9.7] следует, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ оператор A^j замкнут.

Поскольку $E_\xi(f, A)$ не возрастает, а $\mu(c\xi)/\mu(\xi)$ не убывает по ξ (если только $c > 1$), то при всех $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \int_{e^{\varepsilon(l-1)}}^{e^{\varepsilon l}} \frac{\mu(e^{3\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi \\ & \geq \frac{\mu(e^\varepsilon e^{\varepsilon(l+1)} c_0 c_\zeta c_\psi / \eta)}{\mu(e^{\varepsilon(l-1)} c_\zeta / \eta)} e^{\varepsilon j(l-1)} E_{e^{\varepsilon l}}(f, A). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая возрастание $\mu(\xi)$ по ξ и полагая

$$\mu_{\varepsilon, j, l} := \frac{\mu(e^\varepsilon e^{\varepsilon(l+1)} c_0 c_\zeta c_\psi / \eta)}{\mu(e^{\varepsilon(l+1)} c_\zeta / \eta)} e^{\varepsilon j} e^{\varepsilon j(l+1)}, \quad (3.15)$$

получаем, что для всех натуральных j и l справедливы оценки

$$\mu_{\varepsilon, j, l} E_{e^{\varepsilon l}}(f, A) \leq \frac{e^{3\varepsilon j}}{\varepsilon} \int_{e^{\varepsilon(l-1)}}^{e^{\varepsilon l}} \frac{\mu(e^{3\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi. \quad (3.16)$$

Зафиксируем теперь $\delta > 0$ и для вектора f найдем такие элементы $g_{\delta, j, l}$, принадлежащие $\mathfrak{G}_{e^{\varepsilon l}}(A)$, что

$$\|f - g_{\delta, j, l}\| \leq E_{e^{\varepsilon l}}(f, A) + 2^{-l-1} \delta \mu_{\varepsilon, j, l}^{-1}, \quad j, l \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

Последовательность $\{E_{e^{\varepsilon l}}(f, A)\}_{l \in \mathbb{N}}$ не возрастает. Этим же свойством согласно определению (3.15) чисел $\mu_{\varepsilon, j, l}$ и предложению 2.4 при каждых фиксированных $\varepsilon > 0$ и $j \in \mathbb{N}$ обладают и последовательности $\{\mu_{\varepsilon, j, l}^{-1}\}_{l \in \mathbb{N}}$. Поэтому из (3.17) имеем

$$\|g_{\delta, j, l+1} - g_{\delta, j, l}\| \leq 2E_{e^{\varepsilon l}}(f, A) + 2^{-l} \delta \mu_{\varepsilon, j, l}^{-1}, \quad j, l \in \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

Далее предполагаем, что l_ε — наименьшее из натуральных чисел, для которых справедливо неравенство

$$\exp \varepsilon l_\varepsilon \geq \zeta_\varepsilon, \quad (3.19)$$

где ζ_ε — то же число, что и в лемме 3.1.

Вектор $g_{\delta, j, l}$ был выбран так, что он принадлежит $\mathfrak{G}_{e^{\varepsilon l}}(A)$. Следовательно, $g_{\delta, j, l+1} - g_{\delta, j, l} \in \mathfrak{G}_{e^{\varepsilon(l+1)}}(A)$. Кроме того, натуральное число l_ε удовлетворяет неравенству (3.19). Значит, в утверждении (3.7) леммы 3.1 можно положить число $\xi := \exp \varepsilon(l+1)$ и вектор $g := g_{\delta, j, l+1} - g_{\delta, j, l}$, где $l = l_\varepsilon, l_\varepsilon + 1, \dots$. Поэтому из (3.7) вытекают неравенства

$$\|A^j(g_{\delta, j, l+1} - g_{\delta, j, l})\| \leq \frac{\mu(e^\varepsilon e^{\varepsilon(l+1)} c_0 c_\zeta c_\psi / \eta)}{\mu(e^{\varepsilon(l+1)} c_\zeta / \eta)} (e^\varepsilon c_\zeta c_\mu)^j e^{\varepsilon j(l+1)} \|g_{\delta, j, l+1} - g_{\delta, j, l}\|,$$

$j \in \mathbb{N}$ и $l = l_\varepsilon, l_\varepsilon + 1, \dots$, а принимая во внимание обозначения (3.15), имеем

$$\|A^j(g_{\delta,j,l+1} - g_{\delta,j,l})\| \leq (c_\zeta c_\mu)^j \mu_{\varepsilon,j,l} \|g_{\delta,j,l+1} - g_{\delta,j,l}\|, \\ j \in \mathbb{N}, \quad l = l_\varepsilon, l_\varepsilon + 1, \dots$$

Отсюда, воспользовавшись последовательно оценками (3.18) и (3.16), заключаем, что

$$\sum_{l=l_\varepsilon}^{\infty} \|A^j(g_{\delta,j,l+1} - g_{\delta,j,l})\| \leq \delta (c_\zeta c_\mu)^j \\ + \frac{2}{\varepsilon} (e^{3\varepsilon} c_\zeta c_\mu)^j \int_1^\infty \frac{\mu(e^{3\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (3.20)$$

В дальнейшем, не уменьшая общности, будем предполагать, что вместо условия (3.13) справедливо требование

$$\int_1^\infty \frac{\mu(e^{3\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi < \infty \quad (3.21)$$

при том же $j \in \mathbb{N}$, что и в (3.13). (В конце доказательства леммы из этого условия после замены 3ε на ε получается требуемая оценка (3.14).)

Из (3.20) и (3.21) вытекает фундаментальность последовательности векторов $\{A^j g_{\delta,j,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ (здесь индексы δ и j фиксированы). Обозначим через $y_{\delta,j}$ предельный элемент этой последовательности, т.е.

$$y_{\delta,j} = A^j g_{\delta,j,l_\varepsilon} + \sum_{l=l_\varepsilon}^{\infty} A^j (g_{\delta,j,l+1} - g_{\delta,j,l}). \quad (3.22)$$

Поскольку $\mu(c\xi)/\mu(\xi)$ не убывает по ξ при фиксированном $c > 1$, а $E_\xi(f, A)$ не возрастает по ξ и в требовании (3.21) $j \geq 1$, то $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Отсюда и из оценки (3.17) получаем сходимость последовательности векторов $\{g_{\delta,j,l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ к вектору f . Но, как отмечалось в начале доказательства леммы 3.2, оператор A^j замкнут, поэтому $f \in \mathfrak{D}(A^j)$ и $A^j f = y_{\delta,j}$ (т.е. вектор $y_{\delta,j}$, на самом деле, не зависит от δ).

Тем самым, для завершения доказательства леммы 3.2 осталось установить оценку (3.14), а для этого, как видно из соотношений (3.20) и (3.22), достаточно оценить $\|A^j g_{\delta,j,l_\varepsilon}\|$. Используя очевидное неравенство $E_\xi(f, A) \leq \|f\|$, из (3.17) выводим

$$\|g_{\delta,j,l_\varepsilon}\| \leq \|f - g_{\delta,j,l_\varepsilon}\| + \|f\| \leq 2\|f\| + 2^{-l_\varepsilon-1} \delta \mu_{\varepsilon,j,l_\varepsilon}^{-1}. \quad (3.23)$$

Но вектор $g_{\delta,j,l_\varepsilon}$ принадлежит линейному многообразию $\mathfrak{G}_{e^{\varepsilon l_\varepsilon}}(A)$, а натуральное число l_ε выбрано из условия (3.19), следовательно, в утверждении (3.7) леммы 3.1 можно положить число $\xi := \exp(\varepsilon l_\varepsilon)$ и вектор $g := g_{\delta,j,l_\varepsilon}$. Поэтому из оценок (3.7) и (3.23) вытекает неравенство

$$\|A^j g_{\delta,j,l_\varepsilon}\| \leq c_{3\varepsilon}^j \|f\| + \delta c_{3\varepsilon}^j \mu_{\varepsilon,j,l_\varepsilon}^{-1} \quad (3.24)$$

с постоянной

$$c_{3\varepsilon} := 2 \frac{\mu(e^\varepsilon e^{\varepsilon l_\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\psi / \eta)}{\mu(e^{\varepsilon l_\varepsilon} c_\zeta / \eta)} e^\varepsilon e^{\varepsilon l_\varepsilon} c_\zeta c_\mu. \quad (3.25)$$

Из равенства (3.22), в котором, как было показано, вектор $y_{\delta,j}$ равен вектору $A^j f$, и оценок (3.20) и (3.24) заключаем, что

$$\begin{aligned} \|A^j f\| &\leq \delta (c_{3\varepsilon}^j \mu_{\varepsilon,j,l_\varepsilon}^{-1} + c_\zeta^j c_\mu^j) + c_{3\varepsilon}^j \|f\| \\ &+ \frac{6}{3\varepsilon} (e^{3\varepsilon} c_\zeta c_\mu)^j \int_1^\infty \frac{\mu(e^{3\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\psi \xi / \eta)}{\mu(c_\zeta \xi / \eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Левая часть этого неравенства не зависит от δ , а в правой δ — произвольное положительное число, причем все постоянные η , c_0 , $c_{3\varepsilon}$, c_ζ , c_μ , c_ψ и числа $\mu_{\varepsilon,j,l_\varepsilon}$ не зависят от δ . Следовательно, неравенство (3.26) справедливо и при $\delta = 0$. Полагая в (3.26) $\delta = 0$ и заменяя 3ε на ε , приходим к требуемой оценке (3.14). Отметим, что при этой замене используемое в доказательстве условие (3.21) запишется в виде исходного требования (3.13). И последнее, указанная здесь формулой (3.25) постоянная $c_{3\varepsilon}$, очевидно, не зависит от j и f .

§ 4. Доказательство основных утверждений

Параграф состоит из трех пунктов. В первом пункте вводятся новые величины $w(f, A; \psi_j)$ и $\varphi(f, A; \psi_j)$ и устанавливается их равенство соответственно величинам $b(f, A; \psi_j)$ и $\beta(f, A; \psi_j)$, заданным формулами (1.8) и (1.25). Равенство $b(f, A; \psi_j) = w(f, A; \psi_j)$ потребуется для доказательства в п. 4.2 теоремы 4.1, из которой просто выводятся теоремы 1.1–1.3. В п. 4.3 из теоремы 1.3 получено обобщение теоремы 1.4 (теорема 4.2) и теорема 1.5, причем при выводе теоремы 1.4 из теоремы 4.2 использовано равенство $\beta(f, A; \psi_j) = \varphi(f, A; \psi_j)$.

4.1. Два вспомогательных утверждения. Для каждого вектора $f \in X$ введем число

$$w(f, A; \psi_j) := \inf_{\tau > 0} \left\{ \tau : \sup_{\xi > 0} \mu\left(\frac{\xi}{\tau}\right) E_\xi(f, A) < \infty \right\}, \quad (4.1)$$

полагая $w(f, A; \psi_j) := \infty$, если $\sup_{\xi > 0} \mu(\xi/\tau) E_\xi(f, A) = \infty$ для каждого $\tau > 0$. Поскольку $\mu(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, то конечность числа $w(f, A; \psi_j)$ влечет соотношение $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, которое равносильно принадлежности вектора f подпространству $\mathfrak{G}_\infty(A)$.

ЛЕММА 4.1. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.2). Тогда $b(f, A; \psi_j) = w(f, A; \psi_j)$ для любого $f \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее для краткости числа $b(f, A; \psi_j)$ и $w(f, A; \psi_j)$ обозначим через b и w . Кроме того, не уменьшая общности, будем считать, что $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $E_\xi(f, A) > 0$ для всех $\xi > 0$ (т.е. соответственно $f \in \mathfrak{G}_\infty(A)$ и $\sigma_E(f, A) = \infty$). Действительно, если наименьшие отклонения $E_\xi(f, A)$ равномерно ограничены по ξ снизу некоторой положительной постоянной, то оба числа b и w равны бесконечности. Если же $E_\xi(f, A) = 0$ для достаточно больших ξ , то оба числа b и w равны нулю.

Предположим вначале, что число b конечно. Тогда, принимая во внимание определение (1.8) числа $b := b(f, A; \psi_j)$, выводим: для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\zeta_\varepsilon > 0$, для которого

$$\frac{\xi}{\gamma(E_\xi(f, A)^{-1})} \leq b + \varepsilon, \quad \xi \geq \zeta_\varepsilon.$$

Отсюда, используя то, что функция μ возрастает и является обратной к функции γ , получаем оценку

$$\mu\left(\frac{\xi}{b + \varepsilon}\right) E_\xi(f, A) \leq 1, \quad \xi \geq \zeta_\varepsilon.$$

Значит, согласно определению (4.1) числа $w := w(f, A; \psi_j)$ справедливо неравенство $w \leq b + \varepsilon$. Но поскольку в этом неравенстве ε — произвольное положительное число, то $w \leq b$.

Предположим теперь, что число w конечно. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\xi > 0} \mu\left(\frac{\xi}{w + \varepsilon}\right) E_\xi(f, A) < \infty,$$

отсюда и из предложения 2.4 выводим соотношение

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mu\left(\frac{\xi}{w + 2\varepsilon}\right) E_\xi(f, A) = 0.$$

Следовательно, найдется $\zeta_\varepsilon > 0$, для которого

$$\mu\left(\frac{\xi}{w + 2\varepsilon}\right) E_\xi(f, A) \leq 1, \quad \xi \geq \zeta_\varepsilon.$$

Из этого неравенства, используя то, что функция γ возрастает и является обратной к функции μ , выводим оценку

$$\frac{\xi}{\gamma(E_\xi(f, A)^{-1})} \leq w + 2\varepsilon, \quad \xi \geq \zeta_\varepsilon.$$

Значит, согласно определению (1.8) числа $b := b(f, A; \psi_j)$ справедливо неравенство $b \leq w + 2\varepsilon$. В этом неравенстве ε — произвольное положительное число, поэтому $b \leq w$. Учитывая теперь ранее доказанное неравенство $w \leq b$, заключаем, что коль скоро одно из чисел b или w конечно, то $b = w$. Отсюда, принимая во внимание сокращения $b := b(f, A; \psi_j)$ и $w := w(f, A; \psi_j)$, получаем утверждение леммы 4.1.

Теперь для каждого вектора $f \in X$ определим число

$$\varphi(f, A; \psi_j) := \inf_{\tau > 0} \left\{ \tau : \sup_{\xi > 0} \mu(\xi^{1/\tau})^\tau E_\xi(f, A) < \infty \right\}, \quad (4.2)$$

считая $\varphi(f, A; \psi_j) := \infty$, если $\sup_{\xi > 0} \mu(\xi^{1/\tau})^\tau E_\xi(f, A) = \infty$ для каждого $\tau > 0$. Поскольку $\mu(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, то конечность числа $\varphi(f, A; \psi_j)$ влечет принадлежность вектора f подпространству $\overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$.

Используя определения (1.25) и (4.2) чисел $\beta(f, A; \psi_j)$ и $\varphi(f, A; \psi_j)$, установим следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (1.2), и пусть выполнено одно из следующих требований:

- 1) при некотором $\lambda > 1$ для исходной последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ справедливо соотношение (1.28);
- 2) при некотором $\lambda > 1$ для регуляризованной последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ справедливо соотношение (1.29).

Тогда $\beta(f, A; \psi_j) = \varphi(f, A; \psi_j)$ для любого вектора $f \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее для краткости числа $\beta(f, A; \psi_j)$ и $\varphi(f, A; \psi_j)$ обозначим через β и φ . Кроме того, не уменьшая общности, будем считать, что $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $E_\xi(f, A) > 0$ для всех $\xi > 0$. Действительно, если эти условия не выполнены, то либо оба числа β и φ одновременно равны нулю, либо они оба одновременно равны бесконечности и, значит, справедливо утверждение леммы 4.2.

Согласно требованиям 1) и 2) леммы 4.2 и предложению 2.11 функция ℓ , заданная формулой (2.18), медленно растет на бесконечности, что, в свою очередь, означает справедливость соотношения

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln \gamma(\xi^\lambda)}{\ln \gamma(\xi)} = 1, \quad 0 < \lambda < \infty. \quad (4.3)$$

Отсюда и из определения (1.25) числа $\beta := \beta(f, A; \psi_j)$ получаем, что если β конечно, то

$$\beta = \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln \xi}{\ln \gamma(E_\xi(f, A)^{-1/(\beta+\varepsilon)})}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тем самым, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\xi_\varepsilon > 0$, для которого

$$\frac{\ln \xi}{\ln \gamma(E_\xi(f, A)^{-1/(\beta+\varepsilon)})} \leq \beta + \varepsilon, \quad \xi > \xi_\varepsilon. \quad (4.4)$$

Но поскольку $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$, а $\gamma(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, то для достаточно большого $\xi_\varepsilon \geq \xi_\varepsilon$

$$\xi^{1/(\beta+\varepsilon)} \leq \gamma(E_\xi(f, A)^{-1/(\beta+\varepsilon)}), \quad \xi \geq \xi_\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая, что функция μ не убывает и является обратной к функции γ , получаем оценку

$$\mu(\xi^{1/(\beta+\varepsilon)})^{\beta+\varepsilon} E_\xi(f, A) \leq 1, \quad \xi \geq \xi_\varepsilon.$$

Значит, согласно определению (4.2) числа $\varphi := \varphi(f, A; \psi_j)$ имеем $\varphi \leq \beta + \varepsilon$. Но в этом неравенстве ε — произвольное положительное число и поэтому $\varphi \leq \beta$.

Предположим теперь, что число $\varphi := \varphi(f, A; \psi_j)$ конечно. Тогда, принимая во внимание определение (4.2) этого числа и первое утверждение предложения 2.6, получаем, что для произвольного положительного ε справедлива оценка

$$\sup_{\xi > 0} \mu(\xi^{1/(\varphi+\varepsilon)})^{\varphi+\varepsilon} E_\xi(f, A) < \infty, \quad (4.5)$$

отсюда и из второго утверждения предложения 2.6 выводим соотношение

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \mu(\xi^{1/(\varphi+2\varepsilon)})^{\varphi+2\varepsilon} E_\xi(f, A) = 0.$$

Следовательно, найдется $\xi_\varepsilon > 0$, для которого

$$\mu(\xi^{1/(\varphi+2\varepsilon)})^{\varphi+2\varepsilon} E_\xi(f, A) \leq 1, \quad \xi \geq \xi_\varepsilon.$$

Из этого неравенства, используя то, что функция γ возрастая стремится к бесконечности и является обратной к функции μ , а также учитывая предположение $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, после несложных преобразований получаем оценку

$$\frac{\ln \xi}{\ln \gamma(E_\xi(f, A)^{-1/(\varphi+2\varepsilon)})} \leq \varphi + 2\varepsilon, \quad \xi \geq \xi_\varepsilon \quad (4.6)$$

для достаточно большого $\xi_\varepsilon \geq \xi_\varepsilon$. Из этой оценки, соотношения (4.3), определения (1.25) числа $\beta := \beta(f, A; \psi_j)$ и предположения $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ выводим, что $\beta \leq \varphi + 2\varepsilon$. А поскольку ε – произвольное положительное число, то $\beta \leq \varphi$. Отсюда, принимая во внимание ранее доказанное неравенство $\varphi \leq \beta$, заключаем, что коль скоро одно из чисел β или φ конечно, то $\beta = \varphi$. Учитывая теперь принятые сокращения $\beta := \beta(f, A; \psi_j)$ и $\varphi := \varphi(f, A; \psi_j)$, получаем утверждение леммы 4.2.

4.2. Обобщение теорем 1.1–1.3. Мы докажем следующее утверждение, содержащее теоремы 1.1–1.3.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удовлетворяют условиям леммы 3.1. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если вектор $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и число $a(f, A; \psi_j) < \eta/(c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi)$, то $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и $b(f, A; \psi_j) \leq c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi a(f, A; \psi_j)$;
- 2) если вектор $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и число $b(f, A; \psi_j) < \eta/(c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi)$, то $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и $a(f, A; \psi_j) \leq c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi b(f, A; \psi_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее для краткости числа $a(f, A; \psi_j)$ и $b(f, A; \psi_j)$, заданные соответственно формулами (1.3) и (1.8), обозначим через a и b .

Предположим вначале, что $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и $a < \eta/(c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi)$. Пусть положительное число ε удовлетворяет соотношению

$$e^{2\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi (a + \varepsilon) \leq \eta; \quad (4.7)$$

найдем натуральное число j_ε , для которого

$$\left(\frac{\|A^j f\|}{\psi_j} \right)^{1/j} \leq a + \varepsilon, \quad j \geq j_\varepsilon.$$

Значит, с некоторой положительной постоянной c_ε выполнены оценки

$$\|A^j f\| \leq c_\varepsilon (a + \varepsilon)^j \psi_j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Отметим теперь, что согласно предложению 2.4 правая часть неравенства (3.6) не уменьшится, если в ней число η заменить на любое другое положительное число, лишь бы оно было меньше или равно η . Поэтому, заменяя в (3.6) η на $e^{2\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi (a + \varepsilon)$ и используя оценки (4.8), получаем

$$E_\xi(f, A) \leq c_\varepsilon \frac{\mu(\xi/(e^\varepsilon c_\zeta c_\mu (a + \varepsilon)))}{\mu(\xi/(e^{2\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi (a + \varepsilon)))} \left(\frac{e^\varepsilon c_\zeta c_\mu (a + \varepsilon)}{\xi} \right)^j \psi_j, \\ \xi \geq \zeta_\varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом неравенстве к нижней грани по j и учитывая определение (1.5) функции μ , имеем

$$E_\xi(f, A) \leq c_\varepsilon \mu \left(\frac{\xi}{e^{2\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi (a + \varepsilon)} \right)^{-1}, \quad \xi \geq \zeta_\varepsilon, \quad (4.9)$$

т. е. согласно определению (4.1) числа $w(f, A; \psi_j)$ и лемме 4.1 справедливы соотношения

$$b := b(f, A; \psi_j) = w(f, A; \psi_j) \leq e^{2\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi (a + \varepsilon).$$

Но поскольку в них ε — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству (4.7), то $b \leq c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi a$. Кроме того, так как $\mu(\xi) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \infty$, то из (4.9) выводим: $E_\xi(f, A) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$. Следовательно, $f \in \mathfrak{G}_\infty(A)$. Тем самым установлено первое утверждение теоремы 4.1.

Пусть теперь $f \in \mathfrak{G}_\infty(A)$ и $b < \eta/(c_0 c_\zeta c_\psi)$. Из леммы 4.1 и определения (4.1) числа $w(f, A; \psi_j)$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется положительная постоянная c'_ε , для которой

$$E_\xi(f, A) \leq c'_\varepsilon \mu \left(\frac{\xi}{b + \varepsilon} \right)^{-1}, \quad \xi > 0. \quad (4.10)$$

Далее считаем, что ε подчинено еще и условию

$$e^\varepsilon c_0 c_\zeta c_\psi (b + \varepsilon) \leq \eta. \quad (4.11)$$

Введем обозначение

$$\mathfrak{T}_j := \int_1^\infty \frac{\mu(e^\varepsilon c_0 c_\zeta c_\psi \xi/\eta)}{\mu(c_\zeta \xi/\eta)} \xi^{j-1} E_\xi(f, A) d\xi \quad (4.12)$$

и оценим этот интеграл. Заметим, что интеграл $\mathfrak{T}_j$ не уменьшится, если в его определении число η заменить на положительное число, меньшее или равное η . Поэтому, заменяя η на $e^\varepsilon c_0 c_\zeta c_\psi (b + \varepsilon)$ и учитывая оценку (4.10), получаем

$$\mathfrak{T}_j \leq c'_\varepsilon \int_1^\infty \frac{\xi^{j-1}}{\mu(\xi/(e^\varepsilon c_0 c_\zeta c_\psi (b + \varepsilon)))} d\xi. \quad (4.13)$$

Поскольку $c_\psi < \infty$, то из предложения 2.1 следует, что $\mu(\xi)$ растет на бесконечности быстрее любой положительной степени ξ . Значит, интеграл, находящийся в правой части неравенства (4.13), сходится при любом $j \in \mathbb{N}$. Отсюда и из определения (4.12) интеграла $\mathfrak{T}_j$ заключаем, что условие (3.13) леммы 3.2 выполнено при любом $j \in \mathbb{N}$. Поэтому вектор $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и для него справедлива оценка (3.14) при всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\left(\frac{\|A^j f\|}{\psi_j} \right)^{1/j} \leq c_\varepsilon \left(\frac{\|f\|}{\psi_j} \right)^{1/j} + \left(\frac{6}{\varepsilon} \right)^{1/j} e^\varepsilon c_\zeta c_\mu \left(\frac{\mathfrak{T}_j}{\psi_j} \right)^{1/j},$$

откуда, учитывая определение (1.3) числа $a := a(f, A; \psi_j)$ и условие (1.2), имеем

$$a \leq e^\varepsilon c_\zeta c_\mu \limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathfrak{T}_j}{\psi_j} \right)^{1/j}. \quad (4.14)$$

Оценим теперь $\mathfrak{T}_j/\psi_j$. Принимая во внимание неравенство (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_j} \mathfrak{T}_j &\leq c'_\varepsilon (e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi (b + \varepsilon))^j \\ &\times \int_1^\infty \frac{1}{\psi_j} \left(\frac{\xi}{e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi (b + \varepsilon)} \right)^j \frac{1}{\mu(\xi/(e^\varepsilon c_0 c_\psi (b + \varepsilon)))} \frac{d\xi}{\xi}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения (1.5) функции μ выводим оценку

$$\frac{1}{\psi_j} \mathfrak{T}_j \leq c'_\varepsilon (e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi (b + \varepsilon))^j \int_1^\infty \frac{\mu(\xi/(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi (b + \varepsilon)))}{\mu(\xi/(e^\varepsilon c_0 c_\psi (b + \varepsilon)))} \frac{d\xi}{\xi}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (4.15)$$

Согласно предложению 2.2 для некоторых положительных ε_1 и c_1 (зависящих лишь от ε), последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и чисел b , c_0 и c_ψ справедливо неравенство

$$\frac{\mu(\xi/(e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi (b + \varepsilon)))}{\mu(\xi/(e^\varepsilon c_0 c_\psi (b + \varepsilon)))} \leq \frac{c_1}{\xi^{\varepsilon_1}}, \quad \xi \geq 1,$$

подставляя которое в оценку (4.15) имеем

$$\frac{\mathfrak{T}_j}{\psi_j} \leq c_1 c'_\varepsilon \varepsilon_1^{-1} (e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi (b + \varepsilon))^j, \quad j \in \mathbb{N},$$

т. е.

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathfrak{T}_j}{\psi_j} \right)^{1/j} \leq e^{2\varepsilon} c_0 c_\psi (b + \varepsilon).$$

Из этого соотношения и оценки (4.14) выводим

$$a \leq e^{3\varepsilon} c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi (b + \varepsilon).$$

Но здесь ε — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству (4.11), и поэтому $a \leq c_0 c_\zeta c_\mu c_\psi b$. Кроме того, ранее было показано, что $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$. Тем самым установлено и второе утверждение теоремы 4.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Далее постоянные c_ψ и c_ζ заданы соответственно формулами (2.5) и (3.4). В этих обозначениях выясним, как запишутся требования теоремы 4.1 (или, что то же самое, леммы 3.1) в случае выполнения условий теоремы 1.1. Согласно неравенствам $c_\psi \geq 1$ и (2.9) условие (1.15) равносильно равенству $c_\psi = 1$. Из условия (1.16) имеем $c_\zeta = 1$. Кроме того, из требований теоремы 1.1 следует, что условие (3.5) выполнено при $c_\mu = 1$, всех $\eta > 0$ и $c_0 = e^\varepsilon$, где ε – произвольное положительное число. Подставляя указанные значения постоянных η , c_0 , c_ζ , c_μ и c_ψ в утверждения 1) и 2) теоремы 4.1, заключаем, что если вектор $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и число $a(f, A; \psi_j)$ конечно, то $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и $b(f, A; \psi_j) \leq e^\varepsilon a(f, A; \psi_j)$. Если же вектор $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и число $b(f, A; \psi_j)$ конечно, то $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и $a(f, A; \psi_j) \leq e^\varepsilon b(f, A; \psi_j)$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает утверждение теоремы 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Обозначим через c'_ψ и c'_ζ левые части в неравенствах (1.19) и (1.20), и пусть постоянные c_ψ и c_ζ заданы соответственно формулами (2.5) и (3.4). Очевидно, что $c_\zeta \leq c'_\zeta$, а согласно неравенствам (2.9) $c_\psi \leq (c'_\psi)^4$. Кроме того, из требований теоремы 1.2 следует, что условие (3.5) выполнено при всех $\eta > 0$ с $c_\mu \leq e^{c_1}$. Отсюда и из теоремы 4.1 заключаем, что если вектор $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и число $a(f, A; \psi_j)$ конечно, то $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и $b(f, A; \psi_j) \leq e^{c_1} c_0 c'_\zeta (c'_\psi)^4 a(f, A; \psi_j)$. Если же вектор $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и число $b(f, A; \psi_j)$ конечно, то $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ и $a(f, A; \psi_j) \leq e^{c_1} c_0 c'_\zeta (c'_\psi)^4 b(f, A; \psi_j)$. Поэтому в утверждении теоремы 1.2 постоянную c можно считать равной $e^{c_1} c_0 c'_\zeta (c'_\psi)^4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3 полностью аналогично выводу теоремы 1.2 из теоремы 4.1. При этом следует лишь заметить, что требование (1.22) гарантирует выполнение условия (3.5) при $\eta = 1$ с постоянной $c_\mu \leq e^{c_1}$, где c_1 – значение верхней грани в (1.22).

4.3. Обобщение теоремы 1.4. В этом пункте из теоремы 1.3 выводится утверждение, из которого на основании леммы 4.2 получается теорема 1.4, а также теорема 1.5. При формулировке утверждения используются величины $\alpha(f, A; \psi_j)$ и $\varphi(f, A; \psi_j)$, заданные соответственно формулами (1.24) и (4.2).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и оператор A удовлетворяют условиям теоремы 1.4 за исключением требований 1) и 2), вместо которых предполагается выполненным соотношение (1.19). Тогда если $\sigma_E(f, A) > 0$ и хотя бы одно из чисел $\alpha(f, A; \psi_j)$ или $\varphi(f, A; \psi_j)$ меньше $\varkappa$, где число $\varkappa > 0$ из условия (1.27), то $\alpha(f, A; \psi_j) = \varphi(f, A; \psi_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее для краткости числа $\alpha(f, A; \psi_j)$ и $\varphi(f, A; \psi_j)$ обозначим через α и φ .

Рассмотрим вначале случай, когда $\alpha < \varkappa$. Тогда из определения (1.24) числа $\alpha := \alpha(f, A; \psi_j)$ следует, что вектор f принадлежит $\mathfrak{D}_\infty(A)$ и для любого положительного ε выполнено неравенство $\ln \|A^j f\| \leq (\alpha + \varepsilon) \ln \psi_j$ при всех достаточно больших j . Следовательно,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\|A^j f\|}{\psi_j^{\alpha + \varepsilon}} \right)^{1/j} \leq 1,$$

но поскольку $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j^{1/j} = \infty$, то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\|A^j f\|}{\psi_j^{\alpha+2\varepsilon}} \right)^{1/j} = 0$$

или, что то же самое, $a(f, A; \psi_j^{\alpha+2\varepsilon}) = 0$.

Теперь дополнительно предположим, что положительное ε удовлетворяет еще и условию $\alpha + 2\varepsilon < \varkappa$. Согласно замечанию 1.5 $\alpha \geq 0$ и из предложения 1.4 заключаем, что последовательность $\{\psi_j^{\alpha+2\varepsilon}\}_{j \in \mathbb{N}}$, как и последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, удовлетворяет условиям (1.2) и (1.19). Кроме того, в силу предложения 2.5 левая часть неравенства (1.27) не увеличится, если в ней число $\varkappa$ заменить на $\alpha + 2\varepsilon$. При такой замене условие (1.27) совпадает с условием (1.22), записанным для последовательности $\{\psi_j^{\alpha+2\varepsilon}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Тем самым, если выполнены условия теоремы 4.2, то выполнены и условия теоремы 1.3, если в них последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ заменить на последовательность $\{\psi_j^{\alpha+2\varepsilon}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Применяя теорему 1.3 в случае последовательности $\{\psi_j^{\alpha+2\varepsilon}\}_{j \in \mathbb{N}}$ и учитывая доказанное равенство $a(f, A; \psi_j^{\alpha+2\varepsilon}) = 0$, получаем, что $b(f, A; \psi_j^{\alpha+2\varepsilon}) = 0$, а значит, ввиду леммы 4.1 $w(f, A; \psi_j^{\alpha+2\varepsilon}) = 0$. Отсюда и из определения (4.1) числа $w(f, A; \psi_j)$ выводим соотношение

$$\sup_{\xi > 0} \mu \left(\left(\frac{\xi}{\tau} \right)^{1/(\alpha+2\varepsilon)} \right)^{\alpha+2\varepsilon} E_\xi(f, A) < \infty$$

при всех $\tau > 0$. В частности, полагая в этом соотношении $\tau = 1$ и учитывая определение (4.2) числа $\varphi := \varphi(f, A; \psi_j)$, имеем $\varphi \leq \alpha + 2\varepsilon$. Но поскольку здесь ε — произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству $\alpha + 2\varepsilon < \varkappa$, то $\varphi \leq \alpha < \varkappa$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi < \varkappa$. Согласно определению (4.2) числа $\varphi := \varphi(f, A; \psi_j)$ для каждого положительного ε выполнено неравенство

$$\sup_{\xi > 0} \mu(\xi^{1/(\varphi+\varepsilon)})^{\varphi+\varepsilon} E_\xi(f, A) < \infty.$$

Отсюда и из предложения 2.6 заключаем, что соотношение

$$\sup_{\xi > 0} \mu \left(\left(\frac{\xi}{\tau} \right)^{1/(\varphi+2\varepsilon)} \right)^{\varphi+2\varepsilon} E_\xi(f, A) < \infty$$

справедливо при всех $\tau > 0$. Значит, $b(f, A; \psi_j^{\varphi+2\varepsilon}) = 0$. Считаем далее, что положительное число ε подчинено условию $\varphi + 2\varepsilon < \varkappa$. Как уже отмечалось, если выполнены требования теоремы 4.2, то выполнены и требования теоремы 1.3 при замене в них последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ на последовательность $\{\psi_j^{\varphi+2\varepsilon}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Применяя теперь теорему 1.3 в случае последовательности $\{\psi_j^{\varphi+2\varepsilon}\}_{j \in \mathbb{N}}$ и учитывая равенство $b(f, A; \psi_j^{\varphi+2\varepsilon}) = 0$, получаем, что $a(f, A; \psi_j^{\varphi+2\varepsilon}) = 0$; отсюда и из определения (1.3) числа $a(f, A; \psi_j)$ имеем

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{\|A^j f\|}{\psi_j^{\varphi+2\varepsilon}} \right)^{1/j} = 0.$$

Следовательно, найдется постоянная c , для которой

$$\ln \|A^j f\| - (\varphi + 2\varepsilon) \ln \psi_j \leqslant cj, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Разделим левую и правую части этого неравенства на $\ln \psi_j$ (пусть j – достаточно большое натуральное число) и, учитывая условие $\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j^{1/j} = \infty$, получаем

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \|A^j f\|}{\ln \psi_j} \leqslant \varphi + 2\varepsilon.$$

Левая часть этого неравенства совпадает с $\alpha := \alpha(f, A; \psi_j)$, а в правой ε – произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $\varphi + 2\varepsilon < \varkappa$. Поэтому $\alpha \leqslant \varphi < \varkappa$. Но, как было показано, из неравенства $\alpha < \varkappa$ следует, что $\varphi \leqslant \alpha$, т.е. $\alpha = \varphi$. Отсюда, принимая во внимание сокращения $\alpha := \alpha(f, A; \psi_j)$ и $\varphi := \varphi(f, A; \psi_j)$, получаем утверждение теоремы 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4 следует из теоремы 4.2, если учесть замечание 1.3 и лемму 4.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Из второй формулы в (1.13) и определения (4.2) числа $\varphi(f, A; \psi_j)$ имеем $\varphi(f, A; \psi_j) = \varphi(f, A; \check{\psi}_j)$. Из этого равенства и из теоремы 4.2, примененной к последовательностям $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и $\{\check{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, следует утверждение теоремы 1.5.

§ 5. Случай существования ограниченной подпоследовательности у последовательности $\{\psi_j^{1/j}\}_{j \in \mathbb{N}}$

В этом параграфе установлены оценки $a(f, A; \psi_j)$ в случае, когда вместо условия (1.2) предполагается выполненным требование

$$0 < d(\psi_j) := \liminf_{j \rightarrow \infty} \psi_j^{1/j} < \infty. \quad (5.1)$$

Далее нам понадобится величина

$$d(f, A) := \liminf_{j \rightarrow \infty} \|A^j f\|^{1/j},$$

вычисленная в предположении, что $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$. Если f не принадлежит $\mathfrak{D}_\infty(A)$, то $d(f, A) := \infty$.

Из определений $a(f, A; \psi_j)$, $d(f, A)$ и $d(\psi_j)$ вытекают неравенства

$$\frac{d(f, A)}{d(\psi_j)} \leqslant a(f, A; \psi_j) \leqslant \frac{a(f, A; 1)}{d(\psi_j)}. \quad (5.2)$$

Тем самым, для получения двусторонних оценок $a(f, A; \psi_j)$ достаточно оценить сверху $a(f, A; 1)$ и снизу $d(f, A)$. Соответствующие оценки $a(f, A; 1)$ и $d(f, A)$ будут получены в терминах величины $\sigma_E(f, A)$, заданной формулой (1.26), а также

величин, в определенном смысле близких к $\sigma_E(f, A)$. А именно пусть множество $\Upsilon \in \mathbb{R}_+$ содержит сколь угодно большие числа. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\Upsilon, E}(f, A) &:= \inf\{\xi \in \Upsilon : E_\xi(f, A) = 0\}, \\ \tau_{\Upsilon, E}(f, A) &:= \sup\{\xi \in \Upsilon : E_\xi(f, A) > 0\},\end{aligned}$$

причем $\sigma_{\Upsilon, E}(f, A) := \infty$, если $\sigma_E(f, A) = \infty$, и $\tau_{\Upsilon, E}(f, A) := 0$, если $E_\xi(f, A) = 0$ при всех $\xi \in \Upsilon$.

Из определений величин $\sigma_E(f, A)$, $\sigma_{\Upsilon, E}(f, A)$ и $\tau_{\Upsilon, E}(f, A)$ вытекают соотношения $\tau_{\Upsilon, E}(f, A) \leq \sigma_E(f, A) \leq \sigma_{\Upsilon, E}(f, A)$ и

$$\tau_{\mathbb{R}_+, E}(f, A) = \sigma_{\mathbb{R}_+, E}(f, A) = \sigma_E(f, A). \quad (5.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В работе [7] величина $a(f, A; 1)$ обозначена через $\sigma_A^{(1)}(A)$ и показано, что $\sigma_A^{(1)}(f)$ определяет тип векторнозначной функции $e^{zA}f$, если $e^{zA}f$ имеет первый порядок роста. Кроме того, в [7; теорема 3.2] доказано неравенство

$$\sigma_E(f, A) \leq a(f, A; 1). \quad (5.4)$$

Отметим, что в определении $\sigma_E(f, A)$ в работе [7; формула (1.10)] допущена описка и $\sigma_E(f, A)$ в [7] следует считать заданной формулой (1.26) настоящей работы.

Основным утверждением, установленным в §5, является

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть существует такое неограниченное множество $\Upsilon \in \mathbb{R}_+$, что при каждом $\zeta \in \Upsilon$ выполнены условия*

$$\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta, \quad (5.5)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \|R(\zeta e^{i\theta}; A)\| d\theta < \infty. \quad (5.6)$$

Тогда для всех векторов $f \in X$ справедливы неравенства

$$\tau_{\Upsilon, E}(f, A) \leq d(f, A) \leq a(f, A; 1) \leq \sigma_{\Upsilon, E}(f, A).$$

Доказательство этой теоремы основано на трех леммах. Далее используется обозначение $\mathfrak{G}_{\zeta+}(A) := \bigcap_{\xi > \zeta} \mathfrak{G}_\xi(A)$, $\zeta > 0$.

ЛЕММА 5.1. *Пусть $\overline{\mathfrak{G}_\zeta(A)} \subseteq \mathfrak{G}_{\zeta+}(A)$ и $E_\zeta(f, A) = 0$ для некоторого $\zeta > 0$. Тогда $a(f, A; 1) \leq \zeta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий леммы заключаем, что $f \in \mathfrak{G}_{\zeta+}(A)$. Значит, для каждого $\xi > \zeta$ найдется такая положительная постоянная $c(\xi, f)$, что $\|A^j f\| \leq c(\xi, f)\xi^j$ при $j \in \mathbb{R}$. Тем самым $a(f, A; 1) \leq \xi$, а поскольку в этом неравенстве ξ — произвольное число, большее ζ , то $a(f, A; 1) \leq \zeta$.

Анализ примера 1.1 работы [7] показывает, что в общем случае включение $\overline{\mathfrak{G}_\zeta(A)} \subseteq \mathfrak{G}_{\zeta+}(A)$ не выполняется. Достаточное условие справедливости такого включения дает следующее утверждение.

ЛЕММА 5.2. Пусть при фиксированном положительном ζ выполнены условия (5.5) и (5.6). Тогда $\overline{\mathfrak{G}_\zeta(A)} \subseteq \mathfrak{G}_{\zeta+}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\{g_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ — какая-либо сходящаяся по норме пространства X последовательность векторов из $\mathfrak{G}_\zeta(A)$, а элемент $g_0 := 0 \in \mathfrak{G}_\zeta(A)$.

Согласно теореме Бешо–Леви (о пределе интегралов от монотонной последовательности функций) числа $c(\beta, \zeta)$, заданные формулой (3.1), стремятся к нулю при $\beta \rightarrow \infty$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\beta_\varepsilon > 0$, для которого $c(\beta_\varepsilon, \zeta) \leq \varepsilon$. Полагая теперь в утверждении (3.3) предложения 3.1 число $\beta = \beta_\varepsilon$, а вектор $g = g_l - g_s$, имеем

$$\|A^j(g_l - g_s)\| \leq \beta_\varepsilon (e^\varepsilon \zeta)^j \|g_l - g_s\|, \quad j \in \mathbb{N}, \quad l, s \in \mathbb{P}. \quad (5.7)$$

Из этого неравенства и фундаментальности в пространстве X последовательности векторов $\{g_l\}_{l \in \mathbb{P}}$ выводим фундаментальность последовательности $\{A^j g_l\}_{l \in \mathbb{P}}$ при каждом фиксированном $j \in \mathbb{N}$. Но поскольку оператор A^j замкнут, то возможен предельный переход по $l \rightarrow \infty$ в левой и правой частях неравенства (5.7). Следовательно, полагая $g_\infty := \lim_{l \rightarrow \infty} g_l$ и считая $s = 0$, из (5.7) получаем, что $g_\infty \in \mathfrak{D}(A^j)$ и $\|A^j g_\infty\| \leq \beta_\varepsilon (e^\varepsilon \zeta)^j \|g_\infty\|$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Тем самым $g_\infty \in \mathfrak{G}_{e^\varepsilon \zeta}(A)$ при каждом $\varepsilon > 0$, т.е. $g_\infty \in \mathfrak{G}_{\zeta+}(A)$. Это включение показывает справедливость леммы 5.2.

ЛЕММА 5.3. Пусть при фиксированном положительном ζ выполнены условия (5.5) и (5.6), а $E_\zeta(f, A) > 0$. Тогда $\zeta \leq d(f, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 5.2, для каждого $\varepsilon > 0$ выберем такое $\beta_\varepsilon > 0$, что постоянная $c(\beta_\varepsilon, \zeta)$, заданная формулой (3.1), меньше или равна ε . Тогда на основании утверждения (3.2) предложения 3.1 имеем

$$(e^{-\varepsilon} \zeta)^j E_\zeta(f, A) \leq \beta_\varepsilon \|A^j f\|.$$

Извлекая из этого неравенства корень j -й степени, а затем переходя к нижнему пределу по $j \rightarrow \infty$, получаем неравенство $e^{-\varepsilon} \zeta \leq d(f, A)$. Отсюда и из произвольности $\varepsilon > 0$ выводим утверждение леммы 5.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Неравенство $\tau_{\Upsilon, E}(f, A) \leq d(f, A)$ является следствием определения числа $\tau_{\Upsilon, E}(f, A)$ и леммы 5.3, а неравенство $a(f, A; 1) \leq \sigma_{\Upsilon, E}(f, A)$ вытекает из определения числа $\sigma_{\Upsilon, E}(f, A)$ и лемм 5.1 и 5.2.

Отметим одно простое следствие оценки (5.4) и леммы 5.1.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть при всех $\zeta > 0$ линейные многообразия $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ замкнуты по норме пространства X . Тогда $a(f, A; 1) = \sigma_E(f, A)$ для всех векторов $f \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку всегда $\mathfrak{G}_\zeta(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\zeta+}(A)$, то из замкнутости $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ следует, что $\overline{\mathfrak{G}_\zeta(A)} \subseteq \mathfrak{G}_{\zeta+}(A)$ при всех $\zeta > 0$. Значит, согласно лемме 5.1 для любого $\zeta > \sigma_E(f, A)$ справедливо неравенство $a(f, A; 1) \leq \zeta$, т.е. $a(f, A; 1) \leq \sigma_E(f, A)$. Обратную оценку дает неравенство (5.4).

Замкнутость линейных многообразий $\mathfrak{G}_\zeta(A)$ при всех $\zeta > 0$ гарантируется предположением о мероморфности резольвенты оператора A , означающим, что весь спектр A состоит лишь из изолированных собственных значений, которые являются полюсами резольвенты $R(\lambda; A)$ (см. [11; предложение 1.1]). Тем самым из следствия 5.1 вытекает, что если оператор A имеет мероморфную резольвенту, то $a(f, A; 1) = \sigma_E(f, A)$. Но поскольку требование мероморфности резольвенты оператора A обеспечивает выполнение условий (5.5) и (5.6) при всех $\zeta > 0$, то в этом случае в теореме 5.1 множество Υ можно считать равным $\mathbb{R}_+$. Поэтому из теоремы 5.1 и равенств (5.3) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть оператор A имеет мероморфную резольвенту. Тогда $\lim_{j \rightarrow \infty} \|A^j f\|^{1/j} = \sigma_E(f, A)$ для всех векторов $f \in X$.

Утверждение следствия 5.2 содержит основную часть утверждения теоремы 1.4 работы [7], в которой установлено равенство $a(f, A; 1) = \sigma_E(f, A)$. (По поводу принятых здесь и в работе [7] обозначений см. замечание 5.1.)

Приведем теперь три следствия из теоремы 5.1 об оценках $a(f, A; 1)$ и $d(f, A)$ через $\sigma_E(f, A)$, а не через $\sigma_{\Upsilon, E}(f, A)$ и $\tau_{\Upsilon, E}(f, A)$, как это сделано в теореме 5.1. В этих следствиях предположения о существовании последовательности окружностей $\mathcal{T}(\zeta_m)$, для которых выполнены условия (5.5) и (5.6) с $\zeta = \zeta_m$, вполне аналогичны требованиям, присутствующим в основных утверждениях нашей работы и, в частности, в теоремах 1.1–1.4.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что $\sup_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{m+1}/\zeta_m < \infty$ и при каждом ζ , равном ζ_m , выполнены условия (5.5) и (5.6). Тогда если $\sigma_E(f, A) < \zeta_1$, то $a(f, A; 1) \leq \zeta_1$; если $\sigma_E(f, A) \geq \zeta_1$, то

$$a(f, A; 1) \leq \left(\sup_{m \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m} \right) \sigma_E(f, A); \quad (5.8)$$

а если $\sigma_E(f, A) > \zeta_1$, то

$$\left(\inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{\zeta_m}{\zeta_{m+1}} \right) \sigma_E(f, A) \leq d(f, A). \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в теореме 5.1 множество Υ совпадает с множеством элементов последовательности $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Тогда в случае $\zeta_m < \sigma_E(f, A) < \zeta_{m+1}$ справедливы равенства $\sigma_{\Upsilon, E}(f, A) = \zeta_{m+1}$ и $\tau_{\Upsilon, E}(f, A) = \zeta_m$, а в случае $\sigma_E(f, A) = \zeta_m$ выполнены неравенства $\sigma_{\Upsilon, E}(f, A) \leq \zeta_{m+1}$ при $m \geq 1$ и $\tau_{\Upsilon, E}(f, A) \geq \zeta_{m-1}$ при $m \geq 2$. Отсюда и из теоремы 5.1 выводим утверждение следствия 5.3.

Из следствия 5.3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть выполнены условия следствия 5.3. Тогда конечность одного из чисел $\sigma_E(f, A)$, $a(f, A; 1)$ или $d(f, A)$ влечет конечность двух других.

Если в следствии 5.3 условие $\sup_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{m+1}/\zeta_m < \infty$ заменить требованием $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_{m+1}/\zeta_m = 1$, то справедливо такое уточнение оценок (5.8) и (5.9):

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_{m+1}/\zeta_m = 1$ и при каждом ζ , равном ζ_m , выполнены условия (5.5) и (5.6). Тогда для каждого положительного ε найдется положительное η_ε , для которого при $\sigma_E(f, A) \geq \eta_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$e^{-\varepsilon} \sigma_E(f, A) \leq d(f, A) \leq a(f, A; 1) \leq e^{\varepsilon} \sigma_E(f, A). \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем такое натуральное число m_1 , что $\zeta_{m+1}/\zeta_m \leq e^\varepsilon$ при $m \geq m_1$, и заменим в следствии 5.3 последовательность $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ на последовательность $\{\zeta_{m+m_1-1}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Тогда из оценок (5.8) и (5.9) получим справедливость неравенств (5.10) в случае выполнения условия $\sigma_E(f, A) \geq \eta_\varepsilon := \zeta_{m_1+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Принимая во внимание неравенство (5.4), заключаем, что следствия 5.3–5.5 содержат результаты [7; теоремы 1.2 и 3.2] и [11; теорема 5.3], которые установлены при более жестких требованиях, нежели предположение о выполнении условий (5.5) и (5.6) при каждом ζ , равном ζ_m . Отметим также, что построенный в работе [7] пример 1.1 показывает существование оператора A , удовлетворяющего условиям следствий 5.3–5.5, и вектора f , для которого $\sigma_E(f, A) = 0$, а предел $\lim_{j \rightarrow \infty} \|A^j f\|^{1/j}$ существует и отличен от нуля. Поэтому (ср. со следствиями 5.1 и 5.2) оценки (5.8) и (5.10) в общем случае справедливы, когда $\sigma_E(f, A) \geq \eta$ для некоторого $\eta > 0$.

Если теперь оценки $a(f, A; 1)$ и $d(f, A)$, установленные в теореме 5.1 и следствиях 5.1–5.5, подставить в правую и левую части неравенства (5.2), то получим оценки величины $a(f, A; \psi_j)$ в случае выполнения (5.1). В частности, из следствия 5.2 заключаем, что если последовательность положительных чисел $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (5.1), а оператор A имеет мероморфную резольвенту, то

$$a(f, A; \psi_j) = \frac{\sigma_E(f, A)}{d(\psi_j)}$$

для всех векторов f из X .

§ 6. О функциях от оператора

Пусть s — некоторый степенной ряд, т.е.

$$s(z) := \sum_{j=0}^{\infty} s_j z^j. \quad (6.1)$$

Далее через R_s будем обозначать радиус сходимости ряда s , который, вообще говоря, возможно, равен нулю. В (6.1) s_j – комплексные коэффициенты, а z – комплексная переменная. Элемент $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ назовем *s -голоморфным вектором оператора A* , если ряд

$$s(zA)f := \sum_{j=0}^{\infty} s_j z^j A^j f \quad (6.2)$$

сходится по норме в некоторой окрестности нуля. Если же этот ряд сходится при всех комплексных z , то элемент f назовем *s -целым вектором оператора A* . Радиус сходимости ряда (6.2) обозначим через $R_A(f; s)$ и назовем *радиусом голоморфности вектора f относительно степенного ряда s и оператора A* . Используя последовательно формулу Коши–Адамара [30; теорема 3.11.4] и определение (1.3) числа $a(f, A; \psi_j)$, имеем

$$R_A(f; s) = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} (|s_j| \|A^j f\|)^{1/j}} = \frac{1}{a(f, A; |s_j|^{-1})}. \quad (6.3)$$

Для вектора f , не принадлежащего $\mathfrak{D}_\infty(A)$, полагаем $R_A(f; s) := 0$. В силу соглашений, принятых в § 1, и в этом случае формула $R_A(f; s) = a(f, A; |s_j|^{-1})^{-1}$ остается справедливой.

Тем самым, элемент $f \in \mathfrak{D}_\infty(A)$ будет *s -голоморфным (целым) вектором оператора A* в том и только том случае, когда число $a(f, A; |s_j|^{-1})$ конечно (соответственно равно нулю).

Если s – голоморфная в окрестности нуля функция, то она представима в виде (6.1), и тогда приведенные выше определения остаются без изменений с заменой в них термина “степенной ряд” на термин “функция”. В частном случае $s(z) = e^z$ введенные здесь понятия *s -голоморфного и s -целого вектора оператора A* совпадают с хорошо известными понятиями голоморфного [31] и целого [32] вектора оператора A , и тогда, чтобы избежать недоразумений, используем соответственно термины *ехр-голоморфного* и *ехр-целого вектора оператора A* . В этом же случае число $R_A(f) := R_A(f; e^{(\cdot)})$ назовем *радиусом ехр-голоморфности вектора f относительно оператора A* .

Следующие четыре теоремы этого параграфа посвящены вычислению радиуса голоморфности вектора в ситуации, когда s – голоморфная в окрестности нуля (теорема 6.4) или целая (теоремы 6.1–6.3) функция. Однако сами понятия голоморфного и целого вектора относительно некоторого степенного ряда и оператора содержательны и в случае, когда степенной ряд имеет нулевой радиус сходимости. Поясним сказанное на следующем простом примере.

ПРИМЕР 6.1. Пусть оператор J действует в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ по правилу $(Jf)(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau$. Тогда

$$(J^j f)(t) := \frac{1}{(j-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{j-1} f(\tau) d\tau$$

при $j \in \mathbb{N}$. Для каждого $h > 0$ зададим функции f_h формулами $f_h(t) = 1$, если $0 \leq t \leq h$, и $f_h(t) = 0$, если $t > h$. Очевидно, что $\|J^j f_h\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = (j!)^{-1} h^j$.

Положим теперь коэффициенты $s_j = j!$. Тогда степенной ряд (6.1) имеет нулевой радиус сходимости, а радиус сходимости элемента f_h относительно этого степенного ряда и оператора J равен h^{-1} . Если же коэффициенты $s_j = j!(\ln(j+3))^{-j}$, то опять-таки степенной ряд (6.1) имеет нулевой радиус сходимости, однако каждый элемент f_h является s -целым вектором оператора J .

Для формулировки основных утверждений параграфа введем необходимые обозначения. Для целой функции s обозначим через $M(\xi; s)$ максимум ее модуля на окружности $\mathcal{T}(\xi)$. Поскольку $M(\xi; s)$ возрастает по ξ , то существует обратная к $M(\cdot; s)$ функция, которую обозначим через $G(\cdot; s)$. Во введенных обозначениях справедлива

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть целая функция s и оператор A удовлетворяют следующим условиям:*

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{(\ln \xi)^2}{\ln M(\xi; s)} = 0, \quad (6.4)$$

существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_{m+1}/\zeta_m = 1$, а $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, и для всех положительных ε и η выполнено соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{M(\zeta_m/\eta; s)}{M(e^\varepsilon \zeta_m/\eta; s)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta = 0. \quad (6.5)$$

Тогда для любого вектора $f \in X$ справедливо равенство

$$R_A(f; s) = \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_\xi(f, A)}; s\right), \quad (6.6)$$

причем его правая часть считается равной нулю, если вектор f не принадлежит $\mathfrak{G}_\infty(A)$.

Последняя оговорка в утверждении теоремы 6.1 нужна для исключения случая, когда правая часть формулы (6.6) может оказаться неопределенной. Действительно, если f не принадлежит $\mathfrak{G}_\infty(A)$, то $E_\xi(f, A)$ не стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. Тогда может случиться, что $E_\xi(f, A)^{-1}$ ни при каких ξ не принадлежит области определения функции $G(\cdot; s)$.

При ослаблении требований теоремы 6.1 относительно функции $M(\cdot; s)$ и оператора A удастся вместо формулы (6.6) для вычисления радиуса голоморфности вектора f относительно целой функции s и оператора A установить лишь оценки этого радиуса.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть целая функция s и оператор A удовлетворяют следующим условиям:*

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{(\ln \xi)^2}{\ln M(\xi; s)} < \infty, \quad (6.7)$$

существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что $\sup_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{m+1}/\zeta_m < \infty$, а $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, и для некоторого $c_0 > 1$ выполнено соотношение

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{M(\zeta_m/\eta; s)}{M(c_0\zeta_m/\eta; s)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta \leq c_1, \quad (6.8)$$

в котором постоянная c_1 не зависит от $\eta > 0$. Тогда найдется постоянная $c > 1$, зависящая лишь от c_0 , c_1 и $\sup_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{m+1}/\zeta_m$, а также от величины, находящейся в левой части условия (6.7), такая, что для любого вектора $f \in X$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{c} \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_\xi(f; A)}; s\right) \leq R_A(f; s) \leq c \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_\xi(f; A)}; s\right),$$

в которых нижний предел считается равным нулю в случае, когда вектор f не принадлежит $\mathfrak{G}_\infty(A)$.

Из теоремы 6.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть целая функция s и оператор A удовлетворяют условиям теоремы 6.2. Тогда для того чтобы элемент f был s -голоморфным вектором оператора A , необходимо и достаточно, чтобы

$$\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_\xi(f; A)}; s\right) > 0.$$

При более слабых, нежели в теореме 6.2, ограничениях на целую функцию s и оператор A устанавливается необходимое и достаточное условие того, что элемент f является s -целым вектором оператора A .

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть целая функция s и оператор A удовлетворяют всем требованиям теоремы 6.2 за исключением условия (6.8), вместо которого предполагаем, что для некоторого $c_0 > 1$ выполнено соотношение

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left(\frac{M(\zeta_m; s)}{M(c_0\zeta_m; s)} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\| \right) d\theta < \infty. \quad (6.9)$$

Тогда для того чтобы элемент f был s -целым вектором оператора A , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_\xi(f; A)}; s\right) = \infty.$$

При доказательстве теорем 6.1–6.3 понадобятся два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 6.1. Пусть μ и M – такие непрерывные возрастающие и положительные функции, определенные на полуоси $\mathbb{R}_+$, что для некоторых положительных постоянных c_1, c_2, d_1, d_2 и для всех достаточно больших положительных ξ справедливы оценки

$$d_1\mu(c_1\xi) \leq M(\xi) \leq d_2\mu(c_2\xi), \quad (6.10)$$

а для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\mu(\xi)}{\mu(e^\varepsilon \xi)} = 0. \quad (6.11)$$

Тогда если γ и G – функции, обратные соответственно к функциям μ и M , то для них выполнено соотношение

$$c_1 \leq \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\xi)}{G(\xi)} \leq \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\xi)}{G(\xi)} \leq c_2. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (6.11) вытекает стремление $\mu(\xi)$ к бесконечности при $\xi \rightarrow \infty$. А учитывая (6.10), получаем, что точно таким же свойством обладает и $M(\xi)$. Следовательно, функции γ и G возрастают, определены при достаточно больших значениях аргумента и стремятся к бесконечности при стремлении их аргумента к бесконечности.

Согласно условию (6.11) для каждого положительного ε справедливо неравенство $\mu(e^{-\varepsilon}c_1\xi) \leq d_1\mu(c_1\xi)$, если ξ достаточно велико. Отсюда и из первой оценки в (6.10) имеем $\mu(e^{-\varepsilon}c_1\xi) \leq M(\xi)$. Заменяя в полученном неравенстве ξ на $e^\varepsilon c_1^{-1}\gamma(\xi)$ и принимая во внимание то, что γ – обратная к μ функция и она стремится к бесконечности при стремлении аргумента к бесконечности, получаем соотношение $\xi \leq M(e^\varepsilon c_1^{-1}\gamma(\xi))$, выполненное для достаточно больших ξ . Из этого соотношения и возрастания G вытекает, что $G(\xi) \leq G(M(e^\varepsilon c_1^{-1}\gamma(\xi))) = e^\varepsilon c_1^{-1}\gamma(\xi)$. Значит,

$$e^{-\varepsilon}c_1 \leq \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\xi)}{G(\xi)}.$$

Поскольку в этой оценке ε – произвольное положительное число, то из нее следует первое неравенство в (6.12).

Полностью повторяя предыдущие рассуждения, но с использованием второй оценки в (6.10) вместо первой, получаем последнее неравенство в (6.12).

Из леммы 6.1 выводится следующее утверждение.

ЛЕММА 6.2. Пусть s – целая трансцендентная функция, а s_j – коэффициенты из ее представления (6.1). Тогда в обозначениях §§ 1, 6 справедливо соотношение

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\xi; |s_j|^{-1})}{G(\xi; s)} = 1. \quad (6.13)$$

Кроме того, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $\zeta_\varepsilon > 0$, для которой при всех $s > 1$ выполнена оценка

$$\frac{\mu(\xi; |s_j|^{-1})}{\mu(e^\varepsilon \xi; |s_j|^{-1})} \leq \frac{M(\xi; s)}{M(e^\varepsilon \xi; s)}, \quad \xi \geq \zeta_\varepsilon. \quad (6.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку s — целая трансцендентная функция, то последовательность $\{|s_j|^{-1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ содержит бесконечное число конечных членов и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |s_j|^{-1/j} = \infty.$$

Значит, к функции $\mu(\cdot) := \mu(\cdot; |s_j|^{-1})$ применимо предложение 2.4.

Для любого положительного ξ имеем

$$\mu\left(\xi; \frac{1}{|s_j|}\right)^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} |s_j|^2 \xi^{2j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |s(\xi e^{i\theta})|^2 d\theta \leq M(\xi; s)^2.$$

С другой стороны, для произвольных положительных ε и ξ

$$M(\xi; s) \leq \sum_{j=0}^{\infty} |s_j| \xi^j = |s_0| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\varepsilon j}} |s_j| (e^{\varepsilon} \xi)^j \leq |s_0| + \frac{1}{e^{\varepsilon} - 1} \mu\left(e^{\varepsilon} \xi; \frac{1}{|s_j|}\right).$$

Из полученных оценок с учетом предложения 2.4 выводим, что для каждого положительного ε найдется положительная постоянная ζ_{ε} , для которой

$$\mu(\xi; |s_j|^{-1}) \leq M(\xi; s) \leq \mu(e^{\varepsilon} \xi; |s_j|^{-1}), \quad \xi \geq \zeta_{\varepsilon}, \quad (6.15)$$

откуда непосредственно следует оценка (6.14).

Согласно неравенствам (6.15) функции $\mu(\cdot; |s_j|^{-1})$ и $M(\cdot; s)$ удовлетворяют условию (6.10) леммы 6.1, если в (6.10) считать $c_1 = d_1 = d_2 = 1$, а $c_2 = e^{\varepsilon}$. Кроме того, ввиду предложения 2.4 для функции $\mu(\cdot; |s_j|^{-1})$ выполнено требование (6.11). Применяя теперь утверждение леммы 6.1 к функциям $\gamma(\cdot; |s_j|^{-1})$ и $G(\cdot; s)$, являющимся обратными функциями к $\mu(\cdot; |s_j|^{-1})$ и $M(\cdot; s)$, и учитывая, что в (6.15) ε — произвольное число, получаем равенство (6.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6.1–6.3. Из условий (6.4) и (6.7) вытекает, что s — целая трансцендентная функция, и поэтому к ней применима лемма 6.2 и справедливы установленные при ее доказательстве неравенства (6.15).

В частности, из соотношения (6.13) и определения (1.8) числа $b(f, A; \psi_j)$ имеем

$$\frac{1}{b(f, A; \psi_j)} = \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_{\xi}(f, A)}; s\right) \quad (6.16)$$

для всех $f \in X$. В равенстве (6.16) правая часть считается равной нулю, если вектор f не принадлежит $\mathfrak{G}_{\infty}(A)$, что вполне согласуется с определением числа $b(f, A; \psi_j)$.

Полагая в равенстве (2.8) последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ равной $\{|s_j|^{-1}\}_{j \in \mathbb{N}}$, а значит, $\mu(\xi) = \mu(\xi; |s_j|^{-1})$, и учитывая неравенства (6.15), получаем равносильность условий (1.15) и (1.19) соответственно требованиям (6.4) и (6.7). Но ввиду неравенства (6.14) выполнение требования (6.5), (6.8) или (6.9) влечет за собой выполнение условия (1.17), (1.21) или (1.22). Тем самым показано, что если последовательность $\{|s_j|^{-1}\}_{j \in \mathbb{N}}$ (или, что то же самое, функция s) и оператор A удовлетворяют условиям теоремы 6.1, 6.2 или 6.3, то они удовлетворяют соответственно условиям теоремы 1.1, 1.2 или 1.3. Но согласно равенствам (6.3) и (6.16) утверждения этих теорем равносильны. Тем самым, теоремы 6.1–6.3 вытекают соответственно из теорем 1.1–1.3. (Из приведенных выше рассуждений также видно, что из теорем 6.1–6.3 следуют соответственно теоремы 1.1–1.3.)

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Как видно из доказательства теорем 6.1–6.3, присутствующие в них требования (6.5), (6.8) и (6.9) нужны для того, чтобы выполнялись соответственно условия (1.17), (1.21) и (1.22). Поэтому согласно замечаниям 1.1 и 1.2 если в теореме 6.1 требование (6.5) заменить условием (1.18), а в теоремах 6.2 и 6.3 требования (6.8) и (6.9) – условием (1.23), то утверждения этих теорем останутся справедливыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Лемма 6.1 сформулирована здесь в несколько большей общности, нежели это требуется при выводе теорем 6.1–6.3, для того, чтобы показать, на какую функцию M можно заменить функцию μ в условиях теорем 1.1–1.3, не меняя при этом существенно их утверждений. Такая замена бывает необходима при применении не только теорем 1.1–1.3, но и теорем 6.1–6.3, поскольку точное вычисление функций $\mu(\cdot; \psi_j)$ и $M(\cdot; s)$ подчас не только затруднительно, но даже и нерационально из-за сложного их вида. Возможность замены точных значений функций $\mu(\cdot; \psi_j)$ и $M(\cdot; s)$ на их приближенные будет еще не раз использована в следующем параграфе.

И наконец, приведем одно следствие из результатов, установленных в § 5.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть оператор A имеет мероморфную резольвенту, а степенной ряд (6.1) имеет радиус сходимости R_s . Тогда если оба числа $\sigma_E(f, A)$ и R_s одновременно не равны нулю либо не равны бесконечности, то

$$R_A(f; s) = \frac{R_s}{\sigma_E(f, A)}.$$

Доказательство вытекает из первого равенства в (6.3) и следствия 5.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Если A имеет мероморфную резольвенту и $\sigma_E(f, A) = 0$, то $R_A(f; s) = \infty$ для любого степенного ряда s . Действительно, согласно определению (1.26) числа $\sigma_E(f, A)$ и описанию $\mathfrak{G}_\xi(A)$, данному в предложении 1.1 работы [11], равенство $\sigma_E(f, A) = 0$ возможно лишь в случаях, когда либо $f = 0$, либо f является корневым вектором оператора A , отвечающим нулевому собственному значению. Если $f = 0$ или f – собственный вектор, то $s(zA)f = s_0f$. Если же f – k -й присоединенный вектор, входящий в цепочку собственного и присоединенных к нему векторов $y_0, \dots, y_k$, отвечающую нулевому собственному значению (т.е. $f = y_k$), то $s(zA)f = \sum_{j=0}^k z^j s_j y_{k-j}$. Отсюда опять вытекает равенство $R_A(f; s) = \infty$.

Если оператор A имеет мероморфную резольвенту и $\sigma_E(f, A) = R_s = \infty$, то радиус голоморфности $R_A(f; s)$ может совпадать с любым неотрицательным числом или бесконечностью. Покажем это на следующем примере.

ПРИМЕР 6.2. Пусть X – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, A – самосопряженный положительный оператор с дискретным спектром, т.е. $A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\cdot, e_j)e_j$, где $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ – ортонормированный базис пространства X , числа $\lambda_j > 0$ и $\lambda_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Резольвента этого оператора мероморфна. Предположим еще, что $\lambda_j < \lambda_{j+1}$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Для $R \in [0, \infty]$ выберем последовательность положительных чисел $\{\mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ такую, что $\mu_j \rightarrow R$

при $j \rightarrow \infty$ и последовательность $\{\lambda_j \mu_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ возрастающая стремится к бесконечности. (Если R конечно и отлично от нуля, то все μ_j можно взять равными R .) Считая s целой функцией, зададим числа $\alpha_j := M(\lambda_j \mu_j; s)^{-1}$. Поскольку последовательность $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ убывая стремится к нулю, то корректно определен вектор $f = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^2 - \alpha_{j+1}^2)^{1/2} e_j$. Но для введенного оператора A множество $\mathfrak{G}_\xi(A)$ совпадает с линейной оболочкой векторов e_j , для которых $\lambda_j \leq \xi$. Поэтому $E_\xi(f, A) = \alpha_{j+1}$ при $\lambda_j \leq \xi < \lambda_{j+1}$. Тем самым $\sigma_E(f, A) = \infty$, а учитывая определение чисел α_j , имеем

$$\frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_\xi(f, A)}; s\right) = \frac{\lambda_{j+1} \mu_{j+1}}{\xi}, \quad \lambda_j \leq \xi < \lambda_{j+1},$$

откуда, принимая во внимание соотношение $\mu_j \rightarrow R$ при $j \rightarrow \infty$, приходим к равенству

$$\liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} G\left(\frac{1}{E_\xi(f, A)}; s\right) = R. \quad (6.17)$$

Так как $\|R(\lambda; A)\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$ для самосопряженного оператора A , то условие (1.18) выполнено при каждом $\tau > -1$ и для любой последовательности положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящейся к бесконечности. Если теперь целая функция s удовлетворяет условию (6.4), то согласно замечанию 6.1 функция s и оператор A удовлетворяют требованиям теоремы 6.1. На основании этой теоремы из равенства (6.17) следует, что $R_A(f; s) = R$. Тем самым, построены оператор A , имеющий мероморфную резольвенту, и целая функция s , для которых при любом $R \in [0, \infty]$ найдется такой вектор f с $\sigma_E(f, A) = \infty$, что $R_A(f; s) = R$.

§ 7. Комментарии

В этом параграфе поясним название работы, а также покажем связь полученных в ней результатов с ранее имевшимися.

Введем обозначения

$$\mathcal{H}_\infty(A; \psi_j) := \{f \in \mathfrak{D}_\infty(A) : a(f, A; \psi_j) < \infty\}, \quad (7.1)$$

$$\mathcal{H}_0(A; \psi_j) := \{f \in \mathfrak{D}_\infty(A) : a(f, A; \psi_j) = 0\}. \quad (7.2)$$

Из определения (1.3) числа $a(f, A; \psi_j)$ следует, что $\mathcal{H}_\infty(A; \psi_j)$ и $\mathcal{H}_0(A; \psi_j)$ — линейные многообразия банахова пространства X . Множество $\mathcal{H}_\infty(A; \psi_j)$ назовем *векторным классом Адамара, заданным по оператору A и последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$* . Поясним естественность данного определения. Для этого в пространстве BC , состоящем из непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой $\|f\|_{BC} := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, рассмотрим оператор дифференцирования D , действующий по правилу

$$Dx = -ix', \quad x \in \mathfrak{D}(D) := \{x \in BC : x' \in BC\}. \quad (7.3)$$

Тогда принадлежность функции f классу $\mathcal{H}_\infty(D; \psi_j)$ равносильна бесконечной дифференцируемости f и выполнению оценок

$$|f^{(j)}(t)| \leq ca^j \psi_j, \quad j \in \mathbb{P}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7.4)$$

с некоторыми положительными постоянными a и c .

Класс функций f , удовлетворяющих условию (7.4), введен Ж. Адамаром в работе [1], где была поставлена проблема о квазианалитичности этого класса (см. также монографии С. Мандельброята [4; гл. I, §1] и [5; гл. IV, §1 и гл. V, §1]). Отметим еще, что векторные классы $\mathcal{H}_\infty(A; \psi_j)$ и $\mathcal{H}_0(A; \psi_j)$ (правда в иных обозначениях) рассматривались ранее в монографии [33; гл. 2, §2, п. 3], в которой показана их роль при исследовании задачи Коши для уравнения $y' - Ay = 0$ в случае самосопряженного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве.

Для оператора дифференцирования D и последовательности $\{\Gamma(j/\nu + 1)\}_{j \in \mathbb{N}}$ (здесь $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, а число $\nu > 0$) результаты о совпадении чисел $a(f, D; \Gamma(j/\nu + 1))$ и $b(f, D; \Gamma(j/\nu + 1))$ впервые установили Ш. Валле Пуссен [2] и С.Н. Бернштейн [3]. Чтобы сформулировать здесь один из наиболее общих результатов, полученных в этом направлении С.Н. Бернштейном, введем необходимые обозначения. Для каждого положительного ξ определим множество $\mathfrak{G}_\xi$, состоящее из целых функций g , удовлетворяющих условию $|g(z)| \leq c(g) \exp(\xi|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, сужение которых на $\mathbb{R}$ принадлежит BC . Зададим наименьшие уклонения $\mathcal{A}_\xi(f) := \inf_{g \in \mathfrak{G}_\xi} \|f - g\|_{BC}$, $\xi > 0$, $f \in BC$. В этих обозначениях с учетом определений (1.3) и (7.3) числа $a(f, A; \psi_j)$ и оператора D теорема 3 из [3; работа 89] допускает следующую равносильную формулировку.

ТЕОРЕМА БЕРНШТЕЙНА. *Для любой функции f , принадлежащей BC , и произвольного положительного числа ν справедливо равенство*

$$a\left(f, D; \Gamma\left(\frac{j}{\nu} + 1\right)\right) = \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{(-\ln \mathcal{A}_\xi(f))^{1/\nu}}, \quad (7.5)$$

причем правая часть его равна бесконечности, если $\mathcal{A}_\xi(f)$ не стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$ ².

В замечании к этой теореме С.Н. Бернштейн отмечает, что она “является соответствующим видоизменением и обобщением одной теоремы Валле Пуссена [2; с. 150], относящейся к периодическим функциям”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БЕРНШТЕЙНА. Элементарно показывается (см. вывод обобщенного неравенства Ахиезера и замечание 1 в [17]), что резольвента оператора D , определенного соотношениями (7.3), допускает оценку

$$\|R(\lambda; D)\|_{[BC]} \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0, \quad (7.6)$$

а $\mathfrak{G}_\xi(D) = \mathfrak{G}_\xi$ при всех $\xi > 0$. Значит,

$$\mathcal{A}_\xi(f) = E_\xi(f, D), \quad \xi > 0, \quad f \in BC. \quad (7.7)$$

Рассмотрим теперь функцию Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\nu$, заданную равенством

$$\mathcal{E}_\nu(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(j/\nu + 1)}. \quad (7.8)$$

²По поводу этого предположения см. замечание 7.1, приведенное после доказательства сформулированной теоремы.

Тогда формулу (7.5) можно трактовать как формулу для вычисления радиуса голоморфности $R_D(f; \mathcal{E}_\nu)$ в терминах наименьших уклонений $\mathcal{A}_\xi(f)$, поскольку согласно равенствам (6.3) ее левая часть совпадает с $R_D(f; \mathcal{E}_\nu)^{-1}$. Принимая теперь во внимание (7.7), запишем формулу (7.5) в следующем равносильном виде:

$$R_D(f; \mathcal{E}_\nu) = \liminf_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \left(\ln \frac{1}{E_\xi(f, D)} \right)^{1/\nu}, \quad (7.9)$$

где нижний предел считается равным бесконечности, если функция f не принадлежит $\overline{\mathfrak{G}_\infty(D)}$.

Для функции Миттаг-Леффлера хорошо известны (см., например, [15; § 1.5, пример 4] или [34; гл. II, формула (5.44)]) такие соотношения:

$$M(\xi; \mathcal{E}_\nu) = \mathcal{E}_\nu(\xi) = (1 + o(1))\nu e^{\xi^\nu}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (7.10)$$

и из леммы 6.1 имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{G(\xi; \mathcal{E}_\nu)}{(\ln \xi)^{1/\nu}} = 1. \quad (7.11)$$

Тем самым, равенство (7.9) совпадает с равенством (6.6), если в (6.6) положить функцию s равной $\mathcal{E}_\nu$, а оператор A равным D .

Кроме того, из соотношений (7.10) следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $c_{\varepsilon, \nu} > 0$ такая, что

$$\frac{M(\xi; \mathcal{E}_\nu)}{M(e^\varepsilon \xi; \mathcal{E}_\nu)} \leq c_{\varepsilon, \nu} e^{-\varepsilon \nu \xi^\nu}, \quad \xi \geq 0. \quad (7.12)$$

Это неравенство и оценка (7.6) показывают справедливость требования (6.5) для функции s равной $\mathcal{E}_\nu$ и оператора A равного D , если в требовании (6.5) считать $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ произвольной последовательностью положительных чисел, стремящейся к бесконечности. Соотношения (7.10) гарантируют для $s = \mathcal{E}_\nu$ выполнение требования (6.4). Тем самым, для функции $s = \mathcal{E}_\nu$ и оператора $A = D$ справедливы все требования теоремы 6.1, а еще ранее было установлено, что в этом же случае утверждение теоремы Бернштейна совпадает с утверждением теоремы 6.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Из прямых и обратных теорем о приближении посредством функций конечной степени $\mathfrak{G}_\xi$ (см. [10; пп. 5.1.3 и 6.1.6]) несложно заключить, что $\mathcal{A}_\xi(f)$ стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$ в том и только том случае, когда f — ограниченная и равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Поэтому замыкание по норме пространства BC множества $\mathfrak{G}_\infty(D)$ совпадает с совокупностью всех ограниченных и равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций.

Распространению сформулированной здесь теоремы Бернштейна на случай операторов, действующих в банаховом пространстве, посвящена работа [7]. Приведем один из ее основных результатов — теорему 3.1, которую также выведем из теоремы 6.1.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_{m+1}/\zeta_m = 1$ и $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, а при некотором фиксированном $\nu > 0$ и каждом $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+(e^{-\varepsilon\zeta_m^\nu} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|) d\theta = 0. \quad (7.13)$$

Тогда для любого вектора $f \in X$ справедливо равенство

$$(e\nu)^{1/\nu} a(f, A; j^{j/\nu}) = \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{(-\ln E_\xi(f, A))^{1/\nu}},$$

в котором правая часть считается равной бесконечности, если вектор f не принадлежит $\overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле Стирлинга для гамма-функции (см., например, [15; §1.2, пример 1]) справедливо соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} j^{-1/\nu} \Gamma\left(\frac{j}{\nu} + 1\right)^{1/j} = (e\nu)^{-1/\nu},$$

и из определения (1.3) числа $a(f, A; \psi_j)$ имеем

$$a\left(f, A; \Gamma\left(\frac{j}{\nu} + 1\right)\right) = (e\nu)^{1/\nu} a(f, A; j^{j/\nu}). \quad (7.14)$$

Принимая во внимание это равенство, формулу (6.3) для вычисления радиуса голоморфности $R_A(f; s)$, определение (7.8) функции Миттаг-Леффлера $\mathcal{E}_\nu$ и соотношение (7.11), заключаем, что утверждение теоремы 6.1 в случае функции s равной $\mathcal{E}_\nu$ совпадает с утверждением следствия 7.1. Но выполнение требований этой теоремы вытекает из соотношений (7.10), (7.12) и условий следствия 7.1. В частности, выполнение требования (6.5) гарантируют оценка (7.12) и условие (7.13).

Точно так же, как из теоремы 6.1 выводится следствие 7.1, из теорем 6.2 и 6.3 выводятся такие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $\{\zeta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности, что $\sup_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{m+1}/\zeta_m < \infty$ и $\text{mes}\{\mathcal{T}(\zeta_m) \cap \text{reg } A\} = 2\pi\zeta_m$, $m \in \mathbb{N}$, а при некотором фиксированном $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \ln^+(e^{-\varepsilon\zeta_m^\nu} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|) d\theta \leq c_1 \quad (7.15)$$

с постоянной c_1 , не зависящей от $\varepsilon > 0$. Тогда найдется постоянная $c > 1$, зависящая лишь от ν , c_1 и от $\sup_{m \in \mathbb{N}} \zeta_{m+1}/\zeta_m$, такая, что для любого вектора $f \in X$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{c} a(f, A; j^{j/\nu}) \leq \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi}{(-\ln E_\xi(f, A))^{1/\nu}} \leq c a(f, A; j^{j/\nu}), \quad (7.16)$$

в которых верхний предел считается равным бесконечности, если вектор f не принадлежит $\overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть оператор A удовлетворяет всем требованиям следствия 7.2 за исключением условия (7.15), вместо которого предполагается, что для $\nu > 0$ и некоторого $c_0 > 0$ выполнено соотношение

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \int_0^{2\pi} \ln^+(e^{-c_0 \zeta_m^\nu} \|R(\zeta_m e^{i\theta}; A)\|) d\theta < \infty. \quad (7.17)$$

Тогда для того чтобы $a(f, A; j^{j/\nu}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\xi \rightarrow \infty} E_\xi(f, A)^{1/\xi^\nu} = 0$.

При выводе следствия 7.3 из теоремы 6.3 надо лишь ε в оценке (7.12) считать достаточно большим положительным числом.

Следствия 7.2 и 7.3 дают простые условия того, что элемент f является ехр-голоморфным или ехр-целым вектором оператора A (соответствующие определения приведены в §6). Поскольку $\Gamma(j+1) = j!$ при $j \in \mathbb{N}$ и справедливы равенства (7.14), то радиус ехр-голоморфности $R_A(f)$ вектора f относительно оператора A вычисляется по формуле $R_A(f) = e^{-1} a(f, A; j^j)^{-1}$. Поэтому элемент f будет ехр-голоморфным или ехр-целым вектором оператора A в том и только том случае, когда соответственно число $a(f, A; j^j)$ будет конечным или равным нулю. Отсюда и из следствий 7.2 и 7.3 при $\nu = 1$ непосредственно получаются такие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 7.4. Пусть выполнены условия следствия 7.2 при $\nu = 1$. Тогда для того чтобы элемент f был ехр-голоморфным вектором оператора A , необходимо и достаточно, чтобы

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} E_\xi(f, A)^{1/\xi} < 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 7.5. Пусть выполнены условия следствия 7.3 при $\nu = 1$. Тогда для того чтобы элемент f был ехр-целым вектором оператора A , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} E_\xi(f, A)^{1/\xi} = 0.$$

Следствия 7.2–7.5 обобщают теоремы 5.5 и 5.2 работы [11], в которой они установлены при более ограничительном, нежели условия (7.15) и (7.17), требовании (1.23). Кроме того, утверждение теоремы 5.5 из [11] слабее утверждения (7.16) следствия 7.2, поскольку в теореме 5.5 из [11] делается заключение лишь о том, что конечность или равенство нулю числа $a(f, A; j^{j/\nu})$ равносильны соответственно конечности или равенству нулю верхнего предела в (7.16).

Приведем еще одно следствие, вытекающее из теоремы 1.4 и содержащее те утверждения теоремы 1.3 работы [7] и теоремы 5.4 работы [11], которые относятся к вычислению порядка роста $\rho_A(f)$ функции $e^{zA}f$ в предположении, что f – ехр-целый вектор оператора A . Поскольку понятие порядка роста целой векторнозначной функции получается видоизменением соответствующего классического понятия (см., например, [35; гл. 7, п. 1.1]) с заменой в нем модуля числа на норму вектора [30; п. 3.14], то, принимая во внимание формулу (1.1:8) из [35; гл. 7] и

определение (1.24) числа $\alpha(f, A; \psi_j)$, заключаем, что порядок роста $\rho_A(f)$ целой функции $e^{zA}f$ находится по формуле

$$\rho_A(f) = (1 - \alpha(f, A; j!))^{-1}. \quad (7.18)$$

В следующем утверждении порядок роста целой функции $e^{zA}f$ будет вычислен в терминах наименьших уклонений $E_\xi(f, A)$, а именно через число

$$\beta_A(f) := \limsup_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\ln \xi}{\ln(-\ln E_\xi(f, A))}, \quad (7.19)$$

определенное в предположении, что $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$.

СЛЕДСТВИЕ 7.6. Пусть оператор A удовлетворяет условиям следствия 7.3 при некотором $\nu \geq 1$, а f — такой вектор, что $\sigma_E(f, A) > 0$. Тогда для того чтобы f был ехр-целым вектором оператора A и вектор-функция $e^{zA}f$ имела конечный порядок роста $\rho_A(f) < \nu(\nu-1)^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и $\beta_A(f) < \nu^{-1}$. Если $f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}$ и $\beta_A(f) < \nu^{-1}$, то

$$\rho_A(f) = (1 - \beta_A(f))^{-1}. \quad (7.20)$$

Если же предположить, что оператор A удовлетворяет условиям следствия 7.3 при $\nu = 1$, а f — ехр-целый вектор оператора A , для которого $\sigma_E(f, A) > 0$, то, каков бы ни был порядок роста функции $e^{zA}f$, он вычисляется по формуле (7.20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в лемме 6.2 $s(z) = e^z$, а следовательно, $s_j = (j!)^{-1}$, $M(\xi; s) = e^\xi$ и $G(\xi; s) = \ln \xi$, где $\xi \geq 1$, заключаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\zeta_\varepsilon > 0$, для которого при всех $c > 1$

$$\frac{\mu(\xi^{1/\varkappa}; j!)^\varkappa}{\mu(c e^\varepsilon \xi^{1/\varkappa}; j!)^\varkappa} \leq e^{-(c-1)\varkappa \xi^{1/\varkappa}}, \quad \xi \geq \zeta_\varepsilon, \quad (7.21)$$

и

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\gamma(\xi; j!)}{\ln \xi} = 1.$$

Из последнего равенства и определений (1.25) и (7.19) чисел $\beta(f, A; \psi_j)$ и $\beta_A(f)$ имеем

$$\beta(f, A; j!) = \beta_A(f), \quad f \in \overline{\mathfrak{G}_\infty(A)}. \quad (7.22)$$

Установим, что для любого ехр-целого вектора f , удовлетворяющего условию $\sigma_E(f, A) > 0$, справедливо соотношение $0 \leq \alpha(f, A; j!) \leq 1$. Действительно, неравенство $\alpha(f, A; j!) \geq 0$ вытекает из условия $\sigma_E(f, A) > 0$ и замечания 1.5. Неравенство $\alpha(f, A; j!) \leq 1$ выводится из предположения об ехр-голоморфности вектора f . Покажем это. Если бы выполнялось неравенство $\alpha(f, A; j!) > 1$, то согласно определению (1.24) числа $\alpha(f, A; \psi_j)$ нашлись бы такие $\alpha > 1$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что $\|A^{j_k} f\| \geq (j_k!)^\alpha$ при всех

$k \in \mathbb{N}$. Но тогда $\limsup_{j \rightarrow \infty} (\|A^j f\|/j!)^{1/j} = \infty$. Следовательно, f не является эксп-голоморфным вектором оператора A .

Аналогично показывается, что если $\alpha(f, A; j!) < 1$, то f — эксп-целый вектор оператора A .

И наконец, положим в теореме 1.4 последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ равной последовательности $\{j!\}_{j \in \mathbb{N}}$. Для нее справедливы условия (1.2) и (1.28). А ввиду условия (7.17) и оценки (7.21) (в которой s считаем достаточно большим положительным числом) для оператора A выполнено требование (1.27) с $\varkappa = \nu^{-1}$.

Учитывая сделанные замечания и сопоставляя формулы (7.18) и (7.22), из теоремы 1.4 получаем первую часть следствия 7.6. Вторая часть этого следствия легко выводится из первой и из предположения о несправедливости равенства (7.20). При этом надо лишь заметить, что согласно следствию 7.5 $\beta_A(f) \leq 1$ для любого эксп-целого вектора f оператора A .

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Как видно из доказательства следствия 7.6, при выполнении условия $\sigma_E(f, A) > 0$ порядок роста целой векторнозначной функции $e^{zA}f$ всегда больше или равен 1. Пример 1.1 работы [7] показывает, что если $\sigma_E(f, A) = 0$ и выполнены все другие условия следствия 7.6, то порядок роста целой функции $e^{zA}f$ может быть любым числом, принадлежащим отрезку $[0, 1]$. Тем самым, требование $\sigma_E(f, A) > 0$ существенно для справедливости формулы (7.20). Смысл первой части следствия 7.6 заключается в том, что если из каких-либо априорных соображений известно, что порядок роста $\rho_A(f)$ (≥ 1) мало отличается от единицы, то для его вычисления по формуле (7.20) ν в условии (7.17) можно считать достаточно большим, а именно $\nu \leq \rho_A(f)(\rho_A(f) - 1)^{-1}$ (а как легко видеть, чем больше ν , тем условие (7.17) слабее). Если же $\nu = 1$, то во второй части следствия 7.6 утверждается справедливость формулы (7.20) при любом возможном порядке роста целой функции $e^{zA}f$.

Следствие 7.6 содержит аналогичные утверждения из [7; теорема 1.3] и [11; теорема 5.4], где они доказаны соответственно в предположении о выполнении условий следствия 7.1 или требования (1.23).

С учетом замечания 1.2, леммы 4.1 и определений (7.1), (7.2) классов $\mathcal{H}_\infty(A; \psi_j)$, $\mathcal{H}_0(A; \psi_j)$ из теоремы 1.2 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 7.7. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.19), A — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве X . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) для того чтобы вектор f принадлежал классу $\mathcal{H}_\infty(A; \psi_j)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные постоянные a и c , для которых $E_\xi(f, A) \leq c\mu(a\xi)^{-1}$ при $\xi > 0$;
- 2) для того чтобы вектор f принадлежал классу $\mathcal{H}_0(A; \psi_j)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $a > 0$ существовала постоянная $c := c(a)$, для которой $E_\xi(f, A) \leq c\mu(a\xi)^{-1}$ при $\xi > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Пусть последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (5.1), A — по-прежнему самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве X . Для самосопряженного оператора A условия теоремы 5.1

выполнены с множеством $\Upsilon = \mathbb{R}_+$. Отсюда и из соотношений (5.2) и (5.3) получаем равенство $a(f, A; \psi_j) = \sigma_E(f, A)/d(\psi_j)$ с постоянной $d(\psi_j)$ из условия (5.1). Значит, в рассмотренном здесь случае вектор f принадлежит классу $\mathcal{H}_\infty(A; \psi_j)$ или $\mathcal{H}_0(A; \psi_j)$ тогда и только тогда, когда соответственно $\sigma_E(f, A) < \infty$ или $\sigma_E(f, A) = 0$. Эти утверждения равносильны утверждениям из следствия 7.7, поскольку $\mu(\xi)$ конечна, если $0 \leq \xi < d(\psi_j)$, и $\mu(\xi) = \infty$, если $\xi > d(\psi_j)$.

Следствие 7.7 с учетом замечания 7.3 содержит утверждение, установленное в первых частях доказательств теоремы 5 из [12] и теоремы 1 из [13], так как в следствии 7.7 и замечании 7.3 последовательность $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ подчинена менее жестким требованиям, нежели в [12] и [13]. Если же воспользоваться следствием 7.7, повторить заключительные части доказательств теоремы 5 из [12] и теоремы 1 из [13] с заменой в них последовательности $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ на последовательность $\{\tilde{\psi}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ и учесть при этом утверждение (2.9) из предложения 2.1, то получатся усиления упомянутых теорем из [12] и [13].

Список литературы

1. *Hadamard J.* Sur la généralisation de la notion de fonction analytique // Bull. Soc. Math., Comptes Rendus des Séances. 1912. V. 40. P. 28.
2. *Vallée Poussin Ch.-J.* Leçons sur l'approximation des fonctions continues. Paris, 1918.
3. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1954.
4. *Мандельброт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применение. М.: ИЛ, 1955.
5. *Мандельброт С.* Квазианалитические классы функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1937.
6. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1956.
7. *Радзиевский Г. В.* Об одном обобщении формулы Бернштейна для определения ширины полосы голоморфности функции // Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 2. С. 43–57.
8. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
9. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 3. С. 219–242.
10. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
11. *Радзиевский Г. В.* Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 4. С. 83–124.
12. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкнутого оператора цілими векторами експоненціального типу // Укр. матем. журн. 1995. Т. 47. № 5. С. 616–628.
13. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Операторный подход к задачам аппроксимации // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9. № 6. С. 90–108.
14. *Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В.* Целые и мероморфные функции // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 85. М.: ВИНТИ, 1991. С. 5–185.
15. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
16. *Фридман Г. А.* Медленно возрастающие функции и их приложение // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. № 5. С. 1139–1160.
17. *Радзиевский Г. В.* О наилучших приближениях и о скорости сходимости разложений по корневым векторам оператора // Укр. матем. журн. 1997. Т. 49. № 6. С. 754–773.
18. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23. № 4. С. 117–178.

19. Butzer P. L., Scherer K. Jackson and Bernstein-type inequalities for families of commutative operators in Banach spaces // J. Approx. Theory. 1972. V. 5. № 3. P. 308–342.
20. Горин Е. А. Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов // Вестн. Харьк. ун-та. Прикл. матем., мех. 1980. Т. 205. № 45. С. 77–105.
21. Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 384–396.
22. Radzievskii G. The rate of convergence of decompositions of ordinary functional-differential operators by eigenfunctions // Some problems of the modern theory of differential equations. Kiev, 1994. P. 14–27. (Preprint, Nat. Acad. Sci. Ukr. Inst. Math. 94.29.)
23. Радзиевский Г. В. Краевые задачи и связанные с ними модули непрерывности // Функц. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 3. С. 87–90.
24. Радзиевский Г. В. Неравенства Джексона и Бернштейна для системы корневых функций оператора дифференцирования с нелокальным краевым условием // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 1. С. 20–23.
25. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
26. Galamlos J., Seneta E. Regularly varying sequences // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 41. № 1. P. 110–116.
27. Bojanić R., Seneta E. A unified theory of regularly varying sequences // Math. Z. 1973. V. 134. P. 91–106.
28. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung // Inauguraldissertation und Preisschrift. Univ. Göttingen, 1911.
29. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
30. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
31. Nelson E. Analytic vector // Ann. of Math. (2). 1959. V. 70. № 3. P. 572–615.
32. Goodman R. Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 143. P. 55–76.
33. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1984.
34. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М.: Наука, 1970.
35. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968.

Институт математики НАН Украины,
Киев, Украина
E-mail: radz@imath.kiev.ua

Поступила в редакцию
06.02.2001