Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Тыртышников, Некоторые применения матричного признака равномерности, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 12, 145–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm618>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 10:24:56

УДК 512.64+517.5

Е. Е. Тыртышников

Некоторые применения матричного признака равномерности

Даны формулировки и простые доказательства теорем типа Сегё о распределении собственных и сингулярных чисел для матриц, полученных с помощью фиксированной конечной цепочки операций сложения, умножения и обращения из заданного конечного набора тёплицевых матриц с производящими функциями из L_1 .

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе нас интересует следующий общий вопрос. Рассмотрим тёплицевы матрицы $A_n(f_1), \dots, A_n(f_m)$ порядка n , порожденные функциями $f_1, \dots, f_m$, и образуем новые матрицы A_n с помощью фиксированной цепочки операций сложения, умножения и обращения, примененных к заданным матрицам и результатам предыдущих операций. Что можно сказать о распределении сингулярных чисел (собственных значений) матриц A_n ?

Этот вопрос изучался нами ранее в работе [1] в случае, когда A_n есть произведение заданных или обратных к ним матриц и при этом все производящие функции принадлежат L_∞ . В качестве основного инструмента исследования использовались предложенный автором в [2], [3] матричный признак равномерности и связь тёплицевых матриц с циркулянтными матрицами. В то время было не очень ясно, как переходить к рассмотрению производящих функций из L_1 , поскольку прежняя связь с циркулянтными матрицами в этом случае казалась утраченной. В работе [4] удалось найти новую форму связи тёплицевых и циркулянтных матриц в случае L_1 при использовании фробениусовой матричной нормы (корень квадратный из суммы модулей элементов в квадрате).

Фробениусова норма привлекает простотой выражения через элементы матрицы. Заметим, однако, что матричный признак равномерности в изначальной форме [2] можно с легкостью применять и для других матричных норм, например для унитарно инвариантной 1-нормы Шаттена (сумма сингулярных чисел; см. [5]). Для данной нормы связь тёплицевых и циркулянтных матриц в случае L_1 не требует привлечения малоранговых матриц. Более того, в ряде случаев данная норма позволяет находить обобщения теоремы Сегё вообще без привлечения циркулянтных матриц (при внимательном чтении можно обнаружить применение

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00017).

этой нормы и в книге [6]). Безусловно, циркулянтные матрицы упрощают получение асимптотических распределений в простых случаях (для гладких производящих функций) и, вероятно, могут усложнять рассуждение в более сложных случаях (для производящих функций из L_1), когда, отказавшись от них, удастся найти более прямой путь для обобщения.

В настоящей работе мы используем циркулянтные матрицы именно в простых случаях – когда они делают результат почти очевидным, а при переходе к производящим функциям из L_1 их использование уже оказывается не столь обязательным. Что же касается малоранговых матриц в матричном признаке равномерности, то их присутствие при изучении спектральных распределений в случае матричных операций с тёплицевыми матрицами, порожденными функциями из L_1 , является существенным.

§ 2. Асимптотические распределения и равномерность

Фиксируем некоторое множество тестовых функций $\mathcal{F}$. Будем говорить, что последовательность кортежей $\{\lambda_{ln}\}_{l=1}^n$ имеет *асимптотическое распределение* $f(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, если для любой функции $F \in \mathcal{F}$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\lambda_{ln}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f(x)) dx. \quad (1)$$

Выбор отрезка $[-\pi, \pi]$ в качестве области определения $f(x)$ не является принципиальным. При определении класса гладкости для $f(x)$ полагаем, что $f(x)$ определена на всей вещественной оси и является 2π -периодической.

Две последовательности кортежей $\{\lambda_{ln}\}_{l=1}^n$ и $\{\mu_{ln}\}_{l=1}^n$ называются *равнораспределенными*, если для любой $F \in \mathcal{F}$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\lambda_{ln}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\mu_{ln}). \quad (2)$$

С выбором множества тестовых функций связаны содержательность самих определений и удобство их применений. Следуя [2], [7], полагаем, что $\mathcal{F}$ состоит из всех вещественнозначных непрерывных функций $F(z)$ комплексной переменной z с компактным носителем.

В дальнейшем будем предполагать, что все числа λ_{ln} вещественны и f – измеримая функция.

Пусть символ $\#M$ обозначает число элементов в конечном множестве M . Для любой точки z и $\delta > 0$ рассмотрим величину

$$\Gamma_n(\delta) = \#\{l : |\lambda_{ln} - z| < \delta, 1 \leq l \leq n\}.$$

Точку z будем называть *простой* для λ_{ln} , если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_n(\delta)}{n} = 0. \quad (3)$$

Точку z будем называть *простой* для $f(x)$, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\mathcal{M}_\delta(z)) = 0, \quad (4)$$

где $\mu(\mathcal{M}_\delta(z))$ обозначает лебегову меру множества

$$\mathcal{M}_\delta(z) = \{x : |f(x) - z| < \delta, \pi < x \leq \pi\}.$$

Любую точку, не являющуюся простой, будем называть *точкой накопления*. Легко видеть, что число точек накопления всегда не более чем счетно.

ЛЕММА 1. *Последовательность кортежей $\{\lambda_{ln}\}_{l=1}^n$ имеет асимптотическое распределение $f(x)$ тогда и только тогда, когда соотношение (1) выполняется для характеристической функции F любого отрезка, концы которого являются простыми точками для $f(x)$. При этом точки накопления для λ_{ln} и $f(x)$ одни и те же.*

ЛЕММА 2. *Последовательности $\{\lambda_{ln}\}_{l=1}^n$ и $\{\mu_{ln}\}_{l=1}^n$ являются равнораспределенными тогда и только тогда, когда соотношение (2) выполняется для характеристической функции F любого отрезка, концы которого являются простыми точками для λ_{ln} и μ_{ln} . При этом точки накопления для λ_{ln} и μ_{ln} одни и те же.*

Доказательства элементарны и поэтому опускаются.

Всюду далее предполагается, что λ_{ln} и μ_{ln} суть сингулярные числа матриц A_n и B_n порядка n соответственно. Основные утверждения сохраняют силу и в тех случаях, когда это собственные значения некоторых эрмитовых матриц A_n и B_n . Сингулярные числа и собственные значения матрицы A будем обозначать через $\sigma_l(A)$ и $\lambda_l(A)$ соответственно. Для определенности будем считать, что сингулярные числа (и собственные значения, если матрица A эрмитова) упорядочены по невозрастанию. Введем следующие обозначения для компонент эрмитова разложения матрицы A :

$$H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad K(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Теперь дадим общую формулировку матричного признака равнораспределенности (в работах [1], [3], [4] приводилась и применялась его частная форма, связанная с фробениусовой нормой).

Функцию $G(x)$ будем называть *G-функцией*, если $G(0) = 0$ и при $x \geq 0$ она является непрерывной неотрицательной строго возрастающей функцией.

ЛЕММА 3. *Пусть заданы две последовательности матриц A_n и B_n , и предположим, что существует G-функция $G(x)$ и положительные числа c_1, c_2 такие, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место расщепление*

$$A_n - B_n = E_n + R_n, \quad (5)$$

где

$$\sum_{l=1}^n G(\sigma_l(E_n)) \leq c_1 \varepsilon n, \quad (6)$$

$$\text{rank } R_n \leq c_2 \varepsilon n, \quad (7)$$

для всех достаточно больших $n \geq N(\varepsilon)$. Тогда сингулярные числа матриц A_n и B_n распределены одинаково. Равнораспределенными являются также собственные значения эрмитовых матриц $H(A_n)$ и $H(B_n)$ и собственные значения эрмитовых матриц $K(A_n)$ и $K(B_n)$.

Если $G(x) = x^p$, $p \geq 1$, то неравенство (6) имеет вид

$$\|E_n\|_{(p)}^p \leq c_1 \varepsilon n,$$

где $\|\cdot\|_{(p)}$ обозначает p -норму Шаттена, определяемую как корень p -й степени из суммы p -х степеней сингулярных чисел матрицы. В случае $p = 2$ эта норма совпадает с фробениусовой нормой. При $p = \infty$ получаем хорошо известную спектральную норму, равную максимальному сингулярному числу.

Теперь сформулируем еще один, более общий матричный признак равнораспределенности.

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ определена последовательность кортежей $\{\mu_{ln}(\varepsilon)\}_{l=1}^n$, и предположим, что для любой тестовой функции $F \in \mathcal{F}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\mu_{ln}(\varepsilon)) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f(x)) dx \right| \leq \delta_F(\varepsilon), \quad (8)$$

где

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_F(\varepsilon) = 0. \quad (9)$$

В этом случае будем говорить, что числа $\mu_{ln}(\varepsilon)$ имеют *предельное асимптотическое распределение* $f(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и будем писать

$$\mu_{ln}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(x).$$

Числа $\lambda_{ln}(\varepsilon)$ и $\mu_{ln}(\varepsilon)$ называются *равнораспределенными в пределе* при $\varepsilon \rightarrow 0$, если

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\lambda_{ln}(\varepsilon)) - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\mu_{ln}(\varepsilon)) \right| \leq \delta_F(\varepsilon), \quad (10)$$

где для $\delta_F(\varepsilon)$ имеет место соотношение (9). В этом случае будем писать

$$\lambda_{ln}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{ln}(\varepsilon).$$

ЛЕММА 4. Пусть c_1, c_2 – положительные константы и $G(x)$ – некоторая G -функция. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ определены последовательности матриц $A_{n\varepsilon}$ и $B_{n\varepsilon}$ и существуют расщепления

$$A_{n\varepsilon} - B_{n\varepsilon} = E_{n\varepsilon} + R_{n\varepsilon}, \quad (11)$$

где

$$\sum_{l=1}^n G(\sigma_l(E_{n\varepsilon})) \leq c_1 \varepsilon n, \quad (12)$$

$$\text{rank } R_{n\varepsilon} \leq c_2 \varepsilon n, \quad (13)$$

для всех достаточно больших $n \geq N(\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_l(A_{n\varepsilon}) &\overset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sigma_l(B_{n\varepsilon}), \\ \lambda_l(H(A_{n\varepsilon})) &\overset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \lambda_l(H(B_{n\varepsilon})), \quad \lambda_l(K(A_{n\varepsilon})) \overset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \lambda_l(K(B_{n\varepsilon})). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $E_{n\varepsilon} = 0$. Пусть $\chi(x)$ – характеристическая функция некоторого отрезка Π . Как показано в [2], если $\text{rank}(A - B) \leq r$, то число сингулярных чисел матрицы A , принадлежащих Π , может отличаться от аналогичного числа для B максимум на r . Поэтому согласно (13)

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \chi(\sigma_l(A_{n\varepsilon})) - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \chi(\sigma_l(B_{n\varepsilon})) \right| \leq c_2 \varepsilon.$$

Пусть теперь $\nu > 0$ и выполняется неравенство

$$|F(x) - F_\nu(x)| \leq \nu,$$

где $F_\nu(x)$ – конечная взвешенная сумма характеристических функций $\chi_k(x)$ для отрезков Π_k :

$$F_\nu(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \chi_k(x), \quad m = m(\nu).$$

Находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\sigma_l(A_{n\varepsilon})) - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\sigma_l(B_{n\varepsilon})) \right| \leq 2\nu.$$

В силу произвольности ν левая часть неравенства есть нуль. Таким образом, случай $E_{n\varepsilon}$ разобран полностью.

Перейдем к общему случаю. В силу (12) неравенство

$$\sigma_l(E_{n\varepsilon}) \leq G^{-1}(\sqrt{\varepsilon}) \quad (14)$$

имеет место для всех индексов $l = 1, \dots, n$, за исключением максимум $c_2 \sqrt{\varepsilon} n$ из них. Поэтому можно найти матрицу $R'_{n\varepsilon}$ такую, что

$$\text{rank } R'_{n\varepsilon} \leq c_1 \sqrt{\varepsilon} n$$

и для матрицы $\tilde{E}_{n\varepsilon} \equiv E_{n\varepsilon} - R'_{n\varepsilon}$ спектральная норма (старшее сингулярное число) имеет оценку

$$\|\tilde{E}_{n\varepsilon}\|_{(\infty)} \leq G^{-1}(\sqrt{\varepsilon}).$$

Таким образом, справедливо расщепление

$$A_{n\varepsilon} - B_{n\varepsilon} = \tilde{E}_{n\varepsilon} + \tilde{R}_{n\varepsilon}, \quad (15)$$

где $\tilde{R}_{n\varepsilon} = R_{n\varepsilon} + R'_{n\varepsilon}$ и, следовательно,

$$\text{rank } \tilde{R}_{n\varepsilon} \leq (c_1 \sqrt{\varepsilon} + c_2 \varepsilon)n.$$

Для завершения доказательства достаточно рассмотреть случай $\tilde{R}_{n\varepsilon} = 0$. Возьмем произвольную тестовую функцию $F \in \mathcal{F}$ с модулем непрерывности

$$\omega_F(\nu) \equiv \max_{|t_1 - t_2| \leq \nu} |F(t_1) - F(t_2)|.$$

Поскольку для всех l

$$|\sigma_l(A_{n\varepsilon}) - \sigma_l(B_{n\varepsilon})| \leq \|A_{n\varepsilon} - B_{n\varepsilon}\|_{(\infty)},$$

получаем

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\sigma_l(A_{n\varepsilon})) - \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n F(\sigma_l(B_{n\varepsilon})) \right| \leq \omega_F(G^{-1}(\sqrt{\varepsilon})).$$

Остается заметить, что

$$\omega_F(G^{-1}(\sqrt{\varepsilon})) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Отметим также следующее полезное утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ определены матрицы $A_{n\varepsilon}$ и сингулярные числа $\sigma_l(A_{n\varepsilon})$ имеют асимптотическое распределение $f_\varepsilon(x)$. Предположим, что $f_\varepsilon(x)$ сходится по мере к измеримой функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ является предельным асимптотическим распределением для $\sigma_l(A_{n\varepsilon})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§ 3. Тёплицевы и циркулянтные матрицы

Рассмотрим формальный ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx} \quad (16)$$

и ассоциируем с ним тёплицевы матрицы

$$A_n = [a_{k-l}], \quad 0 \leq k, l \leq n-1, \quad (17)$$

а также два типа циркулянтных матриц: простые циркулянты S_n и оптимальные циркулянты C_n . Напомним, что циркулянтная матрица $C = [c_{kl}]$ порядка n определяется следующим свойством:

$$c_{ij} = c_{kl} \Leftrightarrow i - j = k - l \pmod{n}.$$

Таким образом, циркулянтная матрица определяется, например, элементами своего первого столбца. В *простом циркулянте* первый столбец имеет элементы

$$a_0, a_1, \dots, a_m, a_{-m}, \dots, a_{-1},$$

если $n = 2m + 1$, и

$$a_0, a_1, \dots, a_m, 0, a_{-m}, \dots, a_{-1},$$

если $n = 2m + 2$. В *оптимальном циркулянте* первый столбец имеет элементы

$$a_0, \frac{1}{n}((n-1)a_1 + a_{-n+1}), \dots, \frac{1}{n}(a_{n-1} + (n-1)a_{-1}).$$

Такой выбор обеспечивает минимум расстояния от A_n до множества циркулянтных матриц, измеряемого по фробениусовой норме.

Пусть $f_n(x)$ обозначает n -ю частичную сумму ряда (16), а $s_n(x)$ — соответствующую сумму Чезаро.

ЛЕММА 6 [2]. *Для собственных значений простых и оптимальных циркулянтов, ассоциированных с рядом (16), справедливы следующие формулы:*

$$\lambda_k(S_n) = f_{[(n-1)/2]} \left(\frac{2\pi}{n} k \right), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (18)$$

$$\lambda_k(C_n) = s_{n-1} \left(\frac{2\pi}{n} k \right), \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (19)$$

Поскольку ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно для любой $f \in C^1$, то из этой леммы следует, что сингулярные числа простых циркулянтов распределены как $|f(x)|$. Поскольку суммы Чезаро сходятся равномерно к $f(x)$ для любой $f \in C$, то заключаем, что сингулярные числа оптимальных циркулянтов распределены как $|f(x)|$ для $f \in C$. В этих же случаях вывод о распределении сингулярных чисел тёплицевых матриц A_n можно сделать, используя матричный признак равномерности.

ЛЕММА 7 [2]. Если $f \in L_2$, то

$$\|A_n - C_n\|_F^2 = o(n). \quad (20)$$

То же верно, если C_n заменить на S_n .

Таким образом, мы с легкостью делаем вывод о том, что сингулярные числа тёплицевых матриц A_n имеют асимптотическое распределение $|f(x)|$ в случае $f \in C$.

В работе [2] мы доказали, что сингулярные значения оптимальных циркулянтов имеют такое же распределение и в случае $f \in L_2$, а в силу (20) и леммы 3 это означает справедливость аналогичного утверждения и для A_n . Это предложение обобщает результат, полученный в работах [8], [9] при условии $f \in L_\infty$.

В случае вещественнозначной функции $f(x)$ матрицы A_n , S_n , C_n являются эрмитовыми. Поэтому их собственные значения распределены как $f(x)$. Из вышесказанного ясно, что этот факт имеет место для $f \in L_2$ и таким образом обобщает классическую теорему Сегё с условием $f \in L_\infty$ [6].

Если $f \in L_1$, то соотношение (20) теряет силу [4]. Чтобы получить обобщения теоремы Сегё на этот случай, в [4] было установлено существование матриц R_n таких, что

$$\|A_n - C_n + R_n\|_F^2 = o(n), \quad \text{rank } R_n = o(n).$$

Однако данный факт и сами обобщения можно получить и более простым способом. Вообще говоря, можно обойтись без оптимальных циркулянтов даже в случае $f \in C$, а вместо леммы 7 опираться на следующее легко проверяемое утверждение.

ЛЕММА 8. Пусть ряд Фурье сходится к $f(x)$ абсолютно. Тогда существуют положительные числа c_1 , c_2 такие, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место расщепление

$$A_n - S_n = E_n + R_n, \quad (21)$$

где

$$\|E_n\|_{(\infty)} \leq c_1 \varepsilon, \quad \text{rank } R_n \leq c_2 \varepsilon n, \quad (22)$$

для всех достаточно больших $n \geq N(\varepsilon)$. То же верно, если S_n заменить на C_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае эрмитовых матриц данное предложение было доказано в [10]. В общем случае рассмотрим эрмитовы разложения

$$A_n = H(A_n) + \mathbf{i}K(A_n), \quad S_n = H(S_n) + \mathbf{i}K(S_n)$$

и заметим, что $H(S_n)$ и $K(S_n)$ суть простые циркулянты, соответствующие тёплицевым матрицам $H(A_n)$ и $K(A_n)$. В то же время легко видеть, что $H(A_n)$ и $H(S_n)$ порождаются функцией $f^H(x) = (f(x) + \overline{f(x)})/2$, а $K(A_n)$ и $K(S_n)$ — функцией $f^K(x) = (f(x) - \overline{f(x)})/(2\mathbf{i})$. Для завершения доказательства заметим, что ряды Фурье для $f^H(x)$ и $f^K(x)$ сходятся абсолютно.

Таким образом, теорема Сегё и аналогичный результат для сингулярных чисел с очевидностью имеют место для абсолютно сходящихся рядов (16), в частности, когда $f \in C^1$. Чтобы обобщить эти результаты на случай $f \in L_1$, можно поступить следующим образом.

Пусть значения функции $f(x)$ вещественны (почти всюду). Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ее ε -приближение $f_\varepsilon(x) \in C^1$ в смысле L_1 . Положим

$$g(x) \equiv f(x) - f_\varepsilon = g^+(x) - g^-(x),$$

где $g^+(x)$ и $g^-(x)$ неотрицательны (почти всюду). Тогда

$$\|g\|_{L_1} = \|g^+\|_{L_1} + \|g^-\|_{L_1} \leq \varepsilon.$$

Далее, $A_n(g^+)$, $A_n(g^-)$ – эрмитовы неотрицательно определенные матрицы и поэтому

$$\begin{aligned} \|A_n(g^+)\|_{(1)} &= \frac{n}{2\pi} \|g^+\|_{L_1}, \\ \|A_n(g^-)\|_{(1)} &= \frac{n}{2\pi} \|g^-\|_{L_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|A_n(g)\|_{(1)} \leq \|A_n(g^+)\|_{(1)} + \|A_n(g^-)\|_{(1)} \leq \frac{n}{2\pi} \varepsilon.$$

Таким образом, тёплицевы матрицы $A_n(f)$ и $A_n(f_\varepsilon)$ удовлетворяют условиям лемм 4 и 5. Отсюда вытекает, что $f(x)$ является предельным асимптотическим распределением для $\sigma_l(A_n(f_\varepsilon))$ и одновременно асимптотическим распределением для сингулярных чисел матриц $A_n(f)$.

Случай комплекснозначной производящей функции $f(x)$ легко сводится к рассмотренному с помощью эрмита разложения.

При тех же условиях нетрудно показать, что

$$\|C_n(g)\|_{(1)} \leq \|C_n(g^+)\|_{(1)} + \|C_n(g^-)\|_{(1)} \leq \frac{n}{2\pi} \varepsilon.$$

Отсюда можно получить следующую форму связи тёплицевых и оптимальных циркулянтных матриц в случае $f \in L_1$.

ЛЕММА 9. Если $f \in L_1$, то

$$\|A_n(f) - C_n(f)\|_{(1)} = o(n). \quad (23)$$

§ 4. Распределения при матричных операциях

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_m \in L_1$ и $A_n(f_1), A_n(f_2), \dots, A_n(f_m)$ – соответствующие тёплицевы матрицы. Положим

$$T_0 = I, T_1 = A_n(f_1), \dots, T_m = A_n(f_m)$$

(I – единичная матрица) и рассмотрим следующие бинарные операции:

$$\begin{aligned} \xi_1(A, B) &= AB, & \xi_2(A, B) &= AB^{-1}, \\ \xi_3(A, B) &= A + B, & \xi_4(A, B) &= A - B. \end{aligned}$$

При обращении матриц соответствующие матрицы предполагаются невырожденными. Предположим, что $A_n \equiv T_{m+p}$ есть результат следующей цепочки $\mathcal{A}$ матричных операций:

$$\begin{aligned} T_{m+1} &= \xi_{k(m+1)}(T_{i(m+1)}, T_{j(m+1)}), \\ &\dots\dots\dots \\ T_{m+p} &= \xi_{k(m+p)}(T_{i(m+p)}, T_{j(m+p)}), \end{aligned}$$

где для всех $1 \leq l \leq p$

$$0 \leq i(m+l), j(m+l) < m+l, \quad k(m+l) \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Мы знаем, что сингулярные числа матриц $A_n(f_l)$ распределены как $f_l(x)$. Что можно сказать о сингулярных числах матриц $A_n = T_{m+p}$?

Для ответа на этот вопрос введем следующую цепочку соответствующих арифметических операций с производящими функциями:

$$\begin{aligned} f_{m+1} &= \xi_{k(m+1)}(f_{i(m+1)}, f_{j(m+1)}), \\ &\dots\dots\dots \\ f_{m+p} &= \xi_{k(m+p)}(f_{i(m+p)}, f_{j(m+p)}). \end{aligned}$$

Мы хотим показать, что при разумных общих предположениях (в частности, что деление имеет смысл) сингулярные числа матриц A_n имеют асимптотическое распределение $f(x) \equiv f_{m+p}(x)$.

ЛЕММА 10. Пусть $f \in L_1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют матрицы $A_{n\varepsilon}$ и циркулянтные матрицы $C_{n\varepsilon}$ такие, что

$$A_n(f) = A_{n\varepsilon} + R'_{n\varepsilon}, \quad C_n(f) = C_{n\varepsilon} + R''_{n\varepsilon} \quad (24)$$

и при этом для всех достаточно больших n

$$\|A_{n\varepsilon}\|_{(\infty)}, \|C_{n\varepsilon}\|_{(\infty)} \leq M(\varepsilon), \quad (25)$$

$$\text{rank } R'_{n\varepsilon}, \text{rank } R''_{n\varepsilon} \leq c\varepsilon n, \quad (26)$$

где c не зависит от ε и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сингулярные числа матриц $A_n(f)$ и $C_n(f)$ распределены как $|f(x)|$. Поскольку мера множества $\{x : |f(x)| > M\}$ стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$, число сингулярных чисел матриц $A_n(f)$ и $C_n(f)$, превосходящих M , имеет вид $o(n)$. Матрицы $A_{n\varepsilon}$ и $C_{n\varepsilon}$ можно получить из сингулярных разложений $A_n(f)$ и $C_n(f)$ посредством модификации старших сингулярных чисел.

ЛЕММА 11. Пусть $f \in L_1$ и матрицы $A_n(f)$ (и $C_n(f)$) невырожденные. Предположим также, что почти всюду $f(x) \neq 0$. Тогда сингулярные числа матриц $A_n^{-1}(f)$ (и $C_n^{-1}(f)$) имеют асимптотическое распределение $1/|f(x)|$.

Если $|f(x)| \geq c_0 > 0$ почти всюду, то

$$\|A_n^{-1}(f)\|_{(\infty)}, \|C_n^{-1}(f)\|_{(\infty)} \leq c_0^{-1}. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отрезок $[a, b]$, концы которого не являются точками накопления для $f(x)$. Очевидно,

$$\#\{i : a \leq \sigma_i(A_n) \leq b\} = \#\{i : b^{-1} \leq \sigma_i(A_n^{-1}) \leq a^{-1}\},$$

и доказательство завершается использованием леммы 1.

Собственные значения циркулянтной матрицы C с первым столбцом $c = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}]^T$ имеют вид

$$\lambda_k = \sum_{l=0}^{n-1} c_l e^{i \frac{2\pi}{n} kl}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Будем говорить, что $f(x)$ является *спектральной функцией* для C , если

$$\lambda_k = f\left(\frac{2\pi}{n}k\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

ЛЕММА 12. *Предположим, что сингулярные числа матриц A_{1n} и A_{2n} имеют асимптотические распределения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — некоторые измеримые функции. Пусть $f_{1\varepsilon}(x)$ и $f_{2\varepsilon}(x)$ — функции класса C^1 , сходящиеся по мере к $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и $C_{1n\varepsilon}$, $C_{2n\varepsilon}$ — циркулянтные матрицы со спектральными функциями $f_{1\varepsilon}(x)$ и $f_{2\varepsilon}(x)$ соответственно такие, что каждая из пар $A_{1n}, C_{1n\varepsilon}$ и $A_{2n}, C_{2n\varepsilon}$ удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда сингулярные числа матриц $A_n = A_{1n}A_{2n}$ имеют асимптотическое распределение $|f(x)|$, где $f(x) = f_1(x)f_2(x)$, а сингулярные числа матриц $A_{1n} \pm A_{2n}$ распределены как $|f_1(x) \pm f_2(x)|$.*

Доказательство сводится к проверке условий матричного признака равномерности (лемма 4) для матриц A_n и циркулянтных матриц $C_{n\varepsilon} \equiv C_{1n\varepsilon}C_{2n\varepsilon}$. Мы опираемся на то, что рассматриваемые матричные операции, применяемые к циркулянтным матрицам, имеют своим результатом также циркулянтную матрицу; все циркулянтные матрицы одного порядка имеют общий базис собственных векторов, и собственные значения итоговой циркулянтной матрицы получаются с помощью той же цепочки действий над соответствующими собственными значениями исходных циркулянтных матриц. Операции сложения-вычитания рассматриваются на основе того же подхода.

ТЕОРЕМА. *Пусть матрицы A_n получены как результат цепочки матричных операций $\mathcal{A}$ и $f(x)$ — результат цепочки соответствующих арифметических операций над производящими функциями. Если f_{m+l} отвечает матрице T_{m+l} , для которой проводится обращение, то потребуем, чтобы $|f_{m+l}(x)| \geq c_0 > 0$ почти всюду. Тогда сингулярные числа матриц A_n имеют асимптотическое распределение $f(x)$.*

Доказательство сводится к применению лемм 10–12.

Список литературы

1. *Tyrtyshnikov E. E.* Influence of matrix operations on the distribution of eigenvalues and singular values of Toeplitz matrices // *Linear Algebra Appl.* 1994. V. 207. P. 225–249.
2. *Тыртышников Е. Е.* Распределения и кластеры // *Матричные методы и алгоритмы.* М.: ИВМ РАН, 1993. С. 124–166.
3. *Тыртышников Е. Е.* Новые теоремы о распределении собственных и сингулярных чисел многоуровневых тёплицевых матриц // *Докл. РАН.* 1993. Т. 333. №3. С. 300–303.
4. *Замарашкин Н. Л., Тыртышников Е. Е.* Распределение собственных и сингулярных чисел тёплицевых матриц при ослабленных требованиях к производящей функции // *Матем. сб.* 1997. Т. 188. №8. С. 83–92.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
6. *Гренандер У., Сегё Г.* Тёплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961.
7. *Tyrtyshnikov E. E.* A unifying approach to some old and new theorems on distribution and clustering // *Linear Algebra Appl.* 1996. V. 232. P. 1–43.
8. *Avram F.* On bilinear forms on Gaussian random variables and Toeplitz matrices // *Probab. Theory Related Fields.* 1988. V. 79. P. 37–45.
9. *Parter S. V.* On the distribution of the singular values of Toeplitz matrices // *Linear Algebra Appl.* 1986. V. 80. P. 115–130.
10. *Chan R.* Circulant preconditioners for Hermitian Toeplitz systems // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 1989. V. 10. P. 542–550.

Институт вычислительной математики РАН

Поступила в редакцию
14.06.2001