Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 1, 3–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm619>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:44:20

УДК 517.53

А. И. Аптекарев

Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций

Доказаны теоремы, описывающие точные константы приближения общего класса аналитических функций рациональными. Как следствие установлена справедливость гипотезы Магнуса о точной константе приближения e^{-z} на $[0, \infty]$. Для доказательства теорем получены новые формулы сильной асимптотики многочленов, ортогональных относительно комплексного переменного веса.

Библиография: 68 названий.

Введение

0.1. Постановка задачи. Пусть

$$\hat{\rho}_n(z) := \int_F \frac{\rho_n(t)}{t-z} \frac{dt}{2\pi i}, \quad F \Subset \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.1)$$

— последовательность голоморфных в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ функций, задаваемых интегралами типа Коши по жордановой спрямляемой дуге F , и

$$d_n := d_n(\hat{\rho}_n, E) := \inf_{r \in \mathfrak{R}_n} \left\{ \max_E |\hat{\rho}_n - r| \right\}, \quad E \cap F = \emptyset, \quad (0.2)$$

— расстояние в чебышёвской метрике на компакте E от $\hat{\rho}_n$ до множества $\mathfrak{R}_n$ рациональных функций r порядка n .

В настоящей работе изучается скорость рациональной аппроксимации функций $\hat{\rho}_n$, т.е. асимптотическое поведение d_n при $n \rightarrow \infty$. Современная теория этой классической проблематики развита А. А. Гончаром (см. [1]–[12], это далеко не полный перечень ключевых работ). В наиболее общих предположениях на F , E и ρ_n результат, описывающий показатель скорости рациональной аппроксимации

$$d := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{1/(2n)}, \quad (0.3)$$

получен в работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [11].

Целью нашей работы является уточнение скорости приближения (0.3) для вещественно-симметричных функций (0.1), аппроксимируемых на промежутках (конечных или бесконечных интервалах) действительной оси. Речь идет о наличии и о величине предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(\hat{\rho}_n, E)}{\alpha_n d^{2n}}, \quad \text{где } \alpha_n^{1/n} = 1 + o(1), \quad (0.4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 99-01-01149, 00-15-96132) и фонда INTAS (грант № 00-272).

который называют *точной константой приближения* аналитической функции рациональными. (В связи с точными константами рациональных приближений *непрерывных* функций $|x|$, x^α на $[-1, 1]$ отметим недавние работы Г. Шталя [13]–[15].) Формулировки общей теоремы Гончара и Рахманова для функций вида (0.1) и доказываемых здесь ее уточнений (теоремы 1 и 1') мы обсудим в следующем § 1.

0.2. Скорость $d_n(e^{-x}, [0, \infty])$. Одним из замечательных приложений общей теоремы из [11] явилось доказательство существования и нахождение предела

$$d := d(e^{-x}, [0, \infty]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{1/(2n)}(e^{-x}, [0, \infty]). \quad (0.5)$$

Эта известная в свое время проблема (поставленная Р. Варгой в связи с численными методами решения уравнения теплопроводности [16], [17] и вызвавшая появление нескольких десятков работ, см. обзоры в [18], [19]) решена в 1986 году. А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым (см. [1], [11]) было доказано, что предел (0.5) существует и равен

$$d = \sqrt{v}, \quad (0.6)$$

где v есть единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l v^l = \frac{1}{8}, \quad a_l := \left| \sum_{b|l} (-1)^b b \right|. \quad (0.7)$$

Отметим, что в том же 1986 году, когда были анонсированы результаты [11] в докладе А. А. Гончара на Международном конгрессе математиков в Беркли (см. [1]), точное значение константы

$$v = \frac{1}{9.2890254919208189\dots} \quad (0.8)$$

независимо было получено А. Магнусом (без строгого доказательства существования предела (0.5)). А. Магнус (см. [20]–[22]) описал v в эквивалентной (0.7) форме:

$$v = \exp \left[-\pi \frac{K'}{K} \right], \quad K(k) = 2E(k), \quad (0.9)$$

где K и K' есть полные эллиптические интегралы 1-го рода для модулей k и $k' = \sqrt{1-k^2}$, а $E(k)$ есть полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Замечательный факт (также открытый Магнусом): оказывается, точное значение константы v (0.8) найдено ранее в 1886 году (ровно за сто лет!) в трактате Альфена (Halphen, [23]) по эллиптическим функциям, где v появилось как корень уравнения (эквивалентного (0.7))

$$\sum \frac{nv^n}{1 - (-v)^n} = \frac{1}{8}.$$

Впоследствии А. Магнус (см. [24]), анализируя результаты численных экспериментов из [19], [25], выдвинул гипотезу о том, что

$$\frac{d_n(e^{-x}, [0, \infty])}{d^{2n}} \rightarrow 2d \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (0.10)$$

т.е. константа, уточняющая показатель скорости рациональных аппроксимаций экспоненты, опять связана с постоянной Альфена!

Справедливость гипотезы Магнуса является следствием общей теоремы 1 об асимптотике (0.4), доказываемой в этой статье. Редукция “теорема 1 $\Rightarrow$ (0.10)” изложена в следующем § 1.

0.3. Асимптотика многочленов, ортогональных с комплексным переменным весом. Важным инструментом исследования рациональных аппроксимаций является теория *многочленов* $\{P_n(z) = z^n + \dots\}$, *ортогональных* на контурах и дугах F в комплексной плоскости:

$$\int_F P_n(z) z^\nu h(z) dz = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (0.11)$$

относительно комплекснозначного *веса* $h(z)$.

Пожалуй, именно в цитированных выше работах по рациональным аппроксимациям А. А. Гончаром впервые были рассмотрены многочлены (0.11), ортогональные относительно *переменного* (зависящего от n) *веса* h вида

$$h(z) := h_n(z) := e^{-2nQ(z)}. \quad (0.12)$$

Их так называемая *слабая асимптотика*

$$|P_n(z)|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(z) := \exp\{-V^\lambda(z)\} \quad (0.13)$$

была связана с *логарифмическим потенциалом*

$$V^\lambda(z) := \int \ln \frac{1}{|t-z|} d\lambda(t) \quad (0.14)$$

экстремальной меры λ , обеспечивающей *равновесие потенциала во внешнем поле* $\varphi := \operatorname{Re} Q$:

$$V^\lambda + \varphi = \begin{cases} \text{const} =: \gamma & \text{на } \operatorname{supp} \lambda, \\ \geq \gamma & \text{на } F \setminus \operatorname{supp} \lambda. \end{cases} \quad (0.15)$$

Надо отметить, что асимптотическая теория многочленов, ортогональных с переменным весом (0.12), переживает в настоящее время бурный расцвет, являясь не только мощнейшим инструментом в анализе и математической физике, но и находя применения от теории чисел до случайных матричных ансамблей и асимптотической комбинаторики (см., например, доклад П. Дейфта на Международном конгрессе математиков в Берлине [26]).

Возвращаясь к проблематике настоящей работы, заметим, что слабые асимптотики (0.13) ортогональных многочленов обеспечивают существование и помогают определить пределы (0.3) для показателей скорости наилучших рациональных аппроксимаций, в то время как для изучения более тонких пределов вида (0.4), являющихся нашей целью, требуются так называемые формулы *сильной асимптотики*

$$\frac{P_n}{\Phi^n} \rightarrow? . \quad (0.16)$$

Успех в определении точных констант (0.4) стал реальностью после недавнего существенного прогресса в развитии комплексных методов изучения сильных асимптотик. Краткий обзор этой тематики, а также формулировки доказанных в нашей работе теорем о сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного переменного веса (теоремы 2 и 3), мы приведем ниже в § 2.

0.4. Структура статьи. Как уже отмечалось, следующие два параграфа имеют вводный характер. В них даны необходимые определения, отмечены основные результаты, относящиеся к настоящей работе, и приведены формулировки доказанных здесь теорем: §1 посвящен результатам о скорости и точных константах рациональных аппроксимаций, §2 посвящен результатам об асимптотике многочленов, ортогональных с комплексным переменным весом. Далее мы приводим доказательства сформулированных теорем. В §3 в предположении справедливости сформулированных в §2 теорем о сильной асимптотике (теорем 2 и 3) мы доказываем результаты §1 (теоремы 1 и 1'). Затем в §§4–7 доказываются результаты, сформулированные в §2.

Автор хотел бы выразить глубокую признательность А. А. Гончару и А. Магнусу за внимание к этой работе и полезные обсуждения ее результатов. Также автор благодарен своим коллегам и друзьям А. Куэлаарсу (Kujlaars), С. П. Суетину, Е. М. Чирке, В. ВанASSE (W. Van Assche), В. С. Бұярову, В. Н. Сорокину и В. А. Калягину за обсуждения и консультации во время работы над статьей.

§1. Формулировки теорем о скорости рациональной аппроксимации

В этом параграфе мы дадим необходимые определения и сформулируем теоремы о скорости наилучших рациональных аппроксимаций – теорему Гончара–Рахманова, а также доказанные в настоящей работе ее уточнения. Затем мы обсудим приложения приведенных теорем, одно из которых есть доказательство гипотезы Магнуса (0.10).

1.1. Равновесие S -конденсатора во внешнем поле. Теорема Гончара–Рахманова. Напомним основные понятия теории логарифмического потенциала во внешнем поле, привлеченные в [11] для описания входных данных и ответа в задаче о показателе геометрической прогрессии в скорости аппроксимаций (0.3) (подробнее см. [11], [27], [28]).

Пусть K – компакт в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $M(K)$ – множество всех единичных положительных борелевских мер ν на K (т.е. $S(\nu) := \text{supp } \nu \subseteq K$) таких, что

$$\int_{|t| \geq 1} \log |t| d\nu(t) < +\infty.$$

Пара непересекающихся компактов положительной емкости E и F (пластины конденсатора),

$$\text{cap } E, \text{cap } F > 0, \quad E \cap F = \emptyset, \quad E \Subset \overline{\mathbb{C}}, \quad F \Subset \mathbb{C}, \quad (1.1_1)$$

и функция φ , гармоническая в окрестности Ω пластины F ,

$$\varphi \in \text{Harm } \Omega, \quad F \Subset \Omega, \quad (1.1_2)$$

будут обозначать *конденсатор*

$$(E; F, \varphi) \quad (1.1_3)$$

в поле φ , действующем на пластину F .

Пусть $M(E, F)$ – множество всех зарядов $\mu = \mu_F - \mu_E$, $\mu_E \in M_E$, $\mu_F \in M_F$. Существует единственный заряд (см. [11])

$$\lambda(t) := \lambda(E; F, \varphi) \in M(E, F), \quad (1.21)$$

минимизирующий функционал энергии $I_\varphi(\mu) := \int (V^\mu + 2\varphi) d\mu$, $\mu \in M(E, F)$, где $\varphi \equiv 0$ на E , а V^μ обозначает логарифмический потенциал (0.14). Причем экстремальный заряд обладает свойством равновесия:

$$\begin{aligned} V^\lambda + \varphi &= \begin{cases} \gamma_\Delta & \text{на } \Delta := S(\lambda) \cap F, \\ \geq \gamma_\Delta & \text{на } F, \end{cases} \\ V^\lambda &= \gamma_E \quad \text{на } E. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Соотношения равновесия (1.22) однозначно определяют *экстремальный (равновесный) заряд* λ и *константы равновесия* γ_Δ , γ_E . Введем важное для дальнейшего обозначение

$$\gamma := \gamma(E; F, \varphi) = \gamma_\Delta - \gamma_E. \quad (1.3)$$

Ключевую роль в задачах рациональных аппроксимаций играет следующее свойство симметрии, введенное Г. Шталем в [29], [30]. В случае, когда $\Delta \subseteq F$ представляет собой объединение кусочно-аналитических дуг, говорят, что конденсатор обладает *S-свойством* (или свойством симметрии) для пластины F :

$$(E; F, \varphi) \in S, \quad \text{если} \quad \frac{\partial(V^\lambda + \varphi)}{\partial n_+} = \frac{\partial(V^\lambda + \varphi)}{\partial n_-} \quad \text{на } \Delta \quad (1.4)$$

всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Как обычно, знаки “+” или “−” в нижнем индексе означают (нетангенциальные) предельные значения при стремлении к ориентированной дуге Δ слева или справа соответственно.

Теперь мы можем привести одну из формулировок основной теоремы Гончара и Рахманова (см. [11; с. 311]).

ТЕОРЕМА (Гончар–Рахманов). *Дана последовательность аналитических функций (0.1),*

$$\hat{\rho}_n(z) := \int_F \frac{\rho_n(t)}{t - z} \frac{dt}{2\pi i},$$

рассмотрим отклонения d_n ее наилучших рациональных аппроксимаций (0.2) на множестве E . Пусть

- 1) E – объединение конечного числа континуумов¹ в $\overline{\mathbb{C}}$;
- 2) F – объединение конечного числа спрямляемых дуг или кривых Жордана;
- 3) $\rho_n \in H(\Omega)$, $F \Subset \Omega$, и $\frac{1}{2n} \log \frac{1}{|\rho_n|} \rightrightarrows \varphi$ при $n \rightarrow \infty$;
- 4) $(E; F, \varphi) \in S$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(\hat{\rho}_n, E)^{1/(2n)} = d = e^{-\gamma}, \quad (1.6)$$

где γ есть (1.3).

¹Континуум есть связный компакт, содержащий более одной точки.

1.2. Краевая задача для комплексного потенциала. Чтобы сформулировать основную теорему настоящей работы, нам придется расширить понятие равновесия S -конденсатора.

Рассмотрим конденсатор

$$(E, \varphi_E; F, \varphi_F), \quad (1.71)$$

на обе пластины которого действует поле (φ_E на E и φ_F на F соответственно). Пусть носители равновесного заряда $\lambda = \lambda_F - \lambda_E$ на обеих пластинах есть *связные дуги* Δ_E и Δ_F :

$$V^\lambda + \varphi_\alpha = \begin{cases} \gamma_{\Delta_\alpha} & \text{на } \Delta_\alpha := S(\lambda_\alpha), \\ \geq \gamma_{\Delta_\alpha} & \text{на } \alpha, \end{cases} \quad \alpha = E, F, \quad (1.72)$$

и пусть свойство симметрии в поле (1.4) выполнено на обеих пластинах

$$(E, \varphi_E; F, \varphi_F) \in S \iff \frac{\partial(V^\lambda + \varphi_\alpha)}{\partial n_+} = \frac{\partial(V^\lambda + \varphi_\alpha)}{\partial n_-} \text{ на } \Delta_\alpha, \quad \alpha = E, F. \quad (1.8)$$

Тогда для комплексного потенциала заряда λ

$$\psi^\lambda(z) := V^\lambda(z) + i\tilde{V}^\lambda(z) = \int \log \frac{1}{t-z} d\lambda,$$

определяемого с точностью до мнимой константы с помощью соотношений Коши–Римана, S -свойство (1.8) эквивалентно переписывается как

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\psi_+^\lambda + Q_\alpha) &= -\frac{d}{dz}(\psi_-^\lambda + Q_\alpha) \text{ на } \Delta_\alpha, \quad \alpha = E, F, \\ Q_\alpha &= \varphi_\alpha + i\tilde{\varphi}_\alpha, \quad Q_\alpha \in H(\Omega_\alpha), \quad \alpha = E, F, \end{aligned}$$

что, в свою очередь, влечет следующую краевую задачу для комплексного потенциала

$$\psi_+^\lambda + \psi_-^\lambda = \begin{cases} -2Q_F + 2\Gamma_F & \text{на } \Delta_F, \\ -2Q_E + 2\Gamma_E & \text{на } \Delta_E, \end{cases} \quad (1.9)$$

где однозначно определенные действительные части констант Γ_α

$$\gamma_{\Delta_\alpha}^* := \operatorname{Re} \Gamma_\alpha, \quad \alpha = E, F, \quad (1.10)$$

ввиду соотношений равновесия (1.72) равны константам равновесия

$$\gamma_{\Delta_\alpha}^* = \gamma_{\Delta_\alpha}, \quad \alpha = E, F. \quad (1.11)$$

Отметим, что эквивалентная переформулировка S -свойства (1.9) означает, что не только потенциал экстремального заряда находится в равновесии с полем на носителе, но и сопряженный потенциал находится в равновесии с сопряженным полем.

Таким образом, голоморфная функция

$$f = \exp[-\psi^\lambda] \quad (1.12)$$

является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} f &\in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_F \cup \Delta_E)), \quad f \neq 0 \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_F \cup \Delta_E), \\ f(\infty) &= 1, \quad \Delta_F \arg f = 2\pi, \quad \Delta_E \arg f = -2\pi, \\ f_+ f_- &= \exp\{2Q_\alpha - 2\Gamma_\alpha\} \text{ на } \Delta_\alpha, \quad \alpha = E, F. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Заметим, для любых входных данных

- а) две гладкие непересекающиеся дуги Δ_F и Δ_E ,
 - б) комплекснозначные функции Q_F и Q_E из класса Гёльдера
- (1.13₁)

краевая задача (1.13) имеет единственное решение:

$$\text{функцию } f \text{ и константы } \Gamma_F, \Gamma_E. \quad (1.13_2)$$

(Это утверждение сводится к стандартным фактам теории краевых задач, см. [31], и мы приведем его доказательство в § 3.)

Однако не для любых входных данных решение задачи (1.13) представимо в виде (1.12), где λ – равновесный заряд конденсатора (1.7₁). Как следует из единственности решения задачи (1.13) и из приведенных выше рассуждений, это имеет место только для входных данных

$$(\Delta_E, \operatorname{Re} Q_E; \Delta_F, \operatorname{Re} Q_F) \in S,$$

и тогда, сохраняя для (1.13₂) обозначения (1.10), мы будем иметь (1.11). В остальных случаях $\mathcal{V}^\lambda$ в (1.12) можно трактовать как комплексный потенциал комплексного заряда, равновесного в смысле соотношения (1.9).

По аналогии с (1.3) обозначим

$$\gamma^* := \gamma^*(\Delta_E, Q_E; \Delta_F, Q_F) := \gamma_{\Delta_F}^* - \gamma_{\Delta_E}^*. \quad (1.14)$$

Явные формулы для решения (1.13₂) задачи (1.13), а следовательно, и для величин γ^* (1.14) мы приведем в § 3 (см. (3.4), (3.5)).

1.3. Формулировка основной теоремы. Гипотеза Магнуса. В настоящей работе мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Дана последовательность аналитических функций (0.1)*

$$\widehat{\rho}_n(z) := \int_F \frac{\rho_n(t)}{t-z} \frac{dt}{2\pi i},$$

рассмотрим отклонения ее наилучших рациональных аппроксимаций (0.2) на множестве E

$$d_n := d_n(\widehat{\rho}_n, E).$$

Пусть

- 1) E есть промежуток² $\mathbb{R}$;
- 2) F есть $\mathbb{R}$ -симметричная спрямляемая дуга Жордана (F связно, $\overline{F} = F$);
- 3) ρ_n есть вещественно-симметричная аналитическая в Ω -окрестности дуги F функция такая, что

$$\rho_n := \exp\{-2(nQ + Q_1)\}, \quad Q, Q_1 \in H(\Omega);$$

- 4) $(E; F, \operatorname{Re} Q) \in S$, множество равновесия на F

$$\Delta := \{z : V^{\lambda(E; F, \operatorname{Re} Q)}(z) + \operatorname{Re} Q(z) = \gamma_\Delta\}$$

связно и $\lambda' > 0$ во внутренних точках дуги Δ .

Тогда

$$d_n = 2d^* d^{2n} (1 + o(1)), \quad (1.16_1)$$

где

$$\begin{aligned} d &= \exp[-\gamma(E; F, \operatorname{Re} Q)] = \exp[-\gamma^*(E; \Delta, Q)], \\ d^* &= \exp[-\gamma^*(E; \Delta, 2Q_1)], \end{aligned} \quad (1.16_2)$$

а γ^* (1.14) определяется параметрами решения краевой задачи (1.13).

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование связности множества равновесия в условии 4) теоремы является немного более ограничительным, чем просто связность носителя $S(\lambda)$ равновесной меры λ_F . Достаточным условием выполнения 4) в (1.15) является выпуклость $\operatorname{Re} Q$ на F (см., например, [28]).

Конечно, теорема 1 имеет гораздо более ограничительные условия, чем теорема Гончара–Рахманова. Часть из этих дополнительных ограничений носит технический характер (это касается $\mathbb{R}$ -симметрии задачи или строгой положительности λ' внутри Δ) и могла бы быть снята. Однако основное ограничение – связность носителя равновесной меры – представляется адекватным, если мы хотим иметь существование предела (0.4).

Из теоремы вытекает следующий факт:

$$\begin{aligned} \rho_n &:= \exp\left\{-2\left(n + \frac{1}{2}\right)Q\right\} \\ &\Downarrow \\ d_n &= 2d d^{2n} (1 + o(1)), \quad d = \exp[-\gamma(E; F, \operatorname{Re} Q)]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отсюда нетрудно извлечь справедливость гипотезы Магнуса. Действительно, следуя [11], имеем

$$d_n(e^{-x}, [0, \infty]) = d_n(e^{-(n+1/2)x}, [0, \infty]). \quad (1.18)$$

Записываем $e^{-2(n+1/2)x}$ в виде интеграла Коши по контуру $\tilde{F}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, охватывающему $[0, \infty]$, и замечаем, что интегралы по концам $\tilde{F}$ в окрестности точки ∞ не вносят существенного вклада в (1.18), поэтому

$$d_n(e^{-x}, [0, \infty]) = d_n\left(\int_F \frac{e^{-2(n+1/2)t/2}}{t-z} dt\right) (1 + o(1)),$$

²Промежуток есть конечный или полубесконечный интервал $\mathbb{R}$.

где F – конечная дуга Жордана, которая, как показано в [11], может быть деформирована так, что условие 4) теоремы 1 выполнено. Таким образом, по следствию теоремы (1.17) гипотеза Магнуса (0.10) верна.

Аналогичное применение теоремы 1 к рациональным приближениям функции $x^k e^{-x}$, $k \in \mathbb{N}$, на $[0, \infty]$ дает в (0.4) последовательность $\alpha_n := n^k$, уточняющую скорость приближения, при этом

$$\frac{d_n(x^k e^{-x}, [0, \infty])}{n^k d^{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2e^{-\gamma^*}, \quad \gamma^* := \gamma^*\left([0, \infty]; F, \frac{k}{2} \log z\right),$$

где d^2 – постоянная Альфена (0.8), а F для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ – дуга Гончара–Рахманова такая, что $([0, \infty]; F, \frac{1}{2} \operatorname{Re} z) \in S$.

1.4. Точные константы аппроксимации корня и логарифма. Рассмотрим ситуацию, когда плотность ρ_n в интегралах типа Коши (0.1) не имеет аналитического продолжения в область $\Omega \ni F$, а лишь продолжается с дуги F по обе стороны от ее “берегов” в линзообразную область $\tilde{\Omega}$, содержащую на границе $\partial\tilde{\Omega}$ концевые точки дуги F . То есть, например, когда ρ_n имеет точки ветвления в концах дуги F . Интерес в этой ситуации представляет случай, когда

$$F = \Delta := S(\lambda_F), \quad (1.19)$$

ибо в противном случае, как правило, на практике можно применять теорему 1. Отметим, что (1.19) выполняется, если в окрестности $\tilde{\Omega}_j$ концевой точки c_j дуги Δ справедливо:

$$\lambda'(z) = \frac{m_j(z)}{\sqrt{z - c_j}}, \quad m_j \in H(\tilde{\Omega}_j), \quad m_j(c_j) \neq 0, \quad j = 1, 2 \quad (1.20)$$

(причем (1.20) является случаем общего положения для (1.19)).

Общее рассмотрение этой ситуации мы оставляем за рамками настоящей статьи, здесь лишь приведем пример, когда плотность в (0.1) имеет квадратичные точки ветвления в концах F . Обозначим

$$w_F(z) := \sqrt{(z - c_1)(z - c_2)}, \quad \frac{w_F(z)}{z} \rightarrow 1, \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.21)$$

где c_1, c_2 – концы дуги F . Справедлива

ТЕОРЕМА 1'. *Дана последовательность аналитических функций*

$$\hat{\rho}_n(z) := \int_F \frac{\rho_n(t)}{t - z} \frac{dt}{2\pi w_{F+}(t)}, \quad (1.22)$$

рассмотрим отклонения d_n ее наилучших рациональных аппроксимаций (0.2) на множестве E . Пусть выполнены условия 1)–4) теоремы 1 (см. (1.15)), причем в дополнение к условию 4) в (1.15) также выполнено (1.19), (1.20). Тогда

$$d_n = 2d^* d^{2n} (1 + O(\delta^n)), \quad 0 < \delta < 1,$$

зде

$$\begin{aligned} d &:= \exp[-\gamma(E; F, \operatorname{Re} Q)] = \exp[-\gamma^*(E; F, Q)], \\ d^* &:= \exp\left[-\gamma^*\left(E, \log \frac{\Phi_{0,F}}{w_F}; F, 2Q_1\right)\right], \end{aligned} \quad (1.23)$$

здесь

$$\Phi_{0,F}(z) := \frac{z - (c_1 + c_2)/2 + \sqrt{z^2 - z(c_1 + c_2) + c_1 c_2}}{(c_1 - c_2)/2}. \quad (1.24)$$

Приведем приложения теорем 1 и 1' в отсутствие внешнего поля на пластине F , т. е. $Q = 0$, а также положим $Q_1 = 0$. Речь идет об аппроксимации на промежутке E функций

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{z - c_2}{z - c_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\sqrt{(z - c_1)(z - c_2)}},$$

где $\bar{c}_1 = c_2$ либо $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Будем для простоты считать

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} c_1, \operatorname{Re} c_2 &\leq 0, \\ E &\subseteq [0, +\infty]. \end{aligned}$$

В этом случае существует дуга Шталя, соединяющая точки c_1 и c_2 , так что

$$(F, E) \in S, \quad F \cap E = \emptyset,$$

и теоремы 1 и 1' при $n \rightarrow \infty$ дают существование пределов

$$\begin{aligned} \frac{d_n\left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{z - c_2}{z - c_1}, E\right)}{d^{2n}} &\rightarrow 2d, \\ \frac{d_n\left(\frac{1}{2\sqrt{(z - c_1)(z - c_2)}}, E\right)}{d^{2n}} &\rightarrow 2d_{\text{sq}}, \end{aligned}$$

а также выражения для констант d и d_{sq}

$$d = \exp[-\gamma(E; F)] \quad \text{и} \quad d_{\text{sq}} = \exp\left[-\gamma^*\left(E, \log \frac{\Phi_{0,F}}{w_F}; F\right)\right],$$

причем в случае, когда $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, имеем $F = [c_1, c_2]$ и

$$d_{\text{sq}} = \exp\left[-\gamma\left(E, \log \left|\frac{\Phi_{0,F}}{w_F}\right|; F\right)\right].$$

§ 2. Формулировки теорем о сильной асимптотике многочленов, ортогональных с комплексным переменным весом

Обсудим вкратце основные подходы к асимптотике ортогональных многочленов. Наш интерес в этой работе связан с методами, основанными на краевой задаче Римана–Гильберта (скалярной и матричной), которые адаптируются для доказательства необходимых нам теорем о сильной асимптотике (теоремы 2 и 3). Здесь мы даем необходимые определения и формулируем теоремы 2 и 3.

2.1. Краткий обзор. Среди множества результатов по асимптотической теории многочленов, определяемых соотношениями ортогональности (0.11):

$$\int_F P_n(z) z^\nu h(z) dz = 0, \quad P_n(z) = z^n + \dots, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (2.1)$$

отметим лишь некоторые, а именно те, что имеют непосредственное отношение к формулируемым ниже теоремам о сильной асимптотике.

Полиномы, определяемые конструкцией (2.1) (так называемые комплексно- или неэрмитово-ортогональные полиномы, $F \subset \mathbb{C}$, $h|_F \subset \mathbb{C}$), существенно отличаются своими свойствами от эрмитово-ортогональных полиномов:

$$\int_F P_n(z) \bar{z}^\nu |h(z)| |dz| = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1. \quad (2.2)$$

Например, вопрос существования полиномов (2.1) для заданного комплексного веса h требует специального рассмотрения, в то время как существование полиномов (2.2) гарантировано их определением. Полиномы (2.2) минимизируют $L^2_{|h(\xi)| |d\xi|}(F)$ -норму среди всех полиномов со старшим коэффициентом равным единице. Это экстремальное свойство является одним из ключевых инструментов при исследовании их асимптотики. Соответственно в случае полиномов (2.1), связанных с рациональными аппроксимациями, этот инструмент отсутствует. Однако в действительном случае, когда

$$F \subset \mathbb{R}, \quad h \geq 0, \quad (2.3)$$

обе конструкции (2.1) и (2.2) совпадают и восходящая к классическим работам С. Н. Бернштейна [32] и Г. Сегё [33] асимптотическая теория многочленов, ортогональных на оси, применяется к исследованию рациональных аппроксимаций.

Необходимость рассмотрения переменного веса ортогональности (0.12)

$$h(z) := h_n(z), \quad \frac{1}{2n} \log |h_n(z)| \rightarrow \varphi(z), \quad n \rightarrow \infty,$$

возникает при изучении

- а) ортогональных многочленов на неограниченных F ,
 - б) многоточечных аппроксимаций Паде,
 - в) аппроксимаций Эрмита–Паде.
- (2.4)

В этой связи слабая асимптотика (0.13) многочленов (2.1), (2.3), (0.12) исследовалась в работах [7], [9], [10], [12], [34]–[37]. Наиболее компактный по формулировке и вместе с тем наиболее общий результат о слабой асимптотике многочленов, ортогональных относительно переменного действительного веса, принадлежит Гончару и Рахманову [8]. С детальным изложением этой тематики можно ознакомиться в монографиях [28], [38], [39].

Начало исследований чисто комплексного случая ортогональности (2.1) было положено Дж. Наттолом (см. обзор в [40]). Существенный прорыв в обосновании идей и доказательстве гипотез Наттолла был сделан Г. Шталем. Для компактов “минимальной емкости” Наттолл установил локальное свойство симметрии (1.4) (см. [29]) и доказал слабую асимптотику (0.13) для многочленов (2.1),

ортогональных на таких компактах [30]. Результаты Шталя на случай переменного веса (2.4) были развиты Гончаром и Рахмановым в [11], что явилось важным моментом в доказательстве обсуждавшейся выше общей теоремы о скорости рациональной аппроксимации аналитических функций.

Перейдем к результатам о сильной асимптотике (0.16). Наиболее полное развитие теория Сегё для эрмитово-ортогональных многочленов (2.2) в случае, когда F есть объединение конечного числа кривых и дуг Жордана, получила в работе Г. Видома [41] (в работе [42] формулы сильной асимптотики Видома модифицированы с помощью θ -функций Римана).

Первые общие результаты по сильной асимптотике многочленов (2.1), (2.3), ортогональных относительно действительного переменного веса (0.12), были мотивированы теми же приложениями (2.4) (см. [43]–[51]). Наиболее общая теорема в этом направлении, доказанная методами, связанными с действительной (эрмитовой) ортогональностью (т.е. с экстремальными свойствами ортогональных многочленов), принадлежит В. Тоттику (см. [52], [53]).

Комплексные методы исследования сильных асимптотик ортогональных многочленов основаны на краевых задачах для аналитических функций (задачах Римана–Гильберта). Эти задачи базируются на краевом условии

$$R_{n+} + R_{n-} = P_n h \quad \text{на } F, \quad (2.5)$$

которое с помощью формул Сохоцкого–Племеля вытекает из определения функций второго рода R_n для многочленов (2.1):

$$R_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{P_n(t)h(t)}{t-z} dt, \quad R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

(Напомним, что ортогональные многочлены (2.1) являются знаменателями аппроксимаций Паде для функции $\int_F \frac{h(t)}{t-z} \frac{dt}{2\pi i}$, а функция (2.6) носит название функции остатка аппроксимаций Паде.)

Этот подход появился в работах Дж. Наттолла в связи с изучением сильных асимптотик многочленов Эрмита–Паде (см. обзорную статью [40], а также [54]). В работе [55] с помощью рассмотрения краевого условия (2.5) как сингулярного интегрального уравнения были доказаны формулы сильной асимптотики для многочленов (2.1), ортогональных на интервале $F \subset \mathbb{R}$ относительно комплексного веса

$$h := \frac{\tilde{h}}{w_{F+}} \quad \text{на } F, \quad \tilde{h} \in H(\Omega), \quad F \Subset \Omega, \quad \tilde{h} \neq 0 \text{ в } \Omega \quad (2.7)$$

(а также для $\tilde{h}$ из класса Гёльдера), здесь w_F определено в (1.21). Отметим в этом же направлении работу [56]. В работе С. П. Суетина [57] подход Наттолла был развит для многочленов (2.1), ортогональных относительно веса (2.7) на объединении конечного числа S -симметричных дуг в $\mathbb{C}$, где w_F , как и в (1.21), есть корень из многочлена с нулями в концевых точках $\{c_j\}$ дуг, составляющих F . С. П. Суетиным соотношение (2.5) сводилось к некоторой краевой задаче Римана на двулистной (гиперэллиптической) римановой поверхности с квадратическими точками ветвления в $\{c_j\}$.

В настоящей работе мы адаптируем подход Наттолла–Суетина для многочленов (2.1), ортогональных относительно комплексного *переменного* веса (0.12), т.е. в (2.7) мы рассматриваем

$$\tilde{h} := h_n := e^{-2nQ} \tilde{h}_n, \quad \|\tilde{h}_n - \tilde{h}_\infty\|_{H(\Omega)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.8)$$

и F есть дуга, обладающая S -свойством в поле $\operatorname{Re} Q$ (см. формулировку теоремы 3 ниже в п. 2.3 этого параграфа).

Наиболее впечатляющее развитие методы исследования сильных асимптотик ортогональных многочленов, основанные на краевой задаче Римана–Гильберта, получили в цикле работ П. Дейфта с соавторами [26], [58]–[62]. Как было замечено А. Р. Итсом с соавторами [63], соотношения (2.5) могут быть переформулированы в виде матричной задачи Римана–Гильберта, решение которой при $n \rightarrow \infty$ и составляет суть подхода Дейфта с соавторами. Хотя результаты, полученные в процитированных выше работах, касаются многочленов, ортогональных на действительной оси относительно действительных переменных весов, тем не менее, обсуждаемый метод является сугубо “комплексным”, что мы демонстрируем в этой статье, адаптируя его для доказательства сильной асимптотики многочленов (2.1), ортогональных относительно *комплексного* переменного веса

$$h := \tilde{h} := h_n,$$

где h_n определено в (2.8), а F есть S -симметричная в поле $\operatorname{Re} Q$ дуга (см. формулировку теоремы 2 ниже в п. 2.3 этого параграфа).

2.2. Вспомогательная краевая задача. Функция Сегё и главный член асимптотики. Сейчас мы введем некоторые функции, в терминах которых в дальнейшем будем записывать формулы сильной асимптотики.

Пусть имеется последовательность голоморфных не обращающихся в нуль в области Ω функций h_n , задаваемых (2.8):

$$h_n := e^{-2nQ} \tilde{h}_n, \quad \|\tilde{h}_n - \tilde{h}_\infty\|_{H(\Omega)} = o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.8')$$

Пусть Δ – произвольная гладкая жорданова дуга в Ω , для удобства будем считать, что Δ соединяет точки $-1, 0$ (т.е. $-1, 0$ суть концевые точки дуги Δ , ориентированной от точки -1 к точке 0).

Известно (см. [31; с. 485]), что граничная задача

$$\begin{aligned} f &\in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta), \quad f \neq 0 \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \\ f_+ f_- \tilde{h}_n &= 1 \text{ на } \Delta \end{aligned} \quad (2.9)$$

имеет единственное (с точностью до знака $\pm$) решение в классе ограниченных функций, которое задается формулой

$$f(z) = \exp \left\{ w(z) \int_{\Delta} \frac{\log \tilde{h}_n(t)}{z - t} \frac{dt}{2\pi i w_+(t)} \right\}, \quad (2.10_1)$$

где

$$w(z) := (z(z+1))^{1/2}, \quad w > 0 \text{ при } z > 0,$$

причем

$$f(\infty) = \exp \left\{ \int_{\Delta} \frac{\log \tilde{h}_n(t) dt}{2\pi i w_+(t)} \right\}. \quad (2.10_2)$$

По аналогии с “действительным” случаем решение краевой задачи (2.9) – функцию (2.10₁) – мы будем называть *функцией Сегё* для веса $\tilde{h}_n i / w_+$ на Δ и обозначать через

$$f \left(\frac{\tilde{h}_n i}{w_+}; z \right). \quad (2.10_3)$$

Чтобы ввести аналог функции Сегё для комплекснозначного веса $\tilde{h}_n$, мы рассмотрим функцию

$$\varkappa(z) := \left(\frac{\Phi_0(z)}{w(z)} \right)^{1/2}, \quad (2.11_1)$$

где для функции $(\cdot)^{1/2}$ взята главная ветвь, положительная на $\mathbb{R}^+$, а функция Φ_0 (см. (1.24)),

$$\Phi_0(z) := 4 \left(z + \frac{1}{2} + \sqrt{z^2 + z} \right), \quad (2.11_2)$$

есть рациональная функция на двулистной римановой поверхности с точками ветвления -1 и 0 , имеющая на одном листе в точке ∞ простой полюс, а на другом листе в точке ∞ простой нуль. Обозначая значения (ветви) функций на листах этой поверхности верхними индексами $(+)$ и $(-)$, имеем

$$\Phi_0^{(+)} \Phi_0^{(-)} = 1 \quad \text{и} \quad w^{(+)} = -w^{(-)} \quad \text{всюду в } \overline{\mathbb{C}}. \quad (2.11_3)$$

Поэтому для любой дуги Δ , соединяющей точки ветвления $-1, 0$, имеем

$$\varkappa_+ \varkappa_- = \left(\frac{\Phi_{0+} \Phi_{0-}}{w_+ w_-} \right)^{1/2} = \left(\frac{-1}{w_+^2} \right)^{1/2} = \frac{i}{w_+}. \quad (2.11_4)$$

Опять же по аналогии с действительным случаем мы будем называть функцию

$$f(\tilde{h}_n; z) := \varkappa f \left(\frac{\tilde{h}_n i}{w_+}; z \right) \quad (2.12)$$

(см. (2.11₁) и (2.10₃)) функцией Сегё для комплекснозначного веса $\tilde{h}_n$. Ввиду (2.9) и (2.11₄) функция f (2.12) является решением (в смысле непрерывных значений на открытой дуге $\overset{\circ}{\Delta} := \Delta \setminus (\{-1\} \cup \{0\})$) следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} f &\in H^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta), \quad f \neq 0 \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \\ f_+ f_- \tilde{h}_n &= \frac{i}{w_+} \text{ на } \overset{\circ}{\Delta}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Перейдем к определению функции, описывающей главный член асимптотики. Пусть в Ω имеется жорданова дуга $F \Subset \Omega$, обладающая S -свойством в поле

$$q := \operatorname{Re} Q,$$

что означает существование меры $\lambda \in M(F)$ такой, что

$$V^\lambda + q = \begin{cases} \gamma_\Delta & \text{на } S(\lambda), \\ \geq \gamma_\Delta & \text{на } F \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{\partial(V^\lambda + q)}{\partial n_+} = \frac{\partial(V^\lambda + q)}{\partial n_-} \quad \text{на } S(\lambda). \quad (2.14)$$

Выполнение условий (2.14) мы будем обозначать так:

$$(F, q) \in S. \quad (2.15_1)$$

Везде далее мы будем предполагать, что множество равновесия

$$\Delta := \{z : V^\lambda(z) + q(z) = \gamma_\Delta\} \quad (2.15_2)$$

есть связная аналитическая дуга, концы которой, как мы уже договорились, есть точки -1 и 0 . Для описания главного члена асимптотики рассмотрим функцию

$$\Phi_q := \exp\{\Gamma - \psi^\lambda\}, \quad \operatorname{Re} \Gamma = \gamma. \quad (2.16)$$

Повторяя рассуждения п. 1.2 (см. переход от (1.8) к (1.9)), имеем, что благодаря S -свойству Φ_q удовлетворяет краевому условию

$$\Phi_{q+} \Phi_{q-} e^{-2Q} = 1 \quad \text{на } \Delta. \quad (2.17)$$

Заметим, что функция Φ_q/Φ_0 с учетом краевых условий для Φ_q и Φ_0 является решением краевой задачи (2.9) с $\tilde{h}_n := e^{-2Q}$, откуда с помощью (2.10) следуют явные выражения для Φ_q и Γ .

2.3. Формулировки теорем 2 и 3. В настоящей работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность весовых функций $h_n \in H(\Omega)$, $h_n \neq 0$ в Ω , имеет вид (2.8), т.е.

$$1) \quad h_n := e^{-2nQ} \tilde{h}_n, \quad \|\tilde{h}_n - \tilde{h}_\infty\|_{H(\Omega)} = o(1),$$

и пусть гладкая жорданова дуга F удовлетворяет условиям (2.15₁), (2.15₂), т.е.

$$2) \quad (F, \operatorname{Re} Q) \in S, \quad \text{множество равновесия } \Delta \text{ (2.15}_2\text{) связно и } \lambda' > 0 \text{ внутри } \Delta.$$

Тогда

А) для достаточно больших n существуют ортогональные с весом h_n на F многочлены $P_n(z) = z^n + \dots$:

$$\int_F P_n(z) z^\nu h_n(z) dz = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1;$$

В) для многочленов P_n и функций второго рода $R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{P_n(t) h_n(t) dt}{t-z}$ справедливы асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$:

$$\text{B1)} \quad \begin{cases} P_n = C\varphi(1 + o(1)), \\ R_n = \frac{i}{w} \frac{C}{\varphi}(1 + o(1)) \end{cases} \quad \text{равномерно на } K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad (2.18_1)$$

$$\text{B2)} \quad \begin{cases} P_n = C(\varphi_+ + \varphi_-)(1 + o(1)), \\ R_{n\pm} = \frac{Ci}{(w\varphi)_{\pm}}(1 + o(1)) \end{cases} \quad \text{равномерно на } K \in \Delta, \quad (2.18_2)$$

где φ определено с помощью (2.12) и (2.16) как

$$\varphi(z) := \Phi_q^n(z) f(\tilde{h}_{\infty}; z), \quad (2.19_1)$$

а константа C равна

$$C := (e^{n\Gamma} f(\tilde{h}_{\infty}; \infty))^{-1}. \quad (2.19_2)$$

Весовые функции в теореме 2 являются аналитическими возмущениями веса Лежандра ($Q \equiv 0$, $\tilde{h}_n \equiv 1$), поэтому неудивительно, что асимптотические формулы B2) (см. (2.18₂)) справедливы только “внутри” $\overset{\circ}{\Delta}$. На самом деле, в процессе доказательства теоремы 2 мы получаем асимптотику P_n и R_n в окрестностях концов Δ , однако ввиду того что эту локальную асимптотику мы не применяем в доказательстве основной теоремы 1, мы не включаем ее в формулировку теоремы 2 (чтобы не усложнять) и соответствующие формулы приведем позднее (см. п. 6.1.5, формулы (6.28), (6.27)). Как и в связи с теоремой 1, отметим, что “грубым” достаточным условием связности Δ в условии 2) теоремы 2 является выпуклость внешнего поля $\text{Re } Q$ на F .

В процессе доказательства теоремы 1 нам понадобятся многочлены, имеющие единую равномерную осциллирующую асимптотику на всей дуге Δ (включая концы). Этого возможно добиться, если рассматривать веса, являющиеся аналитическими возмущениями веса Чебышёва. Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 2, и пусть дополнительно к 2) выполняется

3) $F = \Delta$ и в окрестности Ω_j концевой точки c_j , $j = 1, 2$, дуги Δ имеет место

$$\lambda'(F, \text{Re } Q; z) = \frac{m_j(z)}{\sqrt{z - c_j}}, \quad m_j \in H(\Omega_j), \quad m_j(c_j) \neq 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.20)$$

Тогда

A) для достаточно больших n существуют ортогональные на F с весом $h_n i / w_+$ полиномы $P_n(z) = z^n + \dots$;

B) для полиномов P_n и функций второго рода R_n (см. (2.6)) справедливы асимптотические формулы при $n \rightarrow \infty$:

$$\text{B1)} \quad \begin{cases} P_n = C\varphi(1 + O(\delta^n)), \\ R_n = \frac{i}{w} \frac{C}{\varphi}(1 + O(\delta^n)), \end{cases} \quad \delta := \delta(K) \in (0, 1), \quad K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad (2.21)$$

$$\text{B2)} \quad \begin{cases} P_n = C(\varphi_+ + \varphi_-)(1 + O(\delta^n)), \\ R_{n\pm} = \frac{iC}{(w\varphi)_{\pm}}(1 + O(\delta^n)) \end{cases} \quad \text{равномерно на } \Delta, \quad 0 < \delta < 1,$$

где φ определено с помощью (2.10), (2.16) как

$$\varphi(z) := \Phi_q^n(z) f\left(\frac{\tilde{h}_n i}{w_+}; z\right), \quad (2.22)$$

а константа C равна

$$C := \left(e^{n\Gamma} f\left(\frac{\tilde{h}_n i}{w_+}; \infty\right) \right)^{-1}.$$

Заметим, что при $Q = 0$, $F \in \mathbb{R}$, $\tilde{h}_n \equiv \tilde{h}_\infty$ теорема 3 превращается в упоминавшуюся выше теорему Наттолла (см. [55]).

§ 3. Доказательство теорем о скорости и точной константе рациональной аппроксимации аналитических функций

В этом параграфе мы дадим решение краевой задачи (1.13). Затем в предположении справедливости теорем о сильной асимптотике (см. теоремы 2 и 3) мы докажем основные теоремы – теоремы 1 и 1'.

3.1. Решение вспомогательной краевой задачи. Пусть F и E – две произвольные гладкие дуги с концевыми точками c_1, c_2 и c_3, c_4 соответственно. Пусть Q_F и Q_E – аналитические функции в окрестностях дуг F и E соответственно, а Γ_F и Γ_E – некоторые комплексные константы. Напомним обозначение (1.24):

$$\Phi_0(z; c_1, c_2) := \frac{z - (c_1 + c_2)/2 + \sqrt{z^2 - z(c_1 + c_2) + c_1 c_2}}{(c_1 - c_2)/2}, \quad (3.11)$$

соответственно будем обозначать

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{0,F}(z) &:= C_{0,F} \Phi_0(z; c_1, c_2), & C_{0,F} &:= \frac{c_1 - c_2}{4}, \\ \tilde{\Phi}_{0,E}(z) &:= C_{0,E} \Phi_0(z; c_3, c_4), & C_{0,E} &:= \frac{c_3 - c_4}{4}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Определим на F и E функции

$$\begin{aligned} H_F &:= Q_F + \log \frac{C_{0,F}}{\tilde{\Phi}_{0,E}} \quad \text{на } F, \\ H_E &:= Q_E - \log \frac{C_{0,E}}{\tilde{\Phi}_{0,F}} \quad \text{на } E, \end{aligned} \quad (3.21)$$

также на $E \cup F$ будем обозначать

$$H(t; \Gamma_F, \Gamma_E) := 2(H_\alpha(t) - \Gamma_\alpha), \quad t \in \alpha, \quad \alpha = F, E. \quad (3.22)$$

Наконец, используем обозначение

$$w_{E,F} := \sqrt{\prod_{j=1}^4 (z - c_j)}; \quad \frac{w_{E,F}(z)}{z^2} \rightarrow 1 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существует единственный³ набор*

$$(f(z), \Gamma_F, \Gamma_E),$$

удовлетворяющий краевой задаче (1.13), а именно

$$\begin{aligned} f &\in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus (F \cup E)), \quad f \neq 0 \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (F \cup E), \\ f(\infty) &= 1, \quad \Delta_F \arg f = 2\pi, \quad \Delta_E \arg f = -2\pi, \\ f_+ f_- &= \exp\{2(Q_\alpha - \Gamma_\alpha)\} \text{ на } \alpha, \quad \alpha = E, F. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Причем константы Γ_E и Γ_F равны

$$\Gamma_E = \frac{D_E}{D}, \quad \Gamma_F = \frac{D_F}{D}, \quad (3.5_1)$$

где

$$\begin{aligned} D_E &:= \left| \frac{\int_F \frac{dt}{w_{EF+}(t)}}{\int_F \frac{H_F(t) dt}{w_{EF+}(t)}} \frac{\int_E \frac{H_E(t) dt}{w_{EF+}(t)}}{\int_E \frac{H_E(t) t dt}{w_{EF+}(t)}} \right|, \\ D_F &:= \left| \frac{\int_F \frac{H_F(t) dt}{w_{EF+}(t)}}{\int_F \frac{H_F(t) t dt}{w_{EF+}(t)}} \frac{\int_E \frac{w_{EF+}(t)}{dt}}{\int_E \frac{w_{EF+}(t)}{t dt}} \right|, \\ D &:= \left| \frac{\int_F \frac{dt}{w_{EF+}(t)}}{\int_F \frac{t dt}{w_{EF+}(t)}} \frac{\int_E \frac{dt}{w_{EF+}(t)}}{\int_E \frac{t dt}{w_{EF+}(t)}} \right|, \end{aligned} \quad (3.5_2)$$

функция $f(z)$ есть

$$f = \frac{\tilde{\Phi}_{0,F}}{\tilde{\Phi}_{0,E}} e^W, \quad (3.6_1)$$

где

$$W(z) := w_{E,F}(z) \int_{E \cup F} \frac{H(t; \Gamma_F, \Gamma_E)}{w_{E,F}(t)} \frac{dt}{2\pi i(t-z)}, \quad (3.6_2)$$

а входящие в правые части формул (3.5) и (3.6) функции определены выше (см. (3.1)–(3.3)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\mathcal{F} := f \frac{\tilde{\Phi}_{0,E}}{\tilde{\Phi}_{0,F}}.$$

Ввиду того что

$$\tilde{\Phi}_{0,\alpha+} \tilde{\Phi}_{0,\alpha-} = C_{0,\alpha}^2 \text{ на } \alpha = E, F,$$

³ Единственность Γ_F, Γ_E понимается с точностью до $\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

и с учетом (3.4) функция $\mathcal{F}$ должна удовлетворять следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus (F \cup E)), \quad \mathcal{F} \neq 0 \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (F \cup E), \\ \mathcal{F}(\infty) &= 1, \quad \Delta_E \arg \mathcal{F} = 0, \quad \Delta_F \arg \mathcal{F} = 0, \\ \mathcal{F}_+ \mathcal{F}_- &= e^H \text{ на } E \cup F. \end{aligned}$$

Так как теперь приращение аргумента $\mathcal{F}$ по любому замкнутому пути в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$ равно нулю и $\mathcal{F} \neq 0$ в этой области, мы можем выделить голоморфную ветвь

$$W := \log \mathcal{F}.$$

Функция W , в свою очередь, должна удовлетворять краевой задаче

$$\begin{aligned} W &\in H^\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus (F \cup E)), \\ W(\infty) &= 0, \\ W_+ + W_- &= H \text{ на } E \cup F. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Краевая задача (3.7) хорошо изучена (даже для произвольного числа дуг). Условие ее разрешимости (см. [31; с. 425]) в классе ограниченных функций есть

$$\int_{F \cup E} \frac{H(t) t^\nu dt}{w_{EF+}(t)} = 0, \quad \nu = 0, 1,$$

что дает линейную систему для определения Γ_F и Γ_E , решение которой выписано нами в (3.5). Определив константы Γ_F и Γ_E , можно выразить единственное решение (3.7) как (3.6₂). Утверждение доказано.

3.2. Доказательство теоремы 1. Напомним, что нам нужно на промежутке E действительной оси $\mathbb{R}$ получить асимптотику отклонения рациональных аппроксимаций от функции

$$\hat{\rho}_n(z) := \int_F \frac{\exp\{-2(nQ(t) + Q_1(t))\}}{t - z} \frac{dt}{2\pi i}, \tag{3.8}$$

где вещественно-симметричные $Q, Q_1 \in H(\Omega)$, а спрямляемая жорданова дуга $F \Subset \Omega$ вместе с промежутком E образует конденсатор, для которого пластина F обладает S -свойством в поле $\operatorname{Re} Q$, причем равновесное множество Δ связно (а следовательно, $\Delta = S(\lambda_F)$, где λ_F — компонента равновесного заряда λ на F). Ввиду аналитичности Q дуга Δ , соединяющая точки $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$, также будет аналитической дугой.

Отметим, что так как входные данные нашей задачи, т.е. интегралы типа Коши (3.8) и их наилучшие рациональные аппроксимации, при дробно-линейных заменах переменных переходят опять в интегралы типа Коши (с другими плотностями) и соответственно рациональная функция преобразуется в рациональную, а также поскольку условия теоремы 1 (см. (1.15)) и асимптотические формулы в ответе (1.16) инвариантны при конформных заменах, то мы можем считать E конечным интервалом $\mathbb{R}$:

$$E := [c_3, c_4].$$

Мы также считаем, что задача равновесия для конденсатора $(E; F, \operatorname{Re} Q)$ решена и нам даны: аналитическая дуга Δ , компоненты равновесного заряда (т.е. меры $\lambda_\Delta := \lambda_F$ и λ_E), а также константы равновесия γ_Δ и γ_E .

Обозначим

$$\tilde{\Phi}_\alpha := \exp\{-\mathcal{V}^{\lambda_\alpha}\}, \quad \alpha = \Delta, E.$$

Ввиду S -свойства пластины F имеем (см. (1.9))

$$\left(\frac{\tilde{\Phi}_\Delta}{\tilde{\Phi}_E}\right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_\Delta}{\tilde{\Phi}_E}\right)_- = \exp\{2(Q - \Gamma_\Delta)\} \quad \text{на } \Delta,$$

причем, учитывая вещественную симметричность задачи, также имеем

$$\Gamma_\alpha = \bar{\Gamma}_\alpha = \gamma_\alpha, \quad \alpha = \Delta, E.$$

Обозначим

$$\Phi_\alpha := \exp\{-\mathcal{V}^{\lambda_\alpha} + \gamma_\alpha\}, \quad \alpha = \Delta, E. \quad (3.9)$$

Граничные условия на Δ , а также равновесие на E и $\mathbb{R}$ -симметрия дают

$$\left(\frac{\tilde{\Phi}_E}{\tilde{\Phi}_\Delta}\right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E}{\tilde{\Phi}_\Delta}\right)_- = \begin{cases} e^{-2Q} & \text{на } \Delta, \\ e^{-2\gamma} & \text{на } E, \end{cases} \quad (3.10)$$

где γ есть (1.3), т.е. $\gamma := \gamma_\Delta - \gamma_E$.

И наконец, мы считаем, что краевая задача (1.13) решена с входными данными $(E; \Delta, 2Q_1)$, и мы имеем ограниченную аналитическую в $\bar{\mathbb{C}} \setminus (E \cup \Delta)$ функцию f , нормированную в точке ∞ как $f(\infty) = 1$, и действительные (ввиду $\mathbb{R}$ -симметрии) константы $\Gamma_\Delta^* = \bar{\Gamma}_\Delta^* = \gamma_\Delta^*$, $\Gamma_E^* = \bar{\Gamma}_E^* = \gamma_E^*$, так что выполнены краевые условия

$$f_+ f_- = \begin{cases} \exp\{4Q_1 - 2\gamma_\Delta^*\} & \text{на } \Delta, \\ \exp\{-2\gamma_E^*\} & \text{на } E \end{cases} \quad (3.11)$$

и условия индекса

$$\Delta_F \arg f = 2\pi, \quad \Delta_E \arg f = -2\pi. \quad (3.12)$$

Определим функцию

$$\tilde{f} := \frac{\tilde{\Phi}_E}{w_\Delta} f,$$

где

$$w_\Delta(z) := \sqrt{(z - \tilde{c}_1)(z - \tilde{c}_2)}, \quad \frac{w_\Delta(z)}{z} \rightarrow 1, \quad z \rightarrow \infty.$$

Ввиду того что индекс $\tilde{f}$ в $\bar{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \cup E)$ равен нулю, т.е. (3.12) дает

$$\Delta_F \arg \tilde{f} = \Delta_E \arg \tilde{f} = 0, \quad (3.12')$$

функция $\tilde{f}$ допускает однозначную декомпозицию

$$\tilde{f} := \tilde{f}_\Delta^2 \tilde{f}_E^{-1}$$

такую, что

$$\tilde{f}_\alpha \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \alpha), \quad \tilde{f}_\alpha \neq 0 \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \alpha, \quad \tilde{f}_\alpha(\infty) = 1, \quad \alpha = \Delta, E.$$

Действительно, возможность взятия однозначного логарифма от $\tilde{f}$ (см. (3.12')) и интегральная формула Коши дают

$$\tilde{f}_\alpha^{k_\alpha}(z) = \exp \left\{ \oint_\alpha \frac{\log \tilde{f}(t)}{t - z} \frac{dt}{2\pi i} \right\}, \quad \alpha = \Delta, E, \quad k_\Delta = 2, \quad k_E = -1, \quad (3.13)$$

где $\oint_\alpha$ означает интеграл по любому замкнутому спрямляемому жорданову контуру, охватывающему дугу $\alpha = \Delta, E$, а точка z взята вне этого контура.

По аналогии с (3.9), вводя обозначение

$$f_\Delta := \tilde{f}_\Delta e^{\gamma_\Delta^*}, \quad (3.13')$$

мы получаем, что определенные нами функции ввиду (3.11) удовлетворяют краевым условиям

$$\left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{f_\Delta^2 w_\Delta} \right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{f_\Delta^2 w_\Delta} \right)_- = \begin{cases} e^{-4Q_1} & \text{на } \Delta, \\ e^{-2\gamma^*} & \text{на } E, \end{cases} \quad (3.14)$$

где γ^* есть (1.14), т.е. $\gamma^* = \gamma_\Delta^* - \gamma_E^*$.

Отметим, что если в краевом условии (3.14), рассмотренном на Δ , нам заданы функции $\tilde{\Phi}_E, \tilde{f}_E, Q_1$, то они с точностью до знака определяют функцию f_Δ^2 :

$$f_\Delta \in H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta), \quad f_\Delta \neq 0 \text{ в } \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta.$$

Аналогичное утверждение справедливо и в отношении краевого условия на E , а также в отношении краевых условий (3.10).

Проведенным выше построением функций $\Phi_\Delta, f_\Delta, \tilde{\Phi}_E$ и $\tilde{f}_E$ и описанием их полезных свойств мы заканчиваем подготовительный этап и теперь приступаем к непосредственному доказательству теоремы.

1) Сначала мы построим последовательность полиномов

$$\omega_{2n+1}(z) = \prod_{j=1}^{2n+1} (z - x_{j,2n+1}), \quad x_{j,2n+1} \in E, \quad j = 1, \dots, 2n+1,$$

такую, что

$$\frac{\omega_{2n+1}}{\tilde{\Phi}_E^{2n+1} \tilde{f}_E} \rightrightarrows 1 \text{ равномерно на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E \quad (3.15_1)$$

и

$$\frac{\omega_{2n+1}}{|\tilde{\Phi}_E|^{2n+1}} = |\tilde{f}_E| 2 \cos((2n+1) \arg \tilde{\Phi}_E + \arg \tilde{f}_E) + o(1) \quad (3.15_2)$$

равномерно на всем интервале E .

Для построения такой последовательности, например, можно воспользоваться теоремой 3 (сформулированной в § 2 и доказанной ниже в § 4). Обозначим

$$N := 2n + 1.$$

Возьмем в качестве ω_N полиномы, ортогональные относительно веса $h_N i / w_{E+}$ на отрезке E :

$$\int_E \omega_N(x) x^\nu \frac{h_N i}{w_{E+}} dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, N-1, \quad (3.16)$$

где

$$w_E(z) := \sqrt{(z - c_3)(z - c_4)},$$

а в качестве h_N выберем

$$h_N := \tilde{\Phi}_\Delta^{-2N} \tilde{h}_N, \quad \tilde{h}_N := \text{const} \cdot \frac{\Phi_\Delta^2}{f_\Delta^4 w_\Delta^2}. \quad (3.17)$$

Для удобства в дальнейшем положим

$$\text{const} := e^{2(\gamma^* - \gamma)}.$$

По теореме 3 асимптотика полиномов (3.16) описывается функцией (см. (2.22))

$$\varphi(z) := \Phi_q^N(z) f\left(\frac{\tilde{h}_N i}{w_{E+}}; z\right). \quad (3.18)$$

Главный член асимптотики характеризуется краевым условием (2.17)

$$\Phi_{q+} \Phi_{q-} \exp\{-2 \log \tilde{\Phi}_\Delta\} = 1 \quad \text{на } E.$$

Делая в левой части последнего равенства перенормировки, учитывая $\mathbb{R}$ -симметрию, получаем

$$\left(\frac{\tilde{\Phi}_q}{\tilde{\Phi}_\Delta}\right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_q}{\tilde{\Phi}_\Delta}\right)_- = e^{-2\gamma} \quad \text{на } E. \quad (3.19)$$

Сравнение полученного равенства (3.19) с (3.10) с учетом замечания, сделанного после формулы (3.14), дает

$$\tilde{\Phi}_q = \tilde{\Phi}_E. \quad (3.20)$$

Обозначим для краткости функцию Сегё в (3.18) через

$$\hat{f} := f\left(\frac{\tilde{h}_N i}{w_{E+}}; z\right).$$

Из определения функции Сегё (2.9) имеем

$$\hat{f}_+ \hat{f}_- \tilde{h}_N = 1 \quad \text{на } E.$$

Подставляя в левую часть значение $\tilde{h}_N$ из (3.17), с учетом (3.19), (3.20) имеем

$$\hat{f}_+ \hat{f}_- \frac{1}{e^{2(\gamma - \gamma^*)}} \frac{\Phi_\Delta^2}{f_\Delta^4 w_\Delta^2} = e^{2\gamma^*} \left(\frac{\hat{f} \tilde{\Phi}_E}{f_\Delta^2 w_\Delta}\right)_+ \left(\frac{\hat{f} \tilde{\Phi}_E}{f_\Delta^2 w_\Delta}\right)_- = 1 \quad \text{на } E.$$

Отсюда, сравнивая с (3.14), получаем

$$\widehat{f} = \widetilde{f}_E, \quad \widehat{f}(\infty) = 1. \quad (3.21)$$

Теорема 3 дает для полиномов ω_N (см. (2.21))

$$\begin{aligned} \frac{\omega_N}{C\varphi} &= 1 + O(\delta^n) \quad \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad 0 < \delta(K) < 1, \\ \frac{\omega_N}{C} &= (\varphi_+ + \varphi_-)(1 + O(\delta^n)) \quad \text{на } E, \quad 0 < \delta < 1. \end{aligned}$$

Подставляя в эти формулы (3.18), (3.20) и (3.21), из первой сразу получаем (3.15₁), а для второй имеем (так как $\Phi_{E+} = \overline{\Phi}_{E-} \Rightarrow |\Phi_{E+}| = |\Phi_{E-}| =: |\Phi_E|$)

$$\frac{\omega_N}{|\widetilde{\Phi}_E|^N} = \left\{ |f_E| \frac{(\Phi_E^N \widetilde{f}_E)_+ + (\Phi_E^N \widetilde{f}_E)_-}{|\Phi_E^N \widetilde{f}_E|} \right\} (1 + O(\delta^n)) \quad \text{на } E, \quad (3.22)$$

что с учетом равномерной ограниченности (по n) выражения в фигурных скобках дает (3.15₂). Итак, последовательность $\{\omega_{2n+1}\}$, для которой справедливы асимптотические формулы (3.15), построена.

2) Теперь мы рассмотрим рациональную функцию r_n степени не выше чем n , которая интерполирует заданную нам функцию $\widehat{\rho}_n(z)$ (см. (3.8)) в $2n + 1$ точках отрезка E , в качестве которых мы выбираем нули построенного нами полинома ω_{2n+1} . Такая рациональная функция называется *многоточечной аппроксимацией Паде*. Хорошо известно (да и нетрудно проверить), что ее знаменатель P_n ортогонален степеням относительно переменного веса h_n на F

$$\int_F P_n(z) z^\nu h_n(z) dz = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.23)$$

где

$$h_n := \frac{\exp\{-2(nQ + Q_1)\}}{\omega_{2n+1}} i^\varepsilon, \quad \varepsilon := \begin{cases} 1, & \Delta \subset \mathbb{R}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3.24)$$

и для отклонения r_n от $\widehat{\rho}_n$ интерполяционная формула Эрмита дает⁴

$$i^\varepsilon \widehat{\rho}_n - r_n = \frac{\omega_{2n+1}}{P_n} R_n, \quad (3.25)$$

где

$$R_n(z) = \frac{1}{P_n(z)} \int_F \frac{P_n^2(t) h_n(t)}{t - z} \frac{dt}{2\pi i} = \int_F \frac{P_n(t) h_n(t)}{t - z} \frac{dt}{2\pi i}.$$

Подставляя в (3.24) асимптотическую формулу (3.15₁)

$$h_n = \exp\{-2n(Q + \log \widetilde{\Phi}_E)\} \widetilde{h}_n,$$

где

$$\widetilde{h}_n = \widetilde{h}_\infty + o(1), \quad \widetilde{h}_\infty = \frac{e^{-2Q_1} i^\varepsilon}{\widetilde{\Phi}_E \widetilde{f}_E} \quad \text{на } \Omega,$$

⁴Множитель i^ε введен, чтобы (3.25) было действительным на E .

убеждаемся, что весовая функция (3.24) удовлетворяет условиям теоремы 2, которая сформулирована нами в § 3 и будет доказана ниже в §§ 5–7. (Отметим, что Q в формулировке теоремы 2 соответствует здесь $Q + \log \tilde{\Phi}_E$.) Поэтому полиномы $P_n(z) = z^n + \dots$ для достаточно больших n существуют и для них справедливы асимптотические формулы (2.18), (2.19). Нам потребуются лишь формулы внешней асимптотики (2.18₁), которые, напомним, имеют вид

$$\begin{aligned} P_n &= (\Phi_q e^{-\gamma})^n \left(\frac{\hat{f}}{\hat{f}(\infty)} + o(1) \right), \\ R_n &= \frac{i}{w_\Delta} \cdot \frac{e^{-n\gamma}}{\hat{f}(\infty)} \cdot \frac{1 + o(1)}{\Phi_q^n \hat{f}} \end{aligned} \quad \text{на } K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad (3.26)$$

где главный член асимптотики Φ_q удовлетворяет краевому условию (2.17)

$$\Phi_q + \Phi_{q-} e^{-2(Q + \log \tilde{\Phi}_E)} = 1 \quad \text{на } \Delta, \quad (3.27)$$

а функция Сегё, для которой мы здесь используем обозначение

$$\hat{f}(z) := f(\tilde{h}_\infty; z),$$

определяется граничной задачей (2.13) с краевым условием

$$i^\varepsilon \hat{f}_+ \hat{f}_- \frac{e^{-Q_1}}{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E} = \frac{i}{w_{\Delta+}} \quad \text{в } \overset{\circ}{\Delta}. \quad (3.28)$$

Сравнивая (3.27) с краевым условием на Δ в (3.10), заключаем, что

$$\Phi_q = \Phi_\Delta.$$

Возводя (3.28) в квадрат и учитывая, что $w_{\Delta+} = -w_{\Delta-}$, а также что при $\varepsilon = 0$ (см. (3.1₁)) нормировка в бесконечности у функции Сегё (2.12), (2.11₁) оказывается комплексной, из (3.14) получаем

$$\hat{f}^2 = f_\Delta^2 i.$$

Таким образом, асимптотические формулы (3.26) для P_n и R_n записываются с помощью Φ_Δ и f_Δ (определенных выше в (3.9) и (3.13) соответственно) как

$$\begin{aligned} P_n &= (\Phi_\Delta e^{-\gamma})^n \left(\frac{f_\Delta}{f_\Delta(\infty)} + o(1) \right), \\ R_n &= \frac{1}{w_\Delta} \cdot \frac{e^{-n\gamma}}{f_\Delta(\infty)} \cdot \frac{1 + o(1)}{\Phi_\Delta^n f_\Delta} \end{aligned} \quad \text{на } K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F. \quad (3.29)$$

3) Для завершения доказательства теоремы 1 нам осталось подставить асимптотические формулы (3.29) и (3.15) на E в выражение для отклонения (3.25):

$$\begin{aligned} i^\varepsilon \hat{\rho}_n - r_n &= \frac{\omega_{2n+1}}{P_n} R_n = \frac{\omega_{2n+1}}{|\tilde{\Phi}_E|^{2n+1}} \cdot \frac{|\tilde{\Phi}_E|^{2n+1}}{(\Phi_\Delta e^{-\gamma})^n \tilde{f}_\Delta} \cdot \frac{1}{w_\Delta} \cdot \frac{e^{-\gamma n} (1 + o(1))}{f_\Delta(\infty) \Phi_\Delta^n f_\Delta} \\ &= 2 \left| \frac{\tilde{\Phi}_E}{\Phi_\Delta} \right|^{2n} \frac{|\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E|}{f_\Delta^2 w_\Delta} (\cos((2n+1) \arg \tilde{\Phi}_E + \arg \tilde{f}_E) + o(1)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

С учетом краевых условий (3.10) и (3.14) на E и $\mathbb{R}$ -симметрии получаем

$$i^\varepsilon \hat{\rho}_n - r_n = 2e^{-2\gamma n} e^{-\gamma^*} \cos((2n+1) \arg \tilde{\Phi}_E + \arg \tilde{f}_E) (1 + o(1))$$

равномерно на E . Таким образом, построенные нами рациональные аппроксимации обеспечивают асимптотический (равномерно на всем E) альтернанс приближения. Отсюда с помощью теоремы Валле Пуссена (см. [64; с. 62]) следует справедливость теоремы 1.

3.3. Доказательство теоремы 1'. Доказательство теоремы 1' идет по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Более того, в доказательстве теоремы 1' используется меньше средств, чем в доказательстве теоремы 1, ибо и асимптотика полиномов ω_{2n+1} с нулями в оптимальных точках интерполяций, и асимптотика полиномов P_n , знаменателей многоточечных аппроксимаций Паде, описываются одной и той же теоремой 3, доказательство которой (как это будет видно в последующих §§ 4–7) гораздо проще доказательства теоремы 2.

Напомним, что нам нужно получить асимптотику отклонения на E наилучших рациональных аппроксимаций от функций (1.22)

$$\hat{\rho}_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_F e^{-2(nQ+Q_1)} \frac{i dt}{w_{\Delta+}(t-z)}.$$

Пусть $\tilde{\Phi}_E$ и $\tilde{f}_E$ – некоторые функции такие, что

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_E &\in H(\mathbb{C} \setminus E), \quad \exists \tilde{\Phi}_{E\pm} \in L^\infty(E), \quad \frac{\tilde{\Phi}_E}{z} \rightarrow 1, \quad z \rightarrow \infty, \\ \tilde{f}_E &\in H^\infty(\mathbb{C} \setminus E), \quad \tilde{f}_E(\infty) = 1; \end{aligned} \quad (3.31)$$

конкретный выбор функций, удовлетворяющих (3.31), мы приведем позднее.

Пусть ω_N – многочлен

$$\omega_N(z) := \prod_{j=1}^N (z - z_{j,N}), \quad \{z_{j,N}\} \in E,$$

обладающий асимптотическими формулами (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{\omega_N}{\tilde{\Phi}_E^{2n+1} \tilde{f}_E} &\rightrightarrows 1 \quad \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \\ \left[\frac{\omega_N}{|\tilde{\Phi}_E|^{2n+1}} - |\tilde{f}_E| 2 \cos(N \arg \tilde{\Phi}_E + \arg \tilde{f}_E) \right] &\rightrightarrows 0 \quad \text{на } E, \end{aligned} \quad (3.32)$$

сходящимися со скоростью геометрической прогрессии при $n \rightarrow \infty$. Мы построим такие полиномы позднее, после того как конкретизируем выбор функций $\tilde{\Phi}_E$ и $\tilde{f}_E$.

Рассмотрим многоточечную аппроксимацию Паде r_n степени не выше чем n , интерполирующую $\hat{\rho}_n$ в нулях ω_{2n+1} . Знаменатели рациональной функции r_n суть

полиномы $P_n(z) = z^n + \dots$, ортогональные степеням на $\Delta = F$ относительно переменного веса (см. (3.24))

$$h := \frac{h_n i}{w_{\Delta+}}, \quad h_n := \frac{\exp\{-2(nQ + Q_1)\}}{\omega_{2n+1}},$$

где по (3.32)

$$h_n = e^{-2n(Q + \log \tilde{\Phi}_E)} \left(\frac{e^{-Q_1}}{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E} + o(1) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

По теореме 3 полиномы P_n и соответствующие им функции 2-го рода R_n (2.6) обладают асимптотическими формулами (2.21):

$$\begin{aligned} P_n &= (\Phi_{\Delta} C_{\Delta})^n \left(\frac{f_{\Delta}}{f_{\Delta}(\infty)} + O(\delta^n) \right), \\ R_n &= \frac{i}{w_{\Delta}} \frac{C_{\Delta}^n}{f_{\Delta}(\infty)} \frac{1 + O(\delta^n)}{\Phi_{\Delta}^n f_{\Delta}^2}, \end{aligned} \quad 0 < \delta < 1, \quad \text{на } K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad (3.33)$$

где функции $\Phi_{\Delta}, f_{\Delta}$,

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta} &\in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \quad \exists \Phi_{\Delta\pm} \in L^{\infty}(E), \quad \frac{\Phi_{\Delta}(z)}{z} \rightarrow C_{\Delta} > 0, \quad z \rightarrow \infty, \\ f_{\Delta} &\in H^{\infty}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta), \end{aligned}$$

определяются по функциям $\tilde{\Phi}_E$ и $\tilde{f}_E$ краевыми условиями на Δ

$$\begin{cases} \Phi_{\Delta+} \Phi_{\Delta-} e^{-2(Q + \log \tilde{\Phi}_E)} = 1, \\ f_{\Delta+} f_{\Delta-} \frac{e^{-2Q_1}}{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E} = 1, \end{cases}$$

которые могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} \left(\frac{\tilde{\Phi}_E}{\Phi_{\Delta}} \right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E}{\Phi_{\Delta}} \right)_- = e^{-2Q}, \\ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{f_{\Delta}^2} \right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{f_{\Delta}^2} \right)_- = e^{-4Q_1} \end{cases} \quad \text{на } \Delta. \quad (3.34)$$

Подставляя асимптотические формулы (3.33) и (3.32) в выражение (3.25) для отклонения рациональной функции r_n от $\hat{\rho}_n$, получаем, как и ранее (см. (3.30)),

$$\hat{\rho}_n - r_n = \frac{\omega_{2n+1}}{P_n} R_n = 2 \left| \frac{\tilde{\Phi}_E}{\Phi_{\Delta}} \right|^{2n} \frac{|\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E| i}{f_{\Delta}^2 w_{\Delta}} (\cos((2n+1) \arg \tilde{\Phi}_E + \arg \tilde{f}_E) + o(1))$$

равномерно на E . Для получения асимптотического альтернанса (равномерно на E) мы приравняем амплитуду в последней формуле к константе. В результате имеем:

$$\begin{cases} \left| \frac{\tilde{\Phi}_E}{\Phi_{\Delta}} \right| =: d =: e^{-\gamma}, \\ \left| \frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{f_{\Delta}^2 w_{\Delta}} \right| =: d_1 =: e^{-\gamma^*} \end{cases} \quad \text{на } E.$$

Отсюда с учетом $\mathbb{R}$ -симметрии мы получаем краевое условие:

$$\begin{cases} \left(\frac{\tilde{\Phi}_E}{\Phi_\Delta} \right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E}{\Phi_\Delta} \right)_- = e^{-2\gamma}, \\ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{f_\Delta^2} \right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{f_\Delta^2} \right)_- = e^{-2\gamma^*} w_\Delta^2 \end{cases} \quad \text{на } E. \quad (3.35)$$

Сравнивая первые соотношения в (3.34) и (3.35) с (3.10), мы замечаем, что для определения $\tilde{\Phi}_E/\Phi_\Delta$ и γ мы имеем ту же краевую задачу, что и при доказательстве теоремы 1. Следовательно,

$$\gamma = \gamma(E; F, \operatorname{Re} Q) = \gamma^*(E; F, Q)$$

и решение этой краевой задачи дает нам конкретный выбор $\tilde{\Phi}_E$ и Φ_Δ .

Однако вторые соотношения в (3.34) и (3.35) еще не формируют краевую задачу вида (1.13). Поэтому мы вводим в рассмотрение функцию

$$\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{\Phi_{0,F} f_\Delta^2}, \quad (3.36)$$

где $\Phi_{0,F}$, определенная в (1.24), удовлетворяет на $\Delta = F$ краевому условию

$$\Phi_{0,F+} \Phi_{0,F-} = 1.$$

Отсюда для функции (3.36) мы получаем краевые условия

$$\left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{\Phi_{0,F} f_\Delta^2} \right)_+ \left(\frac{\tilde{\Phi}_E \tilde{f}_E}{\Phi_{0,F} f_\Delta^2} \right)_- = \begin{cases} e^{-4Q_1} & \text{на } \Delta, \\ e^{-2\gamma^*} \frac{w_\Delta^2}{\Phi_{0,F}^2} & \text{на } E, \end{cases} \quad (3.37)$$

которые уже формируют краевую задачу, подобную (3.14), сводящуюся перенормировкой в точке ∞ к (1.13). Так как правые части в (3.37) удовлетворяют условию Гёльдера, получаем

$$\gamma^* = \gamma^* \left(E, \log \frac{\Phi_{0,F}}{w_F}; F, 2Q_1 \right)$$

и, факторизуя решение краевой задачи (1.13) с граничными условиями (3.37) (т.е. функцию (3.36)), осуществляем конкретный выбор функций $\tilde{f}_E$ и f_Δ .

Для замыкания цепочки рассуждений настоящего доказательства нам осталось предъявить полиномы $\omega_N(z)$, обладающие асимптотическими формулами (3.32). Как и ранее, в качестве полинома ω_N берем полином, ортогональный на E относительно веса $\tilde{\Phi}_\Delta^{-2N} \frac{\Phi_\Delta^2}{f_\Delta^4 w_\Delta^2} \frac{i}{w_E}$.

Повторением соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 1, основанных опять же на теореме 3, получаем, что искомые полиномы построены. Теорема 1' доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3. Метод скалярной задачи Римана

В этом параграфе мы докажем теорему 3 о сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно аналитического комплексного переменного веса с точками ветвления квадратичного порядка в концах дуги, носителя меры ортогональности. Доказательство основано на исследовании некоторой скалярной краевой задачи Римана, рассматриваемой на двулистной римановой поверхности.

4.1. Краевая задача на римановой поверхности. Напомним, что нам нужно получить асимптотические формулы (2.21) для полиномов $P_n(z) = z^n + \dots$,

$$\int_F P_n(z) z^\nu \frac{h_n(z)i}{w_+(z)} dz = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.1)$$

и функций второго рода (2.6)

$$R_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{P_n(t)h_n(t)i}{(t-z)w_+(t)} dt, \quad (4.2)$$

для которых ввиду соотношений ортогональности справедливо

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (4.2')$$

Переменная составляющая веса ортогональности в (4.1) голоморфна в окрестности Ω дуги F , не обращается в нуль в Ω и имеет вид

$$h_n := e^{-2nQ} \tilde{h}_n, \quad \|\tilde{h}_n - \tilde{h}_\infty\|_{H(\Omega)} = o(1), \quad (4.3)$$

где Q таково, что равновесная мера λ в поле $\operatorname{Re} Q$ на F имеет своим носителем дугу Δ , совпадающую с F :

$$\Delta := S(\lambda), \quad \Delta \equiv F,$$

и в окрестности ω_j концевой точки $\tilde{c}_j$, $j = 1, 2$, дуги Δ производная λ имеет вид

$$\lambda'(z) = \frac{m_j(z)}{w(z)}, \quad m_j \in H(\omega_j), \quad m_j(\tilde{c}_j) \neq 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.4)$$

где

$$w(z) = ((z - \tilde{c}_1)(z - \tilde{c}_2))^{1/2}, \quad \frac{w(z)}{z} \rightarrow 1 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Также напомним, что асимптотические формулы (2.21), которые нам нужно доказать, записываются с помощью функции φ (см. (2.22)), являющейся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \varphi &\in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \quad \varphi \neq 0 \quad \text{в } \mathbb{C} \setminus \Delta, \quad \exists \varphi_\pm \in L^\infty(\Delta), \\ \varphi(z) &= \frac{z^n}{C_n} + \dots, \quad z \rightarrow \infty, \quad C_n > 0, \\ \varphi_+ \varphi_- &= \frac{1}{h_n} \quad \text{на } \Delta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Исходный момент различных подходов, связанных с краевой задачей Римана, состоит в применении формул Сохоцкого–Племеля к выражению (4.2) для функций второго рода R_n

$$R_{n+} - R_{n-} = P_n \frac{h_n i}{w_+} \text{ во внутренних точках } \Delta,$$

что для функции $R_n w$ с ограниченными на Δ граничными значениями дает

$$(R_n w)_+ + (R_n w)_- = h_n P_n i \text{ на } \Delta. \quad (4.6)$$

Тожественные преобразования последнего равенства с помощью декомпозиции (4.5) весовой функции h_n на Δ приводят к

$$\begin{aligned} (R_n w \varphi)_+ + \left(\frac{R_n w}{\varphi h_n} \right)_- &= \left(\frac{i P_n}{\varphi} \right)_-, \\ \left(\frac{R_n w}{\varphi h_n} \right)_+ + (R_n w \varphi)_- &= \left(\frac{i P_n}{\varphi} \right)_+, \end{aligned}$$

т.е. для функций с ограниченными на Δ граничными значениями имеем соотношение

$$\left(\frac{w R_n \varphi}{i} \right)_\pm - \left(\frac{P_n}{\varphi} \right)_\mp = - \left(\frac{w R_n}{i \varphi h_n} \right)_\mp \text{ на } \Delta. \quad (4.6')$$

Рассмотрим двулистную риманову поверхность $\mathfrak{R}$ функции w . Эта поверхность представляет собой два экземпляра расширенной комплексной плоскости, разрезанных вдоль дуги Δ (мы будем обозначать их через $\mathfrak{R}^+$ и $\mathfrak{R}^-$), которые стандартным образом склеены, так что левый “берег” $\Delta_+ \subset \mathfrak{R}^+$ отождествлен с правым “берегом” $\Delta_- \subset \mathfrak{R}^-$ и соответственно $\Delta_- \subset \mathfrak{R}^+$ отождествлен с $\Delta_+ \subset \mathfrak{R}^-$. Каноническую проекцию $\mathfrak{R}$ в $\mathbb{C}$ обозначаем через π :

$$\pi(\mathfrak{R}) = \overline{\mathbb{C}};$$

наконец, замкнутый на $\mathfrak{R}$ контур, разделяющий ее на два листа $\mathfrak{R}^+$ и $\mathfrak{R}^-$, проекция которого совпадает с “берегом” (+) и “берегом” (−) дуги Δ , обозначим через $\tilde{\Delta}$:

$$\mathfrak{R} := \mathfrak{R}^+ \cup \tilde{\Delta} \cup \mathfrak{R}^-. \quad (4.7)$$

Контур $\tilde{\Delta}$ считаем ориентированным так, что при его обходе область $\mathfrak{R}^+$ остается слева и соответственно $\mathfrak{R}^-$ справа.

Определим на $\mathfrak{R}$ кусочно-аналитическую функцию

$$\mathcal{F}(z) := \begin{cases} \left(\frac{w R_n \varphi}{i} \right)(\pi(z)), & z \in \mathfrak{R}^+, \\ \left(\frac{P_n}{\varphi} \right)(\pi(z)), & z \in \mathfrak{R}^-, \end{cases} \quad (4.8)$$

а также определим функцию

$$j(z) := -\left(\frac{wR_n}{\varphi h_n}\right)(\pi(z)), \quad z \in \Omega^- \subset \mathfrak{R}^-, \quad \pi(\Omega^-) = \Omega. \quad (4.9)$$

Предположим, что для фиксированного n ортогональный многочлен $P_n(z) = z^n + \dots$ существует и что (см. (4.2')) R_n имеет в точке ∞ нуль порядка $n+1$. Такие индексы n называются *нормальными индексами*. Ниже мы убедимся, что наше предположение справедливо при больших n . Нормальность индекса n , определение (4.5) функции φ , а также краевые условия (4.6) означают, что функция $\mathcal{F}$ является единственным решением следующей краевой задачи на $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\in H^\infty(\mathfrak{R} \setminus \tilde{\Delta}), \\ \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- &= j_- \quad \text{на } \tilde{\Delta}, \\ \mathcal{F}(\infty^{(-)}) &= C_n + O\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Решение краевой задачи (4.10) записывается с помощью интегральной формулы Коши на римановой поверхности

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Delta}} j_-(\xi) d\Omega(\xi; z, \infty^{(-)}) + C_n, \quad z \in \mathfrak{R} \setminus \tilde{\Delta}, \quad (4.11)$$

где $d\Omega$ — мероморфный дифференциал на $\mathfrak{R}$, имеющий простой полюс в точке z с вычетом $+1$ и простой полюс в точке $\infty^{(-)}$ с вычетом -1 . Для этого дифференциала известен явный вид

$$d\Omega(\xi; z, \infty^{(-)}) := \left(\frac{1}{2} \frac{w(\xi) + w(z)}{(\xi - z)w(\xi)} - \frac{1}{w(\xi)} \right) d\xi.$$

4.2. Деформация контура в интегральном уравнении. При $z \in \overline{\mathfrak{R}^+}$ формула (4.11) представляет собой интегральное уравнение для функций второго рода R_n . Обратим внимание, что под интегралом в (4.11) стоят предельные значения голоморфной в $\Omega^- \subset \mathfrak{R}^-$ функции $j(\xi)$ при стремлении переменной ξ со стороны листа $\mathfrak{R}^-$ к $\tilde{\Delta}$. Поэтому мы можем деформировать контур $\tilde{\Delta}$ в некоторый контур $\tilde{\Delta}' \subset \Omega^-$, так что для точек z , лежащих вне кольцеобразной области $\mathcal{A} \subset \Omega^-$, ограниченной контурами $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\Delta}'$, соотношение (4.11) сохраняет силу:

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Delta}'} j(\xi) d\Omega(\xi; z, \infty^{(-)}) + C_n, \quad z \in \mathfrak{R} \setminus \overline{\mathcal{A}}. \quad (4.12)$$

Запишем функцию скачка j в виде

$$j = -wR_n\varphi J,$$

где (см. (4.9))

$$J := \frac{1}{\varphi^2 h_n}.$$

Справедлива

ЛЕММА 1. *Существует область $\tilde{d} \subset \Omega^-$ такая, что на любом контуре $\tilde{\Delta}' \subset \tilde{d} \setminus \Delta$ имеет место*

$$\|J\|_{C(\tilde{\Delta}')} = O(\delta^n), \quad 0 < \delta < 1, \quad (4.13)$$

где константа δ зависит от $\tilde{\Delta}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спроектируем лист $\mathfrak{R}^-$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Воспользовавшись представлением (2.22) функции φ , имеем

$$J = \left(\frac{1}{f_{\tilde{h}_n}^2} \right) \left(\frac{e^{2nQ}}{\Phi_q^{2n}} \right), \quad (4.14)$$

где функция $f_{\tilde{h}_n} := f\left(\frac{\tilde{h}_n i}{w_+}; z\right)$ определена в (2.10), а функция Φ_q — в (2.16). Ввиду равномерной ограниченности сверху и снизу семейства $\{\tilde{h}_n\}$ в Ω (см. (4.3)) имеем

$$(f_{\tilde{h}_n}^2 \tilde{h}_n)^{-1} \leq C \quad \text{на } K \Subset \Omega \quad (4.15)$$

равномерно по n . Рассмотрим второй сомножитель в (4.14). На дуге Δ с учетом S -симметрии (см. (2.17) и (2.16)) имеем

$$\frac{e^{2nQ}}{\Phi_{q\pm}^{2n}} = \left(\frac{\Phi_{q\mp}}{\Phi_{q\pm}} \right)^n = \exp\{-n(\mathcal{V}_{\mp}^{\lambda} - \mathcal{V}_{\pm}^{\lambda})\} \quad \text{на } \Delta.$$

Так как для граничных значений комплексного потенциала

$$\mathcal{V}^{\lambda}(z) = - \int_{\Delta} \ln(z-t) d\lambda(t) = V^{\lambda}(z) - i \int_{\Delta} \arg(z-t) d\lambda(t)$$

на Δ справедливо

$$\mathcal{V}_{\pm}^{\lambda}(x) = V^{\lambda}(x) - i \int_{-1}^x \arg(x-t) d\lambda(t) + i \int_0^x [\arg(t-x) \pm \pi] d\lambda(t), \quad x \in \Delta$$

(напомним: мы считаем, что концы дуги Δ суть точки $-1, 0$), то

$$\frac{e^{2nQ(x)}}{\Phi_{q\pm}^{2n}(x)} = \exp\left\{\mp 2\pi i n \int_x^0 d\lambda(t)\right\}, \quad x \in \Delta.$$

Обозначим

$$l_{\pm}(x) := \mp \int_x^0 d\lambda(t), \quad x \in \Delta. \quad (4.16)$$

Ввиду положительности равновесной меры λ имеем

$$\operatorname{Im} l_{\pm} = 0 \quad \text{на } \Delta. \quad (4.17)$$

Голоморфность внешнего поля Q в Ω дает, что равновесная мера абсолютно непрерывна и ее плотность λ' голоморфна во внутренних точках дуги Δ , а следовательно, она голоморфна в некоторой линзообразной области d : $\Delta \subset \bar{d} \subset \Omega$. Таким образом, функция

$$l(z) := \begin{cases} - \int_z^0 \lambda'(t) dt, & z \in d^+, \\ + \int_z^0 \lambda'(t) dt, & z \in d^-, \end{cases} \quad \overline{d^+ \cup \Delta \cup d^-} = \bar{d}, \quad (4.18)$$

будучи первообразной от голоморфной функции, осуществляет голоморфное продолжение функций l_+ и l_- с “берегов” дуги Δ в односвязные области d^+ и d^- .

Используя локальное представление (2.20) плотности λ' в окрестностях O_1 и O_0 концевых точек -1 и 0 дуги Δ , имеем

$$l(z) = \begin{cases} \tilde{m}_1(z)\sqrt{z+1}, & \tilde{m}_1 \in H(O_1), z \in O_1, \\ \tilde{m}_0(z)\sqrt{z}, & \tilde{m}_0 \in H(O_0), z \in O_0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Правые части (4.19) в точках, соответствующих различным берегам Δ , после обхода концевых точек различаются лишь знаком, поэтому (4.18) осуществляет голоморфное продолжение (4.16) в более широкую область $\tilde{d} \setminus \Delta$, охватывающую концевые точки:

$$l \in H(\tilde{d} \setminus \Delta), \quad \tilde{d} := d^+ \cup d^- \cup O_1 \cup O_0.$$

Убедимся, что справедливо

$$\operatorname{Im} l > 0 \quad \text{в} \quad \tilde{d} \setminus \Delta. \quad (4.20)$$

В областях d^+ и d^- неравенство (4.20) выполняется вследствие соотношений Коши–Римана:

$$\left. \frac{\partial \operatorname{Im} l}{\partial n} \right|_x = \left. \frac{\partial \operatorname{Re} l}{\partial \tau} \right|_x = \lambda'(x) > 0, \quad x \in \Delta,$$

что с учетом (4.17) дает

$$\operatorname{Im} l > 0 \quad \text{в} \quad d^+ \cup d^-. \quad (4.20')$$

В окрестностях концевых точек дуги локальное представление (4.19) функции l дает следующее: стартуя с действительных значений l на Δ (см. (4.17)), аргумент функции l после обхода концевой точки получает приращение π , что с учетом (4.20') приводит к

$$0 < \arg l(z) < \pi, \quad z \in O_1 \cup O_0,$$

т. е.

$$\operatorname{Im} l > 0 \quad \text{в} \quad O_1 \cup O_0.$$

Таким образом, функция

$$J = (f_{h_n}^2 \tilde{h}_n)^{-1} \exp\{2\pi i n l\}$$

осуществляет голоморфное продолжение функции (4.14) с обоих “берегов” дуги Δ в область $\tilde{d} \setminus \Delta$, причем ввиду (4.15) и (4.20) оценка (4.13) выполняется на любом контуре $\Delta' \subset \tilde{d} \setminus \Delta$, а показатель скорости δ зависит от расстояния между Δ' и Δ . Лемма доказана.

4.3. Асимптотические формулы для R_n и Q_n . Сначала мы оценим граничные значения функций второго рода R_n на Δ . Обозначим

$$M_n := \|wR_n\varphi\|_{C(\Delta)} =: (wR_n\varphi)(z_0), \quad z_0 \in \Delta.$$

Рассмотрим уравнение (4.12) для $z \in \mathfrak{R}^+$

$$\left(\frac{wR_n\varphi}{i}\right)(\pi(z)) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Delta}'} (wR_n\varphi J)(\pi(\xi)) d\Omega(\xi; z, \infty^{(-)}) + C_n; \quad (4.21)$$

заметим, что теперь интеграл не является сингулярным при $z \rightarrow \tilde{\Delta}$, и так как функция $wR_n\varphi$ имеем непрерывные предельные значения на Δ , рассматривая (4.21) в точке z_0 , получаем

$$M_n \leq M_n O(\delta^n) + C_n, \quad (4.22)$$

т. е.

$$M_n \leq \frac{C_n}{1 - O(\delta^n)}. \quad (4.22')$$

Возвращаясь к (4.21) для $z \in \tilde{\Delta}_+$, имеем

$$\left|\left(\frac{wR_n\varphi}{i}\right)(\pi(z)) - C_n\right| \leq M_n O(\delta^n),$$

откуда с учетом (4.22') получаем

$$\left(\frac{wR_n\varphi}{iC_n}\right)_{\pm} = 1 + O(\delta^n) \text{ на } \Delta,$$

это и есть искомая асимптотическая формула (2.21)-B2) для R_n на Δ . Из полученной формулы, во-первых, по принципу максимума модуля вытекает справедливость асимптотической формулы (2.21)-B2) для R_n на компактах в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, а во-вторых, так как (с учетом (4.5))

$$\frac{(wR_n)_{\pm}}{h_n} = \frac{C_n}{\varphi_{\pm} h_n} (1 + O(\delta^n)) = C_n \varphi_{\mp} (1 + O(\delta^n)),$$

краевое условие (4.6) дает

$$P_n = \left(\frac{wR_n}{h_n}\right)_{+} + \left(\frac{wR_n}{h_n}\right)_{-} = C_n(\varphi_{+} + \varphi_{-})(1 + O(\delta^n)), \quad (4.23)$$

т. е. асимптотическая формула (2.21)-B2) для полинома P_n на Δ также получена. На компактах $K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ асимптотическая формула для полиномов P_n (см. (2.21)-B1)) получается следующим образом. Фиксируем K и выбираем $\tilde{\Delta}'$ так, что

$$K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \pi(\mathcal{A}).$$

Рассматривая уравнение (4.12) для $z \in \mathfrak{R}^- \setminus \mathcal{A}$, имеем

$$\left(\frac{P_n}{\varphi}\right)(\pi(z)) - C_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Delta}'} (w R_n \varphi J)(\pi(\xi)) d\Omega(\xi; z, \infty^{(-)})$$

и, производя оценку правой части с помощью (4.22') и (4.13), получаем искомую формулу (2.21)-B1).

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось проверить наше предположение о нормальности индексов при их стремлении к бесконечности. Если выполняется обратное, т.е. существует бесконечная подпоследовательность Λ индексов n , не являющихся нормальными, то для этих индексов существуют ортогональные n -степеням z многочлены $P_n(z)$ такие, что

$$\deg P_n < n \text{ и } R_n = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda.$$

Для этих P_n и R_n мы также можем написать краевую задачу (4.10), в которой условие нормировки превращается в $\mathcal{F}(\infty^{(-)}) = O(1/z)$. Повторяя проведенный выше анализ решения полученной краевой задачи, мы придем к оценке (4.22) в виде

$$M_n \leq M_n O(\delta^n), \quad 0 < \delta < 1,$$

что приводит к противоречию для достаточно больших n . Теорема 3 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2.

Метод матричной задачи Римана–Гильберта

В этом и последующих параграфах мы докажем теорему 2 о сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного переменного веса, голоморфного в окрестности носителя, причем носитель равновесной меры в поле переменного веса предполагается связным. Для доказательства мы используем метод, основанный на исследовании некоторой матричной задачи Римана. Этот метод предложен и разработан П. Дейфтом с соавторами (см. [26], [58]–[61]). Новым моментом в настоящей статье по сравнению с процитированными работами является то, что переменный вес ортогональности является *комплексным* и ортогональность рассматривается на дуге в *комплексной* плоскости. Хотя справедливости ради отметим, что и общая схема приводимого здесь доказательства, и многие его детали зачастую повторяют (с некоторыми методологическими новациями) соответствующие рассуждения из [59], [61].

В этом параграфе мы приводим условное доказательство теоремы 2 в предположении существования решения некоторых матричных краевых задач *в окрестностях концевых точек* носителя равновесной меры. Анализ этих краевых задач посвящены последующие параграфы.

5.1. Матричная задача Римана–Гильберта для ортогональных многочленов. Напомним, что нам нужно получить асимптотические формулы (2.18), (2.19) для ортогональных полиномов $P_n(z) = z^n + \dots$,

$$\int_F P_n(z) z^\nu h_n(z) dz = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.1)$$

и функций второго рода

$$R_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{P_n(t)h_n(t)}{t-z} dt, \quad R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.1')$$

Весовая функция h_n голоморфна в окрестности Ω гладкой жордановой дуги F , не обращается в нуль в Ω и имеет вид

$$h_n := e^{-2nQ} \tilde{h}_n, \quad \|\tilde{h}_n - \tilde{h}_\infty\|_{H(\Omega)} = o(1), \quad (5.2)$$

где Q таково, что носитель Δ равновесной меры λ в поле $\operatorname{Re} Q$ S -симметричен и связан (см. (2.14)).

Наряду с парой P_n, R_n рассмотрим пару $\tilde{P}_{n-1}, \tilde{R}_{n-1}$ такую, что

$$\begin{aligned} \int_F \tilde{P}_{n-1}(z) z^\nu h_n(z) dz &= 0, \quad \nu = 0, \dots, n-2, \quad \tilde{P}_{n-1}(z) = z^{n-1} + \dots, \\ \tilde{R}_{n-1}(z) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{\tilde{P}_{n-1}(t)h_n(t)}{t-z} dt, \quad \tilde{R}_{n-1}(z) = \frac{1}{mz^n} + \dots, \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где m есть некоторая зависящая от n константа.

Как и при доказательстве теоремы 3, мы предполагаем справедливость утверждения А) теоремы 2, т.е. что для достаточно больших n пары (P_n, R_n) и $(\tilde{P}_{n-1}, \tilde{R}_{n-1})$ существуют. Это предположение будет доказано в конце параграфа (см. п. 5.8).

Следуя [63], рассмотрим матричнозначные функции

$$Y := \begin{pmatrix} P_n & R_n \\ m\tilde{P}_{n-1} & m\tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad W := \begin{pmatrix} 1 & h_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция $Y \in H_{2 \times 2}(\mathbb{C} \setminus F)$ имеет непрерывные граничные (нетангенциальные) значения Y_+ и Y_- “внутри” F (т.е. за исключением конечных точек F), и эти граничные значения L^2 -интегрируемы на всем F . Причем ввиду соотношений Сохоцкого

$$P_n h_n = R_{n+} - R_{n-}$$

имеем

$$Y_- W = \begin{pmatrix} P_n & P_n h_n + R_{n-} \\ m\tilde{P}_{n-1} & m(\tilde{P}_{n-1} h_n + \tilde{R}_{(n-1)-}) \end{pmatrix} = Y_+.$$

Таким образом, функция Y является единственным решением следующей матричной краевой задачи Римана–Гильберта:

$$\begin{aligned} Y &\in H_{2 \times 2}(\mathbb{C} \setminus F), \quad \exists Y_\pm \in L^2_{2 \times 2}(F), \\ Y_+ &= Y_- W \quad \text{“внутри” } F, \\ Y(z) &= \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty, \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Краевая задача (5.3) является тождественной переформулировкой определения ортогональных многочленов (5.1).

5.2. Нормировка матричной краевой задачи. Напомним, что асимптотические формулы (2.18), которые нам нужно доказать, записываются с помощью функции φ (см. (2.19)), являющейся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \varphi &\in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \quad \varphi \neq 0 \text{ в } \mathbb{C} \setminus \Delta, \quad \exists \varphi_{\pm} \in L^2(\Delta), \\ \varphi(z) &= \frac{z^n}{C_n} + \dots, \quad z \rightarrow \infty, \\ \varphi_+ \varphi_- h_n \omega_{\Delta+} &= 1 \text{ на } \Delta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь мы используем обозначение

$$\omega_{\Delta} := \frac{w_{\Delta}}{i}. \quad (5.5)$$

Также напомним, что для удобства обозначений мы считаем дугу Δ (носитель равновесной меры) начинающейся в точке -1 и оканчивающейся в точке 0 , поэтому

$$w_{\Delta} = \sqrt{z(z+1)}, \quad \omega_{\Delta} = \sqrt{z(-z-1)}.$$

Наша ближайшая цель – преобразовать граничную задачу (5.3) так, чтобы решение новой задачи (в отличие от Y) было бы функцией, голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, т.е. не имело бы особенностей в точке ∞ . Для этого с помощью диагональных матриц

$$S := \text{diag}\{\varphi^{-1}, \varphi\}; \quad C := \text{diag}\{C_n^{-1}, C_n\}$$

определим матрицу-функцию:

$$Z := CYS = \begin{pmatrix} \frac{Q_n}{C_n \varphi} & \frac{\varphi}{C_n} R_n \\ \frac{C_n m \tilde{Q}_{n-1}}{\varphi} & C_n m \varphi \tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Эта функция является единственным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} Z &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus F), \\ Z_+ &= Z_- J \text{ на } F, \\ Z(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где матрица-функция скачка J равна

$$J := S_-^{-1} W S_+ = \begin{pmatrix} \varphi_- / \varphi_+ & \varphi_+ \varphi_- h_n \\ 0 & \varphi_+ / \varphi_- \end{pmatrix} \text{ на } F. \quad (5.8)$$

5.3. Замечание о схеме доказательства. Прежде чем реализовывать следующие шаги доказательства асимптотических формул (2.18), вкратце поясним, в чем состоит суть используемого метода. Нам нужно найти, к чему стремится при $n \rightarrow \infty$ решение краевой задачи (5.3). Если бы эквивалентная (5.3) задача (5.7) была скалярной, то мы без труда (как при доказательстве теоремы 3) выписали бы решение для $\log Z$ с помощью интеграла Коши и тем самым имели бы не только асимптотические, но и точные формулы (для конечных n) для ортогональных многочленов, выразив их через известную нам функцию скачка J . Однако ввиду того что задача (5.7) матричная, ее нельзя так просто прологарифмировать и тем самым свести к задаче с известным решением. Таким образом, нам следует продолжить цепочку преобразований (5.3) $\rightarrow$ (5.7) $\rightarrow \dots$ до тех пор, пока для полученной краевой задачи (эквивалентной исходной задаче (5.3)) не станет возможно выписать решение или его асимптотику. Скажем заранее, что такой задачей будет задача, в которой матрица скачка на системе граничных контуров Σ стремится при $n \rightarrow \infty$ к единичной матрице равномерно на Σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma), \\ \mathcal{J}_+ &= \mathcal{J}_-(I + o(1)) \text{ равномерно на } \Sigma \text{ при } n \rightarrow \infty, \\ \mathcal{J}(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Про решение этой задачи известно, что

$$\mathcal{J} = I + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \tag{5.10}$$

равномерно на компактах в $\overline{\mathbb{C}}$. Поэтому, обращая цепочку тождественных преобразований, связывающих задачи (5.9) $\rightarrow \dots \rightarrow$ (5.7) $\rightarrow$ (5.3), от (5.10) мы придем к искомому асимптотическим формулам.

5.4. Факторизация матрицы скачка J . Обратим внимание на то, что матрица скачка (5.8) задачи (5.7) на носителе Δ равновесной меры λ превращается (см. (5.4)) в

$$J = \begin{pmatrix} \varphi_-/\varphi_+ & 1/\omega_+ \\ 0 & \varphi_+/\varphi_- \end{pmatrix} \text{ на } \Delta.$$

Эта матрица допускает удачную факторизацию

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w_+ \varphi_+/\varphi_- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_+^{-1} \\ -\omega_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w_+ \varphi_-/\varphi_+ & 1 \end{pmatrix} \text{ на } \Delta.$$

Обозначая центральную не зависящую от n матрицу через

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & \omega_+^{-1} \\ -\omega_+ & 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

и вводя в области $\Omega \setminus F$ матрицу-функцию

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/(h_n \varphi^2) & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

с помощью краевого условия задачи (5.4) убеждаемся, что факторизация матрицы J на Δ принимает вид

$$J = D_- \mathcal{J} D_+ \quad \text{на } \Delta. \quad (5.13)$$

Сразу отметим, что поскольку решение краевой задачи (5.4) имеет вид (см. (2.19))

$$\varphi = \Phi_q^n f_{\tilde{h}_n}, \quad (5.14)$$

где Φ_q определено в (2.16), а $f_{\tilde{h}_n}(z) = f(\tilde{h}_n; z)$ определено в (2.12), то граничные значения на Δ элемента в нижнем левом углу матрицы D (с учетом (2.17), (5.2)) представляются в виде

$$\frac{1}{h_n \varphi_{\mp}^2} = \frac{1}{\tilde{h}_n f_{\tilde{h}_n}} \left(\frac{\Phi_{q\pm}}{\Phi_{q\mp}} \right) \quad \text{на } \Delta,$$

где первый сомножитель ввиду (5.2) имеет равномерно ограниченное (по n) аналитическое продолжение в $\Omega \setminus \Delta$, а второй сомножитель, так же как и в лемме 1 предыдущего параграфа, преобразуется к виду:

$$\frac{\Phi_{q\pm}}{\Phi_{q\mp}} = \exp\{-n(\gamma_{\mp}^{\lambda} - \gamma_{\pm}^{\lambda})\} = \exp\{2\pi i n l_{\pm}\} \quad \text{на } \Delta,$$

где (см. (4.16)) l обозначает

$$l_{\pm}(x) := \mp \int_x^0 d\lambda(t) \quad \text{на } \Delta. \quad (5.15)$$

Причем, как уже отмечалось нами при доказательстве леммы 1 (см. (4.20')), важным следствием S -свойства дуги Δ является то, что l продолжается с обоих “берегов” Δ в линзообразные области d^+ и d^- , так что

$$\operatorname{Im} l > 0 \quad \text{в } d^+ \cup d^-. \quad (5.16)$$

Таким образом, матрица скачка J на Δ факторизуется как (5.13), где центральная матрица $\mathcal{J}$ не зависит от n , а аналитическое продолжение крайних матриц D_+ и D_- соответственно в областях d^+ и d^- обладает свойством

$$D_{\alpha} \rightrightarrows I \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{на } K \Subset d^{\alpha}, \quad \alpha = +, -, \quad (5.17)$$

причем со скоростью геометрической прогрессии.

5.5. “Раскрытие линзы” – деформация границы Δ . Удачная форма факторизации скачка на Δ позволяет эквивалентным образом перейти от краевой задачи (5.7), (5.8) к задаче, которая более соответствует заявленным в п. 5.3 целям.

Пусть Δ^+ есть дуга, лежащая в d^+ и соединяющая концевые точки дуги Δ (т.е. точки -1 и 0). Соответственно дуга Δ^- лежит в d^- и соединяет концы Δ . Ориентированы Δ^+ , Δ^- так же, как и Δ , т.е. они направлены от точки -1 к точке 0 . Обозначим через $\tilde{d}^+$ область, ограниченную дугами Δ^+ и Δ , соответственно $\tilde{d}^-$ ограничена Δ^- и Δ :

$$\tilde{d}^\alpha \subset d^\alpha, \quad \Gamma(\tilde{d}^\alpha) = \Delta^\alpha \cup \Delta, \quad \alpha = +, -.$$

Наконец, обозначим через F_1 часть дуги F , соединяющую начальную точку дуги F с начальной точкой дуги Δ (т.е. с точкой -1), и соответственно F_0 обозначает часть F , соединяющую конец Δ (т.е. точку 0) с концом дуги F :

$$F = F_1 \cup \Delta \cup F_0.$$

Отметим, что в зависимости от переменного поля Q дуги F_1 и/или F_0 могут быть пустыми множествами.

Перейдем от задачи (5.7), (5.8) с краевыми условиями на дуге F к задаче с краевыми условиями на контуре $\tilde{\Sigma}$ (см. рис. 1):

$$\tilde{\Sigma} := F \cup \Delta^+ \cup \Delta^- = F_1 \cup \Delta \cup \Delta^+ \cup \Delta^- \cup F_0. \quad (5.18)$$

Рис. 1

Для этого с помощью (5.3) определим кусочно-аналитическую матричнозначную функцию $\tilde{Z}$:

$$\tilde{Z} := \begin{cases} Z & \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (\tilde{d}^+ \cup \tilde{d}^-), \\ ZD^{-1} & \text{в } \tilde{d}^+, \\ ZD & \text{в } \tilde{d}^-. \end{cases} \quad (5.19)$$

Для граничных значений $\tilde{Z}$ на $\Delta^+ \cup \Delta \cup \Delta^-$ имеем по определению (5.19)

$$\begin{aligned} \text{на } \Delta^+: \tilde{Z}_+ &= Z = ZD^{-1}D = \tilde{Z}_-D, \\ \text{на } \Delta^-: \tilde{Z}_+ &= ZD = \tilde{Z}_-D \end{aligned}$$

и с учетом (5.13)

$$\text{на } \Delta: \tilde{Z}_+ = Z_-JD_+^{-1} = \tilde{Z}_-(D_-^{-1}JD_+^{-1}) = \tilde{Z}_-\mathcal{J}.$$

Итак, функция $\tilde{Z}$ является единственным решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\Sigma}), \\ \tilde{Z}_+ &= \tilde{Z}_- \cdot \begin{cases} D & \text{на } \Delta^+ \cup \Delta^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta, \\ J & \text{на } F_1 \cup F_0, \end{cases} \\ \tilde{Z}(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где функции скачков определены в (5.12), (5.11) и (5.8).

Краевая задача (5.20) выгодно отличается от эквивалентной ей задачи (5.7) тем, что

- а) на части Δ граничного контура $\tilde{\Sigma}$ матрица скачка J не зависит от n ,
- б) во “внутренних” точках дуг Δ^+ , Δ^- , F_0 , F_1 матрица скачка стремится к единичной матрице I .

Поясним здесь пункт б). Зафиксируем окрестности концевых точек дуги Δ :

$$O_\alpha, \quad \alpha = 1, 0$$

($\alpha = 1$ соответствует начальной точке -1 дуги Δ , соответственно $\alpha = 0$ обозначает второй конец — точку 0). Обозначим концы дуг контура $\tilde{\Sigma}$, примыкающие к концевым точкам Δ , через

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^\pm &:= \Delta^\pm \cap O_\alpha, \quad \alpha = 1, 0, \\ F_\alpha^\varepsilon &:= F_\alpha \cap O_\alpha, \quad \alpha = 1, 0. \end{aligned}$$

Тогда ввиду (5.17)

$$D \Rightarrow I \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{на } \Delta^\alpha \setminus (\Delta_1^\alpha \cup \Delta_0^\alpha), \quad \alpha = +, -, \quad (5.21)$$

а также, замечая, что на F вне Δ матрица скачка J (см. (5.8)) превращается с учетом (2.19) в

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \varphi^2 h_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{h}_n f_{h_n}^2 \exp\{2n(\gamma - \mathcal{V}^\lambda - Q)\} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеем по условию теоремы (см. (2.14), (2.15₂) и (5.2))

$$J \Rightarrow I \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{на } F_\alpha \setminus F_\alpha^\varepsilon, \quad \alpha = 1, 0. \quad (5.22)$$

Причем равномерное стремление в (5.21) и (5.22) происходит со скоростью геометрической прогрессии.

5.6. Решение вспомогательной краевой задачи вне Δ . Для того чтобы задачу (5.20) преобразовать к форме (5.9), рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} X &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta), \\ X_+ &= X_- \mathcal{J} \quad \text{на } \Delta, \\ X(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Задача (5.23) отличается от задачи (5.20) отсутствием зависящих от n скачков на дугах Δ^α , $\alpha = +, -$, и F_α , $\alpha = 1, 0$. Решение задачи (5.23) можно отыскать в явном виде.

Перейдем к поэлементной записи задачи (5.23) для

$$X := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Получаем две скалярные краевые задачи для функций $x_{ij} \in H^2(\mathbb{C} \setminus \Delta)$, $i, j = 1, 2$:

$$\begin{cases} x_{11+} = -\omega_+ x_{12-}, \\ x_{12+} = \frac{x_{11-}}{\omega_+} \end{cases} \quad \text{на } \Delta, \quad \begin{cases} x_{11}(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right), \\ x_{12}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \end{cases} \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (5.24_1)$$

и

$$\begin{cases} x_{21+} = -\omega_+ x_{22-}, \\ x_{22+} = \frac{x_{21-}}{\omega_+} \end{cases} \quad \text{на } \Delta, \quad \begin{cases} x_{21}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \\ x_{22}(z) = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \end{cases} \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (5.24_2)$$

Причем с учетом определения (5.5) функции ω краевые условия в этих задачах могут быть переписаны как

$$x_{11\pm} = (\omega x_{12})_{\mp} \quad \text{и} \quad x_{21\pm} = (\omega x_{22})_{\mp} \quad \text{на } \Delta.$$

Поэтому функция ωx_{12} (соответственно ωx_{22}) является аналитическим продолжением функции x_{11} (соответственно x_{21}) на другой лист римановой поверхности $\mathfrak{R}$ функции w (см. (4.7)). Если в соответствии с нормировкой в точке ∞ выбрать

$$x_{11} := 1 \quad \text{в } \mathbb{C} \setminus \Delta,$$

то продолжение x_{11} на второй лист $\mathfrak{R}$ опять будет тождественно равно единице, что дает

$$x_{12} = \omega^{-1} = \frac{i}{w}.$$

Проверяя нормировку в точке ∞ , убеждаемся, что эти x_{11} и x_{12} удовлетворяют первой задаче (5.24₁).

Для решения второй задачи (5.24₂) нам нужно найти функцию x_{21} , обращающуюся в нуль в точке $\infty^{(+)}$ и имеющую полюс в точке $\infty^{(-)}$ при продолжении на второй лист $\mathfrak{R}$. Эти условия будут удовлетворены, если мы возьмем x_{21} в виде

$$x_{21} := \frac{c}{i} \Phi_0^{(-)},$$

где алгебраическая функция Φ_0 (обратная к функции Жуковского) определена в (2.11₂). Тогда

$$x_{22} = \frac{c\Phi_0^{(+)}}{w}, \quad \Phi_0^{(+)}(z)|_{\infty} = \frac{z}{c} + \dots,$$

и проверка нормировки x_{22} в точке ∞

$$x_{22}(z)|_{\infty} = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

показывает, что мы нашли решение и для второй задачи (5.24₂). Итак, решением краевой задачи (5.23) является функция

$$X = \begin{pmatrix} 1 & i/w \\ c/(i\Phi_0) & c\Phi_0/w \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

5.7. Постановка вспомогательной краевой задачи в окрестности концевой точки носителя Δ . Напомним, что полученная нами краевая задача (5.20) отличается от задачи (5.9), являющейся нашей целью, поведением матриц скачков в окрестностях концевых точек носителя Δ равновесной меры λ . А именно в окрестностях точек -1 и 0 матрицы скачков задачи (5.20) не стремятся к единичным матрицам при $n \rightarrow \infty$, как нам бы этого хотелось. Для того чтобы совершить эквивалентный переход от задачи (5.20) к задаче (5.9), рассмотрим отдельно следующую краевую задачу в области O_0 (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} U_0 &\in H_{2 \times 2}^2(O_0 \setminus (\Delta_0 \cup \Delta_0^+ \cup \Delta_0^- \cup F_0^\varepsilon)), \\ U_{0+} &= U_{0-} \cdot \begin{cases} D & \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta_0, \\ J & \text{на } F_0^\varepsilon, \end{cases} \\ U_0 &= (I + o(1))X \text{ на } \partial O_0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Точно такая же задача (с заменой 0 на 1 в нижнем индексе) ставится в окрестности O_1 другой концевой точки -1 для определения функции U_1 .

Рис. 2

Нахождение решения (или доказательство существования решения) задачи (5.26) является основным техническим моментом подхода, которому мы здесь следуем. Исследованию граничной задачи (5.26) посвящены последующие параграфы этой статьи.

В этом параграфе мы предполагаем, что матрица-функция U_0 , удовлетворяющая задаче (5.26), существует, а также существует решение U_1 аналогичной краевой задачи в окрестности другой концевой точки -1 .

С данным предположением мы проведем доказательство теоремы 2.

5.8. Заключительное преобразование к краевой задаче с асимптотически тождественными скачками. Определим функцию

$$\mathcal{J} := \begin{cases} \tilde{Z}X^{-1} & \text{в } \overline{\mathbb{C}} \setminus (O_0 \cup O_1), \\ \tilde{Z}U_0^{-1} & \text{в } O_0, \\ \tilde{Z}U_1^{-1} & \text{в } O_1, \end{cases} \quad (5.27)$$

где $\tilde{Z}$ – решение задачи (5.20), а X, U_0 и U_1 – решения вспомогательных задач (5.23), (5.26). По построению функция $\mathcal{J}$ голоморфна в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$, где контур Σ есть (см. рис. 3)

$$\Sigma := \partial O_0 \cup \partial O_1 \cup (\Delta^+ \setminus (\Delta_0^+ \cup \Delta_1^+)) \cup (\Delta^- \setminus (\Delta_0^- \cup \Delta_1^-)) \cup (F_0 \setminus F_0^\varepsilon) \cup (F_1 \setminus F_1^\varepsilon),$$

причем на контуре Σ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_+ &= \mathcal{J}_- \tilde{I} \\ &:= \begin{cases} \tilde{Z}DX^{-1} = \mathcal{J}_-(XD X^{-1}) & \text{на } \Delta^\alpha \setminus (\Delta_0^\alpha \cup \Delta_1^\alpha), \quad \alpha = +, -, \\ \tilde{Z}X^{-1} = \tilde{Z}U_\alpha^{-1}U_\alpha X^{-1} = \mathcal{J}_-(U_\alpha X^{-1}) & \text{на } O_\alpha, \quad \alpha = 1, 0, \\ \tilde{Z}_- JX^{-1} = \mathcal{J}_-(X JX^{-1}) & \text{на } F_\alpha \setminus F_\alpha^\varepsilon, \quad \alpha = 1, 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Рис. 3

Таким образом, матрица-функция (5.27) является решением задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma), \\ \mathcal{J}_+ &= \mathcal{J}_- \tilde{I} \quad \text{на } \Sigma, \\ \mathcal{J}(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где матрица-функция скачка $\tilde{I}$ определена в (5.28) и для нее ввиду (5.21), (5.22) и (5.26) справедливо

$$\tilde{I} \Rightarrow I, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.30)$$

равномерно на Σ .

Как уже отмечалось в п. 5.3 (см. (5.10)), решение задачи (5.29), (5.30) для достаточно больших n существует и обладает свойством

$$\mathcal{J} \Rightarrow I \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (5.31)$$

равномерно на компактах в $\overline{\mathbb{C}}$. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [59; § 7.5, следствие 7.108]. Для полноты изложения в следующем пункте мы докажем импликацию (5.29), (5.30) $\Rightarrow$ (5.31) при условии, что матрица-функция скачка $\tilde{I}$ аналитична в окрестности контура Σ (что, собственно, имеет место в рассматриваемой ситуации), а также что Σ есть спрямляемая жорданова кривая. При этих существенно более ограничительных входных условиях, чем в [59], имеется возможность привести элементарное доказательство, не использующее гармонического анализа, как в [59].

Замечание об асимптотической нормальности. Отметим, что ввиду существования при больших n решения задачи (5.28), (5.29) мы получаем справедливость сделанного ранее (см. п. 5.1) предположения о нормальности индекса n , т.е. существование решения Y задачи (5.3), которая эквивалентна (5.28), (5.29). Действительно, аналитические в $\mathbb{C} \setminus F$ функции P_n и R_n , составляющие единственное решение задачи (5.3), удовлетворяют

$$P_n(z) = z^n + \dots, \quad R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

причем из граничных условий (5.3) следует, что $P_{n+} = P_{n-}$ на F , следовательно, P_n есть полином. Связь этого полинома с функцией второго рода (5.1') опять же следует из граничных условий (5.3), что в свою очередь приводит к ортогональности этого полинома относительно веса h_n на F .

5.9. Асимптотика решения матричной краевой задачи с аналитическим стремящимся к I скачком. Справедлива

ЛЕММА 2. Пусть Σ – простой спрямляемый жорданов контур, и пусть матрица-функция $\tilde{I}$ аналитична в области $\mathcal{A}$, содержащей контур Σ ,

$$\tilde{I} \in H(\mathcal{A}), \quad \Sigma \subset \mathcal{A}, \quad (5.32)$$

причем

$$\tilde{I} = I + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \Rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ на } K \Subset \mathcal{A}. \quad (5.33)$$

Тогда для решения краевой задачи (5.29) справедливо

$$\mathcal{J} = I + O(\varepsilon_n). \quad (5.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (5.33) в граничное условие (5.29), имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &\in H_{2 \times 2}^2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma), \\ \mathcal{J}_+ &= \mathcal{J}_- + \varepsilon_n \mathcal{J}_- \quad \text{на } \Sigma, \\ \mathcal{J}(z) &= I + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Применяя интегральную формулу Коши к каждому элементу матрицы $\mathcal{J}$, получаем

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} (\varepsilon_n \mathcal{J}_-)(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} + I, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma. \quad (5.35)$$

Затем ввиду (5.32) мы можем деформировать Σ в Σ' , лежащий в области $\mathcal{A} \cap \text{Int } \Sigma$:

$$\mathcal{J}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma'} (\varepsilon_n \mathcal{J}_-)(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} + I, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{\mathcal{A}}, \quad \Gamma(\tilde{\mathcal{A}}) = \Sigma \cup \Sigma'; \quad (5.36)$$

теперь интеграл более не является сингулярным при $z \in \Sigma$ и обе части (5.36) имеют предел при $z \rightarrow \Sigma_+$. Следовательно,

$$\mathcal{J}_-(z) \tilde{I}(z) = \mathcal{J}_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma'} (\varepsilon_n \mathcal{J}_-)(\xi) \frac{d\xi}{\xi - z} + I, \quad z \in \Sigma. \quad (5.37)$$

Умножая слева (5.37) на $\tilde{I}^{-1}$ и выбирая $z_0 \in \Sigma$ так, что

$$\|\mathcal{J}_-(z_0)\| = \max_{\Sigma} \|\mathcal{J}_-(z)\| =: M_n,$$

из (5.37) получаем

$$M_n \leq M_n \varepsilon_n \text{const}_{\Sigma, \Sigma'} + 1 + O(\varepsilon_n)$$

и, следовательно,

$$M_n \leq \frac{1 + O(\varepsilon_n)}{1 - O(\varepsilon_n)}.$$

Подставляя полученную оценку в (5.35), мы приходим к (5.34). Лемма доказана.

5.10. Получение асимптотических формул. Производя в предельном соотношении (5.31) обратные преобразования, приведшие нас от матрицы-функции (5.6) к матрице-функции (5.27), мы получаем искомые асимптотические формулы для полиномов Q_n и функций второго рода R_n . Действительно, имеем (см. (5.19), (5.12), (5.6))

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{Q_n}{C_n \varphi} & \frac{\varphi}{C_n} R_n \\ \frac{C_n m \tilde{Q}_{n-1}}{\varphi} & C_n m \varphi \tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix} & \text{на } K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (d^+ \cup d^-), \\ \begin{pmatrix} \frac{Q_n}{C_n \varphi} \mp \frac{R_n}{C_n \varphi h_n} & \frac{R_n \varphi}{C_n} \\ \frac{C_n m \tilde{Q}_{n-1}}{\varphi} \mp \frac{C_n m \tilde{R}_{n-1}}{\varphi h_n} & m C_n \varphi \tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix} & \text{на } K \in d^{\pm}. \end{cases} \quad (5.38)$$

Из (5.31) следует, что

$$\tilde{Z} = (I + o(1))X \quad (5.39)$$

равномерно на $K \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{O_1 \cup O_0\}$, где X явно задано матрицей (5.25). Сравнивая первую строку верхней матрицы в (5.38) с верхней строкой матрицы (5.25), ввиду (5.39) получаем формулы внешней асимптотики (2.18₁). Рассматривая предельные граничные значения на Δ второй (нижней) матрицы из (5.38) и матрицы X (см. (5.25)), сравнением элементов в верхнем правом углу матричного соотношения (5.39) получаем асимптотическую формулу (2.18₂) для функций второго рода на компактах дуги Δ . Соответствующая формула в (2.18₂) для полиномов P_n выводится из полученной формулы для функций второго рода с помощью формулы Сохоцкого–Племеля (2.5) точно так же, как мы это уже делали при доказательстве теоремы 3 (см. (4.23)).

Таким образом, асимптотические формулы (2.18₁) и (2.18₂) теоремы 2 в предположении существования решения краевой задачи (5.26) получены.

§ 6. Доказательство теоремы 2. Явные решения регулярных краевых задач в окрестности концевой точки Δ

Для окончания доказательства теоремы 2 нам осталось убедиться в существовании решения краевой задачи (5.26), заданной в окрестности концевой точки носителя Δ равновесной меры λ в поле $\text{Re } Q$. Анализ этой краевой задачи зависит от двух обстоятельств. Во-первых, совпадает ли концевая точка Δ (напомним, что мы поместили ее в точку 0) с концевой точкой дуги F (носителя меры ортогональности), или точка 0 является внутренней точкой F . То есть (см. рис. 1) является ли дуга F_0^ε пустым множеством или нет:

$$(A) := \{F_0^\varepsilon \neq \emptyset\}, \quad (B) := \{F_0^\varepsilon = \emptyset\}. \quad (6.1)$$

Во-вторых, анализ задачи (5.26) зависит от поведения производной λ' равновесной меры в окрестности концевой точки Δ . Известно (для случая (A) см., например, [62], случай (B) анализируется аналогично), что в случае аналитичности внешнего поля Q в окрестности Ω дуги F равновесная мера λ абсолютно непрерывна и ее производная в окрестности концевой точки Δ (точки 0) имеет вид:

$$\lambda'(z) = z^{n-1/2}m(z), \quad m(z) \in H(O_0), \quad m(0) \neq 0, \quad (6.2)$$

где n в (6.2) в зависимости от случая (A) или (B) принимает значения:

$$\begin{aligned} (A) &\Rightarrow n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ (B) &\Rightarrow n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

В настоящем параграфе мы построим в явном виде решения задачи (5.26) для основных (регулярных) случаев:

$$(A), \quad n = 1, \quad (6.4_1)$$

$$(B), \quad n = 0. \quad (6.4_2)$$

Доказательству существования решения задачи (5.26) в остальных (сингулярных) случаях будет посвящен следующий § 7.

Так как решение краевой задачи (5.26) описывает асимптотику ортогональных многочленов в окрестностях их крайних нулей, то примеры решения этой задачи имеют корни в асимптотической теории *классических* ортогональных многочленов. Например, решение специального случая задачи для (6.4₁) может быть выведено из формул Планшереля–Ротача (см. [33]) для полиномов Эрмита и Лагерра, в которых асимптотика записывается с помощью функций Айри. Также формулы Гейне–Меллера и Хильба для асимптотики полиномов Якоби в окрестностях концов интервала ортогональности даются функциями Бесселя для решения некоторого специального случая задачи (5.26) для (6.4₂). В связи с представлением асимптотик *общих* ортогональных многочленов в окрестности конца интервала ортогональности с помощью функций Бесселя упомянем также работы [65] и [66].

Решение общего случая краевой задачи (5.26) для (A), $n = 1$, с помощью функций Айри построено П. Дейфтом с соавторами (см., например, [59]). Мы в основном следуем этому подходу, адаптируя его к нуждам настоящей работы, в частности, добавляя в матрицы скачков из (5.26) функции Сегё для слабо меняющейся (при $n \rightarrow \infty$) компоненты переменного веса $\tilde{h}_n$, $\tilde{h}_n \rightarrow \tilde{h}_\infty$. Основные моменты решения с помощью функций Бесселя задачи (5.26) для (B), $n = 0$, мы заимствуем из работы [67].

6.1. Решение краевой задачи в окрестности концевой точки с помощью функций Айри. В этом пункте мы построим решение краевой задачи (5.26):

$$\begin{aligned} U_0 &\in H_{2 \times 2}^2(O_0 \setminus \Sigma_0), \\ U_{0+} &= U_{0-} \cdot \begin{cases} D & \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta_0, \\ J & \text{на } F_0^\varepsilon \neq \emptyset \text{ (случай (A))}, \end{cases} \\ U_0 &= (I + o(1))X \text{ на } \partial O_0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где (см. рис. 2)

$$\Sigma_0 := \Delta_0 \cup \Delta_0^+ \cup \Delta_0^- \cup F_0^\varepsilon,$$

матрицы скачков в (6.5) равны

$$\begin{aligned} D &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/(h_n \varphi^2) & 1 \end{pmatrix} \text{ в } \Omega \setminus F, \\ \mathcal{J} &:= \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \text{ на } \Delta, \\ J &:= \begin{pmatrix} 1 & h_n \varphi^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ на } F_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (6.6)$$

а не зависящая от n матрица X задана в (5.25). Причем мы будем предполагать, что равновесная мера такова, что справедливо условие (6.2) с $n = 1$.

6.1.1. Преобразование задачи (6.5) к краевой задаче с не зависящим от n скачком. Обозначим через A диагональную матрицу

$$A := \text{diag}\{\varphi h_n^{1/2}, (\varphi h_n^{1/2})^{-1}\}, \quad (6.7)$$

где φ есть решение краевой задачи (5.4). Заметим, что матрицы скачка (6.6) допускают декомпозицию

$$\begin{aligned} D &= A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{в } \Omega \setminus F, \\ J &= A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} \quad \text{на } F_0^\varepsilon, \\ \mathcal{J} &= A_- \begin{pmatrix} 0 & (\varphi_+ \varphi_- h_n \omega)^{-1} \\ -\varphi_+ \varphi_- h_n \omega & 0 \end{pmatrix} A_+^{-1} \\ &= A_- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A_+^{-1} \quad \text{на } \Delta_0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Определим матрицу-функцию

$$V_0 := U_0 A. \quad (6.9)$$

Тогда с помощью (6.8) краевая задача (6.5) преобразуется в следующую краевую задачу для V_0 :

$$\begin{aligned} V_0 &\in H_{2 \times 2}^\infty(O_0 \setminus \Sigma_0), \\ V_{0+} &= V_{0-} \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_0, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } F_0^\varepsilon, \end{cases} \\ V_0 &= (I + o(1)) X A \quad \text{на } \partial O_0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.1.2. Вспомогательная краевая задача для функций Айри. Обозначим через

$$\gamma_0 := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

объединение четырех лучей (см. рис. 4)

$$\gamma_1 := \mathbb{R}^-, \quad \gamma_2 := e^{2\pi i/3} \cdot \mathbb{R}^+, \quad \gamma_3 := \mathbb{R}^-, \quad \gamma_4 := e^{-2\pi i/3} \cdot \mathbb{R}^+.$$

Рис. 4

Для построения решения задачи (6.10) рассмотрим вспомогательную задачу нахождения матрицы-функции Ψ , аналитической в $\mathbb{C} \setminus \gamma_0$ и имеющей на γ_0 те же скачки, что и V_0 на Σ_0 в задаче (6.10):

$$\Psi \in H(\mathbb{C} \setminus \gamma_0), \quad \exists \Psi_{\pm} \in \mathbb{C}(\gamma_0),$$

$$\Psi_+ = \Psi_- \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_2 \cup \gamma_4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_1. \end{cases} \quad (6.11)$$

Известно (см. [59]), что решение задачи (6.11) представляется с помощью специальных целых функций – функций Айри. Напомним, что функции Айри являются решением дифференциального уравнения (см. [68]):

$$\text{Ai}''(\zeta) = \zeta \text{Ai}(\zeta), \quad \text{Ai} \in H(\mathbb{C}).$$

В угле $|\arg \zeta| < \pi$ они имеют асимптотику при $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\zeta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \zeta^{-1/4} \exp\left\{-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right\} (1 + O(\zeta^{-3/2})), \\ \text{Ai}'(\zeta) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \zeta^{1/4} \exp\left\{-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}\right\} (1 + O(\zeta^{-3/2})). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Обозначим

$$A^u(\zeta) := \begin{pmatrix} \text{Ai}(\zeta) & \text{Ai}(\varepsilon_3^2 \zeta) \\ \text{Ai}'(\zeta) & \varepsilon_3^2 \text{Ai}'(\varepsilon_3^2 \zeta) \end{pmatrix}; \quad A^l(\zeta) := \begin{pmatrix} \text{Ai}(\zeta) & -\varepsilon_3^2 \text{Ai}(\varepsilon_3 \zeta) \\ \text{Ai}'(\zeta) & -\text{Ai}'(\varepsilon_3 \zeta) \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_3 = e^{2\pi i/3},$$

а также

$$\tilde{\sigma} := \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/6} \end{pmatrix}.$$

С помощью известных соотношений для функций Айри (см. [68]):

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\zeta) + \varepsilon_3 \text{Ai}(\zeta \varepsilon_3) + \varepsilon_3^2 \text{Ai}(\zeta \varepsilon_3^2) &= 0, \\ \text{Ai}'(\zeta) + \varepsilon_3^2 \text{Ai}'(\zeta \varepsilon_3) + \varepsilon_3 \text{Ai}'(\zeta \varepsilon_3^2) &= 0 \end{aligned}$$

можно проверить (см. [59; с. 226]), что скачки на γ_0 кусочно-аналитической функции

$$\Psi := \begin{cases} A^u \tilde{\sigma} & \text{в I,} \\ A^u \tilde{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{в II,} \\ A^l \tilde{\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{в III,} \\ A^l \tilde{\sigma} & \text{в IV} \end{cases} \quad (6.13)$$

удовлетворяют краевым условиям задачи (6.11). Тем самым, функция Ψ , определенная (6.13), решает краевую задачу (6.11).

6.1.3. Выбор дуг Δ_0^+ , Δ_0^- , F_0^ε и границы ∂O_0 . Решение задачи о скачке на Σ_0 . Наша цель – построить функцию, решающую задачу (6.10). Мы будем строить ее в виде

$$V_0(z) = E(z)\Psi(\tilde{c}_n\zeta(z)), \quad (6.14)$$

где E – некоторая голоморфная в O_0 матрица-функция, а $\zeta(z)$ – некоторое конформное отображение, назначение которого – переводить контур Σ_0 плоскости z в контур γ_0 плоскости ζ (см. рис. 5).

Рис. 5

Тем самым, ввиду (6.11) функция (6.14) будет удовлетворять соотношениям скачка задачи (6.10). В настоящем подпункте мы займемся построением этого отображения. Отметим, что на самом деле в контуре Σ_0 лишь дуга Δ_0 (часть носителя равновесной меры, S -свойство которого мы уже использовали) фиксирована, в то же время выбор расположения дуг Δ_0^+ и Δ_0^- , а также границы ∂O_0 в нашем распоряжении. Равно как и положение дуги F_0^ε может варьироваться ввиду того, что из-за аналитичности весовой функции контур интегрирования в соотношениях ортогональности может быть деформирован. Таким образом, мы будем искать такое конформное отображение $\zeta(z)$, которое переводит Δ_0 в γ_3 . В то же время прообразы γ_1 , γ_2 и γ_4 при этом отображении зафиксируют нам Δ_0^+ , Δ_0^- и F_0^ε .

Напомним, что решение краевой задачи (5.4) и весовая функция (5.2) факторизуются следующим образом (см. (5.14)):

$$h_n \varphi^2 = \tilde{h}_n f_{h_n}^2 \Phi_q^{2n} e^{-2nQ} =: \tilde{h}_n f_{h_n}^2 \exp\{-2n\tilde{l}\}, \quad (6.15)$$

где обозначенная в правой части через $\tilde{l}$ функция обладает свойством (см. (5.15))

$$\tilde{l} \in H(O_0 \setminus \Delta_0), \quad \tilde{l}_\pm = \mp i\pi \int_x^0 d\lambda \quad \text{на } \Delta_0. \quad (6.16)$$

Так как в рассматриваемом нами случае равновесная мера обладает свойством (6.2), (6.4₁):

$$\lambda'(z) = z^{1/2} m(z), \quad z \in O_0, \quad m(0) \neq 0,$$

то, производя интегрирование в (6.16), имеем

$$\tilde{l}(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} M(z),$$

где

$$M(z) \in H(O_0), \quad M(0) \neq 0.$$

Таким образом, функция

$$\zeta(z) := \left(\frac{3}{2} \tilde{l}(z) \right)^{2/3} = z M^{2/3}(z) \quad (6.17)$$

осуществляет конформное отображение области O_0 в некоторую окрестность точки 0. Проверим, что определенное в (6.17) конформное отображение $\zeta(z)$ обладает искомыми свойствами, т.е. переводит дугу Δ_0 в γ_3 . Из (6.16) вытекает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \tilde{l} &= 0, \\ \operatorname{Im} \tilde{l} &= \begin{cases} < 0 & \text{на } \Delta_{0+}, \\ > 0 & \text{на } \Delta_{0-}, \end{cases} \end{aligned}$$

кроме того,

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \tilde{l}(x)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\pi \operatorname{Im} \int_x^0 d\lambda \right) = \pi \frac{\partial}{\partial \tau} \operatorname{Re} \int_x^0 d\lambda < 0.$$

Поэтому отображение $\tilde{l}(z)$ переводит односвязную область

$$d \cap O_0 := (d^+ \cup \Delta \cup d^-) \cap O_0$$

в левую полуплоскость, так что образ $d^+ \cap O_0$ находится в нижнем левом квадранте, образ $d^- \cap O_0$ переходит в левый верхний квадрант, а последующее отображение посредством $(\cdot)^{2/3}$ “склеивает” две “половинки” этих образов опять в односвязную область левой полуплоскости (см. рис. 6).

Рис. 6

Причем

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \zeta = 0, \\ \operatorname{Re} \zeta \leq 0 \end{cases} \quad \text{на } \Delta_0,$$

следовательно,

$$\zeta(\Delta_0) \subset \gamma_3.$$

Зафиксируем в плоскости ζ круг D_ε с центром в точке $\zeta = 0$ и радиусом ε . Определим окрестность O_0 концевой точки 0 дуги Δ как

$$O_0 := \zeta^{-1}(D_\varepsilon). \quad (6.18)$$

Тогда по построению имеем

$$\Delta_0 = \zeta^{-1}(\gamma_3 \cap D_\varepsilon),$$

а остальные части контура Σ_0 фиксируем как

$$\begin{aligned}\Delta_0^+ &:= \zeta^{-1}(\gamma_2 \cap D_\varepsilon), \\ \Delta_0^- &:= \zeta^{-1}(\gamma_4 \cap D_\varepsilon), \\ F_0^\varepsilon &:= \zeta^{-1}(\gamma_1 \cap D_\varepsilon).\end{aligned}\tag{6.19}$$

Таким образом, функция

$$\Psi(\tilde{c}_n \zeta(z))$$

для любой константы $\tilde{c}_n$ удовлетворяет краевому условию задачи (6.10) на зафиксированном посредством (6.19) контуре Σ_0 .

6.1.4. “Сшивание” (matching) граничных условий на ∂O_0 . Напомним, что мы ищем решение задачи (6.10) в виде (6.14)

$$V_0(z) = E\Psi(\tilde{c}_n \zeta(z)).$$

Для того чтобы удовлетворить граничное условие на ∂O_0 при $n \rightarrow \infty$, нам потребуется асимптотика $\Psi(\tilde{c}_n \zeta)$ при $\tilde{c}_n \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим сначала $z \in I'$ ($\zeta \in I$), см. рис. 5. Имеем по определению (6.13)

$$\Psi(\tilde{c}_n \zeta) = \begin{pmatrix} \text{Ai}(\tilde{c}_n \zeta) & \text{Ai}(\varepsilon_3^2 \tilde{c}_n \zeta) \\ \text{Ai}'(\tilde{c}_n \zeta) & \varepsilon_3^2 \text{Ai}'(\varepsilon_3^2 \tilde{c}_n \zeta) \end{pmatrix} \tilde{\sigma};$$

так как $|\arg \zeta|$ и $|\arg \varepsilon_3^2 \zeta|$ оба меньше π , то, выбирая

$$\tilde{c}_n := n^{2/3},$$

для $z \in \partial O_0$ ($\zeta \in \partial D_\varepsilon$) получаем

$$|n^{2/3} \zeta| = |\varepsilon_3^2 n^{2/3} \zeta| = n^{2/3} \varepsilon \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь воспользуемся асимптотическими формулами (6.12):

$$\begin{aligned}\Psi(n^{2/3} \zeta) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (n^{2/3} \zeta)^{-1/4} e^{-2/3 (n^{2/3} \zeta)^{3/2}} (1 + o(1)) \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} (n^{2/3} \zeta)^{1/4} e^{-2/3 (n^{2/3} \zeta)^{3/2}} (1 + o(1)) \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\varepsilon_3^2 n^{2/3} \zeta)^{-1/4} e^{-2/3 (\varepsilon_3^2 n^{2/3} \zeta)^{3/2}} (1 + o(1)) \\ -\frac{\varepsilon_3^2}{2\sqrt{\pi}} (\varepsilon_3^2 n^{2/3} \zeta)^{1/4} e^{-2/3 (\varepsilon_3^2 n^{2/3} \zeta)^{3/2}} (1 + o(1)) \end{pmatrix} \tilde{\sigma}.\end{aligned}$$

Так как по определению

$$\zeta^{3/2} = \frac{3}{2} \tilde{l}$$

и

$$(\varepsilon_3^2 \zeta)^{3/2} = |\zeta|^{3/2} \exp \left\{ i \left(\arg \zeta - \frac{2\pi}{3} \right)^{3/2} \right\} = -(\zeta)^{3/2} = -\frac{3}{2} \tilde{l},$$

мы можем записать

$$\begin{aligned} \Psi(n^{2/3}\zeta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (n^{2/3}\zeta)^{-1/4} & (n^{2/3}\zeta\varepsilon_3^2)^{-1/4} \\ -(n^{2/3}\zeta)^{1/4} & -\varepsilon_3^2(n^{2/3}\zeta\varepsilon_3^2)^{1/4} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{l}} & 0 \\ 0 & e^{n\tilde{l}} \end{pmatrix} \tilde{\sigma}, \end{aligned}$$

далее, подставляя значения для $\varepsilon_3^2 = e^{-\pi i/6}$ и $\tilde{\sigma} = \text{diag}\{e^{-i\pi/6}, e^{i\pi/6}\}$, имеем

$$\begin{aligned} \Psi(n^{2/3}\zeta) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (n^{2/3}\zeta)^{-1/4} & 0 \\ 0 & (n^{2/3}\zeta)^{1/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/6} & e^{i\pi/3} \\ -e^{-i\pi/6} & -e^{i4\pi/3} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{l}} & 0 \\ 0 & e^{n\tilde{l}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Наконец, вынося $e^{-i\pi/6}$ из центральной матрицы и производя ее факторизацию, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Psi(n^{2/3}\zeta(z)) &= \frac{e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (n^{2/3}\zeta(z))^{-1/4} & 0 \\ 0 & (n^{2/3}\zeta(z))^{1/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{l}(z)} & 0 \\ 0 & e^{n\tilde{l}(z)} \end{pmatrix}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Асимптотическая формула (6.20) выведена при $z \in I' \cap O_0$ ($\zeta \in I \cap D_\varepsilon$). Повторение тех же рассуждений для других участков границы ∂O_0 приводит к той же формуле. Итак, (6.20) справедливо равномерно на ∂O_0 .

Граничное условие на ∂O_0 в (6.10), которое мы должны удовлетворить, имеет вид

$$E\Psi(n^{2/3}\zeta(z)) = (I + o(1))XA \quad \text{равномерно по } z \in \partial O_0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (6.21)$$

где диагональная матрица A (см. (6.7)) с учетом (6.15) имеет вид

$$A := \text{diag}\{\varphi h_n^{1/2}, (\varphi h_n^{1/2})^{-1}\} = \text{diag}\{e^{-n\tilde{l}}, e^{n\tilde{l}}\} \text{diag}\{s, s^{-1}\}, \quad (6.22)$$

здесь мы использовали обозначение:

$$s := f_{h_n} \tilde{h}_n^{1/2}. \quad (6.23)$$

Определим матрицу-функцию E как

$$E := 2\sqrt{\pi} e^{i\pi/6} X \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n^{1/6}\zeta^{1/4} & 0 \\ 0 & n^{-1/6}\zeta^{-1/4} \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Тогда с учетом асимптотической формулы (6.20) функция

$$V_0 = E\Psi(n^{2/3}\zeta) \quad (6.25)$$

удовлетворяет граничному условию (6.21) задачи (6.10).

Чтобы окончательно убедиться, что функция (6.25) является решением задачи (6.10), нам осталось проверить, что определенная в (6.24) функция E голоморфна в O_0 . То есть что E не “портит” скачки $\Psi(n^{2/3}\zeta(z))$ на Σ_0 , которые уже удовлетворяют задаче (6.10). Подставим в (6.24) выражение (5.25) для X :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{w} \\ \frac{c}{i\Phi_0} & \frac{c\Phi_0}{w} \end{pmatrix};$$

перемножая матрицы, получаем

$$\begin{aligned} E = \sqrt{\pi} e^{i\pi/6} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ic \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(s + \frac{1}{ws}\right)\zeta^{1/4} & \left(s - \frac{1}{ws}\right)\zeta^{-1/4} \\ \left(\frac{s}{\Phi_0} + \frac{\Phi_0}{ws}\right)\zeta^{1/4} & \left(-\frac{s}{\Phi_0} + \frac{\Phi_0}{ws}\right)\zeta^{-1/4} \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} n^{1/6} & 0 \\ 0 & n^{-1/6} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ясно, что функция $E(z)$ аналитична в проколотой окрестности $O_0 \setminus \{0\}$. Покажем сначала, что она голоморфна в $O_0 \setminus \{0\}$. Для этого проверим, что элементы центральной матрицы в (6.26), взятые на Δ_{0+} , не изменяются на Δ_{0-} после обхода точки 0. Из (6.17) имеем

$$\zeta(z) \simeq z \quad \text{в } O_0,$$

граничные условия (2.13)

$$f_{\tilde{h}_n+} f_{\tilde{h}_n-} \tilde{h}_n = \frac{i}{w_+} \quad \text{на } \Delta$$

дают для s

$$s_{\pm} = \frac{i}{w_+ s_{\mp}} \quad \text{на } \Delta.$$

Кроме того, вспоминая (2.11₃), имеем

$$\Phi_{0+} = \frac{1}{\Phi_{0-}} \quad \text{на } \Delta.$$

Поэтому, например, для элемента в правом верхнем углу центральной матрицы в (6.26) проверяем на Δ_0 обход вокруг точки 0:

$$\begin{aligned} \left(s_+ + \frac{1}{w_+ s_+}\right) z_+^{1/4} &\rightarrow \left(s_- + \frac{1}{w_- s_-}\right) z_-^{1/4} \\ &= \left(\frac{i}{w_+ s_+} - \frac{s_+}{i}\right) \frac{z_+^{1/4}}{i} = \left(\frac{1}{w_+ s_+} + s_+\right) z_+^{1/4}. \end{aligned}$$

Аналогично проверяются обходы других элементов из (6.26). Таким образом,

$$E \in H(O_0 \setminus \{0\}).$$

Наконец, из граничных условий на Δ следует, что

$$s \simeq \frac{1}{ws} \simeq z^{-1/4} \quad \text{в } O_0,$$

поэтому элементы матрицы в (6.26) не могут иметь в точке 0 сингулярность выше порядка $O(1/z^{1/2})$, но так как мы доказали, что точка 0 не является точкой ветвления для E , то E ограничена в O_0 и, следовательно,

$$E \in H(O_0).$$

6.1.5. Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности концевой точки Δ . Подводя итог, имеем, что для случая (6.4₁) функция U_0 (решение краевой задачи (6.5)) равна

$$U_0 = E\Psi(n^{2/3}\zeta)A^{-1} \text{ в } O_0, \quad (6.27)$$

где E определено в (6.24) (см. также (6.26)), Ψ определено в (6.13), ζ – в (6.17) и A – в (6.7).

Таким образом, для рассмотренного случая (6.4₁) мы не только завершили доказательство теоремы 2, но и из (5.27), (5.31) для матрицы-функции Z (см. (5.6))

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{Q_n}{C_n\varphi} & \frac{\varphi}{C_n}R_n \\ \frac{C_nm\tilde{Q}_{n-1}}{\varphi} & C_nm\varphi\tilde{R}_{n-1} \end{pmatrix}$$

получили следующую асимптотическую формулу (см. (5.19)):

$$Z = (I + o(1))U_0 \cdot \begin{cases} I & \text{в } I' \cup IV', \\ D & \text{в } II', \\ D^{-1} & \text{в } III', \end{cases} \quad n \rightarrow \infty, \quad (6.28)$$

равномерно в O_0 , где D есть (6.6), а U_0 есть (6.27).

6.2. Решение краевой задачи в окрестности концевой точки Δ с помощью функций Бесселя. В этом пункте мы имеем дело с контуром Σ_0 , соответствующим случаю (B) в (6.1) (см. рис. 7):

$$\Sigma_0 := \Delta_0 \cup \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-.$$

Рис. 7

Для внешнего поля Q , соответствующего случаю $n = 0$ в (6.2), т.е.

$$\lambda'(z) = z^{-1/2}m(z), \quad m \in H(O_0), \quad m(0) \neq 0, \quad (6.29)$$

в явном виде построим решение краевой задачи (5.26):

$$\begin{aligned} U_0 &\in H_{2 \times 2}^2(O_0 \setminus \Sigma_0), \\ U_{0+} &= U_{0-} \cdot \begin{cases} D & \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta_0, \end{cases} \\ U_0 &= (I + o(1))X \text{ на } \partial O_0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где D и $\mathcal{J}$ те же, что и в (6.6), а X есть (5.25). Построение решения будет идти по той же схеме, что и в предыдущем пункте.

6.2.1. Краевая задача с не зависящим от n скачком. Перейдем от (6.30) к задаче для функции (6.9):

$$V_0 = U_0 A,$$

где A , как и ранее, есть (6.7). Имеем (см. (6.10))

$$\begin{aligned} V_0 &\in H_{2 \times 2}^\infty(O_0 \setminus \Sigma_0), \\ V_{0+} &= V_{0-} \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_0, \end{cases} \\ V_0 &= (I + o(1))XA \quad \text{на } \partial O_0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Рис. 8

6.2.2. Краевая задача для функций Бесселя. Теперь $\gamma_0 = \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ (см. рис. 8):

$$\begin{aligned} \gamma_2 &:= \left\{ \zeta : \arg \zeta = \frac{2\pi}{3} \right\}, \\ \gamma_3 &:= \{ \zeta : \arg \zeta = -\pi \}, \\ \gamma_4 &:= \left\{ \zeta : \arg \zeta = -\frac{2\pi}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Задача для $\Psi(\zeta)$ (см. (6.11))

$$\begin{aligned} \Psi &\in H_{2 \times 2}^\infty(\mathbb{C} \setminus \gamma_0), \\ \Psi_+ &= \Psi_- \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_2 \cup \gamma_4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.32)$$

решена в [67]. Ее решение записывается с помощью модифицированных функций Бесселя I , K и функций Ханкеля $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ (определения и свойства этих специальных функций см. в [68]):

$$\Psi := \begin{cases} \begin{pmatrix} I(2\zeta^{1/2}) & \frac{i}{\pi} K(2\zeta^{1/2}) \\ 2\pi i \zeta^{1/2} I'(2\zeta^{1/2}) & -2\zeta^{1/2} K'(2\zeta^{1/2}) \end{pmatrix}, & |\arg \zeta| < \frac{2\pi}{3}, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} H^{(1)}(2(-\zeta)^{1/2}) & \frac{1}{2} H^{(2)}(2(-\zeta)^{1/2}) \\ \pi \zeta^{1/2} (H^{(1)})'(2(-\zeta)^{1/2}) & \pi \zeta^{1/2} (H^{(2)})'(2(-\zeta)^{1/2}) \end{pmatrix}, & \frac{2\pi}{3} < \arg \zeta < \pi, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} H^{(2)}(2(-\zeta)^{1/2}) & -\frac{1}{2} H^{(1)}(2(-\zeta)^{1/2}) \\ -\pi \zeta^{1/2} (H^{(2)})'(2(-\zeta)^{1/2}) & \pi \zeta^{1/2} (H^{(1)})'(2(-\zeta)^{1/2}) \end{pmatrix}, & -\pi < \arg \zeta < -\frac{2\pi}{3}. \end{cases} \quad (6.33)$$

6.2.3. Конформное соответствие (O_0, Σ_0) и $(D_\varepsilon, \gamma_0 \cap D_\varepsilon)$. Искомое конформное отображение (как и прежде, см. (6.16)) строится с помощью функции $\tilde{l}$:

$$\begin{cases} \tilde{l} \in H(O_0 \setminus \Delta_0), \\ \tilde{l}_\pm = \mp i\pi \int_x^0 d\lambda(t) \quad \text{на } \Delta_0, \end{cases}$$

которая ввиду (6.29) теперь имеет вид

$$\tilde{l}(z) = 2z^{1/2}M(z), \quad M \in H(O_0), \quad M(0) \neq 0.$$

Конформное отображение

$$\zeta(z) := \left(\frac{1}{2} \tilde{l}(z) \right)^2 = zM^2(z) \quad (6.34)$$

определяет O_0 как образ круга D_ε , оно переводит $D_\varepsilon \cap \gamma_3$ в Δ_0 ,

$$\zeta(D_\varepsilon \cap \gamma_3) = \Delta_0,$$

и определяет Δ_0^+ и Δ_0^- как

$$\begin{aligned} \zeta(D_\varepsilon \cap \gamma_2) &=: \Delta_0^+, \\ \zeta(D_\varepsilon \cap \gamma_3) &=: \Delta_0^-. \end{aligned}$$

Таким образом, ввиду (6.32) функция

$$\Psi(c_n \zeta(z))$$

для любой константы c_n удовлетворяет теперь краевым условиям задачи (6.31) на Σ_0 .

6.2.4. Граничные условия на ∂O_0 . Ищем решение (6.31) в виде

$$V_0(z) = E(z)\Psi(c_n \zeta(z)), \quad E \in H(O_0). \quad (6.35)$$

Асимптотика функций (6.33) при $\zeta \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg \zeta| < \pi$ имеет вид (см. [67], [68]):

$$\Psi(\zeta) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \zeta^{-1/4} e^{2\zeta^{1/2}} (1 + O(\zeta^{-1/2})) & \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \zeta^{-1/4} e^{-2\zeta^{1/2}} (1 + O(\zeta^{-1/2})) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}i} \zeta^{1/4} e^{2\zeta^{1/2}} (1 + O(\zeta^{-1/2})) & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta^{1/4} e^{-2\zeta^{1/2}} (1 + O(\zeta^{-1/2})) \end{pmatrix},$$

$\zeta \rightarrow \infty.$

Выбирая

$$c_n = n^2,$$

получаем с учетом (6.34)

$$\begin{aligned} \Psi(n^2\zeta(z)) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (2\pi n)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (2\pi n)^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^{-1/4}(z) & 0 \\ 0 & \zeta^{1/4}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \left(I + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \begin{pmatrix} e^{-n\tilde{l}(z)} & 0 \\ 0 & e^{n\tilde{l}(z)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.36)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно для $z \in \partial O_0 \cap \zeta^{-1}(\{\zeta : |\arg \zeta| < \pi\})$, а ввиду равномерной ограниченности элементов матриц в правой части (6.36) это соотношение справедливо равномерно на ∂O_0 . Поэтому, чтобы удовлетворить граничные условия (6.31)

$$V_0 = (I + o(1))XA \quad \text{на } \partial O_0,$$

ввиду (6.36) в (6.35) выбираем матрицу-функцию E в виде

$$E := \sqrt{2} XA \begin{pmatrix} e^{n\tilde{l}} & 0 \\ 0 & e^{-n\tilde{l}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \zeta^{1/4} & 0 \\ 0 & \zeta^{-1/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2\pi n)^{1/2} & 0 \\ 0 & (2\pi n)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражение (5.25) для X и выражение (6.7) для A , имеем

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{w} \\ \frac{c}{i\Phi_0} & \frac{c\Phi_0}{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \zeta^{1/4} & 0 \\ 0 & \zeta^{-1/4} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} (2\pi n)^{1/2} & 0 \\ 0 & (2\pi n)^{-1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Производя умножение матриц, получаем

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(s + \frac{1}{ws}\right)\zeta^{1/4} & i\left(\frac{1}{ws} - s\right)\zeta^{-1/4} \\ \frac{1}{i}\left(\frac{s}{\Phi_0} + \frac{\Phi_0}{ws}\right)\zeta^{1/4} & \left(\frac{\Phi_0}{ws} - \frac{s}{\Phi_0}\right)\zeta^{1/4} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} (2\pi n)^{1/2} & 0 \\ 0 & (2\pi n)^{-1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

В подпункте 6.1.4 мы уже демонстрировали, что элементы матрицы в правой части (6.37) голоморфны в O_0 . Таким образом, функция

$$V_0(z) = E(z)\Psi(n^2\zeta(z)), \quad z \in O_0,$$

где E определена в (6.37), Ψ в (6.33), а $\zeta(z)$ в (6.34), решает граничную задачу (6.31) и соответственно функция

$$U_0 = E\Psi(n^2\zeta)A^{-1} \quad \text{в } O_0,$$

где A есть (6.7), дает решение интересующей нас задачи (6.31), что окончательно завершает доказательство теоремы 2 для случая (6.42).

§ 7. Окончание доказательства теоремы 2. Существование решений сингулярных краевых задач в окрестности концевой точки Δ

Осталось рассмотреть сингулярные случаи краевой задачи (5.26), которые были классифицированы порядком нуля производной равновесной меры в концах ее носителя (см. (6.2))

$$\lambda'(z) = z^{n-1/2} m(z), \quad m \in H(O_0), \quad m(0) \neq 0. \quad (7.1)$$

Напомним, что речь идет о двух случаях (см. (6.1)). Случай (A) – концевая точка носителя Δ равновесной меры λ является внутренней точкой дуги F , носителя веса ортогональности h_n . В этом случае краевая задача (5.26) сингулярна при следующих значениях показателя n в (7.1):

$$(A), \quad n = 2k + 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

Случай (B) соответствует совпадению концевой точки Δ и F , и в этом случае задача (5.26) сингулярна при

$$(B), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Существование решения краевой задачи (5.26) в случае (7.2) при $\tilde{h}_n \equiv 1$ доказано в [61; с. 1395–1409]. Добавление в доказательство из [61] слабо меняющейся компоненты $\tilde{h}_n$ переменного веса (см. (5.2)) не составляет особого труда (см. ниже), поэтому здесь мы не останавливаемся на анализе случая (7.2). В настоящем параграфе мы адаптируем метод из [61] для доказательства существования решения задачи (5.26) в случае (7.3).

7.1. Сведение к краевой задаче с глобально непрерывной функцией скачка. Напомним, что интересующая нас краевая задача (5.26) имеет вид (см. рис. 7)

$$\begin{aligned} U_0 &\in H_{2 \times 2}^2(O_0 \setminus \Sigma_0), \\ U_{0+} &= U_{0-} \cdot \begin{cases} D & \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \\ \mathcal{J} & \text{на } \Delta_0, \end{cases} \\ U_0 &= (I + o(1))X \text{ на } \partial O_0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где X определено в (5.25), $\mathcal{J}$ в (6.6), а D ввиду (6.6) и (6.15) записывается как

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\tilde{l}(z)/(\tilde{h}_n f_{h_n}^2)} & 1 \end{pmatrix},$$

здесь

$$\begin{cases} \tilde{l} \in H(O_0 \setminus \Delta), \\ \tilde{l}(x)|_{\Delta_{\pm}} = \pm i\pi \int_0^x d\lambda \end{cases}$$

и с учетом (7.3) в рассматриваемом нами случае имеем

$$\tilde{l}(z) = z^{\frac{3+2\nu}{2}} \widetilde{M}(z), \quad \widetilde{M} \in H(O_0), \quad \widetilde{M}(0) \neq 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

С помощью замены

$$\tilde{V}_0 := U_0 \tilde{A}, \quad \tilde{A} := \begin{pmatrix} f\tilde{h}_n^{1/2} & 0 \\ 0 & (f\tilde{h}_n^{1/2})^{-1} \end{pmatrix},$$

от задачи (7.4) с интегрируемыми граничными значениями мы перейдем к эквивалентной задаче, которую будем рассматривать в классе функций с непрерывными граничными значениями:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0 &\in H(O_0 \setminus \Sigma_0), \\ \tilde{V}_{0+} &= \tilde{V}_{0-} \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\tilde{l}} & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \Delta_0, \end{cases} \\ \tilde{V}_0 &= (I + o(1))X\tilde{A} \text{ на } \partial O_0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Делая соответствующую (7.5) конформную замену

$$\zeta(z) := (2n\tilde{l}(z))^{\frac{2}{3+2\nu}} = z(2n\tilde{M}(z))^{\frac{2}{3+2\nu}}, \quad (7.7)$$

для функции $\tilde{\mathcal{V}}_0(\zeta) := \tilde{V}(z(\zeta))$ мы получаем (см. рис. 8)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_0 &\in H\left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_2^4 \gamma_j\right), \\ \tilde{\mathcal{V}}_{0+} &= \tilde{\mathcal{V}}_{0-} \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\} & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_2 \cup \gamma_4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_3, \end{cases} \\ \tilde{\mathcal{V}}_0(\zeta) &= \left[I + O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] \begin{pmatrix} \zeta^{-1/4} & 0 \\ 0 & \zeta^{1/4} \end{pmatrix} \cdot \text{Const}, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_2^4 \gamma_j, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где Const есть некоторая матрица из абсолютных констант. Ветвь функции ζ^α фиксируется разрезом по $(-\infty, 0)$, а углы наклона прямых γ_2 и γ_4 выбраны так, чтобы функция $\exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\}$ экспоненциально убывала при $\zeta \rightarrow \infty$ вдоль $\gamma_2 \cup \gamma_4$. Для доказательства существования решения задачи (7.8) рассмотрим также задачу для функции $\tilde{\tilde{\mathcal{V}}}_0(\zeta)$, которая отличается от (7.8) условием скачка на $\gamma_2 \cup \gamma_4$:

$$\tilde{\tilde{\mathcal{V}}}_{0+}(\zeta) = \tilde{\tilde{\mathcal{V}}}_{0-}(\zeta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta^{1/2}\} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{на } \gamma_2 \cup \gamma_4.$$

Делая в задаче для $\tilde{\tilde{\mathcal{V}}}_0$ обратную замену (7.7) и полагая $2\tilde{n} := (2n)^{1/3}$, мы приходим к задаче (7.6) с измененной матрицей скачка на $\Delta_0^+ \cup \Delta_0^-$:

$$\tilde{\tilde{V}}_{0+} = \tilde{\tilde{V}}_{0-} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2\tilde{n}\tilde{l}} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{на } \Delta_0^+ \cup \Delta_0^-, \quad (7.9)$$

где

$$\tilde{l} := \tilde{l}^{\frac{1}{3+2\nu}} = z^{1/2} \tilde{M}, \quad \tilde{M} \in H(O_0), \quad \tilde{M}(0) \neq 0.$$

Решение последней задачи (т.е. (7.6) с измененным скачком (7.9)) существует, оно было построено (с помощью функций Бесселя) в предыдущем параграфе (см. п. 6.2).

Таким образом, для достижения цели нам достаточно доказать существование функции

$$\hat{\mathcal{V}}_0 := \tilde{\mathcal{V}}_0 \tilde{\mathcal{V}}_0^{-1},$$

удовлетворяющей (в смысле непрерывных граничных значений) задаче

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{V}}_0 &\in H(\mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}), \\ \hat{\mathcal{V}}_{0+} &= \hat{\mathcal{V}}_{0-T} \quad \text{на } \hat{\Gamma}, \\ \hat{\mathcal{V}}_0(\zeta) &= \left(I + O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $\hat{\Gamma} := \gamma_2 \cup \gamma_4^-$, а матрица скачка на $\hat{\Gamma}$ определена как

$$T := \begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}_{0-} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\} - \exp\{\zeta^{\frac{1}{2}}\} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{V}}_{0-}^{-1} & \text{на } \gamma_2, \\ \tilde{\mathcal{V}}_{0-} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta^{\frac{1}{2}}\} - \exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{V}}_{0-}^{-1} & \text{на } \gamma_4^-. \end{cases} \quad (7.10')$$

Обратим внимание, что мы сменили ориентацию γ_4 (см. рис. 9), так что ориентированный контур $\gamma_2 \cup \gamma_4^-$ разбивает $\mathbb{C}$ на две области $\tilde{\Omega}^{(-)}$ и $\tilde{\Omega}^{(+)}$.

Рис. 9

Преимуществом рассмотрения задачи (7.10) является то, что функция скачка (7.10') теперь непрерывна на всем $\hat{\Gamma}$.

7.2. Резольвента оператора Коши и решение матричной задачи Римана–Гильберта. Общий метод доказательства существования решения задачи (7.10) состоит в следующем. Пусть $C_{\pm}$ – оператор Коши:

$$(C_{\pm}f)(\zeta) = \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta_{\pm}} \int_{\hat{\Gamma}} \frac{f(s)}{s - \zeta'} \frac{ds}{2\pi i}, \quad \zeta \in \hat{\Gamma},$$

где $\zeta' \rightarrow \zeta_{\pm}$ обозначает нетангенциальный предел к точке ζ со стороны $(+)$ (или соответственно $(-)$) ориентированного контура $\hat{\Gamma}$. Теорема М. Рисса при общих условиях на $\hat{\Gamma}$ для $f \in L^p(\hat{\Gamma}, |d\zeta|)$ дает

$$\|C_{\pm}f\|_{L^p(\hat{\Gamma})} \leq c_p \|f\|_{L^p(\hat{\Gamma})},$$

а из формулы Сохоцкого–Племеля следует

$$C_+ - C_- = E, \quad Ef := f.$$

Пусть

$$u := I - T^{-1}.$$

Определим

$$C_T(f) := C_+(fu). \quad (7.11)$$

Ясно, что если $u \in C(\widehat{\Gamma})$, то C_T есть ограниченный оператор $L^2(\widehat{\Gamma}) \rightarrow L^2(\widehat{\Gamma})$. Предположим, что уравнение

$$(E - C_T)\mu = I \quad \text{на } \widehat{\Gamma} \quad (7.12)$$

имеет решение $\mu - I \in L^2(\widehat{\Gamma})$, т.е.

$$(E - C_T)(\mu - I) = C_T I = C_+ u$$

в смысле $L^2(\widehat{\Gamma})$ -граничных значений. Тогда решение матричной краевой задачи (7.10) запишется как

$$\widehat{\mathcal{V}}_0(\zeta) = I + \int_{\widehat{\Gamma}} \frac{\mu(s)u(s)}{s - \zeta} \frac{ds}{2\pi i}, \quad \zeta \notin \widehat{\Gamma}. \quad (7.13)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{V}}_{0+} &= I + C_+(\mu u) = I + C_T(\mu) = \mu, \\ \widehat{\mathcal{V}}_{0-} &= \mu(I - u)^{-1} = \mu T^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы доказать существование решения задачи (7.10) в смысле L^2 -граничных значений (в дальнейшем будет ясно, что ввиду непрерывности скачка это также обеспечит существование решения в смысле непрерывных граничных значений), нам достаточно проверить (см. (7.12)) обратимость оператора

$$E - C_T,$$

т.е. доказать, что

- А) $E - C_T$ есть фредгольмов оператор,
 - В) индекс $E - C_T$ равен 0,
 - С) $\text{Ker}(E - C_T) = \{0\}$.
- (7.14)

Справедливость пп. А) и В) есть достаточно общий факт, следующий из непрерывности T на $\widehat{\Gamma}$ (доказательства пп. А), В) в следующих двух пунктах параграфа практически повторяют соответствующие рассуждения из [61], и мы приводим их здесь лишь для полноты изложения).

7.3. Фредгольмовость оператора $E - C_T$. Приведем доказательство утверждения А) из (7.14). Наряду с оператором (7.11) рассмотрим оператор

$$C_{T^{-1}}f := C_+(f\hat{u}), \quad \hat{u} := I - T.$$

Оператор $E - C_{T^{-1}}$ является псевдообратным для $E - C_T$. Действительно, для $f \in L^2(\hat{\Gamma})$ имеем

$$\begin{aligned} (E - C_T)(E - C_{T^{-1}})f &= f - C_T f - C_{T^{-1}} f + C_+[\{f(I - T) + C_-(f(I - T))\}(I - T^{-1})] \\ &= f + C_+[C_-(f\hat{u})u]. \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства п. А) мы должны установить, что

$$K: f \rightarrow C_+[C_-(f\hat{u})u] \quad (7.15)$$

является компактным оператором $L^2(\hat{\Gamma}) \rightarrow L^2(\hat{\Gamma})$.

Пусть u_j есть рациональная аппроксимация

$$u_j(\xi) := \sum_{\nu=1}^N \frac{\alpha_\nu}{\xi - \xi_\nu}, \quad \xi_\nu \notin \hat{\Gamma},$$

непрерывной на $\hat{\Gamma}$ функции u :

$$\|u_j - u\|_{C(\hat{\Gamma})} \leq \frac{1}{j},$$

и K_j — соответствующий u_j оператор (7.15). Так как

$$\|K_j - K\| \leq \frac{\text{const}}{j},$$

достаточно проверить, что K_j компактен для любого j . Пусть

$$f_n \in L^2(\hat{\Gamma}), \quad f_n \xrightarrow{*} 0. \quad (7.16)$$

Имеем

$$\begin{aligned} (K_j f_n)(\xi) &= \lim_{\substack{\zeta' \rightarrow \zeta \\ \zeta' \in \Omega^{(+)} }} \sum_{\nu=1}^N \alpha_\nu \int_{\hat{\Gamma}} \frac{C_-(f_n \hat{u})(\xi) d\xi}{(\xi - \xi_\nu)(\xi - \zeta')2\pi i} \\ &= - \sum_{\nu: \xi_\nu \in \Omega^{(-)}} \frac{\alpha_\nu}{\xi_\nu - \zeta} \int_{\hat{\Gamma}} \frac{f_n(t) \hat{u}(t)}{t - \xi_\nu} \frac{dt}{2\pi i}, \end{aligned}$$

откуда ввиду (7.16) следует

$$\|K_j f_n\|_{L^2(\hat{\Gamma})} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Утверждение А) из (7.14) доказано.

7.4. Индекс оператора $E - C_T$. Рассмотрим оператор $E - C_{T_t}$, построенный по матрицам скачков T_t , зависящим от параметра $t \in [0, 1]$:

$$T_t(\zeta) := \begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}_{0-} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(\exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\} - \exp\{\zeta^{\frac{1}{2}}\}) & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{V}}_{0-}^{-1} & \text{на } \gamma_2, \\ \tilde{\mathcal{V}}_{0-} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(\exp\{\zeta^{\frac{1}{2}}\} - \exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\}) & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{V}}_{0-}^{-1} & \text{на } \gamma_4^-. \end{cases}$$

Как доказано в предыдущем пункте, оператор $E - C_{T_t}$ фредгольмов для любого t и, очевидно, при $t = 0$ (т.е. $E = E - C_{T_0}$) его индекс равен нулю. Следовательно, ввиду непрерывной зависимости индекса от t имеем

$$\text{Ind}(E - C_T) = \text{Ind}(E - C_{T_t}) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

7.5. Ядро оператора $E - C_T$. Осталось доказать утверждение С) из (7.14). Предположим противное, т.е. пусть существует $\mu_0 \in L^2(\Gamma_0)$ такое, что

$$(E - C_T)\mu_0 = 0. \quad (7.17)$$

Тогда, повторяя вывод формулы (7.13) из (7.12), получаем, что функция

$$\hat{\mathcal{V}}_0^\#(\zeta) = \int_{\hat{\Gamma}} \frac{\mu_0(s)u(s)}{s - \zeta} \frac{ds}{2\pi i}, \quad \zeta \notin \hat{\Gamma},$$

является решением (в L^2 -смысле) следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{V}}_0^\# &\in H(\mathbb{C} \setminus \hat{\Gamma}), \\ \hat{\mathcal{V}}_{0+}^\# &= \hat{\mathcal{V}}_{0-}^\# T \text{ на } \hat{\Gamma}, \\ \hat{\mathcal{V}}_0^\#(\zeta) &= O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \hat{\Gamma}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Более того, ввиду кусочной аналитичности и непрерывности $\mathcal{V}$ можно показать (см. [61; предложение 5.7]), что $\mathcal{V}_0^\#$ равномерно ограничено и решает (7.18) в смысле непрерывных граничных значений.

Теперь применительно к задаче (7.18), обращая рассуждения, приведшие от задачи (7.8) к задаче (7.10), мы получаем, что (7.17) влечет существование в смысле непрерывных граничных значений решения задачи (7.8) с измененным условием нормировки на бесконечности, а именно существует $\tilde{\mathcal{V}}_0^\#$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_0^\# &\in H\left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_2^4 \gamma_j\right), \\ \tilde{\mathcal{V}}_{0+}^\# &= \tilde{\mathcal{V}}_{0-}^\# \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\} & 1 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_2 \cup \gamma_4, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{на } \gamma_3, \end{cases} \\ \tilde{\mathcal{V}}_0^\#(\zeta) &= O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \begin{pmatrix} \zeta^{-1/4} & 0 \\ 0 & \zeta^{1/4} \end{pmatrix}, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_2^4 \gamma_j. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Мы сейчас покажем, что на самом деле задача (7.19) может иметь только тривиальное решение. Это докажет нам справедливость п. С) в (7.14).

Перейдем к вспомогательной функции $B(\zeta)$:

$$B(\zeta) := \begin{cases} \tilde{\gamma}_0^\# \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \zeta \in \text{I}, \\ \tilde{\gamma}_0^\# \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta \frac{3+2\nu}{2}\} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \zeta \in \text{II}, \\ \tilde{\gamma}_0^\# \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta \frac{3+2\nu}{2}\} & 1 \end{pmatrix}^{-1}, & \zeta \in \text{III}, \\ \tilde{\gamma}_0^\#, & \zeta \in \text{IV}, \end{cases}$$

где, напомним, области I, II, III, IV ограничены лучами γ_j , $j = 1, \dots, 4$ (см. рис. 4). Проверим скачки B на $\bigcup_{j=1}^4 \gamma_j$. На $\gamma_2 \cup \gamma_4$ скачки пропали, на γ_1 появился скачок $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и на γ_3 имеем

$$\begin{aligned} B_+|_{\gamma_3} &= \tilde{\gamma}_{0+}^\# \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta_+ \frac{3+2\nu}{2}\} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{\gamma}_{0-}^\# \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta_+ \frac{3+2\nu}{2}\} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B_-|_{\gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta_- \frac{3+2\nu}{2}\} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\{\zeta_+ \frac{3+2\nu}{2}\} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B_-|_{\gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{\zeta_+ \frac{3+2\nu}{2}\} \\ \exp\{\zeta_- \frac{3+2\nu}{2}\} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $B(\zeta)$ решает следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} B &\in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}), \quad \exists B_\pm \subset C(\mathbb{R}), \\ B_+(\zeta) &= B_-(\zeta) \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{\zeta_+ \frac{3+2\nu}{2}\} \\ \exp\{\zeta_- \frac{3+2\nu}{2}\} & 0 \end{pmatrix}, & \zeta \in \mathbb{R}^{(-)} := (-\infty, 0), \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \zeta \in \mathbb{R}^{(+)} := (0, +\infty), \end{cases} \\ B(\zeta) &= O\left(\frac{1}{\zeta^{3/4}}\right), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad \text{равномерно в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Определим функцию

$$B^\#(\zeta) := B(\zeta)B^*(\bar{\zeta}), \quad (7.21)$$

здесь “звездочка” обозначает сопряжение матрицы, а “черта” обозначает сопряжение комплексной переменной.

Функция $B^\#(\zeta)$ аналитична в $\mathbb{C}^{(+)} := \{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$, непрерывна вплоть до $\mathbb{R}$ и убывает как $\zeta^{-3/2}$ при $\zeta \rightarrow \infty$, следовательно, по теореме Коши имеем

$$\int_{\mathbb{R}} B_+^\#(s) ds = 0.$$

Подставляя в последнее соотношение определение $B^\#$ (см. (7.21)), с учетом матриц скачков функции B (см. (7.20)) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{(-)}} B_-(s) \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{s_+^{\frac{3+2\nu}{2}}\} \\ \exp\{-s_+^{\frac{3+2\nu}{2}}\} & 0 \end{pmatrix} B_-^*(s) ds \\ + \int_{\mathbb{R}^{(+)}} B_-(s) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_-^*(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Затем, добавляя к полученному соотношению его сопряженное, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^{(-)}} B_-(s) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B_-^*(s) ds = 0.$$

Так как на диагонали произведения подынтегральных матриц стоят положительные числа $2B_{11}\overline{B}_{11}$ и $2B_{21}\overline{B}_{21}$, то

$$\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbb{R}^{(-)}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, по теореме Привалова

$$\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}}^{(-)},$$

а ввиду соотношения на скачки в (7.20)

$$\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{в } \overline{\mathbb{C}}^{(+)}. \quad (7.21)$$

Таким образом, осталось рассмотреть вектор-функцию

$$b := \begin{cases} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} & \text{в } \mathbb{C}^{(+)}, \\ \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} & \text{в } \mathbb{C}^{(-)}, \end{cases}$$

которая, как следует из (7.20), удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} b &\in H(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{(-)}), \quad \exists b_\pm \in C(\mathbb{R}^{(-)}), \\ b_+(\zeta) &= b_-(\zeta) \exp\{-\zeta_+^{\frac{3+2\nu}{2}}\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{(-)}, \\ b(\zeta) &= O(\zeta^{-3/4}) \quad \text{равномерно при } \zeta \rightarrow \infty, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{(-)}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

По сути, мы можем считать, что $b(\zeta)$ в (7.22) есть скалярная функция. Покажем, что решением задачи (7.22) может быть только равная тождественно нулю функция. Для этого разрежем комплексную плоскость по $\mathbb{R}^{(-)}$ и подклеим к обоим “берегам” $\mathbb{R}_{\pm}^{(-)}$ по сектору с раствором угла $\frac{\pi}{2}\eta$ с некоторым положительным малым η . Продолжим на полученную риманову поверхность функцию b , проектируя ее на подклеенные секторы с домножением проекций на $\exp\{\zeta^{\frac{3+2\nu}{2}}\}$. Полученная функция будет аналитична на римановой поверхности, и с помощью отображения

$$\zeta(w) = w^{2+\eta}$$

она переходит в функцию

$$\tilde{b}(w) = b(\zeta(w)),$$

которая

- 1) аналитична в $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$,
- 2) ограничена в $\{w : \operatorname{Re} w \geq 0\}$,
- 3) $|\tilde{b}(ix)| \leq C_1 \exp\{-C_2|x|^{\frac{(3+2\nu)(2+\eta)}{2}}\} \leq C'_1 e^{-C'_2|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(7.23)

Удобнее рассматривать функцию $a(w) \in H(\{w : \operatorname{Im} w \geq 0\})$:

$$a(w) := \tilde{b}(iw).$$

У рассматриваемой функции все степенные моменты равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^n a(w) dw = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.24)$$

Действительно, по теореме Коши с учетом пп. 1) и 2) из (7.23) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w^n a(w) dw}{(i\varepsilon w - 1)^{n+2}} = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, по теореме Лебега с учетом п. 3) из (7.23) получаем (7.24). Наконец, убедимся, что

$$a(w) \equiv 0, \quad \{w : \operatorname{Re} w \geq 0\}. \quad (7.25)$$

Действительно, ввиду п. 3) из (7.23) преобразование Фурье $\hat{a}(k)$ функции $a(w)$ аналитично в полосе

$$\hat{a}(k) \in H(\{k : |\operatorname{Im} k| < C'_2\}), \quad (7.26)$$

производные функции $\hat{a}(k)$ в точке $k = 0$ пропорциональны моментам функции $a(w)$, и по (7.24), (7.26) получаем

$$\hat{a}(k) \equiv 0, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $a(w) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$ и в силу единственности решения задачи Дирихле в полуплоскости в классе *ограниченных* функций получаем (7.25).

Итак, задача (7.19) имеет только тривиальное решение, т.е. ядро оператора $E - C_T$ пусто, и мы завершаем доказательство его обратимости.

Тем самым, существование решения краевой задачи (5.26) в заключительном рассматриваемом сингулярном случае (7.3) доказано. Доказательство теоремы 2 завершено.

Список литературы

1. Гончар А. А. Рациональные аппроксимации аналитических функций // Труды международного конгресса математиков. Беркли, 1986, 1987. С. 739–748.
2. Гончар А. А. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями // Матем. сб. 1969. Т. 78(120). № 4. С. 640–654.
3. Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций // Труды МИАН. 1984. Т. 116. С. 52–60.
4. Гончар А. А. О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций // Матем. сб. 1978. Т. 105(147). № 2. С. 147–163.
5. Гончар А. А. Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитических функций в окрестности изолированной особой точки // Матем. сб. 1974. Т. 94(136). № 2. С. 266–282.
6. Gonchar A. A. Rational approximation of analytic functions // Linear and complex analysis problems book. Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 471–474. (Lecture Notes in Math. V. 1043.)
7. Гончар А. А., Лопес Г. О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1978. Т. 105(147). № 4. С. 512–524.
8. Гончар А. А., Рахманов Е. А. Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов // Матем. сб. 1984. Т. 125(167). № 1. С. 117–127.
9. Гончар А. А., Рахманов Е. А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Труды МИАН. 1981. Т. 157. С. 31–48.
10. Гончар А. А., Рахманов Е. А. О задаче равновесия для векторных потенциалов // УМН. 1985. Т. 40. № 4. С. 155–156.
11. Гончар А. А., Рахманов Е. А. Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций // Матем. сб. 1987. Т. 134. № 3. С. 306–352.
12. Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н. Аппроксимации Эрмита–Паде для систем функций марковского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 33–58.
13. Шталь Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на $[-1, 1]$ // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 8. С. 85–118.
14. Stahl H. Uniform rational approximation of $|x|$ // Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics, Euler Institute, 1991 / ed. A. A. Gonchar, E. B. Saff. Moscow: Nauka, 1992. P. 110–130; Berlin: Springer-Verlag, 1993. (Lecture Notes in Math. V. 1550.)
15. Stahl H. Best uniform rational approximation of x^α on $[0, 1]$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 28. P. 116–122.
16. Cody M. J., Meinardus G., Varga R. S. Chebyshev rational approximation to e^{-x} on $[0, +\infty)$ and applications to heat-conduction problems // J. Approx. Theory. 1969. V. 2. P. 50–65.
17. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе. М.: Мир, 1974.
18. Saff E. B., Varga R. S. Some open questions concerning polynomial and rational functions // Padé and rational approximation / ed. E. B. Saff, R. A. Varga. New York: Academic Press, 1977. P. 483–488.
19. Varga R. S. Scientific computation on some mathematical conjectures // Approximation theory V. Proc. 5th Int. Symp., College Station / Tex. 1986, 1986. P. 191–209.
20. Magnus A. P. CFGT determination of Varga's constant '1/9' // Inst. Preprint B-1348. Belgium: Inst. Math. U. C. L., 1986.
21. Magnus A. P. On the use of Carathéodory–Fejér method for investigating '1/9' and similar constants // Nonlinear numerical methods and rational approximation / ed. A. Cuyt. Dordrecht: D. Reidel, 1988. P. 105–132.
22. Magnus A. P., Meinguet L. The elliptic functions and integrals of the '1/9' problem // Numer. Algorithms. 2000. V. 24. P. 117–139; <http://www.math.ucl.ac.be/~magnus>.
23. Halphen G. H. Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. I. Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries. Paris: Gauthier-Villars, 1886. <http://moa.cit.cornell.edu/>.

24. *Magnus A. P.* Asymptotics and super asymptotics of best rational approximation error norms for the exponential function (the '1/9' problem) by the Carathéodory–Fejér method // *Nonlinear methods and rational approximation. II* / ed. A. Cuyt. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994. P. 173–185.
25. *Carpenter A. J., Rutan A., Varga R. S.* Extended computations on the '1/9' conjecture in rational approximation theory // *Lecture Notes in Math.* 1984. V. 1105. P. 383–411.
26. *Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., Zhou X.* Uniform asymptotics for orthogonal polynomials // *Doc. Math., J. DMV, Extra Vol. ICM Berlin.* 1998. V. 3. P. 491–501.
27. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
28. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. Berlin: Springer, 1997.
29. *Stahl H.* Structure of extremal domains associated with an analytic function // *Complex Variables Theory Appl.* 1985. V. 4. P. 339–356.
30. *Stahl H.* Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I, II // *Constr. Approx.* 1986. V. 2. P. 225–240, 241–251.
31. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: ГИФМЛ, 1963.
32. *Bernstein S. N.* Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini. I // *J. Math. Pures Appl.* (9). 1930. V. 9. P. 127–177; II // *J. Math. Pures Appl.* (9). 1931. V. 10. P. 219–286.
33. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
34. *Рахманов Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на вещественной оси // *Матем. сб.* 1982. Т. 119 (161). №2. С. 163–203.
35. *Mhaskar H. N., Saff E. B.* Extremal problems for polynomials with exponential weights // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 285. P. 203–234.
36. *Mhaskar H. N., Saff E. B.* Where does the sup norm of a weighted polynomial live? // *Constr. Approx.* 1985. V. 1. P. 71–91.
37. *Никишин Е. М.* Асимптотика линейных форм для совместных аппроксимаций Паде // *Изв. вузов. Сер. матем.* 1986. №2. С. 33–41.
38. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.
39. *Stahl H., Totik V.* General orthogonal polynomials. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1992. (Encyclopedia Math. Appl. V. 43.)
40. *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // *J. Approx. Theory.* 1984. V. 42. №4. P. 299–386.
41. *Widom H.* Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // *Adv. Math.* 1969. V. 3. P. 127–232.
42. *Антекеров А. И.* Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода // *Матем. сб.* 1984. Т. 125. №2. С. 231–258.
43. *Lopez G.* Szego's theorem for polynomials orthogonal with respect to varying measures. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Math. V. 1329.)
44. *Антекеров А. И.* Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско // *Матем. сб.* 1988. Т. 136(178). №1(5). С. 56–84.
45. *Lubinsky D., Saff E.* Strong asymptotics for extremal polynomials associated with exponential weights. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Math. V. 1305.)
46. *Lubinsky D. S.* Strong asymptotics for extremal errors and polynomials associated with Erdős-type weights. Harlow, UK: Longman Scientific and Technical, 1989. (Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 202.)
47. *Rakhmanov E. A.* Strong asymptotics for orthogonal polynomials // *Methods of approximation theory in complex analysis and mathematical physics* / ed. A. A. Gonchar, E. B. Saff. Moscow: Nauka, 1992. P. 71–97; Berlin: Springer-Verlag, 1993. (Lecture Notes in Math. V. 1550.)
48. *Van Assche W., Geronimo J.* Asymptotics for orthogonal polynomials with regularly varying recurrence coefficients // *Rocky Mountain J. Math.* 1989. V. 19. P. 39–49.
49. *Антекеров А. И.* Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина // *Матем. сб.* 1999. Т. 190. №5. С. 3–44.

50. Aptekarev A., Stahl H. Asymptotics of Hermite–Padé polynomials // Progress in approximation theory / ed. A. Gonchar, E. B. Saff. Berlin: Springer-Verlag, 1992. P. 127–167.
51. Aptekarev A. I. Multiple orthogonal polynomials // J. Comput. Appl. Math. 1998. V. 99. P. 423–448.
52. Totik V. Weighted approximation with varying weights. Berlin: Springer-Verlag, 1994. (Lecture Notes in Math. V. 1569.)
53. Totik V. Orthogonal polynomials with respect to varying weights // J. Comput. Appl. Math. 1998. V. 99. P. 373–386.
54. Stahl H. Three different approaches to a proof of convergence for Padé approximants // Rational approximation and its applications in mathematics and physics / ed. J. Gilewicz, M. Pindor, W. Siemaszko. Berlin: Springer-Verlag, 1987. (Lecture Notes in Math. V. 1237.)
55. Nuttall J. Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation // Constr. Approx. 1990. V. 6. P. 157–166.
56. Magnus A. P., Nuttall J. On the constructive rational approximation of certain entire functions // <http://www.crosswinds.net/~jnuttall/approx.htm>.
57. Суетин С. П. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. №9. С. 81–114.
58. Deift P., Zhou X. A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the mKdV equation // Ann. of Math. 1993. V. 137. P. 295–370.
59. Deift P. Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach. Reprint of the 1998 original. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000.
60. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., Zhou X. Asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights // Internat. Math. Res. Notices. 1997. V. 16. P. 759–782.
61. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R., Venakides S., Zhou X. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory // Comm. Pure Appl. Math. 1999. V. 52. № 11. P. 1335–1426.
62. Deift P., Kriecherbauer T., McLaughlin K. T.-R. New results on the equilibrium measure of logarithmic potentials in the presence of an external field // J. Approx. Theory. 1998. V. 95. P. 388–475.
63. Итс А. Р., Китаев А. В., Фокас А. С. Изомонодромный подход в теории двумерной квантовой гравитации // УМН. 1990. V. 45. №6. P. 135–136.
64. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимаций. М.–Л.: ОГИЗ–ТТЛ, 1947.
65. Аптекарев А. И. Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности концов интервала ортогональности // Матем. сб. 1992. Т. 183. №5. С. 43–62.
66. Туляков Д. Н. О локальной асимптотике отношения ортогональных полиномов в окрестности крайней точки носителя меры ортогональности // Матем. сб. 2001. Т. 192. №2. С. 139–160.
67. Kuijlaars A. B. J., McLaughlin K. T.-R., Van Assche W., Vanlessen M. The Riemann–Hilbert approach to strong asymptotics for orthogonal polynomials on $[-1, 1]$ // Preprint Katholieke Universiteit Leuven. 2001; arXiv: math. CA/0111252, V. 1, 23 Nov 2001.
68. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.