Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, k -регулярные отображения в евклидово пространство и задача Борсука–Болтянского, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 1, 73–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm620>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:53:40

УДК 515.127.15

С. А. Богатый

k -регулярные отображения в евклидово пространство и задача Борсука–Болтянского

Для нечетного k решена задача Борсука–Болтянского определения минимальной размерности евклидова пространства, в которое можно k -регулярно вложить любой n -мерный полиэдр (компакт). Для четного k получена новая оценка снизу.

Библиография: 32 названия.

1. Классическая теорема Нёбелинга–Понтрягина–Лефшеца (доказанная в одномерном случае также Менгером) о вложении утверждает, что всякий компакт X размерности $\dim X = n$ вкладывается в $(2n + 1)$ -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$. Обычно в монографиях по теории размерности теорема вложения дается в более сильной формулировке В. Гуревича [1], [2]: *множество всех вложений n -мерного компактного пространства X в t -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ при $t \geq 2n + 1$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$ всех непрерывных отображений компакта X в $\mathbb{R}^m$.*

В действительности В. Гуревич доказал значительно более сильное утверждение [3]. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ и всякого $q \geq 0$ рассмотрим подмножество $B_q(f) \subseteq Y$:

$$B_q(f) = \{y \in Y : \text{card } f^{-1}(y) \geq q\}.$$

Отображение f называется *регулярно ветвящимся* [4], если для всякого $q \geq 1$ имеет место неравенство

$$\dim B_q(f) \leq q \dim X - (q - 1) \dim Y = \dim Y - q(\dim Y - \dim X).$$

Очевидно, что при $2 \dim X + 1 \leq \dim Y$ всякое регулярно ветвящееся отображение является вложением. Кроме того, если $\dim X + 1 \leq \dim Y$, то всякое регулярно ветвящееся отображение имеет кратность $\leq \dim X + 1$.

ТЕОРЕМА ГУРЕВИЧА. *Если $t \geq \dim X + 1$, то множество всех регулярно ветвящихся отображений $\mathcal{H}(X, \mathbb{R}^m)$ компакта X в $\mathbb{R}^m$ содержит всюду плотное в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$ множество типа G_δ .*

Для любых целых чисел $r \geq -1$ и $q \geq 1$ рассмотрим в $\mathcal{C}(X, Y)$ подмножество $\mathcal{N}_{q,r}(X, Y)$ всех таких отображений, для которых имеет место неравенство

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00289) и фонда INTAS (грант № 96-0712).

$\dim B_q(f) \leq r$. Так как при $q \dim X - (q - 1) \dim Y \leq r$ имеет место включение $\mathcal{H}(X, Y) \subseteq \mathcal{N}_{q,r}(X, Y)$, то теорему Гуревича можно ослабить до следующего утверждения.

Если числа $n = \dim X$, m , q и r удовлетворяют неравенству

$$qn \leq (q - 1)m + r,$$

то множество $\mathcal{N}_{q,r}(X, \mathbb{R}^m)$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$.

В случае полиэдра X справедливо обращение ослабленного варианта теоремы Гуревича для произвольных чисел q и r . Как показано в работах [4]–[8], для произвольного компакта X уже обращение теоремы Нёбелинга–Понтрягина–Лефшеца–Гуревича неверно.

При $r = -1$ получается

СЛЕДСТВИЕ ГУРЕВИЧА. *Если числа n , m и q удовлетворяют неравенству*

$$n + 1 \leq (m - n)q,$$

то для любого n -мерного компакта X множество всех его не более чем q -кратных отображений в m -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ содержит всюду плотное в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$ подмножество типа G_δ .

Понятно, что при $m \geq 2n + 1$ возникающая “дополнительная свобода” должна привести к наличию более “экономичных” отображений (чем просто вложения). Один из вариантов такого более “экономичного” отображения дает понятие k -регулярного отображения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется k -регулярным [9], если для любых различных $k + 1$ точек $x_0, \dots, x_k \in X$ несущая плоскость их образов имеет размерность k .

Другими словами, отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется k -регулярным, если образы $f(x_0), \dots, f(x_k)$ никаких $k + 1$ точек не лежат на $(k - 1)$ -мерной плоскости, т.е. если образы $f(x_0), \dots, f(x_k)$ любых $k + 1$ точек являются вершинами k -мерного симплекса.

Ясно, что 1-регулярные отображения – это в точности вложения; 2-регулярные отображения – это в точности такие вложения, при которых никакие три точки образа не лежат на одной прямой. Так как добавление одной точки увеличивает размерность несущей плоскости не более, чем на единицу, то при $k \geq 2$ всякое k -регулярное отображение является также $(k - 1)$ -регулярным.

По уже цитированной теореме Нёбелинга–Понтрягина–Лефшеца всякое n -мерное метрическое компактное пространство X может быть 1-регулярно отображено в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Вложение (любое) евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ в сферу S^m порождает 2-регулярное отображение всякого подмножества $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^{m+1}$. Это означает, что *всякое n -мерное метрическое компактное пространство X может быть 2-регулярно отображено в $\mathbb{R}^{2n+2}$* . По-видимому, эти два результата и побудили К. Борсука [10] выдвинуть следующую гипотезу: *всякий n -мерный компакт для всякого $k \geq 1$ может быть k -регулярно вложен в $\mathbb{R}^{2n+k}$.*

В работе [11] В. Г. Болтянский пишет: “Проблема вложения (т.е. гомеоморфного погружения) компактов в евклидовы пространства, нашедшая свое решение в классических работах Понтрягина, Нёбелинга и ван Кампена, может быть сформулирована в двух различных, а priori неэквивалентных формах:

- 1) найти такое (наименьшее) натуральное N , что любой n -мерный компакт X может быть вложен в евклидово пространство E при $\dim E \geq N$;
- 2) найти такое (наименьшее) натуральное N' , что при $\dim E \geq N'$ множество всех вложений любого n -мерного компакта X в евклидово пространство E всюду плотно в множестве всех непрерывных отображений $X \rightarrow E$.

Ясно, что имеет место неравенство $N \leq N'$, связывающее числа N и N' ; совпадение же этих чисел отнюдь не очевидно заранее...

Проблему отыскания чисел N и N' можно рассматривать также для k -регулярных вложений,...

Мы покажем в настоящей работе ([11] – ред.), что

$$N' = nk + n + k.$$

Число же N , которым интересуется Борсук, будет при $k > 1$ несколько меньше N' (гипотеза Борсука: $N = 2n + k$). Таким образом, при $k > 1$ проблема k -регулярных вложений расщепляется (т.е. две указанные выше проблемы не эквивалентны в случае k -регулярных вложений)”.

На самом деле, В. Г. Болтянский [11] решил вторую задачу для k -регулярных вложений даже для индивидуального полиэдра X .

ТЕОРЕМА БОЛТЯНСКОГО. *Для n -мерного полиэдра X и натуральных чисел m и k следующие условия эквивалентны:*

- (1) множество всех k -регулярных вложений X в $\mathbb{R}^m$ всюду плотно в пространстве всех непрерывных отображений X в $\mathbb{R}^m$;
- (2) $m \geq nk + n + k$.

В. Г. Болтянский показал, что импликация (2) $\implies$ (1) справедлива для произвольного n -мерного компакта X , а импликация (1) $\implies$ (2) справедлива для всякого компакта X , содержащего n -мерный симплекс. Представляется вероятным, что при $m \geq n + 2$ условия (1) и (2) для произвольного компакта X будут эквивалентны, если в условии (2) число $nk + n$ заменить на число $\dim X^{k+1}$. В работах [6]–[8] показана эквивалентность таких условий при $k = 1$. Чтобы получить аналог теоремы Болтянского для произвольного компакта X , необходимо теоремы Щепина о пересечениях [12] “превратить” в теоремы о трансверсалиях, что, несомненно, представляет большие трудности.

С. С. Рышков [13] показал, что гипотеза Борсука не оправдывается (уже при $k = 5$) ни для какого n -мерного полиэдра (при $n \geq 4$). В действительности С. С. Рышков показал, что всякое k -регулярное отображение в $\mathbb{R}^m$ порождает вложение некоторого произведения в то же пространство. Размерность этого произведения и дает оценку снизу для числа m , которая опровергает гипотезу Борсука. Обстоятельное исследование возможности вложения специальных произведений в

евклидово пространство позволило получить [14; теорема 2] для некоторого полиэдра оценку снизу, близкую к верхней оценке.

ТЕОРЕМА БОЛТЯНСКОГО–РЫШКОВА–ШАШКИНА. *Если n -мерный остов N -мерного куба Q_n^N , где $N = n \cdot 3^{2\nu+2}$, $\nu = n[\frac{k+1}{2}] + [\frac{k}{4}]$, можно k -регулярно отобразить в $\mathbb{R}^m$, то*

$$m \geq \begin{cases} nk + n + 2[\frac{k}{4}] & \text{при нечетном } k = 2l - 1; \\ nk + 2[\frac{k}{4}] & \text{при четном } k = 2l. \end{cases}$$

Мы показываем, что более обстоятельное исследование редукции Рышкова позволяет получить вложение не только произведения, но и джойна соответствующих подмножеств.

Теорема ван Кампена–Флореса [15]–[18] о невложимости джойна $\Delta_{n_1}^{2n_1+2} * \dots * \Delta_{n_l}^{2n_l+2}$ в евклидово пространство удвоенной размерности позволяет улучшить теорему Болтянского–Рышкова–Шашкина. А именно в работе получена более сильная оценка снизу (следствия 1 и 2). Тем самым для нечетного числа k удалось решить задачу Борсука–Болтянского определения минимальной размерности m евклидова пространства, в которое может быть k -регулярно вложен любой n -мерный полиэдр (компакт), и для четного числа k получить некоторую новую оценку снизу, близкую к окончательной.

Таким образом, теорема Болтянского и следствие 1 показывают, что по крайней мере для нечетных k числа N_k и N'_k равны, т.е. по крайней мере для нечетных k проблема не расщепляется. Вложение n -мерного компакта в $(2n+1)$ -мерную сферу S^{2n+1} показывает, что для четных k проблема (по крайней мере для $k=2$) действительно расщепляется. Однако совершенно неясно, какая оценка на число N_k для четного $k \geq 4$ является “настоящей”: $N_k \geq nk + k$ из следствия 2 или $N_k \leq nk + n + k$ из теоремы Болтянского. Хотя, возможно, истинное значение N_k строго больше нижней оценки и строго меньше верхней оценки. Следствия 3–5 дают аналог неравенства Рышкова для произвольного (не обязательно полиэдрального) компактного пространства.

Здесь уместно напомнить гипотезу Глиссона [19]: компакт X можно 2-регулярно вложить в $\mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда он вкладывается в S^{m-1} . Если бы гипотеза Глиссона была верна, то в следствии 2 можно было бы заменить $\max\{\frac{k-2}{2}, 1\}$ на $\frac{k-2}{2}$.

В заключение укажем на работу [20], в которой доказываются различные теоремы о существовании трансверселей в случае $nk + k \leq m \leq nk + n + k - 1$, т.е. в случае отображений, являющихся претендентами на роль “регулярно ветвящихся k -регулярных отображений”. Однако необходимо отметить, что проблема существования отображений n -мерного компакта в $\mathbb{R}^m$ с не более чем q -точечными прообразами $(k-1)$ -мерных плоскостей (т.е. проблема трансверсального аналога следствия Гуревича) является совершенно открытой. Тем более открытой является проблема трансверсального аналога теоремы Гуревича, т.е. проблема существования отображений n -мерного компакта в $\mathbb{R}^m$, для которого множество всех $(k-1)$ -мерных плоскостей, содержащих не менее чем q точек образа, имеет “минимальную” размерность.

Результаты настоящей работы первоначально были подготовлены к публикации в виде отдельного параграфа статьи [21], что обусловило их “привязку” к

содержанию этой статьи, и докладывались в мае 1998 года на семинаре им. П. С. Александрова в МГУ, в июне 1998 года на семинаре Х. Ципанга в Ruhr-Universität Bochum и в сентябре 1998 года на конференции, посвященной 90-летию Л. С. Понтрягина [22].

2. Пусть $P(X)$ обозначает пространство всех вероятностных мер на метрическом компактном пространстве X [23], а $P_l(X)$ обозначает замкнутое подмножество всех вероятностных мер с не более чем l -точечным носителем.

Непрерывное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ порождает непрерывное отображение $B(f): P(X) \rightarrow \mathbb{R}^m$ по формуле

$$B(f)(\mu) = \int f d\mu.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ является k -регулярным для $k = 2l - 1$, где $l \geq 1$, то отображение*

$$B(f)|_{P_l(X)}: P_l(X) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ_1 и μ_2 — две различные меры из $P_l(X)$.

Если $\text{supp } \mu_1 = \text{supp } \mu_2 = \{x_1, \dots, x_t\}$, где $t \leq l + 1$, то точки $f(x_1), \dots, f(x_t)$ являются вершинами $(t - 1)$ -мерного симплекса $\sigma \langle f(x_1), \dots, f(x_t) \rangle$. Так как меры μ_1 и μ_2 различны, то их барицентры являются различными точками симплекса $\sigma \langle f(x_1), \dots, f(x_t) \rangle$.

Рассмотрим теперь множество $A = \text{supp } \mu_1 \cup \text{supp } \mu_2$. Очевидно, что в множестве A не более чем $l + l = 2l = k + 1$ точек. Следовательно, если $A = \{x_1, \dots, x_t\}$, где $t \leq k + 1$, то точки $f(x_1), \dots, f(x_t)$ являются вершинами $(t - 1)$ -мерного симплекса $\sigma \langle f(x_1), \dots, f(x_t) \rangle$. Так как $\text{supp } \mu_1 \neq \text{supp } \mu_2$, то точки $B(f)(\mu_1)$ и $B(f)(\mu_2)$ лежат на разных гранях указанного симплекса.

Для точки $\star \in X$ пусть $P_l(X, \star)$ обозначает замкнутое подмножество всех вероятностных мер, носитель которых содержит не более l точек в дополнении к точке $\star$, т.е.

$$\mu \in P_l(X, \star) \iff |\text{supp } \mu \cap (X \setminus \{\star\})| \leq l.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ является k -регулярным для $k = 2l$, где $l \geq 1$, то для всякой точки $\star \in X$ отображение*

$$B(f)|_{P_l(X, \star)}: P_l(X, \star) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью повторяет предыдущие рассуждения. Изменения заключаются только в том, что если $A = \text{supp } \mu_1 \cup \text{supp } \mu_2$, то $|A| \leq l + l + 1 = 2l + 1 = k + 1$.

Пространства $P_l(X)$ и $P_l(X, \star)$ имеют достаточно сложную топологическую структуру, поэтому оценить размерность евклидова пространства, в которое они

вкладываются, оказалось почти невозможным. Мы выделим в указанных пространствах некоторые более простые подпространства. Для попарно дизъюнктивных множеств $A_1, \dots, A_l$ пусть

$$P_l(A_1, \dots, A_l) = \left\{ \mu \in P_l \left(\bigcup_{i=1}^l A_i \right) : |\operatorname{supp} \mu \cap A_i| \leq 1 \text{ для } i = 1, \dots, l \right\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Для попарно дизъюнктивных компактных множеств $A_1, \dots, A_l$

$$P_l(A_1, \dots, A_l) \simeq A_1 * \dots * A_l.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу l . При $l = 1$ все очевидно.

Пусть $l = 2$. Джойн $A_1 * A_2$ можно рассматривать как факторпространство произведения $A_1 \times [0, 1] \times A_2$, в котором отождествлены точки $(x, 0, y_1)$ и $(x, 0, y_2)$, а также точки $(x_1, 1, y)$ и $(x_2, 1, y)$. Поставим теперь в соответствие точке (x, t, y) дискретную меру μ на X такую, что $\mu(x) = 1 - t$ и $\mu(y) = t$. Построенное отображение $\Phi: A_1 \times [0, 1] \times A_2 \rightarrow P_2(A_1, A_2)$ факторизуется через пространство $A_1 * A_2$, и факторотображение является гомеоморфизмом.

Пусть теперь $l \geq 3$. По индуктивному предположению следующие пространства гомеоморфны: $A_1 * \dots * A_{l-1} * A_l \simeq (A_1 * \dots * A_{l-1}) * A_l \simeq P_{l-1}(A_1, \dots, A_{l-1}) * A_l$. Теперь всякой тройке $(\tilde{\mu}, t, x_l)$ поставим в соответствие такую дискретную меру $\mu \in P_l(A_1, \dots, A_{l-1}, A_l)$, что $\operatorname{supp} \mu \subseteq \operatorname{supp} \tilde{\mu} \cup x_l$. Указанная мера задается формулами $\mu(x) = (1 - t)\tilde{\mu}(x)$ для $x \in \operatorname{supp} \tilde{\mu}$ и $\mu(x_l) = t$. Построенное отображение $\Phi_l: P_{l-1}(A_1, \dots, A_{l-1}) \times [0, 1] \times A_l \rightarrow P_l(A_1, \dots, A_{l-1}, A_l)$ факторизуется через пространство $P_{l-1}(A_1, \dots, A_{l-1}) * A_l$, и факторотображение является гомеоморфизмом.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если пространство Δ_n^N , где $N = nk + n + k + \frac{k+1}{2}$, можно k -регулярно, где $k = 2l - 1$, вложить в $\mathbb{R}^m$, то $m \geq nk + n + k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ — это k -регулярное отображение. Симплекс Δ^N имеет $N + 1 = n(2l - 1) + n + 2l - 1 + l + 1 = (2n + 3)l$ вершин. Разобьем их на l дизъюнктивных $(2n + 3)$ -точечных множеств. Тогда согласно теоремам 1 и 3 существует вложение

$$\tilde{f}: \Delta_n^{2n+2} * \dots * \Delta_n^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Следовательно, по теореме ван Кампена–Флореса о невложимости джойна (достаточно в [24; теорема 1] положить $q = 2$, $n_1 = \dots = n_l = n$, $N_1 = \dots = N_l = 2n + 2$) имеет место неравенство $m \geq 2 \dim(\Delta_n^{2n+2} * \dots * \Delta_n^{2n+2}) + 1 = 2ln + 2(l - 1) + 1 = n(2l - 1) + n + 2l - 1 = nk + n + k$.

ЛЕММА. Следующие условия эквивалентны:

- (1) джойн $\Delta_{n_1}^{2n_1+2} * \dots * \Delta_{n_l}^{2n_l+2} * \{\star\}$ вкладывается в $\mathbb{R}^m$;
- (2) $m \geq 2(n_1 + \dots + n_l + l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (2) $\implies$ (1). Вложим $K = \Delta_{n_1}^{2n_1+2} * \dots * \Delta_{n_l}^{2n_l+2}$ в $\mathbb{R}^{2(n_1+\dots+n_l+1)+1} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$. Конус $C(K) \simeq K * \{\star\}$ над подмножеством $\mathbb{R}^{m-1}$ естественно вкладывается в $\mathbb{R}^m$.

(1) $\implies$ (2). Пусть $K * \{\star\} \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $(K * \{\star\}) * \{\star_2\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Но $(K * \{\star\}) * \{\star_2\} \simeq K * (\{\star\} * \{\star_2\}) \simeq K * I \supset K * \Delta_0^2$. Следовательно, по теореме о невложимости джойна (достаточно в [24; теорема 1] положить $q = 2$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_l = 0$, $n_{l+1} = 0$, $N_{l+1} = 2$) имеет место неравенство $m + 1 \geq 2 \dim(\Delta_{n_1}^{2n_1+2} * \dots * \Delta_{n_l}^{2n_l+2} * \Delta_0^2) + 1 = 2(n_1 + \dots + n_l + l) + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если пространство Δ_n^N , где $N = nk + k + \max\{\frac{k-2}{2}, 1\}$, можно k -регулярно, где $k = 2l$, вложить в $\mathbb{R}^m$, то $m \geq nk + k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ — это k -регулярное отображение. Симплекс Δ^N имеет $N + 1 \geq 2ln + 2l + l - 1 + 1 = (2n + 3)l$ вершин. Разобьем их на l дизъюнктивных $(2n + 3)$ -точечных множеств. Если $l \geq 2$, то в качестве точки $\star$ возьмем любую точку, не лежащую ни в одном из полученных подкомплексов Δ_n^{2n+2} . Если же $l = 1$, то в качестве точки $\star$ возьмем оставшуюся вершину симплекса Δ^N .

Тогда согласно теоремам 2 и 3 существует вложение

$$\tilde{f}: \Delta_n^{2n+2} * \dots * \Delta_n^{2n+2} * \{\star\} \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Следовательно, по лемме имеет место неравенство $m \geq 2(nl + l) = nk + k$.

Легко видеть, что джойн $A_1 * \dots * A_l$ содержит произведение $A_1 \times \dots \times A_l \times \Delta^{l-1}$. Размерность этого произведения и является тем препятствием, с помощью которого С. С. Рышков опроверг гипотезу Борсука.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если n -мерный размерностно полноценный компакт X обладает k -регулярным вложением в $\mathbb{R}^m$, то

$$m \geq n \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компакт X содержит замкнутые попарно дизъюнктивные подмножества $A_1, \dots, A_l$, где в качестве l мы возьмем $\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$ такие, что $\dim A_1 \times \dots \times A_l = \dim X^l = ln$. Следовательно, из существования вложения $A_1 \times \dots \times A_l \times \Delta^{l-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ при нечетном $k = 2l - 1$ и вложения $A_1 \times \dots \times A_l \times \{\star\} \times \Delta^l \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ при четном $k = 2l$ и теоремы Гуревича [25] о том, что умножение на отрезок увеличивает размерность ровно на 1, вытекает искомое неравенство.

Напомним [26], что конечномерный компакт X называется *размерностно полноценным*, если $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$ для всякого конечномерного компакта Y . Конечномерный компакт X называется *компактом первого рода*, если $\dim X^n = n \dim X$ для всех натуральных n , и *компактом второго рода*, если $\dim X^n = n(\dim X - 1) + 1$ для всех натуральных n .

СЛЕДСТВИЕ 4. Если n -мерный размерностно неполноценный компакт X первого рода обладает k -регулярным вложением в $\mathbb{R}^m$, то

$$m \geq n \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет предыдущие рассуждения. Единственное добавление заключается в следующем. Компакт $A_1 \times \cdots \times A_l \times \Delta^r$ является размерностно неполноценным. Действительно, если $\dim X \times Y < \dim X + \dim Y$, то справедлива цепочка неравенств $\dim X^l \times Y \leq \dim X^{l-1} + \dim X \times Y < \dim X^{l-1} + \dim X + \dim Y = \dim X^l + \dim Y$. Поэтому можно выписать цепочку неравенств $\dim A_1 \times \cdots \times A_l \times \Delta^r \times Y \leq \dim X^l \times Y \times \Delta^r = \dim(X^l \times Y) + r < \dim X^l + \dim Y + r = \dim A_1 \times \cdots \times A_l + \dim Y + r = \dim A_1 \times \cdots \times A_l \times \Delta^r + \dim Y$. Выписанное произведение при $l = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$, $r = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ является в точности препятствием Рышкова. Следовательно, по теореме Александрова [21] размерность объемлющего евклидова пространства должна превосходить размерность $nl + r$ вложенного компакта по крайней мере на 2.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если n -мерный размерностно неполноценный компакт X второго рода обладает k -регулярным вложением в $\mathbb{R}^m$, то

$$m \geq n \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil + \left(k+1 - 2 \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \right) + 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае необходимы следующие изменения предыдущих рассуждений. Компакт $A_1 \times \cdots \times A_l \times \Delta^r$ является размерностно неполноценным, так как $\dim A_1 \times \cdots \times A_l \times \Delta^r \times X \leq \dim X^l \times X \times \Delta^r = (l+1)(\dim X - 1) + 1 + r = l(\dim X - 1) + 1 + r + (\dim X - 1) = \dim X^l + r + (\dim X - 1) = \dim A_1 \times \cdots \times A_l + r + (\dim X - 1) = \dim A_1 \times \cdots \times A_l \times \Delta^r + (\dim X - 1)$. Следовательно, по теореме Александрова (при $l = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$, $r = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$) имеет место неравенство $m \geq \dim A_1 \times \cdots \times A_l \times \Delta^r + 2 = \dim X^l + r + 2 = l(\dim X - 1) + 1 + r + 2 = l \dim X + 1 + r - l + 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае полиэдра X следствие 3 является в точности теоремой Рышкова, опровергнувшей гипотезу Борсука на уровне *общего* полиэдра.

Ю. А. Шашкин [27] провел детальное исследование возможности k -регулярного вложения графов. В качестве препятствия к существованию k -регулярного вложения выступает невозможность вложения степени триода.

Назовем n -мерным зонтиком [28] (кнопкой [29]) T_n подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящее из n -мерного шара

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1, \quad x_{n+1} = 0$$

и ортогонального отрезка, выходящего из его центра:

$$x_1 = \cdots = x_n = 0, \quad 0 \leq x_{n+1} \leq 1.$$

Ю. А. Шашкин доказал [27], что степень одномерного зонтика (т.е. триода) вкладывается только в евклидово пространство удвоенной размерности и вычислил размерность вложения степени n -мерного зонтика [28; теорема 4]. Так как в случае общего n Ю. А. Шашкин доказательство не опубликовал, а при $n = 1$ опубликованное им доказательство достаточно сложно, то мы приведем доказательство более общей теоремы, восходящее к конструкции Х. Хопфа [30], повторенной впоследствии Е. В. Шепиным [31] и М. Изидорек и Я. Яворовским [32].

ТЕОРЕМА 4. Следующие условия эквивалентны:

- (1) произведение $T_{n_1} \times \dots \times T_{n_l} \times I^{n_0}$ вкладывается в $\mathbb{R}^m$;
- (2) $m \geq n_1 + \dots + n_l + l + n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как n_i -мерный зонтик уже лежит в $\mathbb{R}^{n_i+1}$, то импликация (2) $\implies$ (1) очевидна.

(1) $\implies$ (2). Построим такое отображение

$$f_n: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow T_n,$$

что для всякой ненулевой точки $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ точки $f_n(x)$ и $f_n(-x)$ различны. Для задания отображения f_n удобно считать, что n -мерный шар является не прямолинейным, а коническим.

А именно в плоскости $x_{n+1} = -1/2$ рассмотрим сферу радиуса $\sqrt{3}/2$ и возьмем конус над ней с вершиной в начале координат. Сечением построенного зонтика любой 2-мерной плоскостью, проходящей через ось Ox_{n+1} , являются 3 единичных отрезка, образующие друг с другом угол $2\pi/3$. Ретракция Хопфа плоскости сечения на триод задает искомое отображение f_n .

Произведение построенных отображений и радиальной ретракции $\mathbb{R}^{n_0}$ на I^{n_0} задает отображение $\mathbb{R}^{n_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_l+1} \times \mathbb{R}^{n_0}$ в $T_{n_1} \times \dots \times T_{n_l} \times I^{n_0}$, которое не склеивает никакой пары антиподальных точек. Следовательно, если рассматриваемое произведение вкладывается в $\mathbb{R}^m$, то по теореме Борсука–Улама размерность m должна быть строго больше размерности сферы отображаемого евклидова пространства, т.е. имеет место неравенство (2).

Список литературы

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
2. Engelking R. Dimension theory. Amsterdam: North-Holland, 1978.
3. Hurewicz W. Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume // Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1933. V. 24/25. P. 754–768; // Collected works of Witold Hurewicz. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 295–309.
4. Dranišnikov A. N., Repovš D., Ščepin E. V. On intersections of compacta of complementary dimensions in Euclidean space // Topology Appl. 1991. V. 38. №3. P. 237–253.
5. McCullough D., Rubin L. R. Some m -dimensional compacta admitting a dense set of imbeddings into $\mathbb{R}^{2m}$ // Fund. Math. 1989. V. 133. №3. P. 237–245.
6. Дранишников А. Н., Щепин Е. В. Об устойчивости пересечений компактов в евклидовом пространстве // УМН. 1989. Т. 44. №5. С. 194–195.
7. Krasinkiewicz J. Imbeddings into $\mathbb{R}^n$ and dimension of products // Fund. Math. 1989. V. 133. №3. P. 247–253.
8. Spież S. Imbeddings in $\mathbb{R}^{2m}$ of m -dimensional compacta with $\dim(X \times X) < 2m$ // Fund. Math. 1990. V. 134. №2. P. 105–115.
9. Borsuk K. On the k -independent subsets of the Euclidean space and of the Hilbert space // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 1957. V. 5. №4. P. 351–356.
10. Борсук К. Замечания к вложимости множеств в евклидовы пространства // Труды III Всесоюз. матем. съезда. Т. 4, 1959. С. 197–198.
11. Болтянский В. Г. Отображения компактов в евклидовы пространства // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. С. 871–892.
12. Щепин Е. В. Арифметика теории размерности // УМН. 1998. Т. 53. №5. С. 115–212.
13. Рышков С. С. О k -регулярных вложениях // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. №2. С. 272–273.

14. Болтянский В. Г., Рышков С. С., Шашкин Ю. А. О k -регулярных вложениях и их применении к теории приближения функций // УМН. 1960. Т. 15. № 6. С. 125–132.
15. Van Kampen E. R. Komplexe in euklidischen Räumen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1932. V. 9. P. 72–78.
16. Flores A. Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind // Erg. Math. Kolloq. 1935. V. 6. P. 4–7.
17. Sarkaria K. S. A generalized van Kampen–Flores theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111. № 2. P. 559–565.
18. Воловиков А. Ю. К теореме ван Кампена–Флореса // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 5. С. 663–670.
19. Шашкин Ю. А. Системы Коровкина в пространствах непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26. № 4. С. 495–512.
20. Богатый С. А., Воловиков А. Ю. Теорема Борсука–Улама для представлений и d -трансверсали // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
21. Богатый С. А. Геометрия отображений в евклидово пространство // УМН. 1998. Т. 53. № 5. С. 27–56.
22. Bogatyı S. A. Pontrjagin's embedding theorem – k -regular embeddings, converse // Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г. Тезисы докладов. Алгебра, геометрия и топология. М.: Изд-во МГУ, 1998. С. 59–61.
23. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
24. Богатый С. А. Цветная теорема Тверберг // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. № 3. С. 14–19.
25. Hurewicz W. Sur la dimension des produits Cartésiens // Ann. of Math. (2). 1935. V. 36. № 1. P. 194–197; // Collected works of Witold Hurewicz. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 335–339.
26. Кузьминов В. И. Гомологическая теория размерности // УМН. 1968. Т. 23. № 5 (143). С. 3–49.
27. Шашкин Ю. А. О k -регулярных вложениях графов в евклидовы пространства // УМН. 1963. Т. 18. № 4. С. 195–199.
28. Шашкин Ю. А. Интерполяционные семейства функций и вложения множеств в евклидовы и проективные пространства // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1030–1032.
29. Хаджииванов Н. Непрерывные отображения кнопок в $\mathbb{R}^n$ // Бюлл. Польской Акад. наук. 1974. Т. 22. № 3. С. 283–287.
30. Hopf H. Freie Überdeckungen und freie Abbildungen // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 33–57.
31. Щепин Е. В. Об одной проблеме Л. А. Тумаркина // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217. № 1. С. 42–43.
32. Izydorek M., Jaworowski J. Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. № 6. P. 1947–1950.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: bogatyı@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
27.09.2000