Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, Теорема Борсука–Улама в бесконечномерных банаховых пространствах, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 1, 83–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm621>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 10:48:57

УДК 517.988.6

Б. Д. Гельман

Теорема Борсука–Улама в бесконечномерных банаховых пространствах

Хорошо известна классическая теорема Борсука–Улама, находящая широкие приложения в различных задачах. Обобщение этой теоремы на бесконечномерные пространства связано с большими трудностями, так как ее формулировка существенно конечномерна. В работе доказывается теорема, являющаяся естественным обобщением теоремы Борсука–Улама для случая бесконечномерных банаховых пространств, и рассматриваются приложения этой теоремы в различных задачах.

Библиография: 8 названий.

Хорошо известна классическая теорема Борсука–Улама (см., например, [1], [2]), находящая широкие приложения в различных задачах. Одна из эквивалентных формулировок этой теоремы такова.

ТЕОРЕМА (Борсук–Улам). Пусть S^n – единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ и $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – нечетное отображение. Если $k \leq n$, то существует по крайней мере одна точка $x_0 \in S^n$ такая, что $f(x_0) = 0$.

Представляет интерес обобщение этой теоремы на бесконечномерные пространства. Некоторое обобщение теоремы Борсука–Улама для случая гильбертова пространства было предложено в работе [3].

В настоящей статье доказывается теорема, являющаяся естественным обобщением теоремы Борсука–Улама для случая бесконечномерных банаховых пространств, и рассматриваются приложения этой теоремы в различных задачах. Некоторые результаты статьи анонсированы в [4].

§ 1. Необходимые сведения

Пусть E – банахово пространство, $E_0 = E \times \mathbb{R}^1$. Норму в E_0 определим по правилу:

$$\|(x, t)\| = \sqrt{\|x\|^2 + t^2}.$$

Пусть S_0 – единичная сфера в банаховом пространстве E_0 , а $f: S_0 \rightarrow E$ – вполне непрерывное нечетное отображение. Рассмотрим уравнение

$$f(x, t) = x. \quad (1)$$

ЛЕММА 1. При сделанных предположениях уравнение (1) имеет решение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00333).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – единичный шар в пространстве E , S – единичная сфера. Рассмотрим отображение $g: B \rightarrow E$, определенное условием:

$$g(x) = f(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}).$$

Это отображение является нечетным на сфере S и вполне непрерывным. Следовательно, по теореме о нечетном поле (см., например, [5]) отображение g имеет неподвижную точку. Пусть точка x_0 является неподвижной точкой отображения g , тогда точка (x_0, t_0) является решением уравнения (1), где $t_0 = \sqrt{1 - \|x_0\|^2}$. Лемма доказана.

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $a: E_1 \rightarrow E_2$ – непрерывный линейный сюръективный оператор.

ЛЕММА 2. Пусть

$$\beta(a) = \sup_{y \in E_2} \frac{\inf\{\|x\| : x \in E_1, a(x) = y\}}{\|y\|},$$

тогда $0 < \beta(a) < \infty$.

Доказательство этой леммы вытекает из открытости отображения a .

ЛЕММА 3. Пусть $a: E_1 \rightarrow E_2$ – непрерывный линейный сюръективный оператор и $\dim(\text{Кер } a) \geq 1$. Тогда существует непрерывное нечетное отображение $q: E_1 \rightarrow E_2$ такое, что:

- 1) $a(q(x)) = x$ для любого $x \in E_2$;
- 2) отображение q переводит ограниченные множества в ограниченные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a^{-1}: E_2 \rightarrow E_1$ – отображение, обратное к a . Оно является полунепрерывным снизу многозначным отображением и имеет выпуклые замкнутые образы. Очевидно также, что $a^{-1}(-y) = -a^{-1}(y)$.

Рассмотрим другое многозначное отображение $\Phi: E_2 \rightarrow E_1$, $\Phi(y) = B_{r(y)}[0]$, где $B_{r(y)}[0]$ – замкнутый шар радиуса $r(y) = \beta(a)\|y\| + 1$ в E_1 .

Пусть $F(y) = a^{-1}(y) \cap \Phi(y)$. Нетрудно видеть, что F имеет непустые замкнутые выпуклые образы, является полунепрерывным снизу и $F(-y) = -F(y)$.

В силу теоремы об эквивариантном сечении эквивариантного многозначного отображения (см. [6]) существует нечетное отображение $q: E_2 \rightarrow E_1$ такое, что для любого $y \in E_2$ выполнено включение $q(y) \in F(y)$. Следовательно, $a(q(y)) = y$. Лемма доказана.

Пусть S^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, X – компактное метрическое пространство с непрерывной инволюцией T , т.е. $T: X \rightarrow X$ и $T^2(x) = x$ для любого $x \in X$. Пусть инволюция T не имеет неподвижных точек на X .

ЛЕММА 4. Если $\dim X \leq n - 1$, то существует непрерывное отображение $\gamma: X \rightarrow S^{n-1}$ такое, что $\gamma(Tx) = -\gamma(x)$ для любого $x \in X$.

Простое доказательство этой леммы содержится, например, в работе [7].

§2. Теорема Борсука–Улама

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $a: E_1 \rightarrow E_2$ – непрерывный линейный сюръективный оператор. Пусть $S_r(0)$ – сфера радиуса r с центром в нуле пространства E_1 , отображение $f: S_r(0) \rightarrow E_2$ – вполне непрерывное нечетное отображение.

Нас будет интересовать разрешимость уравнения

$$a(x) = f(x). \quad (2)$$

Обозначим множество решений этого уравнения через $N(a, f) \subset S_r(0)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\dim(\text{Ker } a) \geq 1$, то уравнение (2) на сфере $S_r(0)$ имеет решение и $\dim N(a, f) \geq \dim(\text{Ker } a) - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала непустоту множества $N(a, f)$.

Пусть отображение q удовлетворяет условиям леммы 3. Рассмотрим отображение $g: E_1 \rightarrow E_2$, определенное условием:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{r} f\left(\frac{rx}{\|x\|}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Пусть вектор $b \in \text{Ker } a$ и $b \neq 0$. Пусть $E = E_2 \times \mathbb{R}^1$. Рассмотрим отображение $\alpha: E \rightarrow E_2$,

$$\alpha(y, t) = g(q(y) + tb).$$

Это отображение является нечетным и вполне непрерывным.

Пусть S – единичная сфера в E , рассмотрим уравнение

$$\alpha(y, t) = y$$

на S . В силу леммы 1 это уравнение имеет решение, т.е. существует точка $(y_0, t_0) \in S$ такая, что $g(q(y_0) + t_0 b) = y_0$. Нетрудно видеть, что точка $z_0 = q(y_0) + t_0 b \neq 0$.

Тогда

$$g(z_0) = \frac{\|z_0\|}{r} f\left(\frac{rz_0}{\|z_0\|}\right) = y_0.$$

С другой стороны,

$$a(z_0) = a(q(y_0) + t_0 b) = a(q(y_0)) + t_0 a(b) = y_0.$$

Пусть $x_0 = rz_0/\|z_0\| \in S_r(0) \subset E_1$. Тогда $f(x_0) = a(x_0)$, т.е. точка x_0 является решением уравнения (2). Это и доказывает первую часть теоремы.

Докажем теперь вторую часть теоремы, связанную с оценкой размерности множества $N(a, f)$.

Пусть отображения $q: E_2 \rightarrow E_1$ и $g: E_1 \rightarrow E_2$ такие же, как и в первой части теоремы. Рассмотрим число n такое, что $\dim(\text{Ker } a) \geq n + 1$. Тогда существуют

$n + 1$ единичных линейно независимых векторов $e_i \in \text{Кег } a$, $i = 0, \dots, n$. Пусть $E = E_2 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$, $E_0 = E_2 \times \mathbb{R}^n$. Определим отображение $\alpha: E \rightarrow E_2$,

$$\alpha(y, t, z) = g\left(q(y) + te_0 + \sum_{j=1}^n z_j e_j\right),$$

где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$. Очевидно, что это отображение является нечетным и вполне непрерывным. Пусть S — единичная сфера в пространстве E . Рассмотрим на S операторное уравнение

$$a_1(y, t, z) = \alpha_1(y, t, z), \quad (3)$$

где $a_1(y, t, z) = (y, z)$ — естественное проектирование на подпространство E_0 , $\alpha_1(y, t, z) = (\alpha(y, t, z), z)$. В силу доказанного в первой части теоремы уравнение (3) имеет решение.

Покажем, что множество решений $N(a_1, \alpha_1) \subset S$ уравнения (3) имеет размерность большую или равную n . Для этого предположим противное, пусть $\dim N(a_1, \alpha_1) \leq n - 1$. В силу того что a_1 — линейный оператор и отображение α_1 является нечетным, множество $N(a_1, \alpha_1) \subset S$ непусто и является симметричным относительно нуля пространства E . Тогда в силу леммы 4 существует непрерывное нечетное отображение $\gamma: N(a_1, \alpha_1) \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим многозначное отображение $\Phi: S \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное условием:

$$\Phi(y, t, z) = \begin{cases} \gamma(y, t, z), & \text{если } (y, t, z) \in N(a_1, \alpha_1), \\ \mathbb{R}^n, & \text{если } (y, t, z) \notin N(a_1, \alpha_1). \end{cases}$$

Очевидно, что это отображение имеет выпуклые замкнутые образы, является нечетным и полунепрерывным снизу, так как множество $N(a_1, \alpha_1)$ является замкнутым. Следовательно, в силу эквивариантной теоремы Майкла (см. [6]) существует непрерывное нечетное сечение $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображения Φ такое, что $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\varphi|_{N(a_1, \alpha_1)} = \gamma$.

Рассмотрим отображение $\psi: S \rightarrow E_0$, определенное соотношением:

$$\psi(y, t, z) = (\alpha(y, t, z), z - \varphi(y, t, z)) \in E_0.$$

В силу сделанных построений уравнение $a_1(y, t, z) = \psi(y, t, z)$ не имеет решений на S . Действительно, если $a_1(y_0, t_0, z_0) = \psi(y_0, t_0, z_0)$, то $\alpha(y_0, t_0, z_0) = y_0$ и $z_0 = z_0 - \varphi(y_0, t_0, z_0)$, т.е. $\varphi(y_0, t_0, z_0) = 0$. Тогда, с одной стороны, $\alpha_1(y_0, t_0, z_0) = (y_0, z_0) = a_1(y_0, t_0, z_0)$, т.е. $(y_0, t_0, z_0) \in N(a_1, \alpha_1)$, с другой стороны, $\varphi(y_0, t_0, z_0) = 0$, следовательно, $(y_0, t_0, z_0) \notin N(a_1, \alpha_1)$. Полученное противоречие и доказывает неравенство $\dim N(a_1, \alpha_1) \geq n$.

Рассмотрим отображение $\tau: N(a_1, \alpha_1) \rightarrow S_r \subset E_1$,

$$\tau(y, t, z) = \frac{r(q(y) + te_0 + \sum_{j=1}^n z_j e_j)}{\|q(y) + te_0 + \sum_{j=1}^n z_j e_j\|}.$$

Это отображение является биективным на свою область значений. Действительно, если $\tau(y_0, t_0, z_0) = \tau(y_1, t_1, z_1)$, то существует такое число λ , что

$$q(y_0) + t_0 e_0 + \sum_{j=1}^n z_j^0 e_j = \lambda \left(q(y_1) + t_1 e_0 + \sum_{j=1}^n z_j^1 e_j \right).$$

Тогда

$$q(y_0) - \lambda q(y_1) = (\lambda t_1 - t_0) e_0 + \sum_{j=1}^n (\lambda z_j^1 - z_j^0) e_j \in \text{Ker } a.$$

Из этого включения видно, что $\lambda = 1$ и $(y_0, t_0, z_0) = (y_1, t_1, z_1)$. Так как множество $N(a_1, \alpha_1)$ компактно, то отображение τ является гомеоморфизмом на свою область значений и $\tau(N(a_1, \alpha_1)) \subset N(a, \alpha)$.

Следовательно, в силу монотонности топологической размерности справедливы неравенства:

$$n \leq \dim N(a_1, \alpha_1) = \dim \tau(N(a_1, \alpha_1)) \leq \dim N(a, \alpha).$$

Так как число n было выбрано произвольно, то $\dim N(a, \alpha) \geq \dim(\text{Ker } a) - 1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $S_r(0)$ – сфера в банаховом пространстве E_1 . Если существует непрерывный линейный сюръективный оператор с ненулевым ядром $a: E_1 \rightarrow E_2$, то для любого нечетного вполне непрерывного отображения $g: S_r(0) \rightarrow E_2$ выполнено включение:

$$0_{E_2} \in \overline{g(S_r(0))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если оператор a является сюръективным, то оператор λa также является сюръективным для любого $\lambda > 0$. Следовательно, для любого $\lambda > 0$ существует точка $x_\lambda \in S_r(0)$ такая, что $\lambda a(x_\lambda) = g(x_\lambda)$. Устремляя λ к нулю, получаем требуемое включение.

Заметим, что теорема Борсука–Улама вытекает из теоремы 1.

Очевидно также, что утверждения основной теоремы и следствий из нее (см. §3) остаются справедливыми, если оператор a является линейным фредгольмовым оператором положительного индекса.

§3. Некоторые приложения теоремы Борсука–Улама

3.1. Об устойчивости ядра сюръективного оператора относительно вполне непрерывных возмущений. Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $a: E_1 \rightarrow E_2$ – непрерывный линейный сюръективный оператор. Пусть $k: E_1 \rightarrow E_2$ – вполне непрерывный линейный оператор.

ТЕОРЕМА 2. Если $\dim(\text{Ker } a) \geq 1$, то оператор $a + k$ имеет ненулевое ядро и $\dim(\text{Ker}(a + k)) \geq \dim(\text{Ker } a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как сужение отображения k на единичную сферу $S \subset E_1$ является нечетным отображением, то уравнение $a(x) = f(x)$, где $f(x) = -k(x)$, имеет решение $x_0 \in S$. Очевидно, что $N(a, f) = S \cap \text{Ker}(a + k)$. В силу второй части теоремы 1 $\dim(S \cap \text{Ker}(a + k)) \geq \dim(\text{Ker } a) - 1$. Следовательно, $\dim(\text{Ker}(a + k)) \geq \dim(\text{Ker } a)$.

3.2. Теорема об антиподах в бесконечномерных банаховых пространствах. Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства, $a: E_1 \rightarrow E_2$ – непрерывный линейный сюръективный оператор. Пусть $S_r(0)$ – сфера в E_1 радиуса r с центром в нуле и $g: S_r(0) \rightarrow E_2$ – вполне непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $\varphi: S_r(0) \rightarrow E_2, \varphi(x) = a(x) + g(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\dim(\text{Ker } a) \geq 1$, то существует точка $x_0 \in S_r(0)$ такая, что $\varphi(x_0) = \varphi(-x_0)$ и топологическая размерность множества таких точек больше или равна $\dim(\text{Ker } a) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $f: S_r(0) \rightarrow E_2, f(x) = \frac{1}{2}(g(x) - g(-x))$. Очевидно, что f является нечетным отображением и множество решений $N(a, f)$ является искомым множеством. Теперь утверждение теоремы 3 вытекает из теоремы 1.

3.3. Квазинеподвижные точки. В книге [8] поставлена проблема изучения квазинеподвижных точек непрерывных отображений. Дадим определение.

Пусть X – подмножество банахова пространства $E, f: X \rightarrow E$ – непрерывное отображение. Пусть $\tau = \{\varphi_\alpha \in E^* : \alpha \in J\}$ – семейство непрерывных линейных функционалов на E .

Будем говорить, что точка $x_0 \in X$ является *квазинеподвижной* точкой отображения f относительно семейства τ , если $\varphi_\alpha(f(x_0)) = \varphi_\alpha(x_0)$ для любого $\alpha \in J$.

Изучение квазинеподвижных точек непрерывных отображений представляет интерес в тех случаях, когда существование неподвижной точки установить трудно или невозможно, но достаточно знать, что $\varphi_\alpha(f(x_0)) = \varphi_\alpha(x_0)$ для некоторого набора τ непрерывных линейных функционалов.

Обозначим через E_α ядро функционала $\varphi_\alpha, E_\tau = \bigcap_{\alpha \in \tau} E_\alpha$. Очевидно, что E_τ является подпространством пространства E . Пусть $E_1 = E/E_\tau$ – факторпространство, а $a: E \rightarrow E_1$ – отображение факторизации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Точка $x_0 \in X$ является квазинеподвижной точкой отображения f тогда и только тогда, когда $a(f(x)) = a(x)$.

Доказательство очевидно.

Пусть $f_1 = a \circ f$, тогда уравнение $a(f(x)) = a(x)$ принимает вид $f_1(x) = a(x)$ и к нему можно применить теорему 1.

Дадим некоторые определения. Пусть множество X симметрично относительно нуля пространства E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что отображение f *нечетно относительно семейства τ* , если для любого $\varphi_\alpha \in \tau$ и любого $x \in X$ выполнено равенство $-\varphi_\alpha(f(x)) = \varphi_\alpha(f(-x))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что отображение f *вполне непрерывно относительно семейства* τ , если отображение $f_1 = a \circ f$ является вполне непрерывным.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\tau = \{\varphi_\alpha \in E^* : \alpha \in J\}$ – семейство непрерывных линейных функционалов на E . Пусть S – сфера с центром в нуле банахова пространства E , $f: S \rightarrow E$ – отображение, нечетное и вполне непрерывное относительно семейства τ . Если $\dim E_\tau \geq 1$, то отображение f имеет квазинеподвижные точки и размерность $\dim$ множества квазинеподвижных точек больше или равна $\dim E_\tau - 1$.

Доказательство вытекает из теоремы 1.

3.4. Управляемые системы. Пусть $AC_{[0,1]}$ – пространство абсолютно непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, $L_{[0,1]}^\infty$ – пространство измеримых почти всюду ограниченных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, со значениями в $\mathbb{R}^m$, $L_{[0,1]}^1$ – пространство суммируемых функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$x' - A(t)x - B(t)u = 0, \quad (4)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad (5)$$

где $A: [0, 1] \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B: [0, 1] \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ – суммируемые отображения.

Решением этой задачи будем называть пару $(x = x(t), u = u(t))$, где $x \in AC_{[0,1]}$ и управление $u \in L_{[0,1]}^\infty$ удовлетворяют уравнению (4) для почти всех $t \in [0, 1]$ и выполняются краевые условия (5).

Пусть U – подпространство пространства $L_{[0,1]}^\infty$.

Будем говорить, что система (4), (5) *вполне управляема* на подпространстве $U \subset L_{[0,1]}^\infty$ (вполне U -управляема), если она имеет решение $(x = x(t), u = u(t))$, $u \in U$, для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим линейный оператор $L: AC_{[0,1]} \times L_{[0,1]}^\infty \rightarrow L_{[0,1]}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, определенный условием

$$L(x, u)(t) = (x'(t) - A(t)x(t) - B(t)u(t), x(0), x(1)).$$

ЛЕММА 5. Система (4), (5) *вполне U -управляема тогда и только тогда, когда сужение оператора L на подпространство $AC_{[0,1]} \times U$ является сюръективным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность* очевидна.

Необходимость. Рассмотрим произвольную точку $(h, z_0, z_1) \in L_{[0,1]}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и покажем, что эта точка принадлежит области значений оператора L . Рассмотрим уравнение

$$x'(t) - A(t)x(t) - B(t)v(t) = h(t),$$

где $v(t)$ – произвольная функция из U . Пусть $y(t)$ – произвольное решение этого уравнения. Обозначим $x_0 = z_0 - y(0)$, $x_1 = z_1 - y(1)$. В силу того что система (4), (5) является вполне U -управляемой, существует решение (x, u) , $u \in U$, этой задачи такое, что $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. Тогда $L(y + x, u + v) = (h, z_0, z_1)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. Если оператор $L: AC_{[0,1]} \times L_{[0,1]}^\infty \rightarrow L_{[0,1]}^1$ является сюръективным, то существует такое конечномерное пространство $U \subset L_{[0,1]}^\infty$, что сужение оператора L на произведение $AC_{[0,1]} \times U$ также является сюръективным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение (4). Любое решение этого уравнения может быть записано в виде:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s) ds,$$

где $x_0 = x(0)$, $\Phi(t)$ – фундаментальная система решений уравнения $x' = A(t)x$. Рассмотрим линейный непрерывный оператор $M: L_{[0,1]}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенный условием:

$$M(u) = \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)B(s)u(s) ds.$$

Очевидно, что при заданном управлении $u = u(t)$ это отображение определяет ту точку в $\mathbb{R}^n$, в которую попадает траектория уравнения (4), выходящая из точки 0 в момент времени 1. В силу сделанных предположений и леммы 5 система (4), (5) является вполне управляемой, следовательно, отображение M является сюръективным. Так как пространство значений этого оператора конечномерно, то существует разложение в прямую сумму $L_{[0,1]}^\infty = \text{Ker } M + U_0$, где U_0 – конечномерное пространство, и сужение оператора M на U_0 является изоморфизмом.

Покажем, что любое конечномерное пространство U , $U_0 \subset U \subset L_{[0,1]}^\infty$, является искомым. Пусть пространство U удовлетворяет этим включениям. Рассмотрим произвольные точки x_0 и x_1 , принадлежащие $\mathbb{R}^n$. Пусть $a = \Phi(1)x_0$. Тогда оператор $M_a: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M_a(x) = a + M(u)$, также является сюръективным. Следовательно, существует такое управление $u \in U$, что $x_1 = \Phi x_0 + M(u)$, т.е. задача (4), (5) является вполне U -управляемой. Отсюда в силу леммы 5 вытекает сюръективность оператора L на подпространстве $AC_{[0,1]}^n \times U$.

Изучим теперь нелинейные системы. Пусть $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее следующим условиям:

- $I_1)$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ отображение $f_{x,u} = f(\cdot, x, u): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ является измеримым;
- $I_2)$ для почти всех $t \in [0, 1]$ отображение $f_t = f(t, \cdot, \cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ является непрерывным;
- $I_3)$ существуют такие суммируемые функции $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$, что для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и почти всех $t \in [0, 1]$ выполнено неравенство

$$\|f(t, x, u)\| \leq \alpha(t)(\|x\| + \|u\|) + \beta(t).$$

Очевидно, что это отображение порождает оператор суперпозиции $\hat{f}: AC_{[0,1]} \times L_{[0,1]}^\infty \rightarrow L_{[0,1]}^1$, действующий по правилу $\hat{f}(x, u)(t) = f(t, x(t), u(t))$.

Пусть U – конечномерное подпространство пространства $L_{[0,1]}^\infty$. Рассмотрим сужение оператора $\hat{f}$ на $AC_{[0,1]} \times U$: $\hat{f}_U = \hat{f}|_{AC_{[0,1]} \times U}$.

ЛЕММА 7. Оператор $\widehat{f}_U$ является вполне непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение f при сделанных предположениях $I_1)–I_3)$ порождает непрерывный оператор суперпозиции $\mathbf{f}: C_{[0,1]} \times U \rightarrow L_{[0,1]}^1$, где $C_{[0,1]}$ – пространство непрерывных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$. Так как вложение $i: AC_{[0,1]}^n \times U \rightarrow C_{[0,1]} \times U$ является вполне непрерывным, то композиция $\widehat{f}_U = \mathbf{f} \cdot i$ также является вполне непрерывным отображением.

Рассмотрим следующую задачу:

$$x' + A(t)x + B(t)u = f(t, x, u), \quad (6)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (7)$$

Решением этой задачи будем называть пару $(x = x(t), u = u(t))$, где $x \in AC_{[0,1]}^n$ и управление $u \in L_{[0,1]}^\infty$ удовлетворяют уравнению (6) для почти всех $t \in [0, 1]$ и выполнены краевые условия (7).

Предположим дополнительно, что отображение f удовлетворяет условию

$$I_4) \quad f(t, -x, -u) = -f(t, x, u) \text{ для любых } x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть отображение $F: AC_{[0,1]} \times U \rightarrow L_{[0,1]}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ определено условием:

$$F(x, u) = (\widehat{f}(x, u), 0, 0).$$

Рассмотрим уравнение

$$L(x, u) = F(x, u).$$

Применим теорему 1 к изучению этого уравнения.

ТЕОРЕМА 5. Пусть система (4), (5) является управляемой. Пусть отображение f удовлетворяет условиям $I_1)–I_4)$. Тогда на любой сфере $S_r[0] \subset AC_{[0,1]}^n \times L_{[0,1]}^\infty$ существует решение задачи (6), (7) и топологическая размерность множества решений этой задачи равна ∞ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подпространство $U \subset L_{[0,1]}^\infty$ содержит U_0 и $\dim U = n + s$, где s – произвольное натуральное число. Тогда в силу леммы 6 оператор $L: AC_{[0,1]} \times U \rightarrow L_{[0,1]}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ является сюръективным. Отображение $F: AC_{[0,1]} \times U \rightarrow L_{[0,1]}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ является нечетным и в силу леммы 7 вполне непрерывным. Оценим размерность ядра оператора L . Очевидно, что ядром этого оператора является множество решений следующей задачи:

$$x' + A(t)x + B(t)u = 0, \quad (8)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \quad (9)$$

Так как любое решение этой задачи может быть определено условиями

$$M(u) = \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)u(s) ds = 0, \quad (10)$$

$$x(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)B(s)u(s) ds, \quad (11)$$

то решениями задачи (8), (9) являются такие пары (x, u) , где $u \in \text{Ker } M$, а x определяется по формулам (11). Тогда $\dim(\text{Ker } L) = \dim(\text{Ker } M) = s$, поскольку $U = U_0 + \text{Ker } M$ и $\dim U_0 = n$. Следовательно, в силу теоремы 1 множество решений задачи (6), (7) непусто и топологическая размерность этого множества больше или равна $\dim(\text{Ker } L) - 1 \geq s - 1$. Так как число s было выбрано произвольно, то топологическая размерность множества решений задачи (6), (7) равна ∞ . Теорема доказана.

Список литературы

1. *Dugundji J., Granas A.* Fixed point theory. Warszawa: PWN, 1982.
2. *Steinlein H.* Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey // *Méthodes topologiques en analyse non linéaire. Sémin. Math. Supér., Sémin. Sci. OTAN (NATO Adv. Study Inst.)*. 1985. V. 95. P. 166–235.
3. *Granas A.* The theory of compact vector fields and some of its applications to the topology of functional spaces. I // *Rozprawy Mat.* 1962. V. 30.
4. *Гельман Б. Д.* Теорема об антиподах в бесконечномерном банаховом пространстве // *Современный анализ и его приложения. ВЗМШ-2000. Воронеж, 2000.* С. 63–64.
5. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
6. *Dzedzej Z.* Equivariant selections and approximations // *Topological methods in nonlinear analysis*. Gdansk, 1997. P. 25–31.
7. *Izydorek M.* The Bourgin–Yang theorem for multi-valued maps in the nonsymmetric case // *Zeszyty Nauk. Wydz. Mat. Fiz. Chem., Mat.*, Gdansk. 1987. V. 6. P. 37–41.
8. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
30.10.2000 и 24.04.2001