Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Влияние квадратичной нелинейности на динамику периодических решений волнового уравнения, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 1, 93–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm622>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:38:48

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Влияние квадратичной нелинейности на динамику периодических решений волнового уравнения

Для нелинейного телеграфного уравнения с нулевыми граничными условиями Дирихле или Неймана на концах конечного отрезка рассматривается вопрос о существовании и устойчивости периодических по времени решений, бифурцирующих из нулевого положения равновесия. Изучается динамика этих решений при изменении коэффициента диффузии (т.е. коэффициента перед второй производной по пространственной переменной). В случае граничных условий Дирихле показывается существенная ее зависимость от наличия или отсутствия в нелинейности квадратичных слагаемых. Точнее говоря, устанавливается, что квадратичная нелинейность приводит к появлению бесконечной последовательности бифуркаций, происходящих с каждым из периодических решений при неограниченном уменьшении диффузии. Попутно исследуется связанный с данным эффектом вопрос о границе применимости метода квазинормальных форм Ю.С. Колесова для построения автоколебаний у сингулярно возмущенных гиперболических краевых задач.

Библиография: 19 названий.

Введение

Проблема аттракторов гиперболических краевых задач берет свое начало с исследования автоколебаний в линейных системах телеграфных уравнений с нелинейными граничными условиями на концах конечного отрезка. Изучение такого типа задач актуально в связи с тем, что они служат математическими моделями для широкого класса автогенераторов с отрезком длиной линии в цепи обратной связи. В качестве примера сошлемся на классическую работу А. А. Витта [1], являющуюся, по всей видимости, первой публикацией, посвященной данному вопросу. Напомним, что объектом анализа в [1] была краевая задача указанного типа, представляющая собой модель двухпроводной линии, к одной стороне которой присоединена емкость, а к другой – нелинейное сопротивление с падающей характеристикой.

С помощью известного в физической теории колебаний метода медленно меняющихся фаз и амплитуд в [1] были получены асимптотические формулы для периодических по времени решений рассматриваемой краевой задачи и установлены условия устойчивости таких решений. Впоследствии упомянутые результаты переизлагались в ряде публикаций (см., например, [2], [3]), однако их строгое математическое обоснование дано лишь недавно [4]. Связано это с тем, что долгое время отсутствовал адекватный математический аппарат анализа автоколебаний распределенных систем в окрестности бесконечномерного вырождения. Создан же он был только в 80-е годы Ю. С. Колесовым сначала для параболических уравнений с малыми коэффициентами диффузии [5]–[7], а затем перенесен на аналогичный

класс волновых уравнений [8], [9]. Дальнейшее развитие методов работ [5]–[7] применительно к гиперболическим уравнениям отражено в монографии [10].

В настоящей работе рассматривается вопрос о бифуркации автоколебаний у нелинейного волнового уравнения вида

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} + f(u, u_t) \quad (*)$$

с нулевыми граничными условиями Дирихле или Неймана на отрезке. Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$, $a = \text{const} > 0$, а тейлоровское разложение в нуле функции $f(u, v) \in C^\infty$ начинается с квадратичных слагаемых.

В случае граничных условий Дирихле для уравнения (*) устанавливается новый феномен, не наблюдающийся при граничных условиях Неймана. А именно, показывается, что динамика периодических решений этого уравнения по параметру a существенно зависит от наличия или отсутствия в тейлоровском разложении нелинейности $f(u, v)$ квадратичных слагаемых. Попутно обсуждается связанный с данным эффектом вопрос о границе применимости метода квазинормальных форм Ю. С. Колесова (см. [8], [9]) для построения автоколебаний уравнения (*) при условии $a^2 = \varepsilon \sigma^2$, $\sigma = \text{const} > 0$.

§ 1. Общие свойства рассматриваемого уравнения

1.1. Описание алгоритмов. Начнем с изучения для уравнения (*) на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ краевой задачи

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} + f(u, u_t), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \quad (1.1)$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий (u, u_t)) задачи (1.1) возьмем $\mathring{W}_2^2 \times \mathring{W}_2^1$, где $\mathring{W}_2^j$, $j = 1, 2$, – соболевские пространства функций, удовлетворяющих граничным условиям из (1.1), и будем интересоваться ее аттракторами в указанном пространстве. Точнее говоря, поставим вопрос о существовании и устойчивости ее периодических по t решений, бифурцирующих из нулевого положения равновесия при $\varepsilon > 0$.

Пусть сначала $\varepsilon = 0$. Тогда, как нетрудно увидеть, линейризованная в нуле задача (1.1) допускает тригонометрические решения

$$u = \exp(\pm i\omega_n t) \sin nx, \quad \omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Поэтому фиксируем произвольно натуральное n и для построения асимптотики периодического решения, бифурцирующего при $\varepsilon > 0$ на моде $\sin nx$, воспользуемся стандартным одночастотным методом из [11]. А именно, в данном случае, обыгрывая существование периодических решений (1.2), положим в (1.1)

$$u = \varepsilon^{1/2} u_1(\tau, x) + \varepsilon u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, x) + \varepsilon^2 u_4(\tau, x) + \dots, \quad (1.3)$$

где

$$u_1 = [\exp(i\omega_n \tau) + \exp(-i\omega_n \tau)] \xi_n \sin nx, \quad \tau = (1 + \varepsilon \alpha_n + \dots)t, \quad (1.4)$$

а ξ_n, α_n – некоторые неизвестные (подлежащие определению) вещественные постоянные. Привлекая затем тейлоровское разложение

$$f(u, v) = a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 uv^2 + b_4 v^3 + \dots \quad (1.5)$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения u_k , $k = 2, 3, 4$, получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_k + u_k = g_k(\tau, x), \quad u_k|_{x=0} = u_k|_{x=\pi} = 0. \quad (1.6)$$

Решения последних ищем в виде тригонометрических полиномов переменной $\omega_n \tau$ той же структуры, что и соответствующая неоднородность.

Несложные вычисления показывают, что

$$u_2 = \xi_n^2 [A(x) + B(x) \exp(2i\omega_n \tau) + \bar{B}(x) \exp(-2i\omega_n \tau)], \quad (1.7)$$

где коэффициенты $A(x), B(x)$ – решения краевых задач

$$\begin{aligned} A - a^2 A'' &= 2(a_1 + \omega_n^2 a_3) \sin^2 nx, \quad A(0) = A(\pi) = 0; \\ (1 - 4\omega_n^2)B - a^2 B'' &= (a_1 + i\omega_n a_2 - \omega_n^2 a_3) \sin^2 nx, \quad B(0) = B(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Их анализ приводит, в свою очередь, к равенствам

$$\begin{aligned} A(x) &= (a_1 + \omega_n^2 a_3) \left[1 - \frac{1}{\omega_{2n}^2} \cos 2nx - \left(1 - \frac{1}{\omega_{2n}^2} \right) \theta_*(x) \right], \\ B(x) &= \frac{1}{2} (a_1 + i\omega_n a_2 - \omega_n^2 a_3) \left[\frac{1}{1 - 4\omega_n^2} + \frac{1}{3} \cos 2nx - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1 - 4\omega_n^2} \right) \theta_{**}(x) \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

в которых

$$\begin{aligned} \theta_*(x) &= \frac{[\operatorname{sh}(x/a) + \operatorname{sh}((\pi - x)/a)]}{\operatorname{sh}(\pi/a)}, \quad \theta_{**}(x) = \frac{\cos[\sigma_n(x - \pi/2)]}{\cos[\pi\sigma_n/2]}, \\ \sigma_n &= \sqrt{4n^2 + 3/a^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Следует, однако, заметить, что если первая из задач (1.8) однозначно разрешима при любом значении параметра a , то функция $B(x)$ определяется формулами (1.9), (1.10) только в том случае, когда $2\omega_n \neq \omega_{2k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, или, что то же самое, когда при всех натуральных k , $k \geq n$, справедливы неравенства

$$a \neq a_k^* = \sqrt{3/[(2k+1)^2 - 4n^2]} \quad (1.11)$$

(в противном случае обращается в нуль знаменатель во второй формуле (1.10)). Поэтому условия (1.11) всюду ниже будем считать выполненными.

На следующем шаге, т.е. при анализе краевой задачи (1.6) для $k = 3$, учтем в ее правой части

$$\begin{aligned} g_3(\tau, x) &= \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - 2\alpha_n \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + 2a_1 u_1 u_2 + a_2 \frac{\partial}{\partial \tau} (u_1 u_2) + 2a_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + b_1 u_1^3 \\ &\quad + b_2 u_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + b_3 u_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right)^2 + b_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right)^3 \end{aligned}$$

явный вид (1.4) и (1.7), (1.9), (1.10) функций u_1 , u_2 . В итоге убеждаемся, что решение u_3 задается равенством

$$u_3 = C(x) \exp(i\omega_n \tau) + \overline{C}(x) \exp(-i\omega_n \tau) + D(x) \exp(3i\omega_n \tau) + \overline{D}(x) \exp(-3i\omega_n \tau), \quad (1.12)$$

где коэффициенты $C(x)$, $D(x)$ определяются из краевых задач

$$\begin{aligned} -a^2(C'' + n^2 C) &= \varphi_1(x), & C(0) &= C(\pi) = 0; \\ (1 - 9\omega_n^2)D - a^2 D'' &= \varphi_2(x), & D(0) &= D(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \xi_n(i\omega_n + 2\alpha_n\omega_n^2) \sin nx + \xi_n^3 [(2a_1 + i\omega_n a_2)(A(x) + B(x)) \sin nx \\ &\quad + 4\omega_n^2 a_3 B(x) \sin nx + (3b_1 + i\omega_n b_2 + \omega_n^2 b_3 + 3\omega_n^3 i b_4) \sin^3 nx], \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\varphi_2 = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1 - 4\omega_n^2}\right)(2a_1 + 3i\omega_n a_2 - 4\omega_n^2 a_3) \xi_n^3 \theta_{**}(x) \sin nx + \varphi_2^0(x), \quad (1.15)$$

а $\varphi_2^0(x)$ — некоторая линейная комбинация функций $\sin nx$, $\sin 3nx$, явный вид которой в дальнейшем не потребуется.

Обратимся сначала к первой из краевых задач (1.13) и заметим, что она вырождена (т.е. соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение). Условие же ее разрешимости

$$\int_0^\pi \varphi_1(x) \sin nx \, dx = 0$$

будем рассматривать как уравнение для определения неизвестных постоянных ξ_n , α_n . Учитывая, далее, в этом равенстве явный вид (1.14) неоднородности $\varphi_1(x)$, приходим к так называемому уравнению разветвления

$$(\omega_n - 2i\alpha_n\omega_n^2)\xi_n + d_n\xi_n^3 = 0. \quad (1.16)$$

Здесь ляпуновская величина d_n задается формулой

$$\begin{aligned} d_n &= d_n^0 - (\beta_1 - 2i\beta_2) \left(1 - \frac{1}{\omega_{2n}^2}\right) \frac{4n^2 a^2}{1 + 4n^2 a^2} \Delta_1\left(\frac{\pi}{2a}\right) \\ &\quad + \frac{2}{3}(\beta_1 - 2i\beta_3) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\omega_n^2 - 1}\right) a^2 n^2 \Delta_2\left(\frac{\pi}{2}\sigma_n\right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

в которой

$$\begin{aligned} d_n^0 &= \beta_1 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\omega_{2n}^2} - \frac{3}{2(4\omega_n^2 - 1)}\right) + \frac{3}{4}(\omega_n b_2 + 3\omega_n^3 b_4) \\ &\quad - 2i\beta_2 \left(1 + \frac{1}{2\omega_{2n}^2}\right) - \frac{3}{4}i(3b_1 + \omega_n^2 b_3) + i\beta_3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4\omega_n^2 - 1}\right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \omega_n a_2(a_1 + \omega_n^2 a_3), & \beta_2 &= a_1(a_1 + \omega_n^2 a_3), \\ \beta_3 &= (a_1 - \omega_n^2 a_3)(a_1 + 2\omega_n^2 a_3) - a_2^2 \omega_n^2 / 2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

а через $\Delta_j = \Delta_j(s)$, $j = 1, 2$, обозначены соответственно функции $\text{th}(s)/s$ и $\text{tg}(s)/s$.

Предположим, что

$$\text{Re } d_n < 0. \quad (1.20)$$

Тогда из (1.16) находим

$$\xi_n = \sqrt{-\omega_n / \text{Re } d_n}, \quad \alpha_n = \xi_n^2 \text{Im } d_n / (2\omega_n^2), \quad (1.21)$$

а затем, подставляя эти равенства в неоднородности (1.14), (1.15) и решая получившуюся краевую задачу для $C(x)$, полностью определяем первые два слагаемых в правой части формулы (1.12). Что же касается второй краевой задачи (1.13), то в силу (1.15) ее решение допускает, очевидно, представление:

$$D(x) = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1 - 4\omega_n^2}\right)(2a_1 + 3i\omega_n a_2 - 4\omega_n^2 a_3)\xi_n^3 D_1(x) + D_2(x),$$

где функция $D_2(x)$ однозначно определяется по $\varphi_2^0(x)$ и имеет ту же структуру, а $D_1(x)$ — решение краевой задачи

$$(1 - 9\omega_n^2)D_1 - a^2 D_1'' = \theta_{**}(x) \sin nx, \quad D_1(0) = D_1(\pi) = 0.$$

Последняя же разрешима в том и только том случае, когда при всех натуральных m , $m \geq 3n + 1$, справедливы неравенства

$$3\omega_n \neq \omega_m. \quad (1.22)$$

Завершающий этап, т.е. анализ краевой задачи (1.6) при $k = 4$, аналогичен случаю $k = 2$. Действительно, здесь функцию u_4 следует искать в виде линейной комбинации гармоник $\exp(\pm i p \omega_n \tau)$, $p = 0, 2, 4$. Однозначную же разрешимость аналогичных (1.8) линейных неоднородных краевых задач для коэффициентов при указанных гармониках наряду с неравенствами (1.11) обеспечивают условия

$$2\omega_n \neq \omega_{2k}, \quad 4\omega_n \neq \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.23)$$

которые всюду ниже также считаем выполненными.

Итак, при условиях (1.11), (1.20), (1.22), (1.23) приближенное периодическое решение (1.3) может быть построено с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке. Линеаризуя на нем уравнение (*), получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} h_{tt} - a^2 h_{xx} + h &= \sqrt{\varepsilon}[a_1(\tau, x)h + a_2(\tau, x)h_t] + \varepsilon[b_1(\tau, x, \varepsilon)h + b_2(\tau, x, \varepsilon)h_t], \\ h|_{x=0} &= h|_{x=\pi} = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

с $2\pi/\omega_n$ -периодическими по $\tau = (1 + \varepsilon\alpha_n)t$ коэффициентами, в которой

$$a_1(\tau, x) = 2a_1 u_1 + a_2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau}, \quad a_2(\tau, x) = a_2 u_1 + 2a_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau}, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} b_1(\tau, x, 0) &= 2a_1 u_2 + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + 3b_1 u_1^2 + 2b_2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + b_3 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau}\right)^2, \\ b_2(\tau, x, 0) &= 1 + a_2 u_2 + 2a_3 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + b_2 u_1^2 + 2b_3 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + 3b_4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau}\right)^2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Как известно [12], основной этап доказательства существования у краевой задачи (1.1) цикла с асимптотикой (1.3) состоит в исследовании свойств устойчивости решений уравнения (1.24) и в обратимости соответствующего ему дифференциального оператора (в подходящем пространстве периодических функций). Обе эти проблемы решаются с помощью алгоритма исследования устойчивости из [13], адаптированного в [14] для телеграфных уравнений. Описание указанного алгоритма приводится ниже.

Начнем с расчета характеристических показателей (деленных на период логарифмов мультипликаторов) уравнения (1.24), отвечающих генерируемой моде $\sin nx$. В соответствии с развитой в [13] методикой положим в (1.24)

$$\begin{aligned} h &= [V_0(\tau, x) + \sqrt{\varepsilon} V_1(\tau, x) + \varepsilon V_2(\tau, x)] \exp(\varepsilon Dt), \\ V_j &= [w_j, \overline{w_j}], \quad j = 0, 1, 2, \quad w_0 = \exp(i\omega_n \tau) \sin nx, \end{aligned} \quad (1.27)$$

где w_j — тригонометрические полиномы переменной $\omega_n \tau$, а матрица D имеет структуру

$$\begin{pmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ \overline{\varkappa_2} & \overline{\varkappa_1} \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$ и ε , для определения w_1 и w_2 получаем краевые задачи вида (1.6). В силу предполагаемых условий (1.11) первая из этих задач разрешима в нужном классе функций, а ее решение задается равенством

$$w_1 = \xi_n [A(x) + 2B(x) \exp(2i\omega_n \tau)],$$

где коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ те же, что и в (1.7). Далее, неоднородность в уравнении для w_2 представляет собой линейную комбинацию гармоник $\exp(\pm ip\omega_n \tau)$, $p = 1, 3$. Поэтому, как и в случае задачи (1.6) при $k = 3$, функцию w_2 ищем в виде (1.12). Опуская несложные вычисления, аналогичные описанным выше, отметим, что разрешимость краевых задач для коэффициентов этой функции при $\exp(\pm i\omega_n \tau)$ обеспечивается выбором неизвестных элементов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ матрицы (1.28), а краевые задачи для коэффициентов при $\exp(\pm 3i\omega_n \tau)$ разрешимы в силу условий (1.22). При этом для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ выходят равенства

$$\varkappa_1 = d_n \xi_n^2 / (2\omega_n), \quad \varkappa_2 = \varkappa_1. \quad (1.29)$$

Для расчета характеристических показателей краевой задачи (1.24) на модах $\sin mx$, $m = 1, 2, \dots, m \neq n$, подставим в (1.24) представление

$$h = [\exp(i\omega_m t) \sin mx + \varepsilon^{1/2} h_{1m}(t, \tau, x) + \varepsilon h_{2m}(t, \tau, x)] \exp(\varepsilon \mu_m t), \quad (1.30)$$

где h_{1m} , h_{2m} — тригонометрические многочлены переменных $\omega_m t$, $\omega_n \tau$, а μ_m — подлежащая определению комплексная постоянная. В результате, приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{1/2}$ и ε , для h_{jm} , $j = 1, 2$, получаем краевые задачи

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h_{jm} + h_{jm} &= f_j(t, \tau, x), \\ h_{jm}|_{x=0} &= h_{jm}|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

решения которых будем искать в виде тригонометрических полиномов той же структуры, что и соответствующие неоднородности.

При анализе краевых задач (1.31) нам потребуются специальные функции

$$\theta_{*,m}^{\pm,p}(x) = \sin(\sigma_{m,p}^{\pm}x) / \sin(\pi\sigma_{m,p}^{\pm}), \quad m = 1, 2, \dots, \quad m \neq n, \quad p = 1, 2, \quad (1.32)$$

где частоты $\sigma_{m,p}^{\pm}$ задаются равенствами

$$\sigma_{m,p}^{\pm} = \frac{1}{a} \sqrt{(\omega_m \pm p\omega_n)^2 - 1}. \quad (1.33)$$

Подчеркнем, что подкоренные выражения в (1.33) могут быть как положительными, так и отрицательными. В случае же, если $(\omega_m - p\omega_n)^2 = 1$, считаем, что $\theta_{*,m}^{\pm,p}(x) = x/\pi$. Кроме того, будем предполагать выполнение при всех $m \neq n$ и $k = 1, 2, \dots$ неравенств

$$(\omega_m \pm p\omega_n)^2 - \omega_k^2 \neq 0, \quad p\omega_n \neq ak, \quad p = 1, 2, \quad (1.34)$$

обеспечивающих отличие от нуля знаменателей в (1.32) и стремление их модулей к ненулевым конечным пределам при $m \rightarrow \infty$.

Обратимся теперь к краевой задаче (1.31) при $j = 1$. Учитывая в ее правой части

$$f_1(t, \tau, x) = [a_1(\tau, x) + i\omega_m a_2(\tau, x)] \exp(i\omega_m t) \sin mx$$

равенства (1.25), приходим к выводу, что h_{1m} имеет вид:

$$h_{1m} = \exp[i(\omega_m t + \omega_n \tau)] C_m^+(x) + \exp[i(\omega_m t - \omega_n \tau)] C_m^-(x), \quad (1.35)$$

где

$$C_m^{\pm}(x) = v_{1m}^{\pm} \cos(m-n)x - v_{2m}^{\pm} \cos(m+n)x - (v_{1m}^{\pm} - v_{2m}^{\pm}) \theta_{*,m}^{\pm,1}(\pi - x) - (-1)^{m+n} (v_{1m}^{\pm} - v_{2m}^{\pm}) \theta_{*,m}^{\pm,1}(x), \quad (1.36)$$

$$v_{1m}^{\pm} = v_{\pm} / [\omega_{m-n}^2 - (\omega_m \pm \omega_n)^2], \quad v_{2m}^{\pm} = v_{\pm} / [\omega_{m+n}^2 - (\omega_m \pm \omega_n)^2], \quad (1.37)$$

$$v_{\pm} = (\xi_n/2)[2a_1 + i(\omega_m \pm \omega_n)a_2 \mp 2\omega_n\omega_m a_3]. \quad (1.38)$$

Отметим, что в (1.37) при любом $a > 0$

$$(\omega_m + \omega_n)^2 - \omega_{m \pm n}^2 \neq 0, \quad (\omega_m - \omega_n)^2 - \omega_{m \pm n}^2 \neq 0. \quad (1.39)$$

Действительно, в справедливости первого неравенства (1.39) убеждаемся, переписывая его в эквивалентной форме

$$-1/2 \pm a^2 mn \neq \sqrt{1 + a^2 n^2} \sqrt{1 + a^2 m^2}$$

и замечая, что в силу неравенства Буняковского–Коши

$$|-1/2 \pm a^2 mn| \leq \sqrt{1/4 + a^2 n^2} \sqrt{1 + a^2 m^2} < \sqrt{1 + a^2 n^2} \sqrt{1 + a^2 m^2}.$$

Второе из неравенств (1.39) устанавливается аналогично. Отметим также, что при $m \rightarrow \infty$ коэффициенты (1.37) стремятся к конечным пределам, а значит,

$$|v_{jm}^{\pm}| \leq N, \quad j = 1, 2; \quad (1.40)$$

здесь и ниже через N , N_1 и т. д. обозначаем различные универсальные (не зависящие от m , ε) положительные постоянные, точные значения которых несущественны.

При анализе краевой задачи (1.31) в случае $j = 2$ учтем в представлении

$$\begin{aligned} f_2(t, \tau, x) = & a_1(\tau, x)h_{1m} + a_2(\tau, x) \left(\frac{\partial h_{1m}}{\partial t} + \frac{\partial h_{1m}}{\partial \tau} \right) \\ & + [b_1(\tau, x, 0) + i\omega_m b_2(\tau, x, 0) - 2i\omega_m \mu_m] \exp(i\omega_m t) \sin mx \end{aligned}$$

явный вид (1.35)–(1.38) решения h_{1m} и формулы (1.25), (1.26). В итоге убеждаемся, что

$$\begin{aligned} h_{2m} = & D_m^0(x) \exp(i\omega_m t) + D_m^+(x) \exp[i(\omega_m t + 2\omega_n \tau)] \\ & + D_m^-(x) \exp[i(\omega_m t - 2\omega_n \tau)], \end{aligned} \quad (1.41)$$

где D_m^0 , $D_m^{\pm}$ – решения краевых задач

$$\begin{aligned} -a^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} D_m^0 + m^2 D_m^0 \right) &= \psi_m^0(x), \quad D_m^0(0) = D_m^0(\pi) = 0; \\ [1 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2] D_m^{\pm} - a^2 \frac{d^2}{dx^2} D_m^{\pm} &= \psi_m^{\pm}(x), \quad D_m^{\pm}(0) = D_m^{\pm}(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Здесь

$$\psi_m^0(x) = i\omega_m(1 - 2\mu_m) \sin mx + \tilde{\psi}_m^0(x), \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m^0(x) = & \xi_n[2a_1 + i\omega_m a_2 + 2\omega_n(\omega_m + \omega_n)a_3]C_m^+(x) \sin nx \\ & + \xi_n[2a_1 + i\omega_m a_2 - 2\omega_n(\omega_m - \omega_n)a_3]C_m^-(x) \sin nx \\ & + \xi_n^2[2a_1 A(x) + (6b_1 + 2\omega_n^2 b_3) \sin^2 nx] \sin mx \\ & + i\omega_m \xi_n^2[a_2 A(x) + (2b_2 + 6\omega_n^2 b_4) \sin^2 nx] \sin mx, \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \psi_m^{\pm}(x) = & r_1^{\pm} \cos[(\sigma_{m,1}^{\pm} + n)x] + r_2^{\pm} \cos[(\sigma_{m,1}^{\pm} - n)x] + r_3^{\pm} \sin[(\sigma_{m,1}^{\pm} + n)x] \\ & + r_4^{\pm} \sin[(\sigma_{m,1}^{\pm} - n)x] + r_5^{\pm} \cos[(\sigma_n + m)x] + r_6^{\pm} \cos[(\sigma_n - m)x] \\ & + r_7^{\pm} \sin[(\sigma_n + m)x] + r_8^{\pm} \sin[(\sigma_n - m)x] + r_9^{\pm} \sin mx \\ & + r_{10}^{\pm} \sin(m + 2n)x + r_{11}^{\pm} \sin(m - 2n)x, \end{aligned} \quad (1.45)$$

а явные формулы для коэффициентов $r_j^{\pm}$, $j = 1, \dots, 11$, опустим, поскольку в дальнейшем они не потребуются.

Исследование первой краевой задачи (1.42) аналогично описанному выше анализу первой из задач (1.13): сначала из условия ее разрешимости находим неизвестную постоянную μ_m , для которой в силу (1.43) получается равенство

$$\mu_m = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi\omega_m} \int_0^{\pi} \tilde{\psi}_m^0(x) \sin mx dx. \quad (1.46)$$

Учитывая, далее, в (1.46) явный вид (1.44) неоднородности $\tilde{\psi}_m^0$, убеждаемся в существовании при $m \rightarrow \infty$ у последовательности μ_m конечного предела μ_∞ .

После определения μ_m неоднородность (1.43) принимает вид

$$\begin{aligned}\psi_m^0(x) = & s_1 \exp(x/a) \sin mx + s_2 \exp(x/a) \cos mx + s_3 \exp(-x/a) \sin mx \\ & + s_4 \exp(-x/a) \cos mx + s_5 \sin mx + s_6 \sin(m+2n)x + s_7 \sin(m-2n)x \\ & + s_8 \cos[(\sigma_{m,1}^+ + n)x] + s_9 \sin[(\sigma_{m,1}^+ + n)x] + s_{10} \cos[(\sigma_{m,1}^+ - n)x] \\ & + s_{11} \sin[(\sigma_{m,1}^+ - n)x] + s_{12} \cos[(\sigma_{m,1}^- + n)x] + s_{13} \sin[(\sigma_{m,1}^- + n)x] \\ & + s_{14} \cos[(\sigma_{m,1}^- - n)x] + s_{15} \sin[(\sigma_{m,1}^- - n)x],\end{aligned}$$

где (по той же причине, что и в случае (1.45)) явные формулы для коэффициентов s_j , $j = 1, \dots, 15$, опустим. А отсюда автоматически следует равенство

$$D_m^0(x) = \tilde{D}_m^0(x) - \tilde{D}_m^0(0) \cos mx + \tilde{s}_5 x \cos mx,$$

в котором $\tilde{s}_5 = s_5/(2ma^2)$, а $\tilde{D}_m^0(x)$ получается из $\psi_m^0(x) - s_5 \sin mx$ посредством замены s_j , $j \neq 5$, на $\tilde{s}_j$, где

$$\begin{aligned}\tilde{s}_1 &= -\frac{s_1 + 2ams_2}{1 + 4a^2m^2}, & \tilde{s}_2 &= \frac{2ams_1 - s_2}{1 + 4a^2m^2}, \\ \tilde{s}_3 &= \frac{2ams_2 - s_1}{1 + 4a^2m^2}, & \tilde{s}_4 &= -\frac{2ams_1 + s_2}{1 + 4a^2m^2}, \\ \tilde{s}_6 &= \frac{s_6}{\omega_{m+2n}^2 - \omega_m^2}, & \tilde{s}_7 &= \frac{s_7}{\omega_{m-2n}^2 - \omega_m^2}, \\ \tilde{s}_j &= \frac{s_j}{a^2(\sigma_{m,1}^+ + n)^2 - a^2m^2}, \quad j = 8, 9; & \tilde{s}_j &= \frac{s_j}{a^2(\sigma_{m,1}^+ - n)^2 - a^2m^2}, \quad j = 10, 11; \\ \tilde{s}_j &= \frac{s_j}{a^2(\sigma_{m,1}^- + n)^2 - a^2m^2}, \quad j = 12, 13; & \tilde{s}_j &= \frac{s_j}{a^2(\sigma_{m,1}^- - n)^2 - a^2m^2}, \quad j = 14, 15.\end{aligned}$$

Обращаем внимание, что знаменатели в формулах для $\tilde{s}_j$, $j = 6, \dots, 15$, отличны от нуля при любом $a > 0$. Действительно, условия

$$\omega_{m \pm 2n}^2 - \omega_m^2 \neq 0 \quad (1.47)$$

эквивалентны очевидным неравенствам $4a^2n(m \pm n) \neq 0$ (напомним, что $m \neq n$). Отличие же от нуля всех остальных знаменателей устанавливается однотипно. Проверим, например, выполнение условий

$$a^2m^2 - a^2(\sigma_{m,1}^- \pm n)^2 \neq 0. \quad (1.48)$$

С этой целью раскроем в них скобки и учтем явные формулы (1.33) для $\sigma_{m,1}^-$. В итоге интересующие нас неравенства преобразуются к виду

$$\pm 2an\sqrt{(\omega_m - \omega_n)^2 - 1} \neq 2\omega_m\omega_n - 2\omega_n^2 + 1.$$

Возводя, далее, левую и правую части получившихся соотношений в квадрат, после некоторых преобразований приходим к условию

$$4(\omega_n - \omega_m)^2 + 4\omega_n\omega_m - 3 \neq 0,$$

справедливому в силу очевидного неравенства $4\omega_n\omega_m - 3 > 0$.

Добавим еще, что после деления на ω_m все рассмотренные выше знаменатели стремятся при $m \rightarrow \infty$ к ненулевым конечным пределам. А так как при выполнении неравенств (1.34) модули коэффициентов s_j , $j = 1, \dots, 15$, при $m \rightarrow \infty$ растут не быстрее ω_m , то отсюда вытекают аналогичные (1.40) оценки

$$|\tilde{s}_j| \leq N, \quad j = 1, \dots, 15. \quad (1.49)$$

Анализ оставшихся краевых задач (1.42) не вызывает затруднений, поскольку условия (1.34) гарантируют их однозначную разрешимость. Проводя соответствующие вычисления, в данном случае приходим к формулам

$$D_m^\pm(x) = D_{m,0}^\pm(x) - D_{m,0}^\pm(0)\theta_{*,m}^{\pm,2}(\pi - x) - D_{m,0}^\pm(\pi)\theta_{*,m}^{\pm,2}(x).$$

Здесь для функций $D_{m,0}^\pm(x)$ справедливы аналогичные (1.45) равенства, в которых коэффициенты $r_j^\pm$ следует заменить на $\hat{r}_j^\pm$, где

$$\begin{aligned} \hat{r}_j^\pm &= r_j^\pm / [1 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2 + a^2(\sigma_{m,1}^\pm + n)^2], & j = 1, 3; \\ \hat{r}_j^\pm &= r_j^\pm / [1 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2 + a^2(\sigma_{m,1}^\pm - n)^2], & j = 2, 4; \\ \hat{r}_j^\pm &= r_j^\pm / [1 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2 + a^2(\sigma_n + m)^2], & j = 5, 7; \\ \hat{r}_j^\pm &= r_j^\pm / [1 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2 + a^2(\sigma_n - m)^2], & j = 6, 8; \\ \hat{r}_9^\pm &= r_9^\pm / [\omega_m^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2], \\ \hat{r}_{10}^\pm &= r_{10}^\pm / [\omega_{m+2n}^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2], \\ \hat{r}_{11}^\pm &= r_{11}^\pm / [\omega_{m-2n}^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2]. \end{aligned}$$

Отметим, что, как и выше, все знаменатели в коэффициентах $\hat{r}_j^\pm$ отличны от нуля. Убедимся, к примеру, в справедливости неравенств

$$\begin{aligned} \omega_m^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2 &\neq 0, & (\omega_m + 2\omega_n)^2 - \omega_{m \pm 2n}^2 &\neq 0, \\ (\omega_m - 2\omega_n)^2 - \omega_{m \pm 2n}^2 &\neq 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

С этой целью, раскрывая скобки, перепишем второе и третье из них в эквивалентной форме

$$|1 \pm a^2 mn| \neq \sqrt{1 + a^2 m^2} \sqrt{1 + a^2 n^2}. \quad (1.51)$$

А так как $m \neq n$, то в силу неравенства Буняковского–Коши левая часть (1.51) строго меньше правой. Что же касается первого неравенства (1.50), то оно эквивалентно очевидному неравенству $4\omega_n(\omega_n \pm \omega_m) \neq 0$.

Отличие от нуля всех остальных знаменателей в $\hat{r}_j^\pm$ устанавливается подобно тому, как это сделано в случае (1.48). Поэтому соответствующие выкладки опустим. Отметим только, что здесь (по тем же причинам, что и выше) имеют место оценки

$$|\hat{r}_j^\pm| \leq N, \quad j = 1, \dots, 11. \quad (1.52)$$

Перед формулировкой основного результата введем в рассмотрение числа $R_{n,m} = \operatorname{Re} \mu_m$ ($m \neq n$), $R_{n,\infty} = \operatorname{Re} \mu_\infty$, для которых из (1.44), (1.46) вытекают равенства:

$$R_{n,m} = R_{n,m}^0 - \frac{\xi_n^2 \beta_1}{2\omega_n} \left(1 - \frac{1}{\omega_{2n}^2}\right) \frac{4m^2 a^2}{1 + 4m^2 a^2} \Delta_1\left(\frac{\pi}{2a}\right) + \frac{\xi_n^2 a^2}{\pi \omega_n} \beta_1 \times \left[\left(2 + \frac{\omega_n}{\omega_m}\right) \sigma_{m,1}^+ \Delta_{n,m}^+(\pi \sigma_{m,1}^+) + \left(2 - \frac{\omega_n}{\omega_m}\right) \sigma_{m,1}^- \Delta_{n,m}^-(\pi \sigma_{m,1}^-) \right], \quad (1.53)$$

$$R_{n,\infty} = R_{n,\infty}^0 - \frac{\xi_n^2 \beta_1}{2\omega_n} \left(1 - \frac{1}{\omega_{2n}^2}\right) \Delta_1\left(\frac{\pi}{2a}\right), \quad (1.54)$$

где, напомним, постоянная β_1 определена в (1.19), $\Delta_1 = \Delta_1(s)$ — функция из (1.17), а функции $\Delta_{n,m}^\pm = \Delta_{n,m}^\pm(s)$ и постоянные $R_{n,m}^0$, $R_{n,\infty}^0$ задаются формулами

$$\Delta_{n,m}^\pm(s) = \left(\frac{1}{\omega_{m+n}^2 - (\omega_m \pm \omega_n)^2} - \frac{1}{\omega_{m-n}^2 - (\omega_m \pm \omega_n)^2} \right)^2 \frac{(-1)^{n+m} - \cos s}{\sin s}, \quad (1.55)$$

$$2R_{n,m}^0 = \frac{\xi_n^2}{2\omega_n} \beta_1 \left(2 + \frac{\omega_n}{\omega_m}\right) \left[\frac{1}{\omega_{m+n}^2 - (\omega_m + \omega_n)^2} + \frac{1}{\omega_{m-n}^2 - (\omega_m + \omega_n)^2} \right] + \frac{\xi_n^2}{2\omega_n} \beta_1 \left(2 - \frac{\omega_n}{\omega_m}\right) \left[\frac{1}{\omega_{m+n}^2 - (\omega_m - \omega_n)^2} + \frac{1}{\omega_{m-n}^2 - (\omega_m - \omega_n)^2} \right] + 2R_{n,\infty}^0, \quad (1.56)$$

$$2R_{n,\infty}^0 = 1 + (\beta_1/\omega_n + b_2 + 3\omega_n^2 b_4) \xi_n^2. \quad (1.57)$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть при некотором натуральном n справедливы неравенства (1.11), (1.20), (1.22), (1.23), (1.34), отличны от нуля числа (1.53), (1.54) и количество положительных среди них равно m_0 . Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (1.1) имеет цикл с асимптотикой (1.3), (1.4), (1.21), экспоненциально орбитально устойчивый при $m_0 = 0$ и диготомичный при $m_0 > 0$ с размерностью неустойчивого многообразия $2m_0 + 1$.

Из формул (1.17)–(1.19), (1.53)–(1.57) следует, что при подходящем выборе коэффициентов a_1, a_2, a_3 и b_2, b_4 разложения (1.5) краевая задача (1.1) может иметь любое конечное число устойчивых циклов, а также циклы с бесконечномерными неустойчивыми многообразиями (при $R_{n,\infty} > 0$). Что же касается неравенств (1.11), (1.22), (1.23), (1.34), то они представляют собой ограничения на параметр a и заведомо выполняются при некоторой общности положения.

1.2. Доказательство теоремы 1.1. Для начала обоснуем описанный выше алгоритм асимптотического вычисления характеристических показателей краевой задачи (1.24). Введем новые переменные $h_1 = h_t$, $h_2 = Bh$, где B — арифметический квадратный корень из оператора $-a^2 d^2/dx^2 + I$ с граничными условиями Дирихле, и перейдем обычным образом от уравнения (1.24) к системе первого порядка в $\overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1$. Выполним затем в получившейся системе замену, исходя из

формулы

$$h = (V_0 + \sqrt{\varepsilon}V_1 + \varepsilon V_2)v + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left\{ \omega_m^{-2} [\exp(i\omega_m t) \sin mx + \sqrt{\varepsilon}h_{1m} + \varepsilon h_{2m}] \eta_m + \omega_m^{-2} [\exp(-i\omega_m t) \sin mx + \sqrt{\varepsilon}\bar{h}_{1m} + \varepsilon \bar{h}_{2m}] \bar{\eta}_m \right\}, \quad (1.58)$$

где $v = \text{colon}(\eta_n, \bar{\eta}_n)$, $\eta = \text{colon}(\eta_1, \bar{\eta}_1, \eta_2, \bar{\eta}_2, \dots) \in l_2$. Последнее означает, что при дифференцировании (1.58) по t следует считать

$$\dot{v} = \varepsilon Dv; \quad \dot{\eta}_m = \varepsilon \mu_m \eta_m, \quad m \neq n,$$

где D — матрица (1.28). Заметим, далее, что из способа построения и свойств входящих в (1.58) функций (см. оценки (1.40), (1.49), (1.52)) следует, что формула (1.58) индуцирует ограниченный (равномерно по t, ε) оператор, действующий из l_2 в $\overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1$, а результатом применения указанной замены к уравнению (1.24) служит система в l_2 :

$$\dot{\eta} = \varepsilon \Lambda_0 \eta + \varepsilon^{3/2} \Lambda_1(t, \varepsilon) \eta. \quad (1.59)$$

Здесь

$$\Lambda_0 = \text{diag}\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_{n-1}, \bar{\mu}_{n-1}, D, \mu_{n+1}, \bar{\mu}_{n+1}, \dots\},$$

а линейный оператор Λ_1 ограничен равномерно по $t \in \mathbb{R}$ и ε (по поводу построения Λ_1 см. соответствующие места в [10], [15]).

Несложный анализ системы (1.59) показывает, что ее свойства устойчивости совпадают с теми, о которых говорится в теореме: реальные части всех ее характеристических показателей (за исключением одного, имеющего порядок $\varepsilon^{3/2}$) равномерно по $m \geq 1$ с точностью до $\varepsilon^{3/2}$ совпадают с числами $\varepsilon \text{Re } \mu_m$ ($m \neq n$) и $-\varepsilon$.

Завершающий этап — доказательство существования у краевой задачи (1.1) периодического решения с требуемой асимптотикой — проводится по стандартной схеме из [12]. Выполним в (1.1) замену времени $\tau = (1 + \varepsilon \alpha_n + \varepsilon^2 \delta)t$, где $\delta = \delta(\varepsilon)$ — подлежащая определению ограниченная функция ε , и положим

$$u = \varepsilon^{1/2} u_1(\tau, x) + \varepsilon u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, x) + \varepsilon^2 u_4(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} h, \quad (1.60)$$

где функции u_k , $k = 1, \dots, 4$, взяты из (1.3). В результате приходим к уравнению

$$\Pi(\varepsilon, \delta)h = \varepsilon F(\tau, x, \varepsilon, \delta, h, h_\tau), \quad (1.61)$$

в котором

$$\begin{aligned} \Pi(\varepsilon, \delta)h = & (1 + \varepsilon \alpha_n + \varepsilon^2 \delta)^2 h_{\tau\tau} - a^2 h_{xx} + h \\ & - \varepsilon^{1/2} [a_1(\tau, x)h + a_2(\tau, x)(1 + \varepsilon \alpha_n + \varepsilon^2 \delta)h_\tau] \\ & - \varepsilon [b_1(\tau, x, \varepsilon)h + b_2(\tau, x, \varepsilon)(1 + \varepsilon \alpha_n + \varepsilon^2 \delta)h_\tau], \end{aligned} \quad (1.62)$$

а функция $F(\tau, x, \varepsilon, \delta, u, v)$ является гладкой по совокупности переменных, $2\pi/\omega_n$ -периодической по τ и такова, что

$$\sup_{\tau} \|F(\tau, x, \varepsilon, \delta, 0, 0)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1} \leq N_1, \quad (1.63)$$

$$\sup_{\tau} \|F(\tau, x, \varepsilon, \delta, u_1, v_1) - F(\tau, x, \varepsilon, \delta, u_2, v_2)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1} \leq N_2 \varepsilon^{1/2} (|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|), \quad (1.64)$$

где $N_2 = N_2(R)$, $R = \max\{|u_j|, |v_j|, j = 1, 2\}$.

Из наших построений следует, что уравнение

$$\Pi(\varepsilon, \delta)h = 0 \quad (1.65)$$

имеет приближенное (с точностью до ε^2 по невязке) периодическое решение

$$h_0(\tau, x, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \tau} [u_1(\tau, x) + \varepsilon^{1/2}u_2(\tau, x) + \varepsilon u_3(\tau, x) + \varepsilon^{3/2}u_4(\tau, x)].$$

Добавляя в левую часть этого уравнения слагаемое (имеющее порядок ε^2)

$$-\Delta(\tau, x, \varepsilon, \delta)l(h)/l(h_0), \quad (1.66)$$

где

$$\Delta = \Pi(\varepsilon, \delta)h_0, \quad l(h) = \int_0^\pi \left[h \omega_n \sin \omega_n \tau + \frac{\partial h}{\partial \tau} \cos \omega_n \tau \right] \sin nx \, dx,$$

можно сделать его точным, что и полагаем ниже. Естественно, что добавку (1.66) нужно учесть и в правой части (1.61), общие свойства которой от этого не изменятся.

Рассмотрим оператор $\Pi(\varepsilon, \delta)$ в банаховом пространстве H , состоящем из таких $2\pi/\omega_n$ -периодических по τ функций $h(\tau, x)$, что сама $h(\tau, x)$ непрерывна по τ в метрике $\overset{\circ}{W}_2^2$, h_τ непрерывна в метрике $\overset{\circ}{W}_2^1$, а $h_{\tau\tau}$ — в метрике L_2 . Норму в H определим формулой

$$\|h\|_H = \max_\tau \{ \|h\|_{\overset{\circ}{W}_2^2} + \|h_\tau\|_{\overset{\circ}{W}_2^1} + \|h_{\tau\tau}\|_{L_2} \}.$$

Введем еще пространство H_0 , состоящее из непрерывных $2\pi/\omega_n$ -периодических по τ функций $h(\tau, x)$ со значениями в $\overset{\circ}{W}_2^1$ и нормой

$$\|h\|_{H_0} = \max_\tau \|h(\tau, x)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1}.$$

Как известно, необходимым и достаточным условием разрешимости в H уравнения

$$\Pi(\varepsilon, \delta)h = G(\tau, x), \quad G \in H_0, \quad (1.67)$$

является равенство

$$\frac{\omega_n}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_n} \int_0^\pi G(\tau, x) g(\tau, x, \varepsilon, \delta) \, dx \, d\tau = 0, \quad (1.68)$$

где $g(\tau, x, \varepsilon, \delta)$ — периодическое решение сопряженного с (1.65) уравнения, удовлетворяющее условию нормировки

$$\frac{\omega_n}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_n} \int_0^\pi g(\tau, x, \varepsilon, \delta) \frac{\partial}{\partial \tau} h_0(\tau, x, \varepsilon) \, dx \, d\tau = 1. \quad (1.69)$$

Решение h_G уравнения (1.67) при этом единственно, если $\partial h_G / \partial \tau$ ортогонально в среднем функции g . Кроме этого, имеет место неравенство

$$\|h_G\|_H \leq \frac{N_3}{\varepsilon} \|G\|_{H_0}, \quad (1.70)$$

вытекающее из структуры замены (1.58) и вида системы (1.59), к которой преобразуется уравнение (1.24) с помощью указанной замены.

Рассматривая правую часть уравнения (1.61) как неоднородность G и подправляя ее соответствующим образом (вычитая из G функцию $\partial h_0 / \partial \tau$, умноженную на левую часть (1.68)), переходим к интегральному уравнению, обращая оператор Π . Неравенства (1.63), (1.64), (1.70) позволяют применить к нему в H принцип сжимающих отображений и определить функцию $h(\tau, x, \varepsilon, \delta)$: $\|h\|_H \leq N_4$. Подставляя затем ее в равенство (1.68) (т.е. зануляя сделанную ранее поправку к правой части уравнения (1.61)), для отыскания δ получаем уравнение

$$\delta = p(\varepsilon) + \varepsilon^{1/2} \Omega(\varepsilon, \delta), \quad (1.71)$$

где функция $p(\varepsilon)$ ограничена.

Можно показать (соответствующий анализ для уравнения (*) с граничными условиями Неймана проделан, например, в [16]), что функции $\Omega(\varepsilon, \delta)$ и $\Omega'_\delta(\varepsilon, \delta)$ ограничены равномерно по ε на любом компактном множестве изменения переменной δ . Поэтому, применяя к уравнению (1.71) теорему о неявной функции, однозначно определяем интересующую нас поправку к частоте $\delta = \delta(\varepsilon)$. Теорема 1.1 доказана.

Отметим, что наиболее простая ситуация реализуется в рамках краевой задачи (1.1) при условиях

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0. \quad (1.72)$$

Действительно, в этом случае отпадает надобность в неравенствах (1.11), (1.22), так как заведомо $u_2 \equiv 0$ и отсутствует первое слагаемое в формуле (1.15). Далее, при проведении алгоритма исследования устойчивости нет необходимости требовать выполнения условий (1.34), так как здесь $h_{1m} \equiv 0$, а коэффициенты $D_m^0(x)$ и $D_m^\pm(x)$ из (1.41) являются линейными комбинациями только функций $\sin(m \pm 2n)x$ и $\sin mx$, $\sin(m \pm 2n)x$ соответственно. И наконец, в данном случае лишними оказываются и неравенства (1.23), обеспечивающие возможность определения функции u_4 из (1.3). Связано это с тем, что при условиях (1.72) в доказательстве теоремы 1.1 можно вместо (1.60) положить

$$u = \varepsilon^{1/2} u_1(\tau, x) + \varepsilon u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, x) + \varepsilon h. \quad (1.73)$$

В результате получим аналогичное (1.61) уравнение, правая часть F которого обладает прежними свойствами (1.63), (1.64). Для сравнения заметим, что если осуществить замену равенства (1.60) на (1.73) в общем случае (т.е. при отказе от требований (1.72)), то исчезнет множитель $\varepsilon^{1/2}$ в правой части неравенства (1.64). А это, в свою очередь, сделает невозможным последующее применение к получающемуся из (1.61) интегральному уравнению принципа сжимающих отображений.

Итак, в общем случае для доказательства существования у краевой задачи (1.1) точного периодического решения с асимптотикой (1.3), (1.4) приближенное периодическое решение необходимо знать с точностью до слагаемых порядка ε^2 включительно. При этом, однако, от первой группы ограничений (1.23) все же можно отказаться. В самом деле, пусть $2\omega_n = \omega_{2k_0}$ при некотором натуральном k_0 . Тогда вырожденной окажется краевая задача для коэффициента функции $u_4(\tau, x)$ при

гармонике $\exp(2i\omega_n \tau)$. Разрешимости ее можно добиться, если учесть в $u_2(\tau, x)$ слагаемое

$$[\eta \exp(2i\omega_n \tau) + \bar{\eta} \exp(-2i\omega_n \tau)] \sin 2k_0 x, \quad (1.74)$$

где η — произвольная комплексная постоянная. Подчеркнем, что в силу очевидного равенства

$$\int_0^\pi \sin 2k_0 x \sin^2 nx \, dx = 0$$

слагаемое (1.74) не даст вклада в условие разрешимости первой из задач (1.13), а постоянная η определится из условия разрешимости краевой задачи для интересующего нас коэффициента функции u_4 . Несложный подсчет показывает, что для η выйдет линейное неоднородное уравнение вида $\mu_{2k_0} \eta = \varphi_0$, однозначно разрешимое в силу предполагаемого в условиях теоремы 1.1 неравенства $\operatorname{Re} \mu_{2k_0} \neq 0$.

Используя описанный выше прием, в принципе, можно избавиться и от второй группы ограничений (1.23). Однако в отличие от предыдущего случая, в котором при последующей реализации алгоритма исследования устойчивости не возникают дополнительных условий, в данной ситуации (т.е. при выполнении равенства $4\omega_n = \omega_{k_0}$ при некотором натуральном k_0) необходимо еще убедиться в справедливости условий (1.34) при $p = 4$.

Отдельно остановимся на роли второй группы неравенств (1.34). Пусть, например, $\omega_n = ak_0$ при некотором натуральном k_0 . Тогда при выполнении всех прочих ограничений формально правая часть (1.58) может быть построена. Но поскольку здесь $|\sin(\pi\sigma_{m,1}^\pm)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то возникает так называемый эффект малых знаменателей: не все входящие в h_{1m}, h_{2m} коэффициенты ограничены равномерно по m и вследствие этого замена (1.58) становится некорректной (не порождает ограниченного оператора, действующего из l_2 в $\overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1$).

В качестве конкретного примера, иллюстрирующего содержательность теоремы 1.1, рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} - u^2 u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \quad (1.75)$$

В данном случае условие (1.20) выполняется при любом натуральном n , так как $d_n = -3\omega_n/4$. Надобность же во всех остальных ограничениях отпадает, поскольку здесь справедливы равенства (1.72) и кроме этого

$$u_2 = u_4 = 0, \quad \xi_n = 2/\sqrt{3}, \quad \alpha_n = 0, \quad \mu_m = \mu_\infty = -1/6.$$

Таким образом, вместо теоремы 1.1 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для любого натурального n_0 и для любых $a_{**} > a_* > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $a_* \leq a \leq a_{**}$ краевая задача (1.75) имеет экспоненциально орбитально устойчивые периодические решения с асимптотикой (1.3), (1.4) при $n = 1, 2, \dots, n_0$.*

Будем говорить, что в некоторой системе наблюдается явление *буферности*, если при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование в ней любого наперед заданного конечного числа устойчивых циклов. Из теоремы 1.2 следует, что указанное явление имеет место в рамках краевой задачи (1.75).

1.3. Случай граничных условий Неймана. В этом пункте для уравнения (*) рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} + f(u, u_t), \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0 \quad (1.76)$$

и для построения ее периодических решений применим изложенные выше алгоритмы. А именно, фиксируем произвольно натуральное n и подставим в (1.76) ряд (1.3), в котором теперь

$$u_1 = [\exp(i\omega_n \tau) + \exp(-i\omega_n \tau)] \xi_n \cos nx,$$

а частоты ω_n задаются прежними равенствами (см. (1.2)). Действуя затем описанным в п. 1.1 способом, для нахождения u_k , $k = 2, 3, 4$, получим аналогичную (1.6) рекуррентную последовательность линейных неоднородных краевых задач

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_k + u_k = g_k(\tau, x), \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (1.77)$$

Анализ задачи (1.77) при $k = 2$ приводит к выводу, что для u_2 справедливо прежнее представление (1.7). Однако теперь коэффициенты в нем задаются равенствами, получающимися из (1.9) при отбрасывании слагаемых, содержащих $\theta_*(x)$, $\theta_{**}(x)$, и при замене $(-1/\omega_{2n}^2) \cos 2nx$ на $(1/\omega_{2n}^2) \cos 2nx$, $(1/3) \cos 2nx$ на $(-1/3) \cos 2nx$. Главное же отличие от предыдущего случая состоит в том, что здесь не возникает никаких дополнительных ограничений вида (1.11).

При $k = 3$, учитывая уже найденное решение u_2 , убеждаемся, что правая часть в (1.77) — линейная комбинация функций

$$\exp(\pm i m \omega_n \tau) \cos p n x, \quad m, p = 1, 3. \quad (1.78)$$

Поэтому для разрешимости задачи (1.77) при $k = 3$ в классе тригонометрических полиномов переменной $\omega_n \tau$ необходимо и достаточно отсутствие в ее правой части слагаемых, пропорциональных $\exp(\pm i \omega_n \tau) \cos nx$. Приравнявая их к нулю, для определения неизвестных постоянных ξ_n, α_n приходим к уравнению (1.16), в котором теперь ляпуновская величина d_n задается равенством (1.18).

Предположим, что, как и выше, выполняется условие (1.20). Тогда из (1.16) находим постоянные ξ_n, α_n , для которых справедливы прежние формулы (1.21), а затем определяем и саму функцию u_3 в виде линейной комбинации гармоник (1.78) при $m = 1, p = 3$ и $m = 3, p = 1, 3$. И наконец, в случае $k = 4$ разрешимость краевой задачи (1.77) в требуемом классе функций гарантирует условие

$$a^2 \neq (2n)^{-2}, \quad (1.79)$$

возникающее при нахождении коэффициентов функции u_4 при гармониках $\exp(\pm 2i \omega_n \tau) \cos 4nx$.

Следующий этап – применение алгоритмов исследования устойчивости из п. 1.1 к краевой задаче

$$\begin{aligned} h_{tt} - a^2 h_{xx} + h &= \varepsilon^{1/2} [a_1(\tau, x)h + a_2(\tau, x)h_t] + \varepsilon [b_1(\tau, x, \varepsilon)h + b_2(\tau, x, \varepsilon)h_t], \\ h_x|_{x=0} &= h_x|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (1.80)$$

для коэффициентов которой по-прежнему справедливы равенства (1.25), (1.26).

Для расчета характеристических показателей краевой задачи (1.80) на частоте ω_n подставим в нее формулу (1.27), в которой теперь $w_0 = \exp(i\omega_n \tau) \cos nx$, а матрица D имеет прежнюю структуру (1.28). В результате снова приходим к равенствам (1.29).

При $m \neq n$, $m \geq 0$, подставляя в (1.80) выражение (1.30), в котором $\sin mx$ заменен на $\cos mx$, получаем краевые задачи вида (1.31), в которых, естественно, граничные условия Дирихле следует заменить на условия Неймана. Анализ первой из них достаточно прост, так как ее неоднородность f_1 – линейная комбинация гармоник

$$\exp[i(\omega_m t + \omega_n \tau)] \cos(m \pm n)x, \quad \exp[i(\omega_m t - \omega_n \tau)] \cos(m \pm n)x. \quad (1.81)$$

Поэтому для нахождения h_{1m} в виде тригонометрического полинома той же структуры необходимо и достаточно выполнение неравенств (1.39), справедливость которых при всех $a > 0$ уже установлена в п. 1.1.

Для нахождения h_{2m} сначала, приравнявая к нулю коэффициент при гармонике $\exp(i\omega_m t) \cos mx$ в f_2 , определяем комплексную величину μ_m , которая, как и в п. 1.1, имеет при $m \rightarrow \infty$ конечный предел μ_∞ . Явную формулу для μ_m опустим, так как в дальнейшем она не потребуется. Отметим лишь, что здесь для $R_{n,m} = \operatorname{Re} \mu_m$, $R_{n,\infty} = \operatorname{Re} \mu_\infty$ имеют место равенства (1.56), (1.57).

Завершая описание алгоритма, добавим, что поскольку после нахождения μ_m неоднородность f_2 представляет собой линейную комбинацию гармоник

$$\begin{aligned} \exp(i\omega_m t) \cos(m \pm 2n)x, \quad \exp[i(\omega_m t + 2\omega_n \tau)] \cos(m \pm 2n)x, \\ \exp[i(\omega_m t - 2\omega_n \tau)] \cos(m \pm 2n)x, \quad \exp[i(\omega_m t \pm 2\omega_n \tau)] \cos mx, \end{aligned} \quad (1.82)$$

то и h_{2m} уместно искать в том же виде. Однако для того чтобы указанное было возможным, необходимо и достаточно выполнение неравенств (1.47), (1.50). Справедливость же последних при всех $a > 0$ установлена нами в п. 1.1. Добавим еще, что в данном случае автоматически отсутствуют малые знаменатели, т.е. все входящие в h_{1m} , h_{2m} коэффициенты при гармониках (1.81) и (1.82) соответственно допускают равномерные по m оценки вида (1.40). А это, в свою очередь, позволяет при обосновании приведенных алгоритмов сконструировать корректную бесконечномерную замену переменных вида (1.58).

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что для краевой задачи (1.76) аналог теоремы 1.1 имеет место при минимальных ограничениях: для рассматриваемого номера n следует требовать выполнения неравенств (1.20), (1.79) и отличия от нуля чисел (1.56), (1.57).

В заключение дадим сравнительный анализ динамики по параметру a периодических решений краевых задач (1.1) и (1.76). С этой целью введем в рассмотрение комплексную ляпуновскую величину

$$d = \frac{1}{2}[a_2(a_1 + a_3) + b_2 + 3b_4] - \frac{i}{6}[10a_1(a_1 + a_3) + 4a_3^2 + a_2^2 + 9b_1 + 3b_3] \quad (1.83)$$

обыкновенного уравнения, получающегося из (*) при $\varepsilon = a = 0$, и предположим, что

$$\operatorname{Re} d < 0. \quad (1.84)$$

Обратимся затем к краевой задаче (1.76) и будем рассматривать соответствующие ей величины d_n , ξ_n , $R_{n,m}$, $R_{n,\infty}$ как функции $d_n(a)$, $\xi_n(a)$, $R_{n,m}(a)$, $R_{n,\infty}(a)$ параметра a (все остальные параметры предполагаем фиксированными). Анализируя формулы (1.18), (1.56), (1.57), нетрудно увидеть, что

$$d_n(0) = \frac{3}{2}d, \quad \xi_n(0) = \sqrt{-2/(3 \operatorname{Re} d)}, \quad R_{n,\infty}(0) = -1/6 \quad (1.85)$$

и равномерно по $m \geq 0$

$$\lim R_{n,m}(a) = -1/6, \quad a \rightarrow 0. \quad (1.86)$$

А это означает, что при условии (1.84) и при согласованном уменьшении параметров a , ε в краевой задаче (1.76) происходит неограниченное увеличение числа устойчивых циклов, т.е. реализуется феномен буферности (см. определение, данное после теоремы 1.2).

В случае краевой задачи (1.1) все перечисленные факты заведомо справедливы в простейшей ситуации, когда выполняются равенства (1.72). Однако при некоторой общности положения, а именно при $\beta_1 \neq 0$, функция $\operatorname{Re} d_n(a)$, определяемая теперь посредством формул (1.17)–(1.19), имеет в точках a_k^* , $k \geq n$ (см. (1.11)), полюсы первого порядка, сгущающиеся к точке $a = 0$. А отсюда вытекает, что при $a \rightarrow 0$ она бесконечно много раз меняет знак. Поэтому найдутся такие сколь угодно близкие к нулю значения параметра a , при которых $\operatorname{Re} d_n(a) > 0$, и, следовательно, у краевой задачи (1.1) не существует периодического решения (1.3), (1.4) с фиксированным номером n .

С другой стороны, заведомо найдутся и такие последовательности $a_s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, значений a , при которых функции $d_n(a)$, $\xi_n(a)$, $R_{n,\infty}(a)$ стремятся к пределам из (1.85), а также сохраняются предельные равенства (1.86). Тем самым, при выполнении условия (1.84) и при $\beta_1 \neq 0$ для каждого периодического решения (1.3), (1.4) задачи (1.1) наблюдается так называемый *эффект мерцания*: сколь угодно малые значения параметра a , при которых оно устойчиво, перемежаются со значениями a , при которых данного решения не существует.

Итак, установлено, что динамика по параметру a периодических решений краевой задачи (1.1) существенно зависит от наличия или отсутствия в разложении (1.5) квадратичных слагаемых, в то время как в случае краевой задачи (1.76) ничего подобного не наблюдается. В чисто аналитическом плане это объясняется

тем, что система функций $\cos nx$, $n \geq 0$, обладает свойством замкнутости относительно операции умножения, которое выражается равенством

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x],$$

а у системы $\sin x$, $n \geq 1$, такое свойство отсутствует. Однако данное тривиальное обстоятельство приводит в случае краевой задачи (1.1) при $\beta_1 \neq 0$ к весьма нетривиальным последствиям. А именно, любое ее периодическое решение (1.3), (1.4) с фиксированным номером n при уменьшении параметра a и при прохождении его через критические значения, соответствующие нарушению условий (1.11), (1.22), (1.34), претерпевает бесконечную последовательность бифуркаций. Добавим, наконец, что если нарушение условий (1.11), (1.22) влияет на сам факт существования цикла с требуемой асимптотикой, то “материализация” комбинационных резонансов приводит к менее существенным последствиям. Например, как следует из формул (1.53), (1.55), при прохождении параметра a через критическое значение a_* , определяющееся из условия $\omega_k = \omega_n + \omega_m$ при некоторых k и m , может наблюдаться лишь смена устойчивости цикла (1.3), (1.4). Связано это с тем, что в случае нечетного $n+m+k$ функция $R_{n,m}(a)$ имеет в точке $a = a_*$ полюс первого порядка.

§ 2. Метод квазинормальных форм и границы его применимости

2.1. Общий случай. Для прояснения существа дела описание интересующего нас метода дадим сначала для некоторого общего класса гиперболических систем. В связи с этим на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} + (A_0 + \varepsilon A_1)u_t + (B_0 + \varepsilon B_1)u &= \varepsilon D u_{xx} + f(u, u_t), \\ u|_{x=0} &= u|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; $0 < \varepsilon \ll 1$; A_j, B_j , $j = 0, 1$, и D – постоянные матрицы, причем $D^* = D$, $D > 0$; тейлоровское разложение в нуле вектор-функции $f(u, v) \in C^\infty$ начинается с квадратичных слагаемых. В качестве фазового пространства краевой задачи (2.1), как и в случае (1.1), возьмем

$$(u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^m) \times \overset{\circ}{W}_2^1([0, \pi]; \mathbb{R}^m).$$

Сформулируем условия, при которых будет изучаться проблема существования и устойчивости периодических по t решений краевой задачи (2.1), бифурцирующих из ее нулевого состояния равновесия при $\varepsilon > 0$. Первое ограничение касается автоколебательных свойств уравнения из (2.1) при $\varepsilon = 0$.

УСЛОВИЕ 2.1. *Предполагаем, что квадратичный пучок матриц $\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0$, где I – единичная матрица, имеет простую пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$, т.е. существуют такие векторы a и b , что*

$$\begin{aligned} (-I + iA_0 + B_0)a &= 0, & (-I - iA_0^* + B_0^*)b &= 0, \\ (2ia + A_0a, b) &= 1, & (2ia + A_0a, \bar{b}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $(*, *)$ – обычное скалярное произведение в комплексификации $\mathbb{R}^m$. Остальные же собственные значения рассматриваемого пучка матриц считаем лежащими в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Следующее ограничение обеспечивает нужное согласование “обыкновенной” и “диффузионной” частей в (2.1).

УСЛОВИЕ 2.2. Считаем, что при всех $z > 0$ собственные значения квадратичного пучка матриц

$$\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0 + zD \quad (2.3)$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а при малых z те собственные значения $\lambda(z)$, $\bar{\lambda}(z)$ пучка (2.3), для которых $\lambda(0) = i$ (их существование вытекает из условия 2.1), отходят от мнимой оси общим образом, т.е. выполняется неравенство

$$-\operatorname{Re} \lambda'_z|_{z=0} = \operatorname{Re}(Da, b) > 0. \quad (2.4)$$

Перед формулировкой очередного ограничения предположим для простоты, что все собственные значения $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, матрицы D различны, и обозначим через e_k , $k = 1, \dots, m$, соответствующую им ортонормированную систему собственных векторов.

УСЛОВИЕ 2.3. Предположим, что

$$(A_0 e_k, e_k) > 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.5)$$

Остановимся на связи условий 2.2 и 2.3. Заметим, что собственные значения $\lambda_k(z)$, $\bar{\lambda}_k(z)$, $k = 1, \dots, m$, пучка (2.3) допускают асимптотику:

$$\lambda_k(z) = i\sqrt{\lambda_k z} - \frac{1}{2}(A_0 e_k, e_k) + O(z^{-1/2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

А отсюда и из условия 2.2 автоматически следует, что

$$(A e_k, e_k) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Строгие же неравенства (2.5) гарантируют, что с ростом z собственные значения $\lambda_k(z)$, $\bar{\lambda}_k(z)$ не приближаются к мнимой оси. Отметим, далее, что при строгом нарушении условия 2.2 или 2.3, когда при некотором $z_0 > 0$ у пучка (2.3) есть собственное значение в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, нулевое решение краевой задачи (2.1) экспоненциально неустойчиво с показателем экспоненты порядка единицы. Тем самым, заведомо неустойчивыми будут и все бифурцирующие из него при $\varepsilon > 0$ автоколебательные режимы, т.е. интересующая нас проблема теряет смысл.

При сформулированных ограничениях, следуя методике работ [5]–[7], автоколебания в краевой задаче (2.1) будем искать в виде

$$u = \varepsilon^{1/2} u_1(t, s, x) + \varepsilon u_2(t, s, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, s, x) + \dots, \quad (2.6)$$

где $s = \varepsilon t$,

$$u_1 = \xi(s, x) a \exp(it) + \bar{\xi}(s, x) \bar{a} \exp(-it), \quad (2.7)$$

a – собственный вектор из (2.2), ξ – неизвестная комплексная “амплитуда” колебаний, функции $u_2, u_3, \dots$ периодичны по t с периодом 2π .

Подставляя формулы (2.6), (2.7) в уравнение из (2.1) и приравнивая коэффициенты при ε , для u_2 получаем уравнение вида

$$\ddot{u}_2 + A_0 \dot{u}_2 + B_0 u_2 = |\xi(s, x)|^2 c_0 + \xi^2(s, x) c_1 \exp(2it) + \bar{\xi}^2(s, x) \bar{c}_1 \exp(-2it), \quad (2.8)$$

где точка – дифференцирование по t , переменные s, x рассматриваются как параметры, а c_0, c_1 – некоторые постоянные векторы, зависящие от квадратичных слагаемых в тейлоровском разложении $f(u, v)$. Отсюда функция u_2 однозначно определяется в виде

$$u_2 = |\xi|^2 v_0 + \xi^2 v_1 \exp(2it) + \bar{\xi}^2 \bar{v}_1 \exp(-2it), \quad (2.9)$$

где

$$v_0 = B_0^{-1} c_0, \quad v_1 = (-4I + 2iA_0 + B_0)^{-1} c_1. \quad (2.10)$$

Подчеркнем, что обратимость фигурирующих в (2.10) матриц вытекает из условия 2.1.

После приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ для u_3 получаем уравнение, подобное (2.8), но теперь его правая часть $g(t, s, x)$ – сумма первых и третьих гармоник переменной t . Поэтому для нахождения u_3 в том же виде необходимо и достаточно обращение в нуль скалярного произведения коэффициента при $\exp(it)$ в $g(t, s, x)$ на вектор b (см. (2.2)). Приравнивая указанное скалярное произведение к нулю, для определения неизвестной амплитуды $\xi(s, x)$ приходим к краевой задаче

$$\xi_s = \varkappa_0 \xi_{xx} + \varkappa_1 \xi + d|\xi|^2 \xi, \quad \xi|_{x=0} = \xi|_{x=\pi} = 0, \quad (2.11)$$

в которой d – комплексная ляпуновская величина обыкновенного уравнения, получающегося из (2.1) при $\varepsilon = 0$,

$$\varkappa_0 = (Da, b), \quad \varkappa_1 = -i(A_1 a, b) - (B_1 a, b), \quad (2.12)$$

а $\bar{\xi}$ удовлетворяет комплексно-сопряженной задаче. Отметим, что в отличие от исходной системы (2.1) задача (2.11) в силу (2.4), (2.12) является параболической.

Согласно предложенной Ю. С. Колесовым терминологии [5]–[7] краевую задачу (2.11) будем называть *квазинормальной формой* исходной задачи (2.1). Подобное название оправдано тем, что при $D = 0$ уравнение из (2.11) представляет собой укороченную нормальную форму соответствующего обыкновенного уравнения (получающегося из (2.1) при $D = 0$) на экспоненциально орбитально устойчивом двумерном интегральном многообразии. Если же $D \neq 0$, то при выводе задачи (2.11) отбрасываются слагаемые, хотя и малые по порядку относительно ε , но по силе отнюдь не являющиеся подчиненными остальным. Однако, несмотря на это, определенное соответствие между стационарными режимами краевых задач (2.11) и (2.1) все же имеет место (см. [5]–[7]). Например, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что краевая задача (2.11) имеет автономный цикл*

$$\xi(s, x) = \xi_0(x) \exp(i\alpha_0 s), \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad (2.13)$$

экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный (в метрике фазового пространства $\dot{W}_2^2$). Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной задаче (2.1) этому циклу соответствует периодическое по t решение с асимптотикой (2.6), (2.7), (2.13) и с теми же свойствами устойчивости.

Основной этап доказательства теоремы – исследование системы в вариациях на приближенном цикле – практически без изменений повторяет аналогичные места

из работ [17], [18], в которых метод квазинормальных форм обоснован для параболического и гиперболического случаев. Поэтому соответствующие выкладки опустим. Отметим только, что здесь сохраняется итоговая оценка вида (1.70). Далее, доказательство существования нужного числа в целом проводится по изложенной в п. 1.2 схеме. Однако здесь возникает один новый и важный для дальнейшего технический момент, на котором остановимся чуть подробнее.

Напомним, что, как показано в п. 1.2, при наличии в тейлоровском разложении нелинейности $f(u, v)$ квадратичных слагаемых для доказательства существования точного периодического решения с требуемой асимптотикой приближенное решение необходимо знать с точностью до слагаемых порядка ε^2 включительно. Таким образом, в нашем случае следует рассмотреть равенство

$$u = \varepsilon^{1/2} u_1(\tau, x) + \varepsilon u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, x) + \varepsilon^2 u_4(\tau, x, \varepsilon), \quad (2.14)$$

где $\tau = (1 + \varepsilon \alpha_0)t$, а 2π -периодические по τ функции u_j , $j = 1, 2, 3$, получаются из уже найденных выше коэффициентов ряда (2.6) при $\xi = \xi_0(x)$ и при замене t на τ . Что же касается пока неизвестной функции u_4 , то для нее выходит аналогичное (2.8) уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{u}_4 + A_0 \dot{u}_4 + B_0 u_4 = H_0(x) + H_1(x) \exp(2i\tau) + \overline{H}_1(x) \exp(-2i\tau) \\ + H_2(x) \exp(4i\tau) + \overline{H}_2(x) \exp(-4i\tau), \end{aligned} \quad (2.15)$$

в котором точка — дифференцирование по τ . Заметим, далее, что в отличие от уравнений для u_2 и u_3 правая часть (2.15) заведомо не удовлетворяет требуемым граничным условиям. Связано это с тем, что в формировании коэффициентов H_0 , H_1 вносит вклад слагаемое $D \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$. А отсюда и из (2.9), (2.10) заключаем, что в общем случае $H_j(0) \neq 0$, $H_j(\pi) \neq 0$, $j = 0, 1$.

Для того чтобы исправить положение, представим u_4 в виде

$$u_4 = u_{4,0}(\tau, x) + u_{4,1}(\tau, x, \varepsilon),$$

где $u_{4,0}$ — решение уравнения (2.15), в правой части которого удержаны только четвертые гармоники, а $u_{4,1}$ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + A_0 \frac{\partial}{\partial \tau} + B_0 - \varepsilon D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_{4,1} = H_0(x) + H_1(x) \exp(2i\tau) + \overline{H}_1(x) \exp(-2i\tau), \\ u_{4,1}|_{x=0} = u_{4,1}|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отметим, что поскольку $H_2(0) = H_2(\pi) = 0$, то и $u_{4,0}$ будет удовлетворять граничным условиям из (2.1). Решение же краевой задачи (2.16) ищем в виде тригонометрического полинома

$$u_{4,1} = C_0(x, \varepsilon) + C_1(x, \varepsilon) \exp(2i\tau) + \overline{C}_1(x, \varepsilon) \exp(-2i\tau).$$

В результате для определения коэффициентов C_j , $j = 0, 1$, приходим к сингулярно возмущенным краевым задачам

$$\begin{aligned} (B_0 - \varepsilon D d^2/dx^2) C_0 = H_0(x), \quad C_0|_{x=0} = C_0|_{x=\pi} = 0; \\ (-4I + 2iA_0 + B_0 - \varepsilon D d^2/dx^2) C_1 = H_1(x), \quad C_1|_{x=0} = C_1|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Анализ краевых задач (2.17) существенно опирается на условие 2.2, из которого вытекают сразу два следствия. Во-первых, это условие гарантирует однозначную разрешимость каждой из них при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, в чем нетрудно убедиться, используя метод Фурье по системе функций $\sin kx$, $k = 1, 2, \dots$. Во-вторых, привлекая результаты монографии [19], убеждаемся в справедливости равномерно по $x \in [0, \pi]$ асимптотических представлений

$$C_j(x, \varepsilon) = C_j^0(x) + \Pi_{j,1}(\sigma_1) + \Pi_{j,2}(\sigma_2) + O(\varepsilon), \quad j = 0, 1, \quad (2.18)$$

где

$$C_0^0(x) = B_0^{-1}H_0(x), \quad C_1^0(x) = (-4I + 2iA_0 + B_0)^{-1}H_0(x), \\ \sigma_1 = x/\sqrt{\varepsilon}, \quad \sigma_2 = (\pi - x)/\sqrt{\varepsilon},$$

а так называемые пограничные функции $\Pi_{0,k}(\sigma)$, $\Pi_{1,k}(\sigma)$, $k = 1, 2$, — некоторые решения уравнений

$$B_0\Pi_{0,k} - D\Pi_{0,k}'' = 0, \quad (-4I + 2iA_0 + B_0)\Pi_{1,k} - D\Pi_{1,k}'' = 0,$$

удовлетворяющие условиям

$$\Pi_{j,1}(0) = -C_j^0(0), \quad \Pi_{j,2}(0) = -C_j^0(\pi), \quad j = 0, 1,$$

и стремящиеся к нулю при $\sigma \rightarrow +\infty$. Отметим еще, что асимптотические представления (2.18) сохраняются при дифференцировании по x , но при этом остатки в них приобретают порядок $\varepsilon^{1/2}$.

Из перечисленных свойств решений краевых задач (2.17) (а точнее говоря, из наличия в них пограничных слоев) вытекают оценки

$$\|C_j\|_{W_2^1} \leq N\varepsilon^{-1/4}, \quad j = 0, 1.$$

Следовательно, при подстановке формулы (2.14) в уравнение из (2.1) и при переносе всех слагаемых из левой части получившегося равенства в правую невязка выйдет величиной порядка малости $\varepsilon^{9/4}$ (в метрике $\overset{\circ}{W}_2^1([0, \pi]; \mathbb{R}^m)$). А это означает, что при реализации описанной в п. 1.2 схемы доказательства равенство (1.60) необходимо заменить на

$$u = \varepsilon^{1/2}u_1(\tau, x) + \varepsilon u_2(\tau, x) + \varepsilon^{3/2}u_3(\tau, x) + \varepsilon^2u_4(\tau, x, \varepsilon) + \varepsilon^{5/4}h.$$

В результате оценка (1.63) сохранится, а в правой части неравенства (1.64) множитель $\varepsilon^{1/2}$ заменится на $\varepsilon^{1/4}$, что, очевидно, не повлияет на все дальнейшие рассуждения.

2.2. Скалярный случай. Отдельному рассмотрению подлежит так называемый скалярный случай, когда в уравнении из (2.1) имеем $m = 1$, $D = \sigma^2$, $\sigma > 0$. Из условия 2.1 с необходимостью следует, что тогда $A_0 = 0$, $B_0 = 1$. Полагая, далее, $A_1 = -1$, $B_1 = 0$, приходим к аналогичной (1.1) краевой задаче

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = \varepsilon \sigma^2 u_{xx} + f(u, u_t), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \quad (2.19)$$

В случае краевой задачи (2.19), в отличие от рассмотренной выше общей ситуации, фигурирующая в уравнении (2.11) ляпуновская величина d вычисляется достаточно просто: используя тейлоровское разложение (1.5), для нее получаем формулу (1.83). Остальные же параметры квазинормальной формы (2.11) теперь задаются равенствами

$$\varkappa_0 = -i\sigma^2/2, \quad \varkappa_1 = 1/2. \quad (2.20)$$

И наконец, следует добавить, что для краевой задачи (2.19) условия 2.2 и 2.3 не выполняются. Точнее говоря, здесь мы сталкиваемся с максимальным вырождением: при всех $z \geq 0$ корни уравнения $\lambda^2 + 1 + z = 0$ чисто мнимые и, в частности, квазинормальная форма (2.11) в силу первого равенства (2.20) не является параболической.

Именно максимальное вырождение и служит причиной того, что при наличии в тейлоровском разложении (1.5) квадратичных слагаемых теорема 2.1 для краевой задачи (2.19) перестает быть верной. Действительно, в случае задачи (2.1) требуемую при доказательстве данной теоремы однозначную разрешимость краевых задач (2.17) обеспечивает условие 2.2. В скалярном же случае вторая из этих задач, а именно краевая задача

$$-(\varepsilon \sigma^2 d^2/dx^2 + 3)C_1 = H_1(x), \quad C_1|_{x=0} = C_1|_{x=\pi} = 0, \quad (2.21)$$

вообще говоря, неразрешима при $\varepsilon = 3/(\sigma^2 k^2)$, $k = 1, 2, \dots$.

Указанная выше трудность не является чисто технической, а носит принципиальный характер. Связано это с тем, что в случае произвольной нелинейности периодическое решение задачи (2.19) с асимптотикой (2.6), отвечающее фиксированному автомодельному циклу (2.13), существует заведомо не при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. В самом деле, из общих соображений ясно, что краевая задача (2.19) наследует динамику задачи (1.1) при $a \rightarrow 0$. Последняя же, напомним, имеет периодическое решение (1.3), (1.4) с фиксированным номером n отнюдь не при всех достаточно малых значениях параметра a .

С другой стороны, при условиях (1.72), т.е. при отсутствии квадратичной нелинейности, ситуация иная. Здесь отпадает надобность в определении u_4 (см. п. 1.2) и, вследствие этого, теорема 2.1 для краевой задачи (2.19) оказывается справедливой (подробности доказательства см. в статьях [9], [18], где даны две различные версии обоснования метода квазинормальных форм в гиперболическом случае).

Обратимся теперь к краевой задаче

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = \varepsilon \sigma^2 u_{xx} + f(u, u_t), \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0 \quad (2.22)$$

и отметим, что для нее теорема 2.1 верна без каких-либо дополнительных ограничений на линейность $f(u, v)$. Объясняется это тем, что здесь в рассмотрении

краевой задачи (2.21) нет необходимости, так как функция u_4 , определяющаяся непосредственно из уравнения (2.15) (при $A_0 = 0$, $B_0 = 1$), заведомо удовлетворяет требуемым граничным условиям. Добавим еще, что впервые указанная теорема для задачи (2.22) была анонсирована в заметке [8], а подробное ее доказательство дано в статье [18], результаты которой вошли также в монографию [10].

Подводя итог, отметим, что сформулированные в п. 2.1 ограничения гарантируют справедливость теоремы 2.1 и для краевой задачи, получающейся из (2.1) при замене условий Дирихле на произвольные граничные условия типа Штурма–Лиувилля. В скалярном же случае, когда реализуется максимальное вырождение, данная теорема остается в силе лишь при определенном согласовании краевых условий с нелинейностью. Оптимальными в этом плане являются, естественно, условия Неймана, а также условия периодичности $u(t, x) \equiv u(t, x + 2\pi)$, для которых пригодна любая нелинейность. Что же касается граничных условий Дирихле или, скажем, условий $u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0$, то для них теорема 2.1 имеет место лишь при отсутствии в тейлоровском разложении (1.5) квадратичных слагаемых или при надлежащей их малости. Достаточно, к примеру, потребовать, чтобы упомянутые слагаемые были величинами порядка ε .

Список литературы

1. Витт А. А. Распределенные автоколебательные системы // Журн. технич. физики. 1934. Т. 4. № 1. С. 144–157.
2. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988.
3. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
4. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Асимптотическая теория колебаний в системе Витта // Совр. матем. и ее прилож. Т. 67. М.: ВИНТИ, 1999. С. 5–67.
5. Колесов Ю. С. Задача паразит-хозяин // Динамика биологических популяций. Межвуз. сб. Горький: Горьковский ун-т, 1984. С. 28–34.
6. Колесов Ю. С. Об одной бифуркационной теореме в теории автоколебаний распределенных систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 10. С. 1709–1713.
7. Колесов Ю. С. Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией // Укр. матем. журн. 1987. Т. 39. № 1. С. 27–34.
8. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 281–283.
9. Колесов Ю. С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 10. С. 57–72.
10. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Труды МИАН. 1998. Т. 222.
11. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
12. Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Матем. сб. 1986. Т. 130. № 4. С. 488–499.
13. Колесов Ю. С., Майоров В. В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
14. Колесов А. Ю. Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 59–65.

15. Колесов А. Ю. Параметрические колебания решений телеграфного уравнения с умеренно малой диффузией // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 6. С. 79–86.
16. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Существование и устойчивость быстро осциллирующих циклов у нелинейного телеграфного уравнения // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1287–1300.
17. Колесов Ю. С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
18. Камбулов В. Ф., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Бифуркация пространственно неоднородных циклов у нелинейного волнового уравнения с малой диффузией // Труды ММО. 1998. Т. 59. С. 197–220.
19. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
26.03.2001