Общероссийский математический портал

О. С. Якимова, Правильные изометрии слабо симметрических пространств, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 1, 143–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm624>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 12:32:54

УДК 512.81

О. С. Якимова

Правильные изометрии слабо симметрических пространств

В работе введено понятие *правильного* диффеоморфизма риманова многообразия. Такие диффеоморфизмы определяют на многообразии слабо симметрическую структуру. Для слабо симметрических римановых многообразий, являющихся однородными пространствами полупростых групп Ли, получена полная классификация правильных диффеоморфизмов (изометрий).

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение

Пусть G – вещественная группа Ли, K – ее компактная подгруппа, причем однородное пространство $M = G/K$ связно. Будем вначале предполагать, что действие $G : M$ эффективно, т.е. группа K не содержит нетривиальных нормальных подгрупп группы G . Тогда группу G можно рассматривать как подгруппу группы $\text{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия M . Пусть s – диффеоморфизм многообразия M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Однородное пространство M называется *слабо симметрическим относительно s* , если выполнены следующие условия:

$$sGs^{-1} = G, \quad (1)$$

$$\forall x, y \in M \quad \exists g \in G : gx = sy, \quad gy = sx. \quad (2)$$

Однородное пространство M называется *слабо симметрическим*, если оно слабо симметрично относительно некоторого диффеоморфизма s .

Группу $\langle G, s \rangle \subset \text{Diff}(M)$, порожденную группой G и диффеоморфизмом s , обозначим через $\hat{G}$.

Понятие слабо симметрического пространства впервые появилось в работе Сельберга [1]. Там также требовалось выполнение условия $s^2 \in G$. Для большей общности пока от него откажемся. Отметим, что доказательства всех основных результатов работ [2] и [3] не используют этого условия. Как будет доказано в дальнейшем, в случае полупростой группы G данное определение эквивалентно определению Сельберга.

На слабо симметрическом пространстве M можно ввести G -инвариантную риманову метрику, которая автоматически будет $\hat{G}$ -инвариантной; поэтому к нему можно применять результаты работы [3].

Работа выполнена при поддержке CRDF (грант № RM1-2088).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Диффеоморфизм s многообразия M называется *правильным*, если он удовлетворяет условиям (1) и (2).

Цель настоящей работы – описать все правильные диффеоморфизмы (изометрии) слабо симметрических однородных пространств полупростых групп Ли.

Если правильный диффеоморфизм умножить слева или справа на элемент группы G , то он останется правильным. Поэтому задача сводится к описанию смежных классов в $\text{Diff}(M)/G$, состоящих из правильных диффеоморфизмов. Такие классы будем называть *правильными*. В каждом классе есть элементы, оставляющие на месте точку eK . Если $s(eK) = eK$, то $s(gK) = \sigma(g)K$, где $\sigma \in \text{Aut } G$, $\sigma(g) = sgs^{-1}$. Для автоморфизма σ выполнено следующее условие:

$$(i) \quad \sigma(K) = K.$$

Множество автоморфизмов (внутренних автоморфизмов) группы G , удовлетворяющих условию (i), обозначим через $\text{Aut}(G, K)$ ($\text{Int}(G, K)$).

Любому автоморфизму σ группы G , удовлетворяющему условию (i), соответствует диффеоморфизм s многообразия M , определяемый по формуле

$$s(gK) = \sigma(g)K.$$

Обозначим сопряжение элементом g ($g \in G$) в группе G через $a(g)$. Автоморфизмам σ и τ группы G , удовлетворяющим условию (i), соответствуют лежащие в одном смежном классе диффеоморфизмы многообразия M тогда и только тогда, когда $\sigma = a(k)\tau$, $k \in K$.

Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ – касательные алгебры групп G и K соответственно. Касательное пространство $T_{eK}M$ канонически отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Группа $\text{Aut}(G, K)$ естественным образом действует на $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$. Если $\sigma \in \text{Aut}(G, K)$ и $\eta \in \mathfrak{g}$, то $\sigma(\eta + \mathfrak{k}) := d\sigma(\eta) + \mathfrak{k}$.

В работе [3] доказывается, что для элементов группы $\text{Aut}(G, K)$ условие (2) равносильно следующему:

$$(ii) \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \quad \exists k \in K : (\text{Ad } k)\xi = -\sigma(\xi).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Автоморфизм σ группы G называется *правильным автоморфизмом пары* (G, K) , если он удовлетворяет условиям (i), (ii).

Иногда в тех случаях, когда понятно, о какой компактной подгруппе идет речь, мы будем называть правильные автоморфизмы пары (G, K) правильными автоморфизмами группы G . Описание правильных классов в $\text{Diff}(M)/G$ равносильно описанию правильных классов в $\text{Aut}(G, K)/a(K)$.

Орбиты группы K в векторном пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ разделяются полиномиальными инвариантами (см. [4]). Поэтому условие (ii) равносильно следующему:

$$(ii') \quad \text{если } f \in \mathbb{R}[\mathfrak{g}/\mathfrak{k}]^K \text{ – однородный } K\text{-инвариантный многочлен, то } \sigma(f) = (-1)^{\deg f} f.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [5; лемма 1]. Пусть K^0 – связная компонента группы K , G^0 – связная компонента группы G , σ – правильный автоморфизм пары (G, K) . Тогда найдется такой элемент $k \in K$, что $a(k)\sigma$ – правильный автоморфизм пары (G^0, K^0) .

Начиная с этого момента, мы будем рассматривать только однородные пространства связных полупростых групп, причем будем предполагать, что подгруппа K связна.

Предположим теперь, что действие $G : (G/K)$ не обязательно эффективно, но локально эффективно, т.е. ядро неэффективности N дискретно. Тогда $N =$

$Z(G) \cap K$, где $Z(G)$ – центр группы G . Определение 2 переносится без изменений на этот более общий случай. Заметим, что если $\sigma \in \text{Aut}(G, K)$, то

$$\sigma(N) = \sigma(Z(G) \cap K) = \sigma(Z(G)) \cap \sigma(K) = Z(G) \cap K = N.$$

Так как группа N действует на векторном пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ тривиально, то любому правильному автоморфизму пары (G, K) соответствует правильный автоморфизм пары $(G/N, K/N)$ и, следовательно, правильный диффеоморфизм многообразия $M = G/K = (G/N)/(K/N)$. Пусть $\tilde{G}$ – односвязная накрывающая группы G . Группы $\text{Aut } G$ и $\text{Aut}(G/N)$ можно рассматривать как подгруппы группы $\text{Aut } \tilde{G}$. Если в этой группе $\text{Aut } G = \text{Aut}(G/N)$, то множества правильных автоморфизмов пар (G, K) и $(G/N, K/N)$ совпадают.

Пусть $\tilde{K}$ – связная подгруппа группы $\tilde{G}$ с касательной алгеброй $\mathfrak{k}$. Тогда любой правильный автоморфизм пары (G, K) поднимается до правильного автоморфизма пары $(\tilde{G}, \tilde{K})$, а если $\text{Aut } G = \text{Aut } \tilde{G}$ ($= \text{Aut } \mathfrak{g}$), то множества правильных автоморфизмов этих пар совпадают. Действительно, группа G является фактором группы $\tilde{G}$ по некоторой дискретной центральной подгруппе Z и $K = \tilde{K}/(\tilde{K} \cap Z)$. Группы K и $\tilde{K}$ действуют на $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ так же, как группа $\tilde{K}/(\tilde{K} \cap Z(\tilde{G}))$. С другой стороны, если σ является автоморфизмом группы G , то $\sigma(K) = K$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$.

Из всех групп G с данной касательной алгеброй мы будем рассматривать только ту, которая является вещественной формой односвязной комплексной группы Ли. Для такой группы G группы $\text{Aut } G$ и $\text{Aut } \mathfrak{g}$ совпадают.

Существует теория, позволяющая перейти к комплексным слабо симметрическим пространствам и их правильным автоморфизмам (см. определение 4). Задача будет сначала решена для комплексных пар. Множество правильных автоморфизмов пары $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ является объединением некоторого количества связных компонент группы $\text{Aut}(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$. А правильными автоморфизмами пары (G, K) будут те и только те правильные автоморфизмы пары $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$, которые сохраняют группу G .

§ 2. Действие группы $N(K)$ на многообразии M

Группа $N(K)$ (нормализатор подгруппы K в группе G) действует на пространстве G/K умножениями справа. Ядро неэффективности этого действия есть группа K . Это действие перестановочно с действием группы G . Обозначим диффеоморфизм многообразия M , соответствующий элементу $n \in N(K)$, через Υ_n , т.е.

$$\Upsilon_n(gK) = gKn^{-1} = gn^{-1}K.$$

ЛЕММА 1. Пусть s – правильный диффеоморфизм многообразия M , $n \in N(K)$. Тогда $s\Upsilon_n s^{-1} = \Upsilon_n^{-1}$ и диффеоморфизм $s\Upsilon_n$ тоже правильный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точки x и $y = \Upsilon_n x$ многообразия M . Найдется такой элемент $g \in G$, что

$$gx = sy, \quad gy = sx.$$

Тогда $sx = g\Upsilon_n x = \Upsilon_n(gx) = \Upsilon_n s\Upsilon_n x$. Поскольку это верно для любой точки $x \in M$, то $\Upsilon_n s\Upsilon_n = s$.

Пусть x, y – произвольные точки многообразия M . По определению 1 найдется такой элемент $g \in G$, что

$$gx = s(\Upsilon_n y), \quad g(\Upsilon_n y) = sx.$$

Тогда

$$s\Upsilon_n x = \Upsilon_n^{-1}sx = \Upsilon_n^{-1}(g\Upsilon_n y) = gy, \quad s\Upsilon_n y = gx.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть σ – правильный автоморфизм пары (G, H) и $n \in N(K)$. Тогда $\sigma(n) \equiv n^{-1} \pmod{K}$ и автоморфизм $a(n)\sigma$ тоже правильный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим соответствующий диффеоморфизм s многообразия M . Имеем

$$eK = s(eK) = \Upsilon_n s \Upsilon_n(eK) = \Upsilon_n(\sigma(n^{-1})K) = \sigma(n^{-1})n^{-1}K,$$

откуда $\sigma(n)n \in K$. Диффеоморфизм $ns\Upsilon_n^{-1} = \Upsilon_n ns$ является правильным и оставляет точку eK на месте. Ему соответствует автоморфизм группы G , равный $a(n)\sigma$.

Правильные автоморфизмы σ и $a(n)\sigma$ будем называть *эквивалентными*.

СЛЕДСТВИЕ 2. Группа $N(K)/K$ абелева, и орбиты групп K и $N(K)$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что инверсия является автоморфизмом группы $N(K)/K$. Следовательно, эта группа абелева.

Пусть $n \in N(K)$ и σ – правильный автоморфизм группы G . Тогда для $\xi \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ имеем

$$\begin{aligned} (\text{Ad } n)\xi &= (\text{Ad } n)\sigma(\sigma^{-1}(\xi)) = -(\text{Ad } k_1)\sigma^{-1}(\xi) = -(\text{Ad } k_1)(-(\text{Ad } k_2)\xi) \\ &= (\text{Ad}(k_1 k_2))\xi \quad (k_1, k_2 \in K). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Группа $N(K)$ действует тривиально на алгебре $\mathbb{R}[\mathfrak{g}/\mathfrak{k}]^K$.

§3. Комплексные слабо симметрические пространства

Сформулируем несколько утверждений работы [2] и их следствий, позволяющих перейти к однородным пространствам комплексных групп Ли.

Пусть G – полупростая комплексная алгебраическая группа, X – неприводимое аффинное алгебраическое многообразие. Пусть группа G действует транзитивно и эффективно на X , и пусть s – автоморфизм алгебраического многообразия X , нормализующий группу G . Определим действие группы $\hat{G} = \langle G, s \rangle$ на многообразии $X \times X$ следующим образом:

$$s(x, y) = (sy, sx), \tag{3}$$

$$g(x, y) = (gx, gy). \tag{4}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Однородное пространство X называется *слабо симметрическим относительно s* , если автоморфизм s действует тривиально на алгебре $\mathbb{C}[X \times X]^G$. Однородное пространство X называется *слабо симметрическим*, если оно слабо симметрично относительно некоторого автоморфизма s алгебраического многообразия X . Этот автоморфизм s будем называть *правильным* автоморфизмом алгебраического многообразия X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Однородное пространство G/H (подгруппа H , пара (G, H)) называется *сферическим* (*сферической*), если в G/H есть открытая орбита борелевской подгруппы группы G .

Напомним, что комплексная (или вещественная) линейная группа Ли, имеющая конечное число связных компонент, называется *редуктивной*, если она вполне приводима. В частности, любая полупростая группа редуктивна.

Пусть G и $H \subset G$ – связные редуктивные алгебраические группы, K – компактная вещественная форма группы H , G_0 – связная компонента некоторой вещественной формы группы G , содержащая K , $M = G_0/K$, $X = G/H$.

ЛЕММА 2. Пусть N – ядро неэффективности действия $G : X$, а N_0 – ядро неэффективности действия $G_0 : M$. Тогда, если одна из групп N , N_0 дискретна, то $N = N_0$. В частности, действие $G : X$ эффективно тогда и только тогда, когда эффективно действие $G_0 : M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если одна из групп N , N_0 дискретна, то они обе дискретны и, следовательно, являются подгруппами центров групп G и G_0 . Более точно,

$$N = Z(G) \cap H = Z(G) \cap Z(H), \quad N_0 = Z(G_0) \cap K = Z(G_0) \cap Z(K).$$

Как известно, $Z(K) = Z(H)$, а $Z(G_0) = Z(G) \cap G_0$. Поэтому

$$N_0 = Z(G) \cap Z(K) = Z(G) \cap Z(H) = N.$$

Инволютивный автоморфизм связной редуктивной комплексной алгебраической группы G называется *инволюцией Вейля*, если он действует как инверсия на некотором максимальном торе этой группы. Известно, что инволюции Вейля существуют и все они сопряжены при помощи внутренних автоморфизмов.

ТЕОРЕМА 1 [2; теоремы 2.2, 3.3, 4.2]. Пусть действие $G : X$ эффективно. Тогда

1) если s – такой автоморфизм алгебраического многообразия X , что $sHs^{-1} = H$ и $sM = M$, то слабая симметричность однородного пространства M относительно s равносильна слабой симметричности однородного пространства X относительно s ;

2) однородное пространство X слабо симметрично тогда и только тогда, когда оно сферично. Более точно, в этом случае оно слабо симметрично относительно следующего автоморфизма t :

$$t(gH) = \theta(g)H,$$

где θ – инволюция Вейля группы G , ограничение которой на подгруппу H является инволюцией Вейля группы H . При этом инволюцию θ можно выбрать так, чтобы она сохраняла группу G_0 . (В дальнейшем эту инволюцию Вейля группы G всегда будем обозначать символом θ .)

Рассматриваемые нами автоморфизмы алгебраического многообразия X определяют автоморфизмы группы G , а именно, автоморфизму $s \in \text{Aut } X$ соответствует автоморфизм $g \mapsto \sigma(g) = sgs^{-1}$. И наоборот, каждому элементу группы $\text{Aut}(G, H)$ можно сопоставить автоморфизм алгебраического многообразия G/H . Определим множество правильных автоморфизмов пары (G, H) аналогично вещественному случаю. Как и в вещественном случае, мы будем предполагать, что ядро неэффективности действия $G : X$ дискретно.

Условия (ii) и (ii') в комплексном случае выглядят так:

- (ii)_С если $\xi \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и $H\xi = \overline{H}\xi$, то существует такой элемент $h \in H$, что $(\text{Ad } h)\xi = -\sigma(\xi)$;
(ii')_С если $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]^H$ — однородный H -инвариантный многочлен, то $\sigma(f) = (-1)^{\deg f} f$.

Пусть R — неприводимое представление группы G , $\sigma \in \text{Aut } G$. Обозначим через $R^\sigma = R \circ \sigma$ подкрученное на σ представление R и через R^* — представление, двойственное к R . Пусть группа G действует на аффинном алгебраическом многообразии X . Тогда как G -модуль алгебра $\mathbb{C}[X]$ имеет следующий вид:

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_R (V(R) \otimes U(R)),$$

где R пробегает все неприводимые представления G , G действует на $V(R)$ при помощи R , а на $U(R)$ тривиально.

Хорошо известно, что если X — сферическое однородное пространство группы G , то $\dim U(R) \leq 1$. Множество тех неприводимых представлений, для которых $U(R) = 1$, обозначим через $\mathfrak{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $X = G/H$ — сферическое однородное пространство группы G , $\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}} V(R)$ — разложение $\mathbb{C}[X]$ в прямую сумму неприводимых представлений группы G и σ — правильный автоморфизм пары (G, H) . Тогда выполнено условие

- (iii) $R^\sigma = R^*$ для любого $R \in \mathfrak{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s — автоморфизм алгебраического многообразия X , соответствующий σ . По определению правильного автоморфизма пары многообразие X слабо симметрично относительно s . Рассмотрим действие s на алгебре

$$\mathbb{C}[X \times X] = \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X] = \bigoplus_{R, S \in \mathfrak{R}} (V(R) \otimes V(S)).$$

Как известно, в каждом слагаемом вида $V(R) \otimes V(R^*)$ существует ненулевой G -инвариант. Поэтому имеем:

$$\forall R \in \mathfrak{R} \quad V(R) \otimes V(R^*) = s(V(R) \otimes V(R^*)) = V((R^*)^\sigma) \otimes V(R^\sigma).$$

В частности, $V(R^\sigma) = V(R^*)$.

Пусть слабо симметрическое пространство $M = G_0/K$ является вещественной формой сферического пространства $X = G/H$ (в смысле условия теоремы 1), причем группа G односвязна. Пусть σ — правильный автоморфизм группы G_0 . Он продолжается до автоморфизма группы G , сохраняющего подгруппу H , и, следовательно, определяет автоморфизм однородного пространства X . Таким образом (по теореме 1), существует биекция между множеством правильных автоморфизмов группы G_0 и множеством правильных автоморфизмов группы G , удовлетворяющих условию

- (iv) $\sigma(G_0) = G_0$.

Если условие (iv) выполнено, то $\sigma(K) = K$ тогда и только тогда, когда $\sigma(H) = H$.

Действие $N_{G_0}(K) : \mathfrak{g}_0/\mathfrak{k}$ является вещественной формой действия $N(H) : \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Поэтому, как и в вещественном случае, инварианты групп $N(H)$ и H в пространстве $\mathbb{C}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$ совпадают. В частности, если правильный автоморфизм пары (G, H) умножить на $a(n)$, где $n \in N(H)$, то он останется правильным. Правильные автоморфизмы σ и $a(n)\sigma$ ($n \in N(H)$) будем называть *эквивалентными*.

§ 4. Правильные автоморфизмы комплексных сферических пар

Пусть (G, H) – сферическая пара (G и H – связные комплексные алгебраические группы), причем группа G односвязна и полупроста. В данном параграфе описаны правильные автоморфизмы пары (G, H) . В каждой связной компоненте группы $\text{Aut } G = \text{Aut } \mathfrak{g}$ будет указан один правильный автоморфизм, если, конечно, он там есть. Тем самым будут перечислены все правильные автоморфизмы с точностью до эквивалентности.

Перед тем как перейти непосредственно к классификации, докажем утверждение, дающее полное описание всех правильных автоморфизмов.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (G, H) – локально эффективная сферическая пара, группа G полупроста, H редуктивна. Пусть $\sigma \in \text{Aut}(G, H)$ удовлетворяет условию (iii). Тогда σ – правильный автоморфизм пары (G, H) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что σ эквивалентен некоторому правильному автоморфизму. Множество $\sigma \in \text{Int}(G, H)$ является объединением некоторого количества связных компонент алгебраической группы $\text{Aut}(G, H)$. Следовательно, в нем есть элемент конечного порядка. Можно считать, что сам σ имеет конечный порядок. Будем также считать, что действие $G : (G/H)$ эффективно, т.е. $G \subset \text{Aut } X$.

Аutomорфизм σ индуцирует автоморфизм многообразия X : $s(gH) = \sigma(g)H$. Легко видеть, что автоморфизм s тоже имеет конечный порядок. Следовательно, группа $\hat{G} = \langle G, s \rangle \subset \text{Aut } X$ (подгруппа, порожденная группой G и автоморфизмом s) редуктивна. Многообразие X является сферическим однородным пространством группы $\hat{G}$. Более точно, $X = \hat{G}/\hat{H}$, где $\hat{H} = \langle H, s \rangle$.

Пусть $\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}} V(R)$ – разложение $\mathbb{C}[X]$ в прямую сумму неприводимых представлений группы G . Из условия (iii) следует, что $s(V(R)) = V(R^*)$. Теперь разложим $\mathbb{C}[X]$ в сумму неприводимых представлений группы $\hat{G}$:

$$\mathbb{C}[X] = \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}, R=R^*} V(R) \oplus \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}, R \neq R^*} (V(R) \oplus V(R^*)).$$

Обозначим слагаемые $V(R) \oplus V(R^*)$ из второй суммы через $W(R)$. (На самом деле, во второй части суммирование производится по неупорядоченным парам $\{R, R^*\}$, но чтобы не вводить слишком громоздких обозначений, мы допускаем некоторую формальную неточность.)

Представление группы $\hat{G}$ в каждом из пространств $V(R)$ и $W(R)$ является самосопряженным представлением группы $\hat{G}$. Если бы, например, представление $\hat{G} : W(R)$ не было самосопряженным, то представление $\hat{G} : W(R)^*$ тоже входило бы в $\mathbb{C}[X]$. Но представления группы G в $W(R)$ и $W(R)^*$ изоморфны. Это противоречит сферичности пространства G/H .

Покажем, что эти представления ортогональны. Если $\hat{G} : U$ – симплектическое неприводимое представление группы $\hat{G}$, то на подпространстве $U^{\hat{H}}$ тоже существует невырожденная кососимметричная форма (ограничение аналогичной формы со всего пространства U). Это означает, что $\dim U^{\hat{H}}$ – четное число и, следовательно, такое представление не может входить в $\mathbb{C}[X]$.

Рассмотрим действие группы $\hat{G} : X \times X$, определенное формулами (3) и (4). Нужно доказать, что $\mathbb{C}[X \times X]^G = \mathbb{C}[X \times X]^{\hat{G}}$. Напомним, что

$$\mathbb{C}[X \times X]^G = \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}, R=R^*} S^2 V(R)^G \oplus \bigoplus_{R \in \mathfrak{R}, R \neq R^*} (S^2 W(R)^G \oplus \Lambda^2 W(R)^G),$$

причем $\dim S^2V(R)^G = \dim S^2W(R)^G = \dim \Lambda^2W(R)^G = 1$.

Как мы уже знаем, в пространствах $S^2V(R)$ и $S^2W(R)$ существуют ненулевые $\widehat{G}$ -инварианты, т.е. $\dim S^2V(R)^{\widehat{G}} = \dim S^2W(R)^{\widehat{G}} = 1$. А поскольку и $\dim S^2V(R)^G = \dim S^2W(R)^G = 1$, эти пространства совпадают: $S^2V(R)^{\widehat{G}} = S^2V(R)^G$, $S^2W(R)^{\widehat{G}} = S^2W(R)^G$. Так как перестановка аргументов $(x, y) \rightarrow (y, x)$ действует на пространствах $S^2V(R)$ и $S^2W(R)$ тривиально, доказано, что автоморфизм s действует тривиально на алгебре $\bigoplus S^2V(R)^G \oplus \bigoplus S^2W(R)^G$.

Посмотрим, как s действует на оставшихся G -инвариантах. Пусть $\omega \in \Lambda^2W(R)^G$.

Аutomорфизм s^2 сохраняет каждое из представлений $V(R)$. Рассмотрим группу $\langle G, s^2 \rangle \subset \widehat{G}$. Как и группа $\widehat{G}$ она редуктивна и, поскольку имеет два линейно независимых инвариантных вектора в пространстве $W(R) \otimes W(R)$, сохраняет форму ω . Следовательно, $s\omega = \pm\omega$. Предположим, что $s\omega = -\omega$. Тогда форма ω инвариантна относительно диагонального действия элемента s на многообразии $X \times X$ ($s(x, y) = (sx, sy)$). Это означало бы, что $\dim(W(R) \otimes W(R))^G = 2$ для диагонального действия группы $\widehat{G}$ на $X \times X$. Но это не так. На самом деле, как мы видели, данная размерность равна 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество всех правильных автоморфизмов пары (G, H) совпадает с объединением тех связных компонент группы $\text{Aut}(G, H)$, для которых выполнено условие (iii).

СЛЕДСТВИЕ 2. Все замкнутые H -орбиты в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ симметричны относительно нуля тогда и только тогда, когда все неприводимые представления, входящие в разложение $\mathbb{C}[G/H]$, самосопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения равносильны тому, что тождественное преобразование является правильным автоморфизмом пары (G, H) .

В каждом конкретном случае для нахождения всех правильных автоморфизмов было бы достаточно найти группу $\text{Aut}(G, H)$ и ранговую полугруппу (множество весов в $\mathbb{C}[X]^{(B)}$) или даже скорее ранговую группу $\Gamma(X)$ (множество весов в $\mathbb{C}(X)^{(B)}$). (Здесь B – борелевская подгруппа группы G .)

Для решения последней задачи можно воспользоваться, например, методом Д. И. Панюшева, изложенным в статье [6]. Пусть $T \subset B$ – максимальный тор, θ – инволюция Вейля группы G , действующая на нем инверсией. Подгруппу H можно так заменить на сопряженную, чтобы были выполнены все следующие условия:

- а) группы $B \cap H$ и $B \cap \theta(H)$ одновременно имеют минимально возможные размерности;
- б) они обе нормализуются тором T ;
- с) $B \cap H$ – борелевская подгруппа редуктивной группы $H \cap \theta(H)$.

Если H удовлетворяет условиям а)–с), то $H_* = H \cap \theta(H)$ – стабилизатор общего положения действия $H: \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, а $\Gamma(G/H)$ совпадает с аннулятором группы $H_* \cap T$.

Заметим, что в случае простой группы G ранговые полугруппы уже известны и приведены в работе [7].

Но, оказывается, во всех остальных случаях существуют более простые способы нахождения правильных автоморфизмов.

Теперь перейдем к разбору конкретных пар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Сферическая пара (G, H) называется *неразложимой*, если она не представима в виде $(G = G^1 \times G^2, H = H^1 \times H^2)$, где пары (G^1, H^1) и (G^2, H^2) сферические.

Неразложимые сферические пары классифицированы в работах [7]–[10].

ЛЕММА 3. Пусть $G = G^1 \times \cdots \times G^n$, $H = H^1 \times \cdots \times H^n$, где пара (G^i, H^i) неразложима для любого i , и σ – правильный автоморфизм пары (G, H) . Тогда $\sigma(G^i) = G^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если σ переводит простой множитель G_1^i группы G^i в простой множитель G_1^j группы G^j ($i \neq j$), то σ переводит группу H^i в группу H^j (иначе $\sigma(H) \neq H$) и G^i в G^j . В разложении $\mathbb{C}[X]$ на неприводимые представления группы G найдется представление, на котором группы G^k при $k \neq i$ действуют тривиально. Обозначим его через R . Тогда на пространстве $V(R^*)$ группа G^j действует тривиально, а на $V(R^\sigma)$ нет.

ЛЕММА 4. Пусть G^i – простая нормальная подгруппа группы G , H^i – проекция на нее группы H , σ – правильный автоморфизм. Если $H^i \neq G^i$, то $\sigma(G^i) = G^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует неприводимое представление R группы G^i , для которого $V(R)^{H^i} \neq 0$. Остальная часть доказательства аналогична доказательству предыдущей леммы.

Также отметим, что в условиях этих лемм ограничение правильного автоморфизма группы G на группу G^i будет правильным автоморфизмом для сферической пары (G^i, H^i) .

Из классификации, в частности, следует, что для неразложимой сферической пары (G, H) группа H^i может совпадать с группой G^i , только если (G, H) является одной из пар:

- 1) симметрическая пара $(H \times H, H)$;
- 2) $(\mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_2, \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2)$;
- 3) $(\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2, \mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_2)$.

Но нетрудно убедиться в том, что в последних двух случаях существуют неприводимые представления группы G , содержащие ненулевые H -инвариантные векторы, для которых условие (iii) не выполнено, если автоморфизм σ не сохраняет простые компоненты. Укажем старшие веса этих представлений. В случае 2) это $\pi_1(1) \cdot \pi_1(2)$; а в случае 3) это $\pi_1(1) \cdot \pi_1(2)$ и $\pi_1(1) \cdot \pi_1(3)$. (Цифра в скобках соответствует номеру простой компоненты, а π_i – фундаментальные веса соответствующих групп. Подробнее по поводу этих обозначений см. [7], [4].)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $(G = G^1 \times G^2, H = H^1 \times H^2)$ – разложимая сферическая пара, σ^1 и σ^2 – автоморфизмы групп G^1 и G^2 соответственно. Автоморфизм $\sigma = \sigma^1 \times \sigma^2$ правильный тогда и только тогда, когда σ^1 и σ^2 правильные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^1/\mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{g}^2/\mathfrak{h}^2$, причем группа G^i действует на алгебре $\mathfrak{g}^j$ при $i \neq j$ тривиально. Поэтому условие (ii)_C выполнено для автоморфизма σ тогда и только тогда, когда оно выполнено для автоморфизмов σ^1 и σ^2 .

Теперь укажем правильные автоморфизмы неразложимых сферических пар.

Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ – касательные алгебры групп G и H соответственно. На алгебре $\mathfrak{g}$ существует G -инвариантное скалярное произведение. Пространство $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ будем отождествлять с ортогональным дополнением $\mathfrak{h}^\perp$ к подалгебре $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$.

Отметим, что для симметрической пары инволюция, определяющая симметрическую подгруппу, всегда будет правильным автоморфизмом. Обозначим ее символом φ , инволюцию Вейля группы G (из теоремы 1) – символом θ , тождественный автоморфизм – символом id .

Для пар с простой группой G в статье [7] приведено разложение $\mathbb{C}[X]$ в сумму неприводимых представлений группы G . Это сразу позволяет сказать, что в случае простой группы G почти все автоморфизмы, удовлетворяющие условию (iii), эквивалентны инволюции Вейля. Исключения будут перечислены в теореме 3.

Для сферических пар с непустой группой G придется разбирать каждую пару отдельно, поэтому приведем здесь их классификацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Сферическая пара (G, H) называется *главной*, если $Z(H)^0 = Z = (G^1 \cap Z) \times \cdots \times (G^m \cap Z)$, где G^i — простые множители группы G .

По поводу строения неглавных пар см. [10].

В таблице 1 перечислены все неразложимые главные несимметрические сферические пары с полупростой, но не простой, группой G с точностью до локального изоморфизма.

ТАБЛИЦА 1

	G	H	вложение H в G
1	$\mathrm{Sp}_{2n+4} \times \mathrm{Sp}_4$	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_4$	$(u, v) \rightarrow (u \oplus v, v)$
2	$\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_{n+1}$	$\mathrm{SL}_n \times \mathbb{C}^* \ (n > 1)$	$(u, \lambda) \rightarrow (u, \lambda u \oplus \lambda^{-n})$
3	$\mathrm{SO}_{n+1} \times \mathrm{SO}_n$	$\mathrm{SO}_n \ (n > 4)$	$u \rightarrow (u, u)$
4	$\mathrm{SL}_{n+2} \times \mathrm{Sp}_{2m}$	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_n \times \mathrm{Sp}_{2m-2} \times \mathbb{C}^*$	$(u, v, w, \lambda) \rightarrow (\lambda^n u \oplus \lambda^{-2} v, u \oplus w)$
5	$\mathrm{SL}_{n+2} \times \mathrm{Sp}_{2m}$	$\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_n \times \mathrm{Sp}_{2m-2} \ (n > 2)$	$(u, v, w) \rightarrow (u \oplus v, u \oplus w)$
6	$\mathrm{Sp}_{2n+2} \times \mathrm{Sp}_{2m}$	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$	$(u, v, w) \rightarrow (u \oplus v, v \oplus w)$
7	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_{2m}$	$\mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$	$(u, v, w, z) \rightarrow (u \oplus v, v \oplus w, w \oplus z)$
8	$\mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m} \times \mathrm{Sp}_{2k}$	$\mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_{2m-2} \times \mathrm{Sp}_{2k-2} \times \mathrm{Sp}_2$	$(u, v, w, z) \rightarrow (u \oplus z, v \oplus z, w \oplus z)$

Здесь n, m, k — натуральные числа; если индекс в обозначении группы равен нулю, то она считается единичной.

ТЕОРЕМА 3. В таблице 2 перечислены с точностью до локального изоморфизма все неразложимые главные сферические пары, у которых не все правильные автоморфизмы эквивалентны инволюции Вейля. Для каждой пары указаны все ее правильные автоморфизмы с точностью до эквивалентности.

ТАБЛИЦА 2

	(G, H)	$\sigma \in \mathrm{Aut}(G, H)$
1	$(\mathrm{SL}_{p+q}, \mathrm{S}(\mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q)), (E_6, \mathrm{Spin}_{10} \cdot \mathbb{C}^*), (E_6, \mathrm{SL}_6 \times \mathrm{SL}_2), (\mathrm{SO}_{4n+2}, \mathrm{GL}_{2n+1})$	id, θ
2	$(\mathrm{SO}_{2(p+q)}, \mathrm{SO}_{2p} \times \mathrm{SO}_{2q}) \ (p > q)$	$\mathrm{id}, a(I_1)$
3	$(\mathrm{SO}_{2(p+q)}, \mathrm{SO}_{2p+1} \times \mathrm{SO}_{2q-1}) \ (p \geq q)$	id, φ
4	$(H \times H, H)$	θ, φ

Здесь $I_1 = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Символ точка $(\cdot)$ обозначает локально прямое произведение групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала пары с простой группой G . Для не указанных в таблице 2 пар условие (iii) выполнено только в одной компоненте связности группы $\text{Aut } G$, а именно в той, которая содержит инволюцию Вейля. Для указанных в таблице 2 пар условие (iii) выполнено в двух компонентах связности группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$ (см. [7]). Каждый из указанных автоморфизмов лежит в нормализаторе H . По теореме 2 они являются правильными.

Для симметрического однородного пространства $(H \times H)/H$ ненулевые H -инвариантные векторы есть во всех неприводимых представлениях группы $H \times H$ вида $R(\pi_i(1) \cdot \pi_i(2)^*)$, здесь π_i — фундаментальные веса группы H . Пусть автоморфизм Ψ сохраняет диагональ произведения и удовлетворяет условию (iii). Возможны два случая:

- 1) $\Psi(p, q) = (\psi(p), \psi(q))$; тогда $R(\pi_i)^\psi = R(\pi_i)^*$ для любого i и Ψ эквивалентен θ ;
- 2) $\Psi(p, q) = (\psi(q), \psi(p))$; тогда $R(\pi_i)^\psi = R(\pi_i)$ для любого i и Ψ эквивалентен φ .

Для указанных в таблице 1 пар все правильные автоморфизмы эквивалентны инволюции Вейля. В самом деле, как уже известно, нельзя переставлять простые сомножители G^i группы G . Обозначим проекцию группы H на G^i через H^i . Любый правильный автоморфизм имеет вид $\sigma = \sigma^1 \times \sigma^2 \times \sigma^3$ (или $\sigma^1 \times \sigma^2$), где σ^i — правильный автоморфизм пары (G^i, H^i) .

В случаях 1, 6, 7 и 8 у каждой из простых компонент нет внешних автоморфизмов.

В случае 5 на первой компоненте можно взять только инволюцию Вейля, а у второй компоненты нет внешних автоморфизмов.

В случаях 2 и 3 нетрудно найти неприводимые представления группы G , в каждом из которых содержится ненулевой H -инвариантный вектор, позволяющие убедиться в том, что условие (iii) выполнено только в одной компоненте связности группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$.

Случай	Представления
2)	$\pi_1^n(1) \cdot \pi_n^{n+1}(2)$
3) $n = 7$	$\pi_4(1) \cdot \pi_3(2), \pi_3(1) \cdot \pi_3(2)$
$n = 8$	$\pi_4(1) \cdot \pi_3(2), \pi_4(1) \cdot \pi_4(2)$
$n \neq 7, 8$	$\pi_k(1) \cdot \pi_p(2), k = [(n+1)/2], p = [n/2]$

В случае 4 тождественный автоморфизм не является правильным, так как существует такой однородный многочлен $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]^H$, что $\deg f$ — нечетное число. Действительно, рассмотрим H -инвариантное подпространство

$$V \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \quad V = \mathfrak{sl}_2 \oplus L_{2,n} \oplus L_{n,2} \subset \mathfrak{sl}_{n+2}$$

($L_{p,q}$ — пространство комплексных матриц размера $p \times q$). Пусть $\xi = (X, A, B) \in V$ ($X \in \mathfrak{sl}_2, A \in L_{2,n}, B \in L_{n,2}$), $h = (u, v, w, \lambda) \in H$ (порядок элементов u, v, w, λ такой же, как в таблице 1). Тогда $h\xi = (uXu^{-1}, \lambda^{n+2}uAv^{-1}, \lambda^{-n-2}vBu^{-1})$. Пусть вектор η лежит в H -инвариантном дополнении к V . Положим $f(\xi + \eta) = f(\xi) = \text{tr}(XAB)$. Тогда $f \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]^H$, причем $\deg f = 3$.

Теперь опишем с точностью до эквивалентности правильные автоморфизмы неглавных пар.

Пусть (G, H) – неглавная неразложимая сферическая пара. Тогда $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{h} = \bigoplus \mathfrak{h}'_i \oplus \mathfrak{z}$, где $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ – неразложимая главная сферическая пара, причем $\dim \mathfrak{z}_i = 1$ для любого i и $\mathfrak{z} \subset \bigoplus \mathfrak{z}_i$. (Здесь $\mathfrak{h}'_j$ – коммутант алгебры $\mathfrak{h}_i$, а $\mathfrak{z}_i$ – ее центр.)

Уже доказано, что правильные автоморфизмы сохраняют нормальные подгруппы. Для любого i должен найтись элемент $\xi \in \mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{z}^\perp \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ с ненулевой проекцией на подалгебру $\mathfrak{g}_i$ (иначе пара окажется разложимой). Орбита $H\xi = \{\xi\}$ замкнута. Следовательно, чтобы задать правильный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно в каждой связной компоненте группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$ указать правильный автоморфизм σ_i , умножающий вектор из $\mathfrak{z}_i$ на -1 , если, конечно, такой автоморфизм там есть.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *С точностью до эквивалентности все правильные автоморфизмы неглавной неразложимой сферической пары (G, H) имеют следующий вид: $\sigma = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$, где*

$$\sigma_i = \begin{cases} \theta_i, & \text{если } (\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i) \neq (\mathfrak{so}_{2n+2}, \mathfrak{so}_2 \oplus \mathfrak{so}_{2n}), (\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n)); \\ a(I_1) \text{ или } a(I_{1,2n+2}), & \text{если } (\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i) = (\mathfrak{so}_{2n+2}, \mathfrak{so}_2 \oplus \mathfrak{so}_{2n}); \\ a(S_n) \text{ или } \theta_i, & \text{если } (\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i) = (\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n)). \end{cases}$$

Здесь $I_1 = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, $I_{1,2n+2} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1)$, $S_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если пара $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$ не совпадает ни с одной из пар:

$$(\mathfrak{sl}_{p+q}, \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_p \oplus \mathfrak{gl}_q)), (E_6, \mathfrak{so}_{10} \oplus \mathbb{C}), (\mathfrak{so}_{2n+2}, \mathfrak{so}_{2n} \oplus \mathfrak{so}_2),$$

то, как следует из теоремы 3, $\sigma_i = \theta_i$. У каждой из перечисленных пар есть два неэквивалентных правильных автоморфизма. При этом у пар $(E_6, \mathfrak{so}_{10} \oplus \mathbb{C})$ и $(\mathfrak{sl}_{p+q}, \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}_p \oplus \mathfrak{gl}_q))$ при $p \neq q$ нет правильных внутренних автоморфизмов, умножающих вектор из центра алгебры $\mathfrak{h}$ на -1 , а все внешние правильные автоморфизмы эквивалентны инволюции Вейля.

§ 5. Вещественные слабо симметрические пространства

В этом параграфе G – вещественная полупростая группа Ли, $G_{\mathbb{C}}$ – ее комплексификация. Мы будем предполагать, что группа $G_{\mathbb{C}}$ односвязна. Результаты данного параграфа сводят классификацию правильных автоморфизмов группы G к классификации правильных автоморфизмов компактной вещественной формы группы $G_{\mathbb{C}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Слабо симметрическое пространство G/K называется *неразложимым*, если оно не представимо в виде $G^1/K^1 \times G^2/K^2$, где пространства G^1/K^1 и G^2/K^2 слабо симметрические, $G = G^1 \times G^2$, $K = K^1 \times K^2$.

Пусть $(G = G^1 \times G^2, K = K^1 \times K^2)$ – разложимая слабо симметрическая пара. Тогда ее комплексификация $(G_{\mathbb{C}} = G^1_{\mathbb{C}} \times G^2_{\mathbb{C}}, H = H^1 \times H^2)$ – разложимая сферическая пара, для которой все правильные автоморфизмы сохраняют подгруппы $G^1_{\mathbb{C}}$ и $G^2_{\mathbb{C}}$. Следовательно, всякий правильный автоморфизм σ группы G является произведением автоморфизмов σ_1 и σ_2 групп G^1 и G^2 соответственно. Как и в комплексном случае, верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Автоморфизм $\sigma = \sigma^1 \times \sigma^2$ правильный тогда и только тогда, когда σ^1 и σ^2 правильные.*

Следовательно, достаточно изучить правильные диффеоморфизмы неразложимых слабо симметрических пространств. Нам понадобятся некоторые факты, касающиеся классификации этих пространств (см. [10]).

1) Любое неразложимое слабо симметрическое пространство является вещественной формой неразложимого сферического пространства.

2) Все некомпактные неразложимые слабо симметрические пространства получаются следующим образом: $G = (G_{\mathbb{C}}^{\tau\varphi})^0$, $K = H^{\tau}$, где H – редуктивная сферическая подгруппа группы G , φ – инволюция группы $G_{\mathbb{C}}$, ограничение которой на H – тождественный автоморфизм, а τ – компактная вещественная структура, коммутирующая с φ и сохраняющая H .

ЛЕММА 5. *Пусть $\sigma \in \text{Aut } G_{\mathbb{C}}$ – правильный автоморфизм комплексной неразложимой сферической пары $(G_{\mathbb{C}}, H)$. Тогда в описанных выше обозначения $\sigma\varphi = \varphi\sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $\sigma(G^{\varphi}) = G^{\varphi}$. Заметим, что обе эти подгруппы содержат группу H . Для симметрических пар утверждение тавтологическое. Для всех пар с простой группой $G_{\mathbb{C}}$, кроме пары (Spin_8, G_2) , существует единственная подгруппа вида $G_{\mathbb{C}}^{\varphi}$, содержащая H (см. [10]).

Для пары (Spin_8, G_2) автоморфизм σ внутренний. Следовательно, инволюции φ и $\sigma\varphi\sigma^{-1}$ лежат в одной компоненте связности группы $\text{Aut}(\text{Spin}_8)$. Это означает, что эти инволюции оставляют на месте один и тот же центральный элемент группы Spin_8 (отличный от единичного). Предположим, что $\varphi \neq \sigma\varphi\sigma^{-1}$. Тогда и у группы $\text{SO}_8 = \text{Spin}_8/\mathbb{Z}_2$ тоже есть две инволюции, действующие тривиально на сферической подгруппе G_2 . А это не так (см. [10]).

Пусть $G_{\mathbb{C}}$ полупроста и $G_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}^1 \times \cdots \times G_{\mathbb{C}}^n$, где $G_{\mathbb{C}}^i$ – простые группы. Как мы уже знаем, автоморфизм σ не переставляет компоненты несимметрических пар. Если σ и φ сохраняют $G_{\mathbb{C}}^i$, то на ней они коммутируют. Если же инволюция φ переставляет две компоненты $G_{\mathbb{C}}^i$ и $G_{\mathbb{C}}^j$ (это возможно только для пары $(\text{Sp}_2 \times \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_{2k}, \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_{2k-2})$), то диагональ произведения $G_{\mathbb{C}}^i \times G_{\mathbb{C}}^j$ содержится в проекции H на $G_{\mathbb{C}}^i \times G_{\mathbb{C}}^j$, т.е. автоморфизм σ сохраняет множество неподвижных точек инволюции.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть (G_1, K) и (G_2, K) – слабо симметрические пары, соответствующие сферической паре $(G_{\mathbb{C}}, H)$. Тогда множества правильных автоморфизмов групп G_1 и G_2 , рассматриваемые как подмножества группы $\text{Aut}(G_{\mathbb{C}}, H)$, совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 существует биекция между множеством правильных автоморфизмов группы G_i ($i = 1, 2$) и множеством правильных автоморфизмов пары $(G_{\mathbb{C}}, H)$, сохраняющих вещественную форму G_i . Можно считать, что группа G_1 компактна. Тогда если σ – правильный автоморфизм пары $(G_{\mathbb{C}}, H)$, то

$$\sigma(G_2) = G_2 \iff \sigma\tau\varphi = \tau\varphi\sigma \iff \sigma\tau = \tau\sigma \iff \sigma(G_1) = G_1.$$

§ 6. Классификация правильных автоморфизмов в вещественном случае и ее следствие

Пусть σ – правильный автоморфизм пары (G, K) . Автоморфизм $a(g)\sigma$ ($g \in G_{\mathbb{C}}$) является правильным автоморфизмом пары (G, K) тогда и только тогда, когда

$g \in N(K) \cap N(G)$. Если $N(G) \neq G$, то эквивалентные правильные автоморфизмы пары $(G_{\mathbb{C}}, H)$, сохраняющие G , могут быть не эквивалентны как правильные автоморфизмы пары (G, K) . Но для компактной вещественной формы $N(G) = G$; следовательно, правильные автоморфизмы пары (G, K) эквивалентны как автоморфизмы группы $G_{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда они эквивалентны как автоморфизмы группы G .

Предположим теперь, что группа G компактна. Для любого полупростого автоморфизма ψ группы $G_{\mathbb{C}}$ найдется компактная вещественная структура τ , коммутирующая с ψ . Любой правильный автоморфизм группы $G_{\mathbb{C}}$ эквивалентен либо инволюции, либо тождественному автоморфизму. Поэтому можно считать, что указанные в §4 автоморфизмы являются правильными автоморфизмами соответствующих компактных групп. Все правильные автоморфизмы получаются умножением этих автоморфизмов на элементы группы $\text{Int}(G, K)$.

В частности, любой правильный автоморфизм группы G имеет вид: $\sigma = a(n)\delta$, где $n \in N(K)$, а δ — инволютивный правильный автоморфизм. Но тогда

$$\sigma^2 = a(n\delta(n)) = a(n(n^{-1}k)) = a(k), \quad \text{где } k \in K,$$

т.е. диффеоморфизм s^2 , соответствующий автоморфизму σ^2 , действует на многообразии M как k . Следовательно, если рассматривать группу $\hat{G}$ как подгруппу группы $\text{Diff}(M)$, то условие $s^2 \in G$ будет следствием того, что диффеоморфизм s правильный. Таким образом, в случае полупростой группы G данное нами вначале определение слабо симметрического пространства (см. §1) оказывается эквивалентным оригинальному определению Сельберга.

Автор благодарен своему научному руководителю Э.Б. Винбергу за постановку задачи и внимательное отношение к работе на всех ее стадиях, а также Д.А. Тимашёву за ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. *Selberg A.* Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc. 1956. V. 20. P. 47–87.
2. *Akhiezer D. N., Vinberg E. B.* Weakly symmetric spaces and spherical varieties // Transformation Groups. 1999. V. 4. P. 12–46.
3. *Berndt J., Prüfer F., Vanhecke L.* Symmetric-like Riemannian manifolds and geodesic symmetries // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1995. V. 125. P. 265–282.
4. *Винберг Э. Б., Онищук А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
5. *Винберг Э. Б.* Коммутативные однородные пространства и коизотропные действия // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 3–62.
6. *Panyushev D.* Complexity and rank of homogeneous spaces // Geom. Dedicata. 1990. V. 34. P. 249–269.
7. *Krämer M.* Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen // Compositio Math. 1979. V. 38. P. 129–153.
8. *Brion M.* Classification des espaces homogènes sphériques // Compositio Math. 1987. V. 63. P. 189–208.
9. *Микитюк И. В.* Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами // Матем. сб. 1986. Т. 129. С. 514–534.
10. *Якимова О. С.* Слабо симметрические пространства полупростых групп Ли // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2002. №2 (в печати).