Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Анохин, О распознаваемости классов алгебраических систем за полиномиальное время, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 2, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm625>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:21:04

УДК 510.52+510.53+510.67

М. И. Анохин

О распознаваемости классов алгебраических систем за полиномиальное время

Рассматриваются несколько видов распознаваемости классов алгебраических систем за полиномиальное время с использованием оракула, выполняющего сигнатурные операции и предикаты. Изучаются связи между этими видами распознаваемости. Доказано несколько результатов как о распознаваемости, так и о нерасознаваемости за полиномиальное время для некоторых конечно базирuемых многообразий универсальных алгебр.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

1.1. Вычислительная модель. Пусть A – непустая алгебраическая система фиксированной конечной сигнатуры Σ , носитель которой является подмножеством $\{0, 1\}^n$ при некотором $n \geq 1$. Пусть также $\mathcal{A}$ – алгоритм, который может обращаться с корректными запросами к оракулу, выполняющему сигнатурные операции и предикаты на A . На вход алгоритму $\mathcal{A}$ подается некоторая непустая последовательность $s = (s_1, \dots, s_m)$ элементов A (например, s может быть произвольной непустой конечной системой порождающих A). Алгоритмы такого вида мы называем O -алгоритмами (см. п. 3.1). Предполагается также, что алгоритм $\mathcal{A}$ полиномиален, т.е. время его работы на входе s с использованием вышеуказанного оракула не превосходит $c(mn)^d$ для некоторых констант $c > 0$ и $d \geq 0$. В соответствии с классическим тезисом Эдмондса именно полиномиальные алгоритмы принято считать эффективными.

Такая вычислительная модель, по-видимому, была впервые использована для групп в работе Бабаи и Семереди [1] под названием модели групп типа “черного ящика” (black box group model). Аналогичная модель (для циклических групп) была введена Шупом в [2]; алгоритмы в этой модели он называет генерическими (generic). Из леммы 6.1 настоящей работы вытекает, что модель Шупа по существу эквивалентна рассматриваемой нами.

Используемый в настоящей работе подход к вычислительным задачам позволяет отвлечься от особенностей конкретных реализаций алгебраических систем, сосредоточив свое внимание на абстрактных алгебраических свойствах этих систем. Существуют и другие подходы, обладающие этим свойством (см., например, работы В. И. Нечаева [3] и Боне и Лиштона [4]). Все эти подходы аналогичны обычному в алгебре подходу, при котором интересуются лишь алгебраической структурой рассматриваемой алгебраической системы (с точностью до изоморфизма), а не природой элементов ее носителя.

1.2. Неформальная постановка задачи. В настоящей работе мы рассматриваем следующую задачу. Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{U}$ — некоторые фиксированные абстрактные классы алгебраических систем сигнатуры Σ . Предположим, что вышеуказанная алгебраическая система A принадлежит $\mathfrak{U}$. Требуется определить (с помощью вышеуказанного алгоритма $\mathcal{A}$), принадлежит A классу $\mathfrak{C}$ или не принадлежит. При этом нужно дать правильный ответ с вероятностью не менее $2/3$. Последняя константа может быть заменена на любое действительное число q , удовлетворяющее неравенствам $1/2 < q < 1$ (см. п. 3.2). Введем переменную X , которая может принимать произвольные значения из множества букв $\{G, A, R\}$. В случае, когда $X = A$, мы будем подразумевать (иногда не оговаривая этого особо), что все алгебраические системы из $\mathfrak{U}$ являются обобщенными группами (см. п. 2.8). Значение переменной X определяет то, какие последовательности s подаются на вход алгоритму $\mathcal{A}$. При $X = G$ ($X = A$) s есть произвольная непустая конечная система порождающих A (соответственно аддитивной группы A), а при $X = R$ эта последовательность состоит из полиномиального от n числа независимых случайных элементов относительно равномерного распределения на носителе A . Для групп случай $X = G$ (равносильно, $X = A$) рассматривался, в частности, в работах [1], [5] и [6], а случай $X = R$ идейно аналогичен понятию полиномиально вычислимого семейства групп из работы Импальяццо и Наора [7; определение 4.1]. Однако задачи, изучаемые в этих работах, большей частью отличны от вышеуказанной задачи. Отметим, что буквы G, A и R , являющиеся значениями переменной X , происходят от слов Generators, Additive generators и Random elements соответственно. Если существует решающий вышеуказанную задачу (детерминированный) алгоритм $\mathcal{A}$, удовлетворяющий всем сделанным выше предположениям, то мы называем класс $\mathfrak{C}$ (*детерминированно*) X -распознаваемым в классе $\mathfrak{U}$.

Введем также переменную Y , которая может принимать произвольные значения из множества букв $\{G, A\}$. Как и для переменной X , условие $Y = A$ подразумевает (иногда без явного упоминания об этом), что все алгебраические системы из $\mathfrak{U}$ являются обобщенными группами (см. п. 2.8). Мы определяем также сильную Y -распознаваемость (см. определение 3.3), из которой вытекает детерминированная Y -распознаваемость. Это вызвано тем, что многие из используемых в работе методов доказательства положительных результатов позволяют получить более сильные свойства, чем Y -распознаваемость. Термин “распознаваемость” будет обозначать как X -распознаваемость, так и детерминированную X -распознаваемость и сильную Y -распознаваемость. Для краткости мы говорим просто о распознаваемости, подразумевая под этим распознаваемость за полиномиальное время, если не оговорено противное.

Отметим, что в работе Бабаи и др. [5] доказано, что классы всех разрешимых и всех нильпотентных групп G -распознаваемы в классе всех групп. С другой стороны, из рассуждений Бабаи [6; §9] следует, что классы всех циклических и всех простых групп не являются G -распознаваемыми даже в классе элементарных абелевых p -групп, где простое число p не фиксировано, а зависит от группы. Здесь G -распознаваемость можно заменить на X -распознаваемость при произвольном $X \in \{G, A, R\}$ ввиду следствия 4.2. По мнению автора, особый интерес представляет вопрос о распознаваемости в классе $\mathfrak{U}$ для классов, которые являются конечно аксиоматизируемыми в $\mathfrak{U}$. Это объясняется тем, что такие классы в некотором

смысле детерминированно G-распознаваемы и детерминированно R-распознаваемы в $\mathcal{U}$ за экспоненциальное время (см. следствие 3.1). В настоящей работе мы в основном изучаем распознаваемость конечно базлируемых многообразий универсальных алгебр.

1.3. Обзор работы. Параграф 2 содержит основные определения, обозначения и факты, используемые в работе. В §3 приведены точные описания вычислительной модели и постановки задачи (их краткое неформальное описание см. в пп. 1.1 и 1.2). Параграф 4 посвящен исследованию связей между различными видами распознаваемости. В частности, показано, что если $\mathcal{U}$ состоит из обобщенных групп, то A-распознаваемость $\mathcal{C}$ в $\mathcal{U}$ эквивалентна R-распознаваемости $\mathcal{C}$ в $\mathcal{U}$ (см. следствие 4.1). Известные автору связи между различными видами распознаваемости выражены диаграммой (13).

В §5 приведены результаты, утверждающие распознаваемость некоторых конечно базлируемых многообразий универсальных алгебр. Пункты 5.1 и 5.2 содержат утверждения о распознаваемости, которые выводятся из известных результатов с помощью простых рассуждений. В п. 5.3 доказано, что любое конечно базлируемое многообразие мультиколец с нильпотентными аддитивными группами сильно A-распознаваемо в классе всех мультиколец (теорема 5.1). В частности, это дает сильную A-распознаваемость любого конечно базлируемого многообразия линейных алгебр над произвольным ассоциативным коммутативным конечно порожденным кольцом с единицей в классе всех таких алгебр (см. следствие 5.2). Доказательство вышеуказанного результата для многообразий мультиколец основано на применении к мультикольцевым тождествам известной в теории линейных алгебр процедуры линеаризации (см., например, [8; гл. 1, §3, п. 3.1]).

Рассмотрим теперь задачу построения примеров конечно базлируемых многообразий, не являющихся распознаваемыми в классе $\mathcal{U}$. В общем случае эта задача может быть решена легко. Например, нетрудно показать, что многообразия коммутативных группоидов и полугрупп не являются ни G-распознаваемыми, ни R-распознаваемыми в классе всех группоидов. Легко также видеть, что многообразия всех полугрупп левых и правых нулей (т.е. многообразия полугрупп, определенные тождествами $t_1 t_2 = t_1$ и $t_1 t_2 = t_2$ соответственно) сильно G-распознаваемы, но не R-распознаваемы в классе всех полугрупп. В то же время если $\mathcal{U}$ – класс всех групп или класс всех линейных алгебр над каким-либо ассоциативным коммутативным конечно порожденным кольцом с единицей, то автору неизвестны примеры конечно базлируемых подмногообразий $\mathcal{U}$, не являющихся G-распознаваемыми в этом классе. Используя метод из §9 работы [6], можно показать, что квазимногообразие групп, определенное в многообразии $\mathfrak{N}_2$ всех нильпотентных групп класса не более 2 квазитожеством

$$[t_1, t_2] = [t_3, t_4] \ \& \ [t_1, t_3] = 1 \ \& \ [t_2, t_3] = 1 \implies [t_1, t_2] = 1$$

(где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$), не является X-распознаваемым в $\mathfrak{N}_2$ для всех $X \in \{G, A, R\}$ (здесь, как и выше, X-распознаваемость не зависит от значения X ввиду следствия 4.2).

Пусть $\mathfrak{V}$ – многообразие, определенное либо тождеством $t_1^e = 0$ в многообразии всех полугрупп с нулем, либо одним из тождеств $t_1^e t_2 = t_1^e$ или $t_2 t_1^e = t_1^e$ в

многообразии всех полугрупп, где e — произвольное целое число, не меньшее 2. Параграф 7 посвящен доказательству того, что $\mathfrak{V}$ не является ни G-распознаваемым, ни R-распознаваемым в некотором классе полугрупп с нулем. При этом используются понятия и результаты из вспомогательного § 6.

§ 2. Определения, обозначения и необходимые факты

2.1. Множества и функции. Мы будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ для множеств всех целых и всех действительных чисел соответственно. Пусть также $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq k\}$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\mathbb{I}_m = \{1, \dots, m\}$ ($m \in \mathbb{N}_0$), $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ и $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Обозначение $\log$ всегда подразумевает логарифм по основанию 2. Как обычно, $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$ и $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Функцию из $\mathbb{N}_1$ в $\mathbb{R}_+$ вида $n \mapsto cn^d$, где $c \in \mathbb{R}_+$ и $d \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, мы называем *полиномиальной*. Если $c \in \mathbb{N}_1$ и $d \in \mathbb{N}_0$, то полиномиальная функция $n \mapsto cn^d$ называется *целочисленной*. Мы также будем называть *экспоненциальной* функцию из $\mathbb{N}_1$ в $\mathbb{R}_+$ вида $n \mapsto cd^n$, где $c, d \in \mathbb{R}_+$ и $d > 1$.

В настоящей работе буква e не обозначает основание натуральных логарифмов; результат возведения этого основания в x -ю степень будет записываться в виде $\exp x$.

2.2. Последовательности. Пусть A — некоторое множество и $n \in \mathbb{N}_0$. Через A^n мы будем обозначать n -ю декартову степень множества A , т.е. множество всех последовательностей вида $(a_1, \dots, a_n)$, где $a_i \in A$ для всех $i \in \mathbb{I}_n$. В частности, A^0 есть одноэлементное множество, состоящее из пустой последовательности. Положим $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$, $A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A^n$ и $A^{\geq m} = \bigcup_{n=m}^{\infty} A^n$, где $m \in \mathbb{N}_0$. Пусть также $|s|$ и $E(s)$ обозначают соответственно длину и множество всех элементов последовательности $s \in A^*$. Другими словами, если $s = (s_1, \dots, s_n) \in A^*$, то $|s| = n$ и $E(s) = \{s_1, \dots, s_n\}$. Отметим, что вертикальными чертами будут обозначаться также мощность множества и модуль действительного числа, но значение этих символов всегда будет ясно из контекста.

С каждым отображением $\varphi: A \rightarrow B$ можно естественным образом связать отображение из A^* в B^* , переводящее $(a_1, \dots, a_n)$ в $(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$, где $a_i \in A$ для всех $i \in \mathbb{I}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Это отображение мы будем обозначать так же, как и исходное.

2.3. Случайные величины. В настоящей работе мы будем иметь дело только с дискретными случайными величинами, т.е. принимающими значения на конечных или счетных множествах. Случайные величины, как правило, будут обозначаться символами с тильдой. Если не оговорено противное, то вводимые нами случайные величины предполагаются независимыми от всех других.

Пусть $\tilde{a}$ — случайная величина, принимающая значения на некотором (конечном или счетном) множестве A . Тогда для $n \in \mathbb{N}_0$ через $\tilde{a}^{(n)}$ будет обозначаться случайная величина $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$ (со значениями в множестве A^n), где случайные величины $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$ независимы и имеют то же самое распределение, что и $\tilde{a}$. Запись вида $\tilde{b} \in_{\mathcal{U}} B$ означает, что $\tilde{b}$ — случайная величина, распределенная равномерно на непустом конечном множестве B .

Для произвольных случайных величин $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, принимающих значения на одном и том же конечном или счетном множестве A , положим

$$\text{dist}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{1}{2} \sum_{a \in A} |\mathbf{P}(\tilde{u} = a) - \mathbf{P}(\tilde{v} = a)| = \max_{M \subseteq A} |\mathbf{P}(\tilde{u} \in M) - \mathbf{P}(\tilde{v} \in M)|$$

(см. также, например, [9; определение 13.6]). Приведем некоторые свойства функции dist .

ЛЕММА 2.1. Пусть $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ – случайные величины со значениями в некотором конечном или счетном множестве A , а $\tilde{r}$ – случайная величина со значениями в некотором конечном или счетном множестве B . Тогда

- 1) $\text{dist}(\tilde{u}, \tilde{w}) \leq \text{dist}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \text{dist}(\tilde{v}, \tilde{w})$;
- 2) $\text{dist}((\tilde{u}, \tilde{r}), (\tilde{v}, \tilde{r})) = \text{dist}((\tilde{r}, \tilde{u}), (\tilde{r}, \tilde{v})) = \text{dist}(\tilde{u}, \tilde{v})$, если $\tilde{u}$ и $\tilde{r}$ независимы и $\tilde{v}$ и $\tilde{r}$ независимы;
- 3) $\text{dist}(\varphi(\tilde{u}), \varphi(\tilde{v})) \leq \text{dist}(\tilde{u}, \tilde{v})$ для любой функции $\varphi: A \rightarrow B$;
- 4) если S – событие в вероятностном пространстве, на котором определена случайная величина $(\tilde{u}, \tilde{v})$, такое, что $\mathbf{P}(\tilde{u} = a, S) = \mathbf{P}(\tilde{v} = a, S)$ для всех $a \in A$, то $\text{dist}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \mathbf{P}(S')$, где S' – дополнение S в вышеуказанном вероятностном пространстве;
- 5) $\text{dist}(\tilde{u}^{(n)}, \tilde{v}^{(n)}) \leq n \text{dist}(\tilde{u}, \tilde{v})$ для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

Пункты 1)–4) леммы 2.1 проверяются непосредственно, а п. 5) легко доказывается индукцией по n с использованием пп. 1) и 2).

2.4. Алгебраические системы. Фиксируем произвольную сигнатуру Σ , которая может содержать символы как операций (в том числе 0-арных, которые играют роль констант), так и предикатов. Если не оговорено противное, то рассматриваемые алгебраические системы есть системы сигнатуры Σ . Кроме того, все алгебраические системы в настоящей работе предполагаются непустыми. Пусть также Ω (Π) – множество всех символов операций (соответственно предикатов) из Σ . Через $\text{ar } \sigma$, где $\sigma \in \Sigma$, мы будем обозначать арность операции или предиката, соответствующего символу σ .

Следуя традиции, сложившейся в алгебре, алгебраические системы и их носители мы обозначаем одинаково, если это не вызывает недоразумений. Через $\text{Gen } A$, где A – произвольная алгебраическая система, будем обозначаться множество всех последовательностей из A^+ , порождающих систему A .

Предположим, что φ – некоторое инъективное отображение алгебраической системы A на множество $\varphi(A)$. Тогда $\varphi(A)$ может быть единственным образом превращено в алгебраическую систему так, чтобы φ стало изоморфизмом. В этом случае $\varphi(A)$ будет обозначать также эту алгебраическую систему.

Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{M}$ – некоторые классы алгебраических систем. Все классы алгебраических систем в настоящей работе предполагаются абстрактными (т.е. содержащими вместе с каждой алгебраической системой все изоморфные ей системы) и состоящими из систем одной и той же сигнатуры Σ , если не оговорено противное. Для произвольной алгебраической системы A положим

$$\chi(A, \mathfrak{C}) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \in \mathfrak{C}; \\ 0, & \text{если } A \notin \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Напомним, что класс алгебраических систем $\mathfrak{C}$ называется *конечно аксиоматизируемым* в классе алгебраических систем $\mathfrak{U}$, если $\mathfrak{C}$ может быть задан в $\mathfrak{U}$ конечным числом замкнутых формул первого порядка сигнатуры Σ . Многообразие, которое может быть задано в многообразии $\mathfrak{U}$ конечным числом тождеств, называется *конечно базируемым* в $\mathfrak{U}$. Конечная базируемость без указания многообразия, в котором она имеет место, означает конечную базируемость в классе всех алгебраических систем (сигнатуры Σ). Как правило, мы рассматриваем подмногообразия некоторого конечно базируемого многообразия $\mathfrak{U}$ (например, многообразия всех групп, всех полугрупп и т.п.). Очевидно, что для таких многообразий конечная базируемость (в классе всех алгебраических систем) равносильна конечной базируемости в $\mathfrak{U}$.

Как обычно, мы считаем, что сигнатура групп состоит из символов умножения, обращения и единицы. Пусть K – произвольное ассоциативное коммутативное конечно порожденное кольцо с единицей. Тогда сигнатура линейных алгебр над K предполагается состоящей из символов сложения, аддитивного обращения, нуля, умножения и действия элементов из некоторой конечной системы порождающих кольца K . Кроме того, последняя сигнатура может также содержать символ единицы. Таким образом, сигнатура линейных алгебр над K конечна. Кроме того, легко показать (используя теорему Гильберта о базисе), что многообразие всех линейных алгебр над K конечно базируемо (относительно вышеуказанной сигнатуры). Кольца мы рассматриваем как линейные алгебры над кольцом целых чисел.

2.5. Термы. Фиксируем счетное множество $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ предметных переменных. Обозначим через $\text{Tm}_\infty(\Omega)$ множество всех термов сигнатуры Ω от переменных из T . Пусть также $\text{Tm}_m(\Omega)$ – множество всех термов из $\text{Tm}_\infty(\Omega)$, содержащих лишь переменные из $\{t_1, \dots, t_m\}$ ($m \in \mathbb{N}_0$).

С каждым термом $v \in \text{Tm}_\infty(\Omega)$ мы будем связывать его степень $\deg v$, равную числу вхождений в v переменных из T , и множество $\text{nvar } v$ номеров переменных, входящих в v . Эти параметры определяются индукцией по построению терма следующим образом:

$$\begin{aligned} \deg t_n &= 1, & \deg \omega(v_1, \dots, v_{\text{ar } \omega}) &= \sum_{i=1}^{\text{ar } \omega} \deg v_i, \\ \text{nvar } t_n &= \{n\}, & \text{nvar } \omega(v_1, \dots, v_{\text{ar } \omega}) &= \bigcup_{i=1}^{\text{ar } \omega} \text{nvar } v_i, \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{N}_1$, $\omega \in \Omega$, $v_1, \dots, v_{\text{ar } \omega} \in \text{Tm}_\infty(\Omega)$. Индукцией по построению терма v легко показать, что

$$|\text{nvar } v| \leq \deg v \quad (1)$$

для любого $v \in \text{Tm}_\infty(\Omega)$.

2.6. Группы. Пусть G – произвольная группа. Для $a, b, a_1, \dots, a_n \in G$ мы полагаем $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ (в аддитивной записи $[a, b] = -a - b + a + b$) и

$$[a_1, \dots, a_n] = [\dots, [[a_1, a_2], a_3], \dots, a_n].$$

Если $n \in \mathbb{N}_1$, то $G_{(n)}$ обозначает n -й член нижнего центрального ряда группы G , т.е. подгруппу, порожденную системой

$$\{[a_1, \dots, a_n] : a_i \in G, i \in \mathbb{I}_n\}.$$

2.7. Дистрибутивность. Пусть A и B – некоторые группоиды, а φ – отображение из A^n в B , где $n \in \mathbb{N}_0$. Отображение φ называется *дистрибутивным* на A , если

$$\begin{aligned} & \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

для любого $i \in \mathbb{I}_n$ и любых $a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n \in A$.

Сформулируем следующее хорошо известное в теории групп утверждение, которое может быть легко доказано индукцией по n с использованием коммутаторного тождества 33.34 (1) из [10].

ЛЕММА 2.2. Пусть G – произвольная группа и $n \in \mathbb{N}_1$. Тогда отображение

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto [a_1, \dots, a_n] G_{(n+1)} \quad (a_i \in G, i \in \mathbb{I}_n)$$

из G^n в $G_{(n)}/G_{(n+1)}$ дистрибутивно на G .

2.8. Обобщенные группы и мультикольца. Предположим, что фиксированы символы $\mu, \iota, \zeta \in \Omega$ такие, что $\text{ar } \mu = 2$, $\text{ar } \iota = 1$ и $\text{ar } \zeta = 0$. Пусть также $\Theta = \Omega \setminus \{\mu, \iota, \zeta\}$. Назовем алгебраическую систему A *обобщенной группой*, если $(A; \mu, \iota, \zeta)$ является группой.

Пусть A – обобщенная группа. Тогда группу $(A; \mu, \iota, \zeta)$ мы будем называть *аддитивной группой* обобщенной группы A и обозначать через $\text{Add } A$. Если $\Sigma \neq \{\mu, \iota, \zeta\}$, то для этой группы будет использоваться аддитивная запись, т.е. вместо $\mu(a, a')$, $\iota(a)$ и ζ мы будем писать $a + a'$, $-a$ и 0 соответственно. В противном случае речь идет об обычных группах, для которых будет использоваться (и уже использовалась) мультипликативная запись (aa' , a^{-1} и 1 вместо $\mu(a, a')$, $\iota(a)$ и ζ соответственно). Отметим, что группа $\text{Add } A$ не предполагается абелевой, несмотря на свое название.

Подмножество I обобщенной группы A называется *идеалом* в A , если I – нормальная подгруппа группы $\text{Add } A$ и отношение смежности по I является конгруэнцией на $(A; \Theta)$. Легко видеть, что конгруэнции на обобщенной группе A – это отношения смежности (в группе $\text{Add } A$) по всевозможным идеалам в A и только они. Поэтому имеет смысл понятие фактора обобщенной группы A по идеалу I ; как обычно, этот фактор обозначается через A/I .

Для множества $S \subseteq A$ через $\langle\langle S \rangle\rangle_A$ мы будем обозначать идеал в обобщенной группе A , порожденный множеством S . Напомним, что класс универсальных алгебр называется *предмногообразием* (или реплично полным классом), если он замкнут относительно взятия подалгебр и декартовых произведений и содержит одноэлементную алгебру. Если $\Pi = \emptyset$, $\mathfrak{P}$ – предмногообразие обобщенных групп и A – обобщенная группа, то через $\mathfrak{P}(A)$ будет обозначаться $\mathfrak{P}$ -идеал в A , т.е. наименьший элемент множества всех идеалов I в A таких, что $A/I \in \mathfrak{P}$.

Рассмотрим обобщенные группы в случае, когда $\Pi = \emptyset$. Тогда обобщенная группа A называется *мультикольцом*, если операция на A , соответствующая произвольному символу $\theta \in \Theta$ такому, что $\text{ag } \theta \geq 1$, дистрибутивна на $(A; \mu)$. Это определение совпадает с определением мультиоператорного кольца из [11; гл. II, § 1], а термин “мультикольцо” взят из [12; гл. 1, § 2, п. 2.1]. Понятие мультикольца (мультиоператорного кольца) достаточно известно в алгебре (оно является обобщением понятий группы, модуля, кольца и алгебры). Однако определение этого понятия, как правило, предполагает, что Θ не содержит символов 0-арных операций (см., например, [12; гл. 1, § 2, п. 2.1]). Мы допускаем случай, когда Θ содержит такие символы, но не требуем дистрибутивности от операций, соответствующих этим символам (очевидно, что 0-арная операция, дистрибутивная на произвольной группе, равна единице этой группы).

§ 3. Постановка задачи

В этом параграфе мы будем предполагать, что сигнатура Σ конечна. Это предположение позволяет избежать проблем, связанных с использованием элементов Σ алгоритмами.

Все алгоритмы в настоящей работе будут обозначаться рукописными буквами. Рассматриваемые алгоритмы, вообще говоря, являются вероятностными. Это значит, что они могут обращаться к оракулу RB, дающему независимые случайные (относительно равномерного распределения на $\mathbb{B}$) биты. Отметим, что детерминированные алгоритмы (не использующие этот оракул) мы также относим к числу вероятностных.

Функция φ на множестве $\mathbb{N}_1$ называется *полиномиально вычислимой*, если существуют полиномиальная функция ρ и детерминированный алгоритм (не использующий никаких оракулов), который на произвольном входе $n \in \mathbb{N}_1$ вычисляет значение $\varphi(n)$ за время, не превосходящее $\rho(n)$.

3.1. О-алгоритмы. Для алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) обозначим через O_A оракул, который на запрос (σ, a) , где $\sigma \in \Sigma$ и $a \in A^{\text{ag } \sigma}$, возвращает значение $\sigma(a)$ в A . Запрос вышеуказанного вида мы будем называть *корректным*. Назовем алгоритм *О-алгоритмом*, если при вычислении на произвольном входе $s \in A^+$, где A – произвольная алгебраическая система вышеуказанного вида, он имеет доступ к оракулу O_A и делает только корректные запросы к этому оракулу.

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольный О-алгоритм и $n \in \mathbb{N}_1$. Введем следующие обозначения:

- 1) $\text{RT}(\mathcal{A}, n)$ – супремум времени работы $\mathcal{A}$ на входах $s \in A^+$ ($A \subseteq \mathbb{B}^{n'}$ – алгебраическая система, $n' \in \mathbb{N}_1$, $|s|n' = n$) с использованием оракула O_A ;
- 2) $\text{NRB}(\mathcal{A}, n)$ – супремум числа запросов $\mathcal{A}$ к оракулу RB при вычислениях на входах $s \in A^+$ ($A \subseteq \mathbb{B}^{n'}$ – алгебраическая система, $n' \in \mathbb{N}_1$, $|s|n' = n$) с использованием оракула O_A ;
- 3) $\text{NOQ}(\mathcal{A}, n)$ – супремум числа запросов $\mathcal{A}$ к оракулу O_A при вычислениях на входах $s \in A^+$ ($A \subseteq \mathbb{B}^{n'}$ – алгебраическая система, $n' \in \mathbb{N}_1$, $|s|n' = n$) с использованием оракула O_A .

Супремумы здесь берутся по всевозможным алгебраическим системам $A \subseteq \mathbb{B}^{n'}$, последовательностям $s \in A^+$ таким, что $|s|n' = n$, и ответам оракула RB на за-

просы О-алгоритма $\mathcal{A}$. В работе рассматриваются только такие О-алгоритмы $\mathcal{A}$, что для всех $n \in \mathbb{N}_1$ значение $\text{RT}(\mathcal{A}, n)$ конечно. Следовательно, конечными являются значения $\text{NRB}(\mathcal{A}, n)$ и $\text{NOQ}(\mathcal{A}, n)$, так как

$$\text{NRB}(\mathcal{A}, n), \text{NOQ}(\mathcal{A}, n) \leq \text{RT}(\mathcal{A}, n) \quad (2)$$

для любого $n \in \mathbb{N}_1$.

О-алгоритм $\mathcal{A}$ называется *полиномиальным (экспоненциальным)*, если существует полиномиальная функция ρ такая, что $\text{RT}(\mathcal{A}, n) \leq \rho(n)$ (соответственно $\text{RT}(\mathcal{A}, n) \leq \exp(\rho(n))$) для всех $n \in \mathbb{N}_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) – алгебраическая система. В определении полиномиального О-алгоритма требуется, чтобы время его работы на входе s не превосходило значения $\rho(|s|n)$ при некоторой полиномиальной функции ρ для *произвольной* последовательности $s \in A^+$, где алгебраическая система A вышеуказанного вида также *произвольна*. В то же время для рассматриваемых нами задач существенны лишь вычисления О-алгоритмов на входах из некоторых множеств $I(A) \subseteq A^+$ при $A \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ – некоторый класс алгебраических систем. Однако для любого О-алгоритма $\mathcal{A}$, время работы которого не превосходит $\rho(|s|n)$ (где ρ – полиномиальная функция) лишь на входах $s \in I(A)$ при $A \in \mathcal{U}$, существует полиномиальный (в вышеуказанном смысле) О-алгоритм $\mathcal{B}$, работающий на входах из $I(A)$ при $A \in \mathcal{U}$ так же, как и $\mathcal{A}$. Этот О-алгоритм $\mathcal{B}$ строится следующим образом. Не ограничивая общности, мы считаем, что полиномиальная функция ρ целочисленна. Тогда О-алгоритм $\mathcal{B}$ на произвольном входе $s \in A^+$ (A – произвольная алгебраическая система вышеуказанного вида) выполняет О-алгоритм $\mathcal{A}$ на этом входе, считая число шагов, сделанных $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ закончил вычисление не более чем за $\rho(|s|n)$ шагов, то $\mathcal{B}$ также заканчивает вычисление и выдает выходное значение О-алгоритма $\mathcal{A}$. В противном случае О-алгоритм $\mathcal{B}$ прекращает вычисление и выдает произвольное выходное значение. Аналогичные соображения справедливы также для экспоненциальных О-алгоритмов.

Имея в виду замечание 3.1, при построении полиномиальных и экспоненциальных О-алгоритмов мы будем описывать их работу только на тех входах, которые существенны для данной задачи. Время работы этих О-алгоритмов будет очевидным образом оцениваться сверху значением функции соответствующего вида на $|s|n$.

Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) – алгебраическая система и $s \in A^+$. Через $\mathcal{A}(A, s)$ будет обозначаться выходное значение О-алгоритма $\mathcal{A}$ при вычислении на входе s с использованием оракула O_A (и оракула RB, разумеется). Это выходное значение является случайной величиной, зависящей от ответов оракула RB на запросы О-алгоритма $\mathcal{A}$. Если $k \in \mathbb{N}_{\text{NRB}(\mathcal{A}, |s|n)}$, то О-алгоритм $\mathcal{A}$ при вычислении на входе s в качестве источника случайных битов вместо оракула RB может использовать значение случайной последовательности $\tilde{r} \in {}_{\cup} \mathbb{B}^k$, подаваемое этому О-алгоритму в качестве дополнительного входа. Можно рассматривать вычисление О-алгоритма $\mathcal{A}$ на входе s , когда в качестве вышеуказанного дополнительного входа этому О-алгоритму подается произвольная последовательность из $\mathbb{B}^{\geq \text{NRB}(\mathcal{A}, |s|n)}$. Выходное значение О-алгоритма $\mathcal{A}$ при вычислении на входе s с использованием оракула O_A и последовательности битов $r \in \mathbb{B}^{\geq \text{NRB}(\mathcal{A}, |s|n)}$ как

дополнительного входа мы будем обозначать через $\mathcal{A}(A, s, r)$. Это значение зависит от A , s и r детерминированно.

Фиксируем некоторые классы алгебраических систем $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{U}$. Напомним, что переменные X и Y могут принимать произвольные значения из множеств букв $\{G, A, R\}$ и $\{G, A\}$ соответственно. Если $X = A$ или $Y = A$, то предполагается (иногда без явного упоминания об этом), что все алгебраические системы из $\mathfrak{U}$ являются обобщенными группами. Для единообразия назовем Y -*порождающей последовательностью* алгебраической системы $A \in \mathfrak{U}$ произвольную последовательность из $\text{Gen } A$, если $Y = G$, и произвольную последовательность из $\text{Gen Add } A$, если $Y = A$. Другими словами, конечная последовательность элементов алгебраической системы $A \in \mathfrak{U}$ является G -порождающей (A -порождающей) последовательностью этой системы, если и только если она непуста и порождает систему A (соответственно аддитивную группу обобщенной группы A).

3.2. X -распознаваемость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Класс $\mathfrak{C}$ называется (*детерминированно*) Y -*распознаваемым* в классе $\mathfrak{U}$, если существует полиномиальный (детерминированный) O -алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что

$$P(\mathcal{A}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq \frac{2}{3}$$

для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой Y -порождающей последовательности s системы A .

Смысл равенства $\mathcal{A}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})$ в определении 3.1 (и аналогичных равенств ниже) состоит в том, что O -алгоритм $\mathcal{A}$ при вычислении на входе s с использованием оракула O_A (и, вообще говоря, оракула RB) выдал правильный ответ на вопрос о том, принадлежит алгебраическая система A классу $\mathfrak{C}$ или нет.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Очевидно, что класс $\mathfrak{C}$ детерминированно Y -распознаваем в классе $\mathfrak{U}$, если и только если существует полиномиальный детерминированный O -алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})$ для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой Y -порождающей последовательности s системы A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Класс $\mathfrak{C}$ называется (*детерминированно*) R -*распознаваемым* в классе $\mathfrak{U}$, если существуют полиномиальный (детерминированный) O -алгоритм $\mathcal{A}$ и целочисленная полиномиальная функция ρ такие, что для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) справедливо неравенство

$$P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq \frac{2}{3},$$

в котором $\tilde{a} \in {}_U A^{\rho(n)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Можно считать, что алгоритм из определения 3.2 в качестве источника случайных элементов алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) использует не значение входной последовательности $\tilde{a} \in {}_U A^{\rho(n)}$, а дополнительный оракул. Эти два подхода аналогичны двум подходам к обеспечению O -алгоритмов случайными битами (см. п. 3.1).

Определения Y -распознаваемости и (детерминированной) R -распознаваемости напоминают определение сложностного класса ВРР (см., например, [9; определение 7.5], [13; определение 3.1]). Для этих видов распознаваемости можно дать следующие эквивалентные определения, аналогичные приведенным в утверждениях 7.3.1 и 7.3.2 из [9] для класса ВРР.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Класс $\mathfrak{C}$ является Y -распознаваемым в классе $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

- 1) *существуют полиномиальный O -алгоритм $\mathcal{A}$, полиномиальный детерминированный O -алгоритм $\mathcal{B}$ и полиномиальная функция τ такие, что $\mathcal{B}(A, s)$ – рациональное число и*

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{C} &\implies P(\mathcal{A}(A, s) = 1) \geq \mathcal{B}(A, s) + \frac{1}{\tau(|s|n)}, \\ A \notin \mathfrak{C} &\implies P(\mathcal{A}(A, s) = 1) \leq \mathcal{B}(A, s) - \frac{1}{\tau(|s|n)} \end{aligned}$$

для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой Y -порождающей последовательности s системы A ;

- 2) *для любой полиномиальной функции τ существует полиномиальный O -алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что*

$$P(\mathcal{A}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq 1 - \exp(-\tau(|s|n))$$

для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой Y -порождающей последовательности s системы A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Класс $\mathfrak{C}$ является (детерминированно) R -распознаваемым в классе $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

- 1) *существуют полиномиальный (детерминированный) O -алгоритм $\mathcal{A}$, полиномиально вычисляемая функция φ , полиномиальная функция τ и целочисленная полиномиальная функция ρ такие, что $\varphi(n)$ – рациональное число при произвольном $n \in \mathbb{N}_1$ и для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) справедливы импликации*

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{C} &\implies P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = 1) \geq \varphi(n) + \frac{1}{\tau(n)}, \\ A \notin \mathfrak{C} &\implies P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = 1) \leq \varphi(n) - \frac{1}{\tau(n)}, \end{aligned}$$

в которых $\tilde{a} \in_{\mathfrak{U}} A^{\rho(n)}$;

- 2) *для любой полиномиальной функции τ существуют полиномиальный (детерминированный) O -алгоритм $\mathcal{A}$ и целочисленная полиномиальная функция ρ такие, что для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) справедливо неравенство*

$$P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq 1 - \exp(-\tau(n)),$$

в котором $\tilde{a} \in_{\mathfrak{U}} A^{\rho(n)}$.

Предложения 3.1 и 3.2 доказываются с помощью стандартных рассуждений, основанных на многократном выполнении алгоритмов и применении оценки Чернова (см. доказательства вышеуказанных утверждений из [9]). Из этих предложений, в частности, вытекает, что если в определениях 3.1 и 3.2 заменить константу $2/3$ на любое число $q \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенствам $1/2 < q < 1$, то полученные определения будут равносильны исходным.

ЛЕММА 3.1. *Существует экспоненциальный детерминированный О-алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(A, s) = A$ для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой последовательности $s \in \text{Gen } A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим экспоненциальный детерминированный О-алгоритм $\mathcal{A}$ следующим образом. Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) – алгебраическая система и $s \in \text{Gen } A$. Тогда О-алгоритм $\mathcal{A}$ при вычислении на входе s строит индуктивно с помощью оракула O_A следующие множества:

$$\begin{aligned} M_0 &= E(s), \\ M_{i+1} &= M_i \cup \{\omega(a) : \omega \in \Omega, a \in M_i^{\text{arg } \omega}\} \quad (i \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Возможность построения этих множеств следует из того, что сигнатура Ω конечна. Если $M_{j+1} = M_j$ (что обязательно произойдет для некоторого $j \leq |A| - 1 \leq 2^n - 1$), то О-алгоритм $\mathcal{A}$ заканчивает вычисление и выдает множество M_j . Легко видеть, что $\mathcal{A}(A, s) = \bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ совпадает с подсистемой, порожденной последовательностью s , т.е. с A . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Пусть S – некоторое множество такое, что $1 \leq |S| \leq N$ при некотором $N \in \mathbb{R}$. Пусть также число $k \in \mathbb{N}_1$ удовлетворяет неравенству $k \geq N(\ln N + \ln 3)$. Тогда если $\tilde{s} \in \bigcup S^k$, то $P(E(\tilde{s}) = S) \geq 2/3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $N = 1$, то $|S| = 1$ и утверждение леммы очевидно. Считаем теперь, что $N > 1$.

Пусть $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k)$. Тогда очевидно, что $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k$ – независимые случайные величины, распределенные равномерно на S . Поэтому

$$\begin{aligned} P(E(\tilde{s}) \neq S) &= P\left(\bigcup_{s \in S} \bigcap_{i=1}^k \{\tilde{s}_i \neq s\}\right) \leq |S| \left(1 - \frac{1}{|S|}\right)^k \\ &\leq N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^k = \exp\left(k \ln\left(1 - \frac{1}{N}\right) + \ln N\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{k}{N} + \ln N\right) \leq \exp(-\ln 3) = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемым неравенством $\ln q \leq q - 1$, которое справедливо для всех $q \in \mathbb{R}_+$. Требуемое в лемме неравенство непосредственно вытекает из (3). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Пусть класс $\mathfrak{C}$ конечно аксиоматизируем в классе $\mathfrak{U}$. Тогда существует полиномиальный детерминированный О-алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})$ для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой последовательности $s \in A^+$, содержащей все элементы A . Этот О-алгоритм основан на переборе всех элементов входной последовательности s .

Из лемм 3.1 и 3.2 и замечания 3.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть класс $\mathfrak{C}$ конечно аксиоматизируем в классе $\mathfrak{U}$. Тогда

- 1) существует экспоненциальный детерминированный О-алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})$ для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой последовательности $s \in \text{Gen } A$;
- 2) существует полиномиальный детерминированный О-алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что если $\tilde{a} \in {}_U A^{2^n(n+2)}$, то $P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq 2/3$ для любой алгебраической системы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$).

Следствие 3.1 показывает, что если класс $\mathfrak{C}$ конечно аксиоматизируем в классе $\mathfrak{U}$, то $\mathfrak{C}$ в некотором смысле детерминированно G-распознаваем в $\mathfrak{U}$ за время $\exp(\rho(|s|n))$ и детерминированно R-распознаваем в $\mathfrak{U}$ за время $\exp(\rho(n))$, где ρ – полиномиальная функция.

3.3. Сильная Y-распознаваемость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Класс $\mathfrak{C}$ называется *сильно Y-распознаваемым* в классе $\mathfrak{U}$, если существует полиномиально вычислимая функция φ такая, что $\varphi(m)$ – множество атомарных формул сигнатуры Σ от переменных $\{t_1, \dots, t_m\}$ (т.е. формул вида $u = v$ или $\pi(v_1, \dots, v_{\text{ar } \pi})$, где $\pi \in \Pi$ и $u, v, v_1, \dots, v_{\text{ar } \pi} \in \text{Тm}_m(\Omega)$) и

$$A \in \mathfrak{C} \iff \Phi(s) \text{ истинно в } A \text{ при всех } \Phi \in \varphi(m)$$

для любого числа $m \in \mathbb{N}_1$, любой алгебраической системы $A \in \mathfrak{U}$, имеющей Y-порождающую последовательность длины m , и любой Y-порождающей последовательности длины m системы A .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Пусть $\Pi = \emptyset$ и $\mathfrak{U}$ состоит из обобщенных групп.

1) Очевидно, что класс $\mathfrak{C}$ сильно Y-распознаваем в классе $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда существует полиномиально вычислимая функция φ такая, что $\varphi(m) \subseteq \text{Тm}_m(\Omega)$ и

$$A \in \mathfrak{C} \iff v(s) = 0 \text{ при всех } v \in \varphi(m) \quad (4)$$

для любого числа $m \in \mathbb{N}_1$, любой обобщенной группы $A \in \mathfrak{U}$, имеющей Y-порождающую последовательность длины m , и любой Y-порождающей последовательности длины m системы A .

2) Предположим, что $\mathfrak{C}$ является предногообразием и $\mathfrak{U}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов. Тогда условие (4) выполняется для любых m , A и s вышеуказанного вида в том и только том случае, когда

$$\langle\langle v(s) : v \in \varphi(m) \rangle\rangle_A = \mathfrak{C}(A) \quad (5)$$

для любого числа $m \in \mathbb{N}_1$, любой обобщенной группы $A \in \mathfrak{U}$, имеющей Y-порождающую последовательность длины m , и любой Y-порождающей последовательности длины m системы A . Следовательно, при данном предположении можно заменить условие (4) на условие (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Предположим, что $\Pi = \emptyset$ и что $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ являются многообразиями обобщенных групп. Обозначим через F $\mathfrak{U}$ -свободную обобщенную группу, свободно порожденную счетной системой $z_1, z_2, \dots$. Пусть также F_m – обобщенная группа, порожденная системой $z_1, \dots, z_m$ ($m \in \mathbb{N}_1$).

1) Многообразие $\mathfrak{V}$ сильно G -распознаваемо в многообразии $\mathfrak{U}$, если и только если существует полиномиально вычислимая функция φ такая, что $\varphi(m) \subseteq \text{Тm}_m(\Omega)$ и

$$\langle\langle v(z) : v \in \varphi(m) \rangle\rangle_{F_m} = \mathfrak{V}(F_m)$$

для любого $m \in \mathbb{N}_1$. Это легко вытекает из замечания 3.5.

2) Пусть Φ – полугруппа всех эндоморфизмов φ обобщенной группы F таких, что $\varphi(z_i) = z_{\varphi'(i)}$ при всех $i \in \mathbb{N}_1$, где φ' – некоторая строго возрастающая функция из $\mathbb{N}_1$ в $\mathbb{N}_1$ (зависящая от φ). Обозначим также через Ψ полугруппу всех эндоморфизмов ψ обобщенной группы F таких, что

$$\psi(z_i) \in \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \{-z_j, z_j\}$$

для любого $i \in \mathbb{N}_1$. Тогда если $\mathfrak{V}(F)$ конечно порожден как Φ -замкнутый (или, что эквивалентно, как Ψ -замкнутый) идеал, то многообразие $\mathfrak{V}$ сильно G -распознаваемо в многообразии $\mathfrak{U}$. Действительно, пусть V – конечное подмножество $\text{Тm}_k(\Omega)$ при некотором $k \in \mathbb{N}_1$ такое, что $\{v(z) : v \in V\}$ порождает $\mathfrak{V}(F)$ как Φ -замкнутый идеал. Для произвольного $m \in \mathbb{N}_1$ положим

$$V_m = \{v(t_{i_1}, \dots, t_{i_j}, 0, \dots, 0) : v \in V, 1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq m, j \in \mathbb{I}_k \cup \{0\}\}.$$

Тогда легко видеть, что

$$\langle\langle v(z) : v \in V_m \rangle\rangle_{F_m} = \mathfrak{V}(F_m).$$

Из этого равенства ввиду 1) и очевидной полиномиальной вычислимости функции $m \mapsto V_m$ ($m \in \mathbb{N}_1$) вытекает сильная G -распознаваемость $\mathfrak{V}$ в $\mathfrak{U}$.

§ 4. Соотношения между различными видами распознаваемости

4.1. Связь между (детерминированной) A -распознаваемостью и (детерминированной) R -распознаваемостью. В настоящем пункте предполагается, что класс $\mathfrak{U}$ состоит из обобщенных групп. Нам потребуется следующая лемма, проверяемая непосредственно.

ЛЕММА 4.1. Пусть V и W – события в некотором вероятностном пространстве, причем $P(W) > 0$. Тогда $|P(V) - P(V|W)| \leq 1 - P(W)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть класс $\mathfrak{E}$ (детерминированно) A -распознаваем в классе $\mathfrak{U}$. Тогда $\mathfrak{E}$ (детерминированно) R -распознаваем в $\mathfrak{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем число $q \in \mathbb{R}_+$ и целочисленную полиномиальную функцию ρ , удовлетворяющие неравенствам $q < 1/3$ и $\rho(n) \geq 2n + 2 + \log(1/q)$ для всех $n \in \mathbb{N}_1$. Выберем также полиномиальный (детерминированный) О-алгоритм $\mathcal{A}$ такой, что

$$P(\mathcal{A}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq \frac{2}{3} + q$$

для любой обобщенной группы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой последовательности $s \in \text{Gen Add } A$. Это возможно ввиду предложения 3.1 (условие 2)).

Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$ — обобщенная группа из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и $\tilde{a} \in_{\mathbb{U}} A^{\rho(n)}$. Из результата Эрдеша и Реньи [14; теорема 1 и заключительное замечание в §2] ввиду неравенства

$$\rho(n) \geq 2n + 2 + \log \frac{1}{q} \geq 2 \log |A| + 2 \log \frac{1}{1/2} + \log \frac{1}{q}$$

вытекает, что $P(\tilde{a} \in \text{Gen Add } A) \geq 1 - q$. Поэтому

$$\begin{aligned} & |P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C})) - P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C}) \mid \tilde{a} \in \text{Gen Add } A)| \\ & \leq 1 - P(\tilde{a} \in \text{Gen Add } A) \leq q \end{aligned} \quad (6)$$

согласно лемме 4.1. В то же время

$$P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C}) \mid \tilde{a} \in \text{Gen Add } A) \geq \frac{2}{3} + q \quad (7)$$

ввиду выбора $\mathcal{A}$. Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq \frac{2}{3}.$$

Таким образом, О-алгоритм $\mathcal{A}$ и функция ρ удовлетворяют требованиям определения 3.2. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть класс $\mathfrak{C}$ R -распознаваем в классе $\mathfrak{U}$. Тогда $\mathfrak{C}$ A -распознаваем в $\mathfrak{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем некоторое число $q \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющее неравенству $q < 1/3$. Выберем полиномиальный О-алгоритм $\mathcal{A}$ и целочисленную полиномиальную функцию ρ такие, что для любой обобщенной группы $A \subseteq \mathbb{B}^n$ из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) справедливо неравенство

$$P(\mathcal{A}(A, \tilde{a}) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq \frac{2}{3} + q,$$

в котором $\tilde{a} \in_{\mathbb{U}} A^{\rho(n)}$. Это возможно ввиду предложения 3.2 (условие 2)). Пусть также s и d — некоторые константы из $\mathbb{R}_+$ такие, что $2^{-cn} + 2^{-(d-1)n} \leq 2q/\rho(n)$ для любого $n \in \mathbb{N}_1$. Из результата Бабаи [6; теорема 1.1] и его доказательства следует, что мы можем выбрать полиномиальный О-алгоритм $\mathcal{G}$, удовлетворяющий для произвольной группы $G \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и произвольной последовательности $f \in \text{Gen } G$ следующим условиям:

- 1) $\mathcal{G}(G, f)$ всегда принадлежит G ;

- 2) существует событие W (в вероятностном пространстве, на котором определены случайные биты, используемые алгоритмом $\mathcal{G}$) вероятности не менее $1 - 2^{-dn}$ такое, что

$$\left| \mathbf{P}(\mathcal{G}(G, f) = g \mid W) - \frac{1}{|G|} \right| \leq \frac{2^{-cn}}{|G|} \quad (8)$$

для произвольного $g \in G$.

Пусть $G \subseteq \mathbb{B}^n$ — группа ($n \in \mathbb{N}_1$) и $f \in \text{Gen } G$. Выберем событие W согласно условию 2). Тогда по лемме 4.1

$$|\mathbf{P}(\mathcal{G}(G, f) = g) - \mathbf{P}(\mathcal{G}(G, f) = g \mid W)| \leq 1 - \mathbf{P}(W) \leq 2^{-dn} \quad (9)$$

для любого $g \in G$. Из неравенств (8) и (9) вытекает, что

$$\left| \mathbf{P}(\mathcal{G}(G, f) = g) - \frac{1}{|G|} \right| \leq \frac{2^{-cn}}{|G|} + 2^{-dn}.$$

Следовательно, если $\tilde{g} \in_{\mathbb{U}} G$, то ввиду условия 1) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathcal{G}(G, f), \tilde{g}) &\leq \frac{1}{2}(2^{-cn} + |G|2^{-dn}) \\ &\leq \frac{1}{2}(2^{-cn} + 2^{-(d-1)n}) \leq \frac{q}{\rho(n)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Определим полиномиальный О-алгоритм $\mathcal{B}$ следующим образом. Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$ — обобщенная группа из $\mathfrak{U}$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и $s \in \text{Gen Add } A$. Тогда О-алгоритм $\mathcal{B}$ на входе s выполняет $\rho(n)$ раз О-алгоритм $\mathcal{G}$ на этом входе, используя независимые друг от друга случайные биты для каждого из этих выполнений. При этом запросы О-алгоритма $\mathcal{G}$ к оракулу $O_{\text{Add } A}$ реализуются с помощью оракула O_A . Пусть при i -м выполнении О-алгоритм $\mathcal{G}$ выдал выходное значение a_i ($i \in \mathbb{I}_{\rho(n)}$). Алгоритм $\mathcal{B}$ выполняет алгоритм $\mathcal{A}$ на входе $(a_1, \dots, a_{\rho(n)})$ и выдает полученное при этом выходное значение.

Пусть $\tilde{r} \in_{\mathbb{U}} \mathbb{B}^{\text{NRB}(\mathcal{A}, \rho(n)n)}$ и $\tilde{a} \in_{\mathbb{U}} A$. Тогда из пп. 3), 2), 5) леммы 2.1 и неравенства (10) следует, что

$$\begin{aligned} &|\mathbf{P}(\mathcal{B}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})) - \mathbf{P}(\mathcal{A}(A, \tilde{a}^{(\rho(n))}) = \chi(A, \mathfrak{C}))| \\ &\leq \text{dist}(\mathcal{A}(A, \mathcal{G}(\text{Add } A, s)^{(\rho(n))}, \tilde{r}), \mathcal{A}(A, \tilde{a}^{(\rho(n))}, \tilde{r})) \\ &\leq \text{dist}((\mathcal{G}(\text{Add } A, s)^{(\rho(n))}, \tilde{r}), (\tilde{a}^{(\rho(n))}, \tilde{r})) \\ &\leq \rho(n) \text{dist}(\mathcal{G}(\text{Add } A, s), \tilde{a}) \leq q. \end{aligned} \quad (11)$$

В то же время

$$\mathbf{P}(\mathcal{A}(A, \tilde{a}^{(\rho(n))}) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq \frac{2}{3} + q \quad (12)$$

ввиду выбора $\mathcal{A}$. Из неравенств (11) и (12) вытекает, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{B}(A, s) = \chi(A, \mathfrak{C})) \geq \frac{2}{3}.$$

Таким образом, О-алгоритм $\mathcal{B}$ удовлетворяет требованиям определения 3.1. Предложение доказано.

Из предложений 4.1 и 4.2 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Класс $\mathfrak{C}$ A -распознаваем в классе $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}$ R -распознаваем в $\mathfrak{U}$.*

Из определений 3.1, 3.3 и следствия 4.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Если $\mathfrak{U}$ – класс групп, то X -распознаваемость и сильная Y -распознаваемость $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{U}$ не зависят от значений соответственно X и Y .*

4.2. Сводка результатов. Связь между различными видами распознаваемости (как полученные в п. 4.1, так и являющиеся очевидными замечаниями) можно выразить следующей диаграммой:

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \implies & A & \iff & R \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 DG & \implies & DA & \implies & DR \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 SG & \implies & SA & &
 \end{array} \quad (13)$$

В этой диаграмме X , DX и SY обозначают соответственно X -распознаваемость, детерминированную X -распознаваемость и сильную Y -распознаваемость. Элемент диаграммы (13) вида $Z_1 \implies Z_2$ ($Z_1 \iff Z_2$) означает, что если для классов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{U}$ определена как Z_1 -распознаваемость, так и Z_2 -распознаваемость, то первая из них влечет вторую (соответственно первая эквивалентна второй). Отметим, что если в диаграмму (13) входят элементы $Z_1 \implies Z_2$ и $Z_2 \implies Z_3$ (или $Z_2 \iff Z_3$), то это не означает, что Z_1 -распознаваемость влечет Z_3 -распознаваемость в случае, когда они обе определены. Это объясняется тем, что возможны ситуации, когда определены Z_1 -распознаваемость и Z_3 -распознаваемость, но не определена Z_2 -распознаваемость. Например, из G -распознаваемости (и даже из сильной G -распознаваемости) в общем случае не вытекает R -распознаваемости (см. п. 1.3), хотя диаграмма (13) содержит элементы $G \implies A$ и $A \iff R$.

В следующем замечании под распознаваемостью понимается либо X -распознаваемость, либо детерминированная X -распознаваемость, либо сильная Y -распознаваемость.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Пусть $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ – классы алгебраических систем. Тогда легко видеть, что если $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{U}$, $\mathfrak{C}$ распознаваем в $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ распознаваем в $\mathfrak{V}$, то $\mathfrak{C}$ распознаваем в $\mathfrak{V}$.

§ 5. Положительные результаты

5.1. О сильной G -распознаваемости многообразий групп и алгебр

Ли. В этом пункте изложение будет вестись параллельно для многообразий групп и алгебр Ли. Пусть K – произвольное ассоциативное коммутативное конечно порожденное кольцо с единицей. Из теоремы Гильберта о базисе следует, что K удовлетворяет условию максимальности для идеалов. Все алгебры Ли, рассматриваемые в настоящем пункте, есть линейные алгебры над кольцом K . Отметим, что кольца Ли можно рассматривать как алгебры Ли над кольцом целых чисел (см. также п. 2.4). Здесь мы будем обозначать через $\mathfrak{N}_c$ ($c \in \mathbb{N}_0$) многообразие всех нильпотентных групп (алгебр Ли) класса не более c , а через $\mathfrak{A}$ – многообразие всех абелевых групп (алгебр Ли).

Пусть A – произвольная группа (алгебра Ли), S – некоторая система ее порождающих и $c \in \mathbb{N}_0$. Хорошо известно, что

$$\mathfrak{N}_c(A) = A_{(c+1)} = \langle\langle [s_1^{\varepsilon_1}, \dots, s_{c+1}^{\varepsilon_{c+1}}] : s_i \in S, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i \in \mathbb{I}_{c+1} \rangle\rangle_A,$$

если A – группа, и

$$\mathfrak{N}_c(A) = \langle\langle (\dots((s_1 s_2) s_3) \dots) s_{c+1} : s_i \in S, i \in \mathbb{I}_{c+1} \rangle\rangle_A,$$

если A – алгебра Ли. Отсюда ввиду замечания 3.5 вытекает

ЛЕММА 5.1. *Для любого $c \in \mathbb{N}_0$ многообразие $\mathfrak{N}_c$ сильно G -распознаваемо в классе всех групп (алгебр Ли).*

Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}_c \cap \mathfrak{N}_d \mathfrak{A}$ ($c, d \in \mathbb{N}_0$) и $\mathfrak{V}$ – произвольное подмногообразие $\mathfrak{U}$. Тогда из результатов Вон-Ли (см. [15] для групп, а для алгебр Ли, как отмечено в [16; §1], доказательство проводится аналогично) следует, что $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{U}$ удовлетворяют условиям п. 2) замечания 3.6. Поэтому имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Пусть $c, d \in \mathbb{N}_0$. Тогда любое подмногообразие $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c \cap \mathfrak{N}_d \mathfrak{A}$ сильно G -распознаваемо в $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c \cap \mathfrak{N}_d \mathfrak{A}$.*

Из предложения 5.1, леммы 5.1 и замечания 4.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Любое нильпотентное многообразие групп (алгебр Ли) сильно G -распознаваемо в классе всех групп (алгебр Ли).*

5.2. Об X -распознаваемости многообразий групп. В настоящем пункте мы будем иметь дело с классами групп. Для таких классов X -распознаваемость и сильная Y -распознаваемость не зависят от значений соответственно X и Y ввиду следствия 4.2. Поэтому здесь мы будем говорить об X -распознаваемости и сильной Y -распознаваемости без указания значений X и Y .

Обозначим через Δ класс всех предмногообразий групп $\mathfrak{P}$ таких, что для любой полиномиальной функции τ существует полиномиальный O -алгоритм $\mathcal{A}$, удовлетворяющий при любой группе $G \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой последовательности $s \in \text{Gen } G$ следующим условиям:

- 1) $\mathcal{A}(G, s)$ всегда есть подмножество $\mathfrak{P}(G)$;
- 2) $P(\langle\langle \mathcal{A}(G, s) \rangle\rangle_G = \mathfrak{P}(G)) \geq 1 - \exp(-\tau(|s|n))$.

Напомним, что если G – группа, то $\langle\langle S \rangle\rangle_G$ есть нормальное замыкание множества $S \subseteq G$ в группе G .

ЛЕММА 5.2. *Для любой полиномиальной функции τ существует полиномиальный O -алгоритм $\mathcal{A}$, удовлетворяющий при любой группе $G \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$) и любой последовательности $s = (s_1, \dots, s_{2m}) \in G^+$ таких, что $(s_1, \dots, s_m) \in \text{Gen } G$, следующим условиям:*

- 1) $\mathcal{A}(G, s)$ всегда принадлежит $\langle\langle s_{m+1}, \dots, s_{2m} \rangle\rangle_G^+$;
- 2) $P(\mathcal{A}(G, s) \in \text{Gen} \langle\langle s_{m+1}, \dots, s_{2m} \rangle\rangle_G) \geq 1 - \exp(-\tau(|s|n))$.

Лемма 5.2 может быть легко выведена из результатов работы Бабаи и др. [5] и их доказательств с помощью стандартного способа повышения вероятности успеха алгоритма. В данном случае этот способ состоит в многократном выполнении О-алгоритма и конкатенации полученных выходных значений. Здесь используется то, что если G – группа и s – конкатенация нескольких последовательностей из G^+ , среди которых хотя бы одна принадлежит $\text{Gen } G$, то s также принадлежит $\text{Gen } G$.

Сформулируем нужные нам свойства класса Δ .

ЛЕММА 5.3. Пусть $\mathfrak{P}$ и Ω – предмногообразия групп. Тогда

- 1) если $\mathfrak{P} \subseteq \Omega$, $\mathfrak{P}$ сильно Y -распознаваемо в Ω и $\Omega \in \Delta$, то $\mathfrak{P} \in \Delta$;
- 2) если $\mathfrak{P}$ сильно Y -распознаваемо в классе всех групп, то $\mathfrak{P} \in \Delta$;
- 3) если $\mathfrak{P} \in \Delta$, то $\mathfrak{P}$ X -распознаваемо в классе всех групп;
- 4) если $\mathfrak{P}$ и Ω – многообразия и $\mathfrak{P}, \Omega \in \Delta$, то $\mathfrak{P} \cap \Omega \in \Delta$;
- 5) если $\mathfrak{P}, \Omega \in \Delta$, то $\mathfrak{P}\Omega \in \Delta$.

Пункт 1) леммы 5.3 вытекает из замечания 3.5, п. 2) – из п. 1), пп. 3) и 4) проверяются непосредственно, а п. 5) следует из леммы 5.2.

В следующем предложении через $\mathfrak{N}_c$, где $c \in \mathbb{N}_0$, обозначается многообразие всех нильпотентных групп класса не более c , а через $\mathfrak{A}$ – многообразие всех абелевых групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $\mathfrak{V}_1, \dots, \mathfrak{V}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) – многообразия групп такие, что $\mathfrak{V}_i \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{N}_{c_i} \cap \mathfrak{N}_{d_i}\mathfrak{A}$ для некоторых $c_i, d_i \in \mathbb{N}_0$ при $i \in \mathbb{I}_n$. Тогда если $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \cdots \mathfrak{V}_n$, то $\mathfrak{V} \in \Delta$ и, следовательно, $\mathfrak{V}$ X -распознаваемо в классе всех групп (см. п. 3) леммы 5.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное число $i \in \mathbb{I}_n$. Тогда из леммы 5.1 и пп. 2), 5) и 4) леммы 5.3 следует, что $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_{c_i} \cap \mathfrak{N}_{d_i}\mathfrak{A} \in \Delta$. Поэтому $\mathfrak{V}_i \in \Delta$ ввиду предложения 5.1 и п. 1) леммы 5.3. Из этого согласно п. 5) леммы 5.3 вытекает, что $\mathfrak{V} \in \Delta$. Предложение доказано.

5.3. О сильной A -распознаваемости многообразий мультиколец. В настоящем пункте мы будем иметь дело с мультикольцами. При этом будут использоваться терминология и обозначения п. 2.8. Обозначим через F свободное мультикольцо, свободно порожденное счетной системой $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$, а через F_m – подмультикольцо F , порожденное системой $\{z_1, \dots, z_m\}$ ($m \in \mathbb{N}_0$). Положим $F_{(n)} = (\text{Add } F)_{(n)}$ для произвольного $n \in \mathbb{N}_1$ (т.е. $F_{(n)}$ – n -й член нижнего центрального ряда группы $\text{Add } F$). Очевидно, что $F_{(n)}$ является идеалом в F . Определим эндоморфизмы $\delta_i, \xi_{i,j}, \eta_{i,j}$ ($i, j \in \mathbb{N}_1$) мультикольца F , задав их значения на Z следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_i(z_i) &= 0, & \xi_{i,j}(z_i) &= z_i + z_j, & \eta_{i,j}(z_i) &= z_j; \\ \delta_i(z_k) &= z_k, & \xi_{i,j}(z_k) &= z_k, & \eta_{i,j}(z_k) &= z_k \quad \text{при } k \in \mathbb{N}_1 \setminus \{i\}. \end{aligned}$$

Пусть также

$$\lambda_{i,j}(f) = \xi_{i,j}(f) - (f + \eta_{i,j}(f))$$

для произвольных $f \in F$ и $i, j \in \mathbb{N}_1$.

Элемент $f \in F$ называется I -нормальным, где I – конечное подмножество $\mathbb{N}_1$, если

$$\delta_i(f) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \in I, \\ f & \text{при } i \in \mathbb{N}_1 \setminus I, \end{cases}$$

и *нормальным*, если он J -нормален для некоторого конечного множества $J \subseteq \mathbb{N}_1$. Понятие нормального элемента F является аналогом понятия нормального многочлена (см. [8; гл. 1, §3, п. 3.1]). Множество всех I -нормальных элементов из F мы будем обозначать через $\text{Nor } I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Очевидно, что нулевой элемент I -нормален для любого конечного множества $I \subseteq \mathbb{N}_1$. В то же время любой нормальный элемент $f \in F \setminus \{0\}$ является I -нормальным лишь для единственного множества $I = \{i \in \mathbb{N}_1 : \delta_i(f) = 0\}$.

Пусть $f \in F_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}_0$. Хорошо известно, что для любого мультикольца A и любой последовательности $a \in A^m$ корректно определено значение $f(a)$ (это значение равно $v(a)$, где v – произвольный терм из $\text{Tm}_m(\Omega)$ такой, что $f = v(z)$). Поэтому в этом пункте мы будем считать (мультикольцевыми) тождествами выражения вида $f = 0$, где $f \in F$.

ЛЕММА 5.4. *Любая (конечная) система мультикольцевых тождеств эквивалентна в классе всех мультиколец (конечной) системе тождеств вида $f = 0$, где f – нормальный элемент F .*

Доказательство леммы 5.4 аналогично доказательству теоремы 33.45 из [10]. Нам потребуется также следующая лемма, проверяемая непосредственно.

ЛЕММА 5.5. *Пусть I – конечное подмножество $\mathbb{N}_1$ и $f \in \text{Nor } I$. Тогда $\lambda_{i,j}(f) \in \text{Nor}(I \cup \{j\})$ для любых $i \in I$ и $j \in \mathbb{N}_1$.*

ЛЕММА 5.6. *Пусть $v \in \text{Tm}_\infty(\Theta)$ и φ – эндоморфизм F такой, что $\varphi(Z)$ содержится в подгруппе $\text{Add } F$, порожденной системой Z . Тогда*

- 1) $v(z) \in \text{Nor } \text{nvar } v$;
- 2) $\varphi(v(z)) = \varepsilon_1 w_1(z) + \dots + \varepsilon_n w_n(z)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ и $w_i \in \text{Tm}_\infty(\Theta)$ таких, что $\deg w_i = \deg v$ ($i \in \mathbb{I}_n$).

Оба пункта леммы 5.6 легко доказываются индукцией по построению терма v .

Очевидно, что множество $\{v(z) : v \in \text{Tm}_\infty(\Theta)\}$ порождает $\text{Add } F$. Следовательно, $F_{(m)}$ как подгруппа $\text{Add } F$ порождается по модулю $F_{(m+1)}$ всевозможными коммутаторами вида $[v_1(z), \dots, v_m(z)]$, где $v_i \in \text{Tm}_\infty(\Theta)$, $i \in \mathbb{I}_m$, $m \in \mathbb{N}_1$ (это вытекает, например, из леммы 2.2). Поэтому для любых $m \in \mathbb{N}_1$ и $f \in F_{(m)}$ существуют $n \in \mathbb{N}_0$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $v_{i,j} \in \text{Tm}_\infty(\Theta)$ ($i \in \mathbb{I}_n$, $j \in \mathbb{I}_m$) такие, что

$$f \equiv \sum_{i=1}^n \varepsilon_i [v_{i,1}(z), \dots, v_{i,m}(z)] \pmod{F_{(m+1)}}. \quad (14)$$

Представление (14) назовем *несократимым*, если

$$f \not\equiv \sum_{i \in I} \varepsilon_i [v_{i,1}(z), \dots, v_{i,m}(z)] \pmod{F_{(m+1)}}$$

для любого собственного подмножества I множества $\mathbb{I}_n$.

ЛЕММА 5.7. Пусть представление (14) элемента $f \in F_{(m)}$ ($m \in \mathbb{N}_1$) несократимо. Тогда если $f \in \text{Nor } I$ для некоторого конечного множества $I \subseteq \mathbb{N}_1$, то $\bigcup_{j=1}^m \text{pvar } v_{i,j} = I$ для всех $i \in \mathbb{I}_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $k \in \mathbb{N}_1$ положим

$$J_k = \left\{ i \in \mathbb{I}_n : k \notin \bigcup_{j=1}^m \text{pvar } v_{i,j} \right\}.$$

Тогда из п. 1) леммы 5.6 вытекает, что

$$\delta_k(f) \equiv \sum_{i \in J_k} \varepsilon_i[v_{i,1}(z), \dots, v_{i,m}(z)] \pmod{F_{(m+1)}}. \quad (15)$$

Пусть сначала $k \in I$. Тогда $\delta_k(f) = 0$ и

$$f \equiv \sum_{i \in \mathbb{I}_n \setminus J_k} \varepsilon_i[v_{i,1}(z), \dots, v_{i,m}(z)] \pmod{F_{(m+1)}}$$

ввиду (15). Следовательно, $J_k = \emptyset$ (так как представление (14) несократимо), т.е. $k \in \bigcup_{j=1}^m \text{pvar } v_{i,j}$ для любого $i \in \mathbb{I}_n$.

Предположим теперь, что $k \in \mathbb{N}_1 \setminus I$. Тогда $\delta_k(f) = f$ и $J_k = \mathbb{I}_n$ ввиду (15) и несократимости представления (14). Последнее равенство означает, что $k \notin \bigcup_{j=1}^m \text{pvar } v_{i,j}$ для всех $i \in \mathbb{I}_n$. Лемма доказана.

Пусть $f \in F_{(m)} \setminus F_{(m+1)}$, где $m \in \mathbb{N}_1$. Каждому такому f мы сопоставим число

$$\psi_m(f) = \min_{i \in \mathbb{I}_n} \max_{j=1}^m \deg v_{i,j},$$

где параметры n и $v_{i,j}$ взяты из представления (14) элемента f , а минимум берется по всем таким представлениям (очевидно, что в каждом представлении (14) произвольного элемента из $F_{(m)} \setminus F_{(m+1)}$ мы имеем $n \geq 1$).

ЛЕММА 5.8. Пусть $k, l, m \in \mathbb{N}_1$ и $f \in F_{(m)} \setminus F_{(m+1)}$. Тогда если $\lambda_{k,l}(f) \notin F_{(m+1)}$, то $\psi_m(\lambda_{k,l}(f)) \leq \psi_m(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (14) — некоторое представление элемента f , на котором достигается минимум из определения $\psi_m(f)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \lambda_{k,l}(f) \equiv & \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i[\xi_{k,l}(v_{i,1}(z)), \dots, \xi_{k,l}(v_{i,m}(z))] - \varepsilon_i[v_{i,1}(z), \dots, v_{i,m}(z)] \\ & - \varepsilon_i[\eta_{k,l}(v_{i,1}(z)), \dots, \eta_{k,l}(v_{i,m}(z))]) \pmod{F_{(m+1)}}. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду лемм 5.6 (п. 2)) и 2.2 вытекает сравнение

$$\lambda_{k,l}(f) \equiv \sum_{r=1}^s \varkappa_r[w_{r,1}(z), \dots, w_{r,m}(z)] \pmod{F_{(m+1)}}$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}_1$ (так как $\lambda_{k,l}(f) \notin F_{(m+1)}$), $\varkappa_r \in \{-1, 1\}$ и $w_{r,j} \in \text{Tr}_\infty(\Theta)$ таких, что $\deg w_{r,j} = \deg v_{i_r,j}$ ($r \in \mathbb{I}_s$, $j \in \mathbb{I}_m$). В частности,

$$\sum_{j=1}^m \deg w_{r,j} = \sum_{j=1}^m \deg v_{i_r,j} \leq \psi_m(f)$$

для любого $r \in \mathbb{I}_s$. Из этого непосредственно следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть теперь $N = \bigcup_{n=0}^\infty \text{Nor } \mathbb{I}_n$. Каждой паре (k, f) , где $k \in \mathbb{N}_0$ и $f \in N$, сопоставим конечное множество $L_k(f) \subseteq F$ следующим образом. Предположим сначала, что $k \geq 1$ и $f \neq 0$. Пусть n – единственное (ввиду замечания 5.1) число из $\mathbb{N}_0$ такое, что $f \in \text{Nor } \mathbb{I}_n$. Тогда мы полагаем

$$L_k(f) = \{\lambda_{i_k, n+k}(\dots \lambda_{i_2, n+2}(\lambda_{i_1, n+1}(f)) \dots) : i_j \in \mathbb{I}_{n+j-1}, j \in \mathbb{I}_k\}.$$

В частности, $L_k(f) = \emptyset$ при $n = 0$. Если же $k = 0$ или $f \neq 0$, то в качестве $L_k(f)$ мы выбираем $\{f\}$. Для произвольного множества $M \subseteq N$ через $L_k(M)$ будет обозначаться $\bigcup_{g \in M} L_k(g)$.

ЛЕММА 5.9. *Для любого конечного множества $M \subseteq N$ и любого числа $m \in \mathbb{N}_0$ существует $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что $L_k(M) \subseteq F_{(m+1)}$ (и, следовательно, $L_{k'}(M) \subseteq F_{(m+1)}$ для всех $k' \in \mathbb{N}_k$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что достаточно доказать лемму лишь в случае, когда $M = \{g\}$, где $g \in F_{(m)} \setminus F_{(m+1)}$. Пусть $g \in \text{Nor } \mathbb{I}_r$ (число $r \in \mathbb{N}_0$ определено однозначно ввиду замечания 5.1, так как $g \neq 0$). Выберем произвольное число $k \in \mathbb{N}_0$, большее $\psi_m(g) - r$, и покажем, что k удовлетворяет требованию леммы.

Пусть, напротив, существует $f \in L_k(\{g\}) = L_k(g)$, не принадлежащий $F_{(m+1)}$. Очевидно, что $f \in F_{(m)}$. Пусть (14) – некоторое представление элемента f , на котором достигается минимум из определения $\psi_m(f)$. Переходя, если нужно, к произведению по некоторому подмножеству множества $\mathbb{I}_n$, мы считаем, что представление (14) несократимо. Из леммы 5.5 вытекает, что $f \in \text{Nor } \mathbb{I}_{r+k}$. Фиксируем произвольное число $i \in \mathbb{I}_n$ (оно существует, так как $n \in \mathbb{N}_1$). Тогда $\bigcup_{j=1}^m \text{nvar } v_{i,j} = \mathbb{I}_{r+k}$ по лемме 5.7. Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi_m(g) < r + k &= \left| \bigcup_{j=1}^m \text{nvar } v_{i,j} \right| \leq \sum_{j=1}^m |\text{nvar } v_{i,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \deg v_{i,j} \leq \psi_m(f) \leq \psi_m(g) \end{aligned}$$

ввиду неравенства (1) и леммы 5.8. Таким образом, получено противоречие. Лемма доказана.

Через $\overline{\mathfrak{N}}_c$, где $c \in \mathbb{N}_0$, мы будем обозначать многообразие всех мультиколец, аддитивные группы которых нильпотентны класса не более c .

ЛЕММА 5.10. Пусть $\mathfrak{V}$ – многообразие мультиколец, конечно базлируемое в классе всех мультиколец, и c – число из $\mathbb{N}_0$. Тогда существует конечное множество $V \subseteq F$ такое, что

$$A \in \mathfrak{V} \iff f(s_1, \dots, s_r) = 0 \text{ при всех } f \in V, s_i \in S, i \in \mathbb{I}_r \quad (16)$$

для любого мультикольца $A \in \overline{\mathfrak{M}}_c$ и любой системы порождающих S группы $\text{Add } A$ (здесь r – произвольное число из $\mathbb{N}_0$ такое, что $V \subseteq F_r$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного множества $W \subseteq F$ мы будем обозначать через $W = 0$ множество тождеств $\{f = 0 : f \in W\}$. Пусть конечное множество $M \subseteq F$ таково, что множество тождеств $M = 0$ определяет многообразие $\mathfrak{V}$ в классе всех мультиколец. Применяя лемму 5.4 и заменяя переменные, мы считаем, что $M \subseteq N$. Выберем согласно лемме 5.9 число $k \in \mathbb{N}_0$ такое, что $L_k(M) \subseteq F_{(c+1)}$. Положим теперь $V = \bigcup_{j=0}^{k-1} L_j(M)$ и покажем, что V удовлетворяет требованиям леммы.

Пусть A – произвольное мультикольцо из $\overline{\mathfrak{M}}_c$ и S – произвольная система порождающих группы $\text{Add } A$. Если $A \in \mathfrak{V}$, то в A истинно множество тождеств $M = 0$ и, следовательно, множество тождеств $L_j(M) = 0$ для любого $j \in \mathbb{N}_0$. В частности, выполнено условие правой части (16). Таким образом, импликация “ $\implies$ ” эквивалентности (16) доказана.

Пусть теперь выполнено условие правой части (16). Покажем индукцией по убывающему параметру j , что в A истинно множество тождеств $L_j(M) = 0$ при $j = k, \dots, 0$. При $j = k$ это верно потому, что $L_k(M) \subseteq F_{(c+1)}$ и $A \in \overline{\mathfrak{M}}_c$. Предположим теперь, что в A истинно множество тождеств $L_{j+1}(M) = 0$ для некоторого $j \in \mathbb{I}_{k-1} \cup \{0\}$. Возьмем произвольный элемент $f \in L_j(M)$. Мы можем считать, что $f \neq 0$ (иначе истинность в A тождества $f = 0$ очевидна). Тогда существует единственное число $n \in \mathbb{N}_0$ такое, что $f \in \text{Nor } \mathbb{I}_n$ (см. лемму 5.5 и замечание 5.1).

Очевидно, что $f \in F_n$. Если $n = 0$, то истинность тождества $f = 0$ в A вытекает из правой части (16). Пусть теперь $n \geq 1$. Тогда $\lambda_{i,n+1}(f) \in L_{j+1}(M)$ для любого $i \in \mathbb{I}_n$ (по определению $L_{j+1}(M)$), следовательно, множество тождеств $\{\lambda_{i,n+1}(f) = 0 : i \in \mathbb{I}_n\}$ истинно в A . Но ввиду определения $\lambda_{i,n+1}$ это означает, что отображение

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n) \quad (a_i \in A, i \in \mathbb{I}_n)$$

дистрибутивно на $\text{Add } A$. Отсюда и из условия правой части (16) вытекает истинность тождества $f = 0$ в A . Таким образом, множество тождеств $L_j(M) = 0$ истинно в A , что и требовалось.

Ввиду утверждения, доказанного в предыдущем абзаце, множество тождеств $M = 0$ истинно в A , так как $M = L_0(M)$. Поэтому $A \in \mathfrak{V}$. Таким образом, импликация “ $\impliedby$ ” эквивалентности (16) справедлива. Лемма доказана.

Следующая теорема является основным результатом настоящего пункта.

ТЕОРЕМА 5.1. Предположим, что сигнатура $\Sigma = \Omega$ конечна. Пусть $\mathfrak{V}$ – конечно базлируемое многообразие мультиколец такое, что группа $\text{Add } A$ нильпотентна для любого $A \in \mathfrak{V}$. Тогда $\mathfrak{V}$ сильно A -распознаваемо в классе всех мультиколец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathfrak{V} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}_c$ для некоторого $c \in \mathbb{N}_0$. Из леммы 5.10 следует, что $\mathfrak{V}$ сильно A -распознаваемо в $\overline{\mathfrak{M}}_c$. В то же время $\overline{\mathfrak{M}}_c$ сильно A -распознаваемо в классе всех мультиколец ввиду леммы 5.1. Отсюда и из замечания 4.1 вытекает сильная A -распознаваемость $\mathfrak{V}$ в классе всех мультиколец. Теорема доказана.

Из теоремы 5.1 нетрудно вывести

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $\mathfrak{U}$ – класс всех линейных алгебр над произвольным ассоциативным коммутативным конечно порожденным кольцом с единицей. При этом сигнатура $\Sigma = \Omega$ может как содержать символ единицы, так и не содержать его. Тогда любое конечно базлируемое подмногообразие $\mathfrak{U}$ сильно A -распознаваемо в $\mathfrak{U}$.

Следствие 5.2 охватывает также и случай колец, которые можно рассматривать как линейные алгебры над кольцом целых чисел (см. п. 2.4).

Хорошо известно (см., например, [10; теорема 34.14]), что любое многообразие нильпотентных групп конечно базлируемо. Поэтому из теоремы 5.1 непосредственно вытекает вариант следствия 5.1 для групп, доказанный ранее другим методом.

§ 6. Некоторые вспомогательные понятия и результаты

В настоящем параграфе предполагается, что сигнатура Σ конечна. Фиксируем некоторый O -алгоритм $\mathcal{A}$.

6.1. Анализ вычисления O -алгоритма. Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$ – алгебраическая система ($n \in \mathbb{N}_1$), $s \in A^+$ и $r \in \mathbb{B}^{\geq \text{NRB}(\mathcal{A}, |s|n)}$. Рассмотрим вычисление O -алгоритма $\mathcal{A}$ на входе s с использованием оракула O_A и последовательности битов r . Предположим, что при этом вычислении $\mathcal{A}$ делает $Q(\mathcal{A}, A, s, r)$ запросов к O_A . Пусть $i \in \mathbb{I}_{Q(\mathcal{A}, A, s, r)}$. Обозначим через $\text{Qu}_i(\mathcal{A}, A, s, r)$ i -й запрос O -алгоритма $\mathcal{A}$ к оракулу O_A при рассматриваемом вычислении. Тогда $\text{Qu}_i(\mathcal{A}, A, s, r) = (\sigma_i, a_i)$ для некоторых $\sigma_i \in \Sigma$ и $a_i \in A^{\text{ar } \sigma_i}$ согласно предположению о корректности всех запросов $\mathcal{A}$ к O_A . Ответ оракула O_A на i -й запрос O -алгоритма $\mathcal{A}$, т.е. $\sigma_i(a_i)$, мы обозначим через h_i . Положим также

$$\text{Ans}_i(\mathcal{A}, A, s, r) = (h_1, \dots, h_i),$$

$$\text{View}_i(\mathcal{A}, A, s, r) = E(s) \cup \{h_k : k \in \{l \in \mathbb{I}_i : \sigma_l \in \Omega\}\}$$

для $i \in \mathbb{I}_{Q(\mathcal{A}, A, s, r)} \cup \{0\}$. Последовательность $\text{Ans}_{Q(\mathcal{A}, A, s, r)}(\mathcal{A}, A, s, r)$ и множество $\text{View}_{Q(\mathcal{A}, A, s, r)}(\mathcal{A}, A, s, r)$ мы будем обозначать через $\text{Ans}(\mathcal{A}, A, s, r)$ и $\text{View}(\mathcal{A}, A, s, r)$ соответственно. Пусть Que_i и Out – не зависящие от A (детерминированные) функции такие, что

$$\text{Que}_i(\mathcal{A}, s, \text{Ans}_{i-1}(\mathcal{A}, A, s, r), r) = \text{Qu}_i(\mathcal{A}, A, s, r), \quad (17)$$

$$\text{Out}(\mathcal{A}, s, \text{Ans}(\mathcal{A}, A, s, r), r) = \mathcal{A}(A, s, r) \quad (18)$$

для всех алгебраических систем $A \subseteq \mathbb{B}^n$ ($n \in \mathbb{N}_1$), последовательностей $s \in A^+$, $r \in \mathbb{B}^{\geq \text{NRB}(\mathcal{A}, |s|n)}$ и чисел $i \in \mathbb{I}_{Q(\mathcal{A}, A, s, r)}$.

Введенные выше обозначения используются в формулировке и доказательстве следующей леммы.

ЛЕММА 6.1. Пусть $i \in \mathbb{I}_{Q(\mathcal{A}, A, s, r)}$. Тогда если $\text{Qu}_i(\mathcal{A}, A, s, r) = (\sigma_i, a_i)$, то $E(a_i) \subseteq \text{View}_{i-1}(\mathcal{A}, A, s, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Выберем $k \in \mathbb{I}_{Q(\mathcal{A}, A, s, r)}$ такое, что при $i \in \mathbb{I}_{k-1}$ утверждение леммы верно, а при $i = k$ — неверно. Пусть $B = \text{View}_{k-1}(\mathcal{A}, A, s, r)$. Очевидно, что $E(a_i) \subseteq \text{View}_{i-1}(\mathcal{A}, A, s, r) \subseteq B$, причем если $\sigma_i \in \Omega$, то $\sigma_i(a_i) \in \text{View}_i(\mathcal{A}, A, s, r) \subseteq B$ для любого $i \in \mathbb{I}_{k-1}$ (ввиду выбора k). Поэтому мы можем превратить B в алгебраическую систему такую, что $\sigma_i(a_i)$ в B совпадает с $\sigma_i(a_i)$ в A при всех $i \in \mathbb{I}_{k-1}$. Тогда индукция по i с использованием формулы (17) показывает, что $\text{Ans}_i(\mathcal{A}, B, s, r) = \text{Ans}_i(\mathcal{A}, A, s, r)$ при $i \in \mathbb{I}_{k-1} \cup \{0\}$. Следовательно, $\text{Qu}_k(\mathcal{A}, B, s, r) = \text{Qu}_k(\mathcal{A}, A, s, r) = (\sigma_k, a_k)$ ввиду (17). В частности, последовательность a_k должна принадлежать $B^{\text{ar } \sigma_k}$ согласно предположению о корректности запросов $\mathcal{A}$. Но это противоречит тому, что $E(a_k) \not\subseteq B$ по выбору k . Лемма доказана.

Ввиду леммы 6.1 можно сказать неформально, что $\text{View}_i(\mathcal{A}, A, s, r)$ — это множество всех элементов A , которые “видел” О-алгоритм $\mathcal{A}$ после i запросов к оракулу O_A при рассматриваемом вычислении. Этим объясняется обозначение $\text{View}_i(\mathcal{A}, A, s, r)$.

6.2. Последовательность RAns. В настоящем пункте мы будем предполагать, что $\Pi = \emptyset$. Таким образом, рассматриваемые алгебраические системы являются универсальными алгебрами. Положим

$$R(\mathcal{A}) = \{(s, \text{Ans}(\mathcal{A}, A, s, r), r) : A \text{ — универсальная алгебра}, \\ A \subseteq \mathbb{B}^n, n \in \mathbb{N}_1, s \in A^+, r \in \mathbb{B}^{\geq \text{NRB}(\mathcal{A}, |s|n)}\}.$$

Пусть $(s, h, r) \in R(\mathcal{A})$, где $s = (s_1, \dots, s_m)$ и $h = (h_1, \dots, h_k)$. Пусть также B — универсальная алгебра и $b = (b_1, \dots, b_m) \in B^m$. Определим элементы $c_i \in B$ при $i \in \mathbb{I}_k$ индукцией по i следующим образом. Предположим, что $c_1, \dots, c_{i-1}$ уже определены. Для удобства введем следующие обозначения:

$$f_l = \begin{cases} s_l & \text{при } l \in \mathbb{I}_m, \\ h_{l-m} & \text{при } l \in \mathbb{I}_{m+i-1} \setminus \mathbb{I}_m \end{cases}$$

и

$$g_l = \begin{cases} b_l & \text{при } l \in \mathbb{I}_m, \\ c_{l-m} & \text{при } l \in \mathbb{I}_{m+i-1} \setminus \mathbb{I}_m. \end{cases}$$

Из формулы (17) и леммы 6.1 следует, что если

$$(\omega_i, (a_{i,1}, \dots, a_{i, \text{ar } \omega_i})) = \text{Que}_i(\mathcal{A}, s, (h_1, \dots, h_{i-1}), r),$$

то $a_{i,j} \in \{f_1, \dots, f_{m+i-1}\}$ для любого $j \in \mathbb{I}_{\text{ar } \omega_i}$. Для каждого такого j положим $l_{i,j} = \min\{l \in \mathbb{I}_{m+i-1} : a_{i,j} = f_l\}$. В качестве c_i мы выбираем $\omega_i(g_{l_{i,1}}, \dots, g_{l_{i, \text{ar } \omega_i}})$ в B .

Положим

$$\text{RAns}(\mathcal{A}, s, h, r, B, b) = (c_1, \dots, c_k),$$

где элементы c_i ($i \in \mathbb{I}_k$) построены выше. Следующие две леммы проверяются непосредственно.

ЛЕММА 6.2. Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$ – универсальная алгебра ($n \in \mathbb{N}_1$) и $s \in A^+$. Тогда

$$\text{Ans}(\mathcal{A}, A, s, r) = h \iff \text{PAns}(\mathcal{A}, s, h, r, A, s) = h$$

для всех h и r таких, что $(s, h, r) \in R(\mathcal{A})$.

ЛЕММА 6.3. Пусть B, C – универсальные алгебры, $b \in B^+$, φ – гомоморфизм из B в C и $(s, h, r) \in R(\mathcal{A})$, причем $|s| = |b|$. Тогда

$$\varphi(\text{PAns}(\mathcal{A}, s, h, r, B, b)) = \text{PAns}(\mathcal{A}, s, h, r, C, \varphi(b)).$$

Из лемм 6.2 и 6.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $A \subseteq \mathbb{B}^n$, B – универсальные алгебры ($n \in \mathbb{N}_1$), $b \in B^+$ и φ – гомоморфизм из B в A . Тогда

$$\text{Ans}(\mathcal{A}, A, \varphi(b), r) = h \iff \varphi(\text{PAns}(\mathcal{A}, \varphi(b), h, r, B, b)) = h$$

для всех h и r таких, что $(\varphi(b), h, r) \in R(\mathcal{A})$.

§ 7. Примеры конечно базлируемых многообразий, не являющихся G-распознаваемыми и R-распознаваемыми в некотором классе полугрупп с нулем

В настоящем параграфе в качестве $\mathcal{U}$ мы выбираем класс всех конечных нильпотентных полугрупп с нулем, порожденных не более чем пятью элементами. При этом сигнатура может как содержать символ нуля, так и не содержать его. Под нильпотентностью полугруппы S с нулем мы понимаем существование числа $m \in \mathbb{N}_1$ (зависящего от S) такого, что $s_1 \cdots s_m = 0$ для всех $s_1, \dots, s_m \in S$. Фиксируем $e \in \mathbb{N}_2$. Если сигнатура содержит символ нуля, то в качестве $\mathfrak{V}$ мы берем многообразие, определенное в многообразии всех полугрупп с нулем тождеством $t_1^e = 0$. Если же сигнатура не содержит символа нуля, то пусть многообразие $\mathfrak{V}$ определяется в многообразии всех полугрупп тождеством $t_1^e t_2 = t_1^e$ или тождеством $t_2 t_1^e = t_1^e$. Очевидно, что в классе всех полугрупп с нулем (символ которого есть в сигнатуре) как тождество $t_1^e t_2 = t_1^e$, так и тождество $t_2 t_1^e = t_1^e$ эквивалентно тождеству $t_1^e = 0$. Целью настоящего параграфа является доказательство того, что $\mathfrak{V}$ не G-распознаваемо и не R-распознаваемо в $\mathcal{U}$.

Как и в § 6, фиксируем произвольный О-алгоритм $\mathcal{A}$. Выберем алфавит $Z = \{z_1, \dots, z_5\}$ из пяти элементов и обозначим через Z_0 алфавит $\{z_1, z_2, z_3\}$. Последовательности из Z^* будут записываться без скобок и запятых (предполагается, что это не мешает однозначно восстанавливать по произвольной такой последовательности ее элементы). Мы называем элементы Z *буквами*, а элементы Z^* – *словами* (в алфавите Z). Через uv , где $u, v \in Z^*$, будет обозначаться конкатенация слов u и v . Как обычно, слово $u \in Z^*$ называется *подсловом* слова $v \in Z^*$, если $v = v_0 u v_1$ для некоторых $v_0, v_1 \in Z^*$. Всякое подслово слова $v \in Z^*$, отличное от v , называется *собственным подсловом* v . Мы будем рассматривать Z^+ как (свободную) полугруппу, умножением в которой является конкатенация.

Положим $K = \{w^e : w \in Z^+\}$. Введем также следующие обозначения:

- 1) U – множество всех слов из Z^+ , все подслова которых не принадлежат K ;

- 2) V – множество всех слов из Z^+ , некоторые собственные подслова которых принадлежат K ;
- 3) W – множество всех слов из K , все собственные подслова которых не принадлежат K .

Очевидно, что Z^+ есть объединение попарно не пересекающихся множеств U , V и W . Через U_i и W_i , где $i \in \mathbb{N}_1$, мы будем обозначать множество всех слов длины не более i из U и W соответственно.

Пусть $l \in \mathbb{N}_e$ и $w \in W_l$ (при $l \in \mathbb{I}_{e-1}$ множество W_l пусто). Определим полугруппы A_w и B как факторполугруппы Риса следующим образом:

$$\begin{aligned} A_w &= Z^+ / (Z^{\geq l+1} \cup V \cup (W \setminus \{w\})), \\ B &= Z^+ / (Z^{\geq l+1} \cup V \cup W). \end{aligned}$$

Напомним, что факторполугруппа Риса полугруппы S по ее идеалу I – это факторполугруппа S по конгруэнции, классами которой являются I (если он непуст) и $\{s\}$ при $s \in S \setminus I$. Корректность определения A_w и B следует из того, что $V \cup W'$ является идеалом в полугруппе Z^+ для любого множества $W' \subseteq W$. Через δ_w , ε и ψ_w мы будем обозначать естественные гомоморфизмы Z^+ на A_w , Z^+ на B и A_w на B соответственно. В частности, $\psi_w(\delta_w(f)) = \varepsilon(f)$ для всех $f \in Z^+$.

Положим $n = \lceil (l+1) \log 5 \rceil - 2$. Тогда очевидно, что

$$|B| \leq |A_w| \leq |Z^+ / Z^{\geq l+1}| = \sum_{i=0}^l 5^i = \frac{5^{l+1} - 1}{4} < \frac{5^{l+1}}{4} \leq 2^n. \quad (19)$$

Выберем инъективные отображения $\xi_w: A_w \rightarrow \mathbb{B}^n$ и $\eta: B \rightarrow \mathbb{B}^n$ такие, что $\xi_w(a) = \eta(\psi_w(a))$ при $a \in A_w \setminus \{\delta_w(w)\}$ и $\xi_w(\delta_w(w)) = d$ не зависит от w . Возможность такого выбора вытекает из (19) и инъективности ψ_w на $A_w \setminus \{\delta_w(w)\}$. Нам потребуется следующее очевидное

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Пусть $f \in Z^+$, причем $f \neq w$. Тогда очевидно, что $\delta_w(f) \neq \delta_w(w)$. Поэтому

$$\xi_w(\delta_w(f)) = \eta(\psi_w(\delta_w(f))) = \eta(\varepsilon(f)).$$

Пусть $m \in \mathbb{N}_1$. Выберем некоторое число $k \in \mathbb{N}_{\text{NRB}(\mathcal{A}, mn)}$. Для произвольных последовательностей $g \in (Z^+ \setminus \{w\})^m$ и $r \in \mathbb{B}^k$ положим

$$D(g, r) = E(\text{PAns}(\mathcal{A}, \eta(\varepsilon(g))), \text{Ans}(\mathcal{A}, \eta(B), \eta(\varepsilon(g)), r), r, Z^+, g).$$

Пусть также $\tilde{w} \in_{\mathbb{U}} W_l$, $\tilde{r} \in_{\mathbb{U}} \mathbb{B}^k$ и $\tilde{g}$ – какая-либо случайная величина, принимающая значения на множестве $(Z^+ \setminus W_l)^m$.

ЛЕММА 7.1. Пусть $g \in (Z^+ \setminus \{w\})^m$ и $r \in \mathbb{B}^k$. Тогда если $w \notin D(g, r)$, то

$$\mathcal{A}(\xi_w(A_w), \xi_w(\delta_w(g)), r) = \mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(g)), r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости

$$s = \eta(\varepsilon(g)) \quad \text{и} \quad h = \text{Ans}(\mathcal{A}, \eta(B), s, r).$$

Тогда

$$\eta(\varepsilon(\text{PAns}(\mathcal{A}, s, h, r, Z^+, g))) = h \quad (20)$$

ввиду следствия 6.1.

По условию леммы $w \notin E(g)$ и $w \notin E(\text{PAns}(\mathcal{A}, s, h, r, Z^+, g))$. Следовательно,

$$\xi_w(\delta_w(g)) = \eta(\varepsilon(g)) = s, \quad (21)$$

$$\xi_w(\delta_w(\text{PAns}(\mathcal{A}, s, h, r, Z^+, g))) = \eta(\varepsilon(\text{PAns}(\mathcal{A}, s, h, r, Z^+, g))) = h \quad (22)$$

ввиду замечания 7.1 и равенства (20). Из равенств (22), (21) и следствия 6.1 вытекает, что

$$\text{Ans}(\mathcal{A}, \xi_w(A_w), \xi_w(\delta_w(g)), r) = h = \text{Ans}(\mathcal{A}, \eta(B), \eta(\varepsilon(g)), r). \quad (23)$$

Таким образом,

$$\mathcal{A}(\xi_w(A_w), \xi_w(\delta_w(g)), r) = \text{Out}(\mathcal{A}, s, h, r) = \mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(g)), r)$$

ввиду равенств (18), (21) и (23). Лемма доказана.

ЛЕММА 7.2. Для произвольного $l \in \mathbb{N}_e$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\tilde{w} \in D(\tilde{g}, \tilde{r})) \leq \frac{\text{NOQ}(\mathcal{A}, mn)}{|W_l|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = \{D(g, r) : g \in (Z^+ \setminus W_l)^m, r \in \mathbb{B}^k\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{w} \in D(\tilde{g}, \tilde{r})) &= \sum_{S \in M} \mathbf{P}(\tilde{w} \in S) \mathbf{P}(D(\tilde{g}, \tilde{r}) = S) \\ &= \sum_{S \in M} \frac{|S \cap W_l|}{|W_l|} \mathbf{P}(D(\tilde{g}, \tilde{r}) = S) \leq \frac{\text{NOQ}(\mathcal{A}, mn)}{|W_l|}, \end{aligned}$$

так как $|S \cap W_l| \leq |S| \leq \text{NOQ}(\mathcal{A}, mn)$ для любого $S \in M$. Лемма доказана.

ЛЕММА 7.3. Пусть $u \in U \cap Z_0^+$. Тогда $(z_4 u z_5)^e \in W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости $w_1 = (z_4uz_5)^e$. Очевидно, что $w_1 \in K$. Пусть w_0 – подслово w_1 , принадлежащее K . Если ни z_4 , ни z_5 не входит в w_0 , то w_0 является подсловом u , что противоречит условию $u \in U$. Поэтому z_{4+i} входит в w_0 для некоторого $i \in \mathbb{B}$. Очевидно, что число вхождений каждого элемента из Z в слово w_0 кратно e , так как w_0 является e -й степенью некоторого слова из Z^+ . Следовательно, z_{4+i} входит в w_0 не менее e раз. Это значит, что w_0 содержит все e вхождений z_{4+i} в w_1 . Отсюда следует, что z_{5-i} также входит в w_0 , так как между первым и вторым вхождением z_{4+i} в w_1 имеется вхождение z_{5-i} . Рассуждая аналогично предыдущему, мы получаем, что w_0 содержит все e вхождений z_{5-i} в слово w_1 . В частности, w_0 содержит первый и последний элементы слова w_1 (равные соответственно z_4 и z_5). Следовательно, $w_0 = w_1$ и $w_1 \in W$. Лемма доказана.

Пусть $i \in \mathbb{N}_1$. Очевидно, что $|U \cap Z_0^i|$ не меньше числа слов длины i в алфавите Z_0 , которые не содержат подслов, являющихся непустыми квадратами (так как $e \geq 2$). Для последнего числа известна нижняя оценка вида d_0^i , где $d_0 > 1$. В качестве такого числа d_0 можно взять $2^{1/17}$ (см. [17]) или $((5 + \sqrt{5})/2)^{1/18}$ (см. [18]). Следовательно, мы можем выбрать экспоненциальную функцию γ такую, что $|U \cap Z_0^i| \geq \gamma(i)$ для всех $i \in \mathbb{N}_1$.

ЛЕММА 7.4. *Существует экспоненциальная функция β такая, что*

$$\text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \xi_{\tilde{w}}(\delta_{\tilde{w}}(\tilde{g}))), \mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(\tilde{g})))) \leq \frac{\text{NOQ}(\mathcal{A}, mn)}{\beta(n)}$$

при любом $l \in \mathbb{N}_{3e}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 7.1, 2.1 (п. 4)) и 7.2 следует, что

$$\begin{aligned} & \text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \xi_{\tilde{w}}(\delta_{\tilde{w}}(\tilde{g}))), \mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(\tilde{g})))) \\ & \leq P(\tilde{w} \in D(\tilde{g}, \tilde{r})) \leq \frac{\text{NOQ}(\mathcal{A}, mn)}{|W_l|}. \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, ввиду леммы 7.3 $u \mapsto (z_4uz_5)^e$ – инъективное отображение из $U \cap Z_0^i$ в $W \cap Z^{(i+2)e}$ для произвольного $i \in \mathbb{N}_1$. Поэтому

$$|W_l| \geq |W \cap Z^{\lfloor l/e \rfloor e}| \geq |U \cap Z_0^{\lfloor l/e \rfloor - 2}| \geq \gamma\left(\left\lfloor \frac{l}{e} \right\rfloor - 2\right) \geq \beta(n) \quad (25)$$

для некоторой экспоненциальной функции β . Требуемое в лемме неравенство непосредственно вытекает из (24) и (25). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7.1. *Предположим, что существуют функции $\varphi_1: \bigcup_S \text{Gen } S \rightarrow \mathbb{R}$ и $\kappa_1: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, удовлетворяющие для произвольной полугруппы $S \subseteq \mathbb{B}^{n'}$ из $\mathfrak{U}$ ($n' \in \mathbb{N}_1$) и произвольной последовательности $s \in \text{Gen } S$ следующим условиям:*

$$\begin{aligned} S \in \mathfrak{V} & \implies P(\mathcal{A}(S, s) = 1) \geq \varphi_1(s) + \kappa_1(|s|n'), \\ S \notin \mathfrak{V} & \implies P(\mathcal{A}(S, s) = 1) \leq \varphi_1(s) - \kappa_1(|s|n'). \end{aligned}$$

Объединение здесь берется по всевозможным полугруппам $S \subseteq \mathbb{B}^{n'}$ из $\mathfrak{U}$ ($n' \in \mathbb{N}_1$). Тогда существует экспоненциальная функция α_1 такая, что

$$\text{NOQ}(\mathcal{A}, i) \geq \alpha_1(i) \kappa_1(i)$$

для любого числа i вида $5(\lfloor (l+1) \log 5 \rfloor - 2)$, где $l \in \mathbb{N}_{3e}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $m = 5$ и считаем, что случайная величина $\tilde{g}$ всегда принимает значение $z = (z_1, \dots, z_5)$. Выберем экспоненциальную функцию β согласно лемме 7.4. Очевидно, что $A_w, B \in \mathfrak{U}$, $A_w \notin \mathfrak{V}$, $B \in \mathfrak{V}$, $\xi_w(\delta_w(z)) = \eta(\varepsilon(z)) \in \text{Gen } \xi_w(A_w) \cap \text{Gen } \eta(B)$ для всех $w \in W_l$ (см. замечание 7.1). Поэтому из условия леммы и выбора β следует, что

$$\begin{aligned} 2\kappa_1(i) &\leq |\mathbf{P}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \xi_{\tilde{w}}(\delta_{\tilde{w}}(z))) = 1) - \mathbf{P}(\mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(z))) = 1)| \\ &\leq \text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \xi_{\tilde{w}}(\delta_{\tilde{w}}(z))), \mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(z)))) \\ &\leq \frac{\text{NOQ}(\mathcal{A}, i)}{\beta(n)} \leq \frac{\text{NOQ}(\mathcal{A}, i)}{\beta'(i)} \end{aligned}$$

для некоторой экспоненциальной функции β' . Утверждение теоремы непосредственно вытекает из последнего неравенства. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7.2. *Предположим, что существуют функции $\varphi_2: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa_2: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и $\rho: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$, удовлетворяющие для произвольной полугруппы $S \subseteq \mathbb{B}^{n'}$ из $\mathfrak{U}$ ($n' \in \mathbb{N}_1$) следующим условиям:*

$$\begin{aligned} S \in \mathfrak{V} &\implies \mathbf{P}(\mathcal{A}(S, \tilde{s}) = 1) \geq \varphi_2(n') + \kappa_2(n'), \\ S \notin \mathfrak{V} &\implies \mathbf{P}(\mathcal{A}(S, \tilde{s}) = 1) \leq \varphi_2(n') - \kappa_2(n'), \end{aligned}$$

в которых $\tilde{s} \in_{\mathbb{U}} S^{\rho(n')}$. Тогда существует экспоненциальная функция α_2 такая, что

$$\rho(n) + \text{NOQ}(\mathcal{A}, \rho(n)n) \geq \alpha_2(n)\kappa_2(n)$$

для любого числа n вида $\lceil (l+1) \log 5 \rceil - 2$, где $l \in \mathbb{N}_{3e}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{f}_0 \in_{\mathbb{U}} \eta(B) \cup \{d\}$ и $\tilde{g}_0 \in_{\mathbb{U}} U_l \cup \{z_1^{l+1}\}$. Тогда $\eta(\varepsilon(\tilde{g}_0)) \in_{\mathbb{U}} \eta(B)$, так как ε и η инъективно отображают $U_l \cup \{z_1^{l+1}\}$ на B и B на $\eta(B)$ соответственно. Непосредственно проверяется, что

$$\text{dist}(\tilde{f}_0, \eta(\varepsilon(\tilde{g}_0))) = \frac{1}{|\eta(B)| + 1} = \frac{1}{|U_l| + 2} \leq \frac{1}{\gamma(l)} \leq \frac{1}{\gamma'(n)} \quad (26)$$

для некоторой экспоненциальной функции γ' (так как $d \notin \eta(B)$, $|\eta(B)| = |U_l \cup \{z_1^{l+1}\}| = |U_l| + 1$ и $|U_l| + 2 \geq |U_l| \geq |U \cap Z_0^l| \geq \gamma(l)$).

Положим $\tilde{f} = \tilde{f}_0^{(\rho(n))}$ и $\tilde{g} = \tilde{g}_0^{(\rho(n))}$. Тогда из замечания 7.1, леммы 2.1 (пп. 3), 2), 5)) и неравенства (26) следует, что

$$\begin{aligned} &\text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \tilde{f}), \mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \xi_{\tilde{w}}(\delta_{\tilde{w}}(\tilde{g})))) \\ &= \text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \tilde{f}, \tilde{r}), \mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \eta(\varepsilon(\tilde{g})), \tilde{r})) \\ &\leq \text{dist}((\tilde{w}, \tilde{f}, \tilde{r}), (\tilde{w}, \eta(\varepsilon(\tilde{g})), \tilde{r})) \\ &= \text{dist}(\tilde{f}, \eta(\varepsilon(\tilde{g}))) \leq \rho(n) \text{dist}(\tilde{f}_0, \eta(\varepsilon(\tilde{g}_0))) \leq \frac{\rho(n)}{\gamma'(n)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть $w \in W_l$. Из замечания 7.1 вытекает, что

$$\xi_w(A_w \setminus \{\delta_w(w)\}) = \xi_w(\delta_w(Z^+ \setminus \{w\})) = \eta(\varepsilon(Z^+ \setminus \{w\})) = \eta(\varepsilon(Z^+)) = \eta(B)$$

(равенство здесь понимается как совпадение множеств). Следовательно, носитель $\xi_w(A_w)$ совпадает с объединением носителя $\eta(B)$ и множества $\{d\}$. Кроме того, $A_w, B \in \mathfrak{U}$, $A_w \notin \mathfrak{V}$ и $B \in \mathfrak{V}$. Поэтому из условия леммы и п. 1) леммы 2.1 следует, что

$$\begin{aligned} 2\kappa_2(n) &\leq |\mathbf{P}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \tilde{f}) = 1) - \mathbf{P}(\mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(\tilde{g}))) = 1)| \\ &\leq \text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \tilde{f}), \mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(\tilde{g})))) \\ &\leq \text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \tilde{f}), \mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \xi_{\tilde{w}}(\delta_{\tilde{w}}(\tilde{g})))) \\ &\quad + \text{dist}(\mathcal{A}(\xi_{\tilde{w}}(A_{\tilde{w}}), \xi_{\tilde{w}}(\delta_{\tilde{w}}(\tilde{g}))), \mathcal{A}(\eta(B), \eta(\varepsilon(\tilde{g}))))). \end{aligned} \quad (28)$$

Выберем экспоненциальную функцию β согласно лемме 7.4. Тогда из неравенств (28), (27) и выбора β следует неравенство

$$2\kappa_2(n) \leq \frac{\rho(n)}{\gamma'(n)} + \frac{\text{NOQ}(\mathcal{A}, \rho(n)n)}{\beta(n)}.$$

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из последнего неравенства. Теорема доказана.

Из теорем 7.1, 7.2 и неравенства (2) нетрудно вывести

СЛЕДСТВИЕ 7.1. *Многообразие $\mathfrak{V}$ не является ни G -распознаваемым, ни R -распознаваемым в классе $\mathfrak{U}$.*

Список литературы

1. Babai L., Szemerédi E. On the complexity of matrix group problems. I // Proc. 25th Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science. Singer Island, Florida, October 24–26, 1984, 1984. P. 229–240.
2. Shoup V. Lower bounds for discrete logarithms and related problems // Advances in Cryptology – EUROCRYPT'97. Proc. Internat. Conf. on the Theory and Application of Cryptographic Techniques. Konstanz, Germany, May 11–15, 1997. Berlin: Springer-Verlag, 1997. P. 256–266. (Lecture Notes in Comput. Sci. V. 1233.)
3. Нечаев В. И. К вопросу о сложности детерминированного алгоритма для дискретного логарифма // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №2. С. 91–101.
4. Boneh D., Lipton R. J. Algorithms for black-box fields and their application to cryptography // Advances in Cryptology – CRYPTO'96. Proc. 16th Annual Internat. Cryptology Conf. Santa Barbara, California, August 18–22, 1996. Berlin: Springer-Verlag, 1996. P. 283–297. (Lecture Notes in Comput. Sci. V. 1109.)
5. Babai L., Cooperman G., Finkelstein L., Luks E., Seress Á. Fast Monte Carlo algorithms for permutation groups // Proc. 23rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing. New Orleans, Louisiana, May 6–8, 1991, 1991. P. 90–100; // J. Comput. System Sci. 1995. V. 50. №2. P. 296–308.
6. Babai L. Local expansion of vertex-transitive graphs and random generation in finite groups // Proc. 23rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing. New Orleans, Louisiana, May 6–8, 1991, 1991. P. 164–174.
7. Impagliazzo R., Naor M. Efficient cryptographic schemes provably as secure as subset sum // J. Cryptology. 1996. V. 9. №4. P. 199–216.
8. Бахтурин Ю. А., Ольшанский А. Ю. Тождества // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1988. С. 117–240.

9. *Goldreich O.* Introduction to complexity theory. Lecture notes for a two-semester course [1999] // http://www.wisdom.weizmann.ac.il/home/oded/public_html/cc.html.
10. *Гейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
11. *Скорняков Л. А.* Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
12. *Шеметков Л. А., Скиба А. С.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
13. *Китаев А., Шень А., Вялый М.* Классические и квантовые вычисления. М.: МЦНМО – ЧеРо, 1999.
14. *Erdős P., Rényi A.* Probabilistic methods in group theory // J. Anal. Math. 1965. V. 14. P. 127–138.
15. *Vaughan-Lee M. R.* Abelian by nilpotent varieties // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1970. V. 21. № 82. P. 193–202.
16. *Vaughan-Lee M. R.* Abelian-by-nilpotent varieties of Lie algebras // J. London Math. Soc. (2). 1975. V. 11. № 3. P. 263–266.
17. *Ekhad S. B., Zeilberger D.* There are more than $2^{n/17}$ n -letter ternary square-free words // J. Integer Sequences (electronic). 1998. V. 1. Article 98.1.9. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/JIS/zeil.html>.
18. *Колпаков Р. М.* О числе трехбуквенных бесквадратных и двухбуквенных бескубных слов // Тезисы докладов XII Международной конференции “Проблемы теоретической кибернетики”. Нижний Новгород, 17–22 мая 1999 г. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. С. 106.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: anokhin@mcsme.ru

Поступила в редакцию
13.11.2000