Общероссийский математический портал

А. И. Булгаков, В. В. Скоморохов, Аппроксимация дифференциальных включений, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 2, 35–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:26:36

УДК 517.911

А. И. Булгаков, В. В. Скоморохов

Аппроксимация дифференциальных включений

В работе рассматриваются методы аппроксимации дифференциального включения, правая часть которого удовлетворяет условиям Каратеодори. Получены необходимые и достаточные условия того, что аппроксимация дифференциального включения является устойчивой относительно внутренних и внешних возмущений, т.е. “небольшие” изменения (в смысле расстояния по Хаусдорфу) правой части включения приводят к “небольшому” изменению множества решений.

Библиография: 20 названий.

Понятие приближенного решения (δ -решения) дифференциального включения введено А. Ф. Филипповым (см. [1]). Это определение имеет важное значение для изучения дифференциальных включений с выпуклозначной и полунепрерывной сверху правой частью, поскольку пределы сходящихся последовательностей приближенных решений являются решениями (см. [1]). В настоящей работе для изучения аппроксимаций дифференциальных включений рассматривается несколько другое определение понятия приближенного решения. Отличие сформулированного здесь решения от приближенного решения по Филиппову заключается в том, что значения многозначных отображений, определяющие “приближенные дифференциальные включения”, не “овыпукляются”. Как оказалось, такое определение приближенного решения полезно для исследования аппроксимаций дифференциальных включений с невыпуклой правой частью. Оно, прежде всего, позволяет доказать, что аппроксимация включений с невыпуклой правой частью может быть не устойчивой операцией, поскольку “небольшие” изменения правой части могут привести к существенному изменению множеств приближенных решений. Кроме того, это определение позволяет получить необходимое и достаточное условие того, что аппроксимация является устойчивой. В работе это условие носит название принципа плотности. Отметим также, что здесь исследование проводится на основе свойств квазирешений дифференциальных включений. Понятие квазирешения (квазитраектории) включения дано Важевским (T. Wazewski, см. [2], [1]).

Пусть $\mathbb{R}^n$ – пространство n -мерных вектор-столбцов с нормой $|\cdot|$; $\text{comp}[\mathbb{R}^n]$ – множество всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $B[u, r]$ – замкнутый шар пространства $\mathbb{R}^n$ с центром в точке u и радиусом $r > 0$; $B[u, 0] \equiv \{u\}$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\overline{V}$ замыкание множества V , через $\text{co } V$ – выпуклую оболочку множества V ; $V^\varepsilon \equiv \bigcup_{u \in V} B[u, \varepsilon]$, если $\varepsilon > 0$, и $V^0 \equiv \overline{V}$; $\|V\| = \sup\{|u|: u \in V\}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00140).

Пусть $h^+[F_1; F_2] \equiv \sup\{\rho[y, F_2] : y \in F_1\}$, где $\rho[\cdot, \cdot]$ – расстояние между точкой и множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$, $h[F_1, F_2] = \max\{h^+[F_1; F_2], h^+[F_2; F_1]\}$ – хаусдорфово расстояние между множествами F_1 и F_2 , содержащимися в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Обозначим через $C^n[a, b]$ пространство непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$; $L^n[a, b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_L = \int_a^b |x(s)| ds$.

Непрерывность многозначных отображений понимается по Хаусдорфу. Измеримость однозначных функций понимаем по Лебегу (см. [3]), измеримость многозначных отображений понимаем в смысле [4].

Будем говорить, что отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия:

- а) при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x)$ измеримо;
- б) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $F(t, \cdot)$ непрерывно;
- с) для каждого ограниченного множества $V \subset \mathbb{R}^n$ найдется такая функция $\beta_V(\cdot) \in L^1[a, b]$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in V$ выполняется неравенство $\|F(t, x)\| \leq \beta_V(t)$.

Обозначим через $S(F(\cdot))$ множество всех измеримых селекторов (ветвей) отображения $F : [a, b] \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$. Отображение со $F : [a, b] \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ определим равенством $(\text{co } F)(t) = \text{co } F(t)$.

Обозначим через $K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ множество всех функций $\eta : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, обладающих следующими свойствами: при каждом $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ функция $\eta(\cdot, x, \delta)$ измерима; при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $\delta \in [0, \infty)$ функция $\eta(t, \cdot, \delta)$ непрерывна; для каждого $U \in \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0, \infty)$ существует такая суммируемая функция $m_{U, \delta} : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in U$ и $\tau \in [0, \delta]$ выполняется неравенство $\eta(t, x, \tau) \leq m_{U, \delta}(t)$; при почти всех $t \in [a, b]$ и каждого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \eta(t, x, \delta) = 0$, $\eta(t, x, 0) = 0$. Если для каждого $U \in \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0, \infty)$ найдется такая функция $m_{U, \delta}(\cdot)$, определяющая множество $K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, что она представляет собой константу, то множество таких функций $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ обозначим через $\bar{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Обозначим через $P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ множество всех функций $\eta : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, обладающих свойствами из класса функций $K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, а также удовлетворяющих следующим условиям: для каждого $U \in \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in (0, \infty)$ найдутся такие числа $r(U, \delta) > 0$ и $\beta(U, \delta) \geq 0$, что при почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in U$ число $r(U, \delta)$ удовлетворяет неравенству $r(U, \delta) \leq \eta(t, x, \delta)$, а для числа $\beta(U, \delta)$ при почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in U$ и $\tau \in [0, \delta]$ имеет место оценка $\eta(t, x, \tau) \leq \beta(U, \delta)$.

§ 1. Аппроксимация с внешними возмущениями

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

где отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Под решением включения (1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую этому включению при почти всех $t \in [a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Абсолютно непрерывная функция $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ является *квазирешением включения* (1), если найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, обладающая свойством: $x_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$; для любого $i = 1, 2, \dots$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется включение

$$\dot{x}_i(t) \in F(t, x(t)). \quad (2)$$

Далее, будем считать, что если $x(\cdot)$ – квазирешение и $x(\cdot) \in V \subset C^n[a, b]$, то найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, обладающая свойством из определения квазирешения включения (1), что для любого $i = 1, 2, \dots$ выполняется включение $x_i(\cdot) \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что определение квазирешения включения (1), сформулированное выше, несколько отличается от определения квазитраектории по Важевскому (см. [1], [2], [5]) наличием условия (2). Понятия квазирешения включения (1) и квазитраектории по Важевскому эквивалентны, если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ непрерывно по второму аргументу. В то же время для квазирешений можно доказать основное свойство квазитраекторий (см. [1], [2], [5]) при более общих предположениях, не предполагая непрерывность $F(\cdot, \cdot)$ по второму аргументу. Для этого достаточно предположить суперпозиционную измеримость отображения $F(\cdot, \cdot)$ (см. [6], [7]).

Скажем, что многозначное отображение $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ аппроксимирует отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, если найдется такая функция $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ выполняется оценка

$$h[F(t, x), \tilde{F}(t, x, \delta)] \leq \xi(t, x, \delta). \quad (3)$$

Отображение $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ назовем *аппроксимирующим отображением* $F(\cdot, \cdot)$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ в неравенстве (3) определяет степень близости значения $\tilde{F}(t, x, \delta)$ в точке $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ к значению $F(t, x)$ для каждого фиксированного $\delta \in [0, \infty)$. Эту функцию $\xi(\cdot, \cdot, \cdot)$ будем называть *степенью аппроксимации отображения* $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ *отображением* $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ или просто степенью аппроксимации.

Отметим, что если для отображения $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ функция $\tilde{\xi}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ определена равенством

$$\tilde{\xi}(t, x, \delta) = h[F(t, x), \tilde{F}(t, x, \delta)] \quad (4)$$

и эта функция принадлежит множеству $K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, то отображение $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ аппроксимирует отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$. При этом функция $\xi(\cdot, \cdot, \cdot)$, определенная равенством (4), является точной нижней гранью всех функций $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, удовлетворяющих при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ неравенству (3).

Поэтому функцию $\tilde{\xi}(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ для отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ можно считать “идеальной” степенью аппроксимации. Отметим, что иногда установить “идеальную” степень аппроксимации $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ для аппроксимирующего отображения $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ сложно. Гораздо проще найти “какую-нибудь” степень аппроксимации $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, тем более, что во многих случаях этого достаточно, чтобы установить те или иные свойства множества решений дифференциального включения (см. ниже теоремы 1–6).

Отметим, что из определения аппроксимирующего отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ вытекает оценка

$$\|\tilde{F}(t, x, \delta)\| \leq \|F(t, x)\| + \xi(t, x, \delta). \quad (5)$$

Поэтому для каждого $U \in \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0, \infty)$ для отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ существует такая суммируемая функция $m_{U, \delta}: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in U$ и $\tau \in [0, \delta]$ имеет место неравенство $\|\tilde{F}(t, x, \tau)\| \leq m_{U, \delta}(t)$.

Пару $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ будем называть *аппроксимацией отображения* $F(\cdot, \cdot)$ или просто аппроксимацией. Если $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) = 0$, то в этом случае для любых $(t, x, \delta) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ справедливо равенство $\tilde{F}(t, x, \delta) = F(t, x)$ и поэтому $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), 0)$ будем называть “идеальной аппроксимацией”. Пару $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ будем называть *аппроксимацией вложением*, если при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ выполняется включение $F(t, x) \subset \tilde{F}(t, x, \delta)$.

Для заданной степени аппроксимации $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ отображение $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, аппроксимирующее отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, можно построить, например, взяв для каждого $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ конечное множество всех центров, принадлежащих значению $F(t, x)$, таких, что шары с этими центрами, имеющие равные радиусы, покрывают множество $F(t, x)$. При этом значение $\xi(t, x, \delta)$ является радиусами этих шаров или оценкой этих радиусов. Данный пример показывает, что каждое значение многозначного отображения $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, аппроксимирующее отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, при каждом $\delta \in [0, \infty)$ может иметь достаточно “простую структуру”. Будем считать, что $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ определяет способ или метод аппроксимации отображения $F(\cdot, \cdot)$.

Отметим, что сами значения аппроксимирующего отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ могут вычисляться с некоторой степенью точности (например, в рассмотренном выше примере центры шаров, покрывающие значения $F(t, x)$, $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$), которую можно задать некоторой функцией $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $Q_\eta: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_\eta(t, x, \delta) = \tilde{F}(t, x, \delta)^{\eta(t, x, \delta)}, \quad (6)$$

где функция $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ в каждой точке $(t, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \in [0, \infty)$ определяет погрешность вычисления значений аппроксимирующего отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$, причем эти погрешности могут быть неравномерны относительно фазовой переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, функцию $\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ будем называть *радиусом внешних возмущений аппроксимирующего отображения* $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ или просто радиусом внешних возмущений.

Заметим, что значения отображения $Q_\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$, заданного равенством (6), могут быть невыпуклыми множествами даже в том случае, когда значения отображения $F(\cdot, \cdot)$ – выпуклые множества. Кроме того, из определения отображения $Q_\eta(\cdot, \cdot, \cdot)$ и неравенства (3) при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ следует оценка

$$h[F(t, x), Q_\eta(t, x, \delta)] \leq \xi(t, x, \delta) + \eta(t, x, \delta). \quad (7)$$

Таким образом, из оценки (7) вытекает, что для каждой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} h[F(t, x), Q_\eta(t, x, \delta)] = 0. \quad (8)$$

Поэтому для заданной аппроксимации $(\widetilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ все отображения $Q_\eta: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, определенные равенством (6) и зависящие от функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, близки (в смысле равенства (8)) к отображению $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, определяющему дифференциальное включение (1).

Пусть $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta \in [0, \infty)$ дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Q_\eta(t, x(t), \delta), \quad t \in [a, b], \quad (9)$$

где отображение $Q_\eta: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ задано равенством (6). Отметим, что правая часть дифференциального включения (9) может быть и невыпуклозначной. Дифференциальное включение (9) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (1) с *внешними возмущениями*.

Каждое решение $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (9) будем называть δ -*решением* (приближенным решением с точностью до δ или просто приближенным решением) *включения* (1).

Рассмотрим также дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in \text{co } F(t, x(t)), \quad t \in [a, b]. \quad (10)$$

Пусть $V \subset C^n[a, b]$. Обозначим через $H(V)$ ($H_{\eta(\delta)}(V)$) множество решений (δ -решений) включения (1), а через $H_{\text{co}}(V)$ – множество решений включения (10), принадлежащие заданному множеству V .

Будем говорить, что для дифференциального включения (1) на множестве $V \subset C^n[a, b]$ выполняется принцип плотности, если имеет место равенство

$$\overline{H(V)} = H_{\text{co}}(V), \quad (11)$$

где $\overline{H(V)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a, b]$ множества $H(V)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что принцип плотности выполняется не всегда. Это показывает пример Плиса (A. Plis) (см. [8], [1]). Первые достаточные условия, когда выполняется равенство (11), для задачи Коши были получены А. Ф. Филипповым (см. [9], [10]), а для периодических решений и для краевых задач эти условия получены в работах [7]; [11]; [12]. Принцип плотности, как отмечено Пианигиани (G. Pianigiani), является фундаментальным свойством для дифференциальных включений с невыпуклой правой частью (см. [13]). Здесь доказано, что и в аппроксимации дифференциальных включений с невыпуклой правой частью он играет важную роль.

Пусть $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Определим функцию $\varphi(\psi): [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$\varphi(\psi)(t, x, \delta) = \sup_{y \in B[x, \psi(t, x, \delta)]} h[F(t, x), F(t, y)]. \quad (12)$$

Значения функции $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$ (см. [14]) в точке (t, x, δ) будем называть *модулем непрерывности отображения* $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ в точке (t, x) по переменной x в шаре $B[x, \psi(t, x, \delta)]$, функцию $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ – *функцией радиуса модуля непрерывности* или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$ – *функцией модуля непрерывности* или просто модулем непрерывности отображения $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ относительно радиуса непрерывности $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$. Далее, для сокращения записи будем коротко писать $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Аналогично лемме 3 из [14] доказывается

ЛЕММА 1. Пусть $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Тогда функция $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$, определенная равенством (12), принадлежит множеству $K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

Пусть $V \subset C^n[a, b]$. Обозначим

$$U(V) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y(\cdot) \in V, \quad t \in [a, b] \quad x = y(t)\}. \quad (13)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $V \subset C^n[a, b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, и пусть $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in (U(V))^\varepsilon$ (см. (13)) и $\delta \in [0, \infty)$ имеет место неравенство

$$\xi(t, x, \delta) + \varphi(\psi)(t, x, \delta) \leq \eta(t, x, \delta), \quad (14)$$

где $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$ – модуль непрерывности, а $\xi(\cdot, \cdot, \cdot)$ – степень аппроксимации отображения $F(\cdot, \cdot)$, выполняется соотношение

$$H_{\text{co}}(V) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}, \quad (15)$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание в пространстве $C^n[a, b]$ множества $H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$, V^δ – замкнутая в пространстве $C^n[a, b]$ δ -окрестность множества V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. И пусть функция $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ при почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in (U(V))^\varepsilon$ и $\delta \in [0, \infty)$ удовлетворяет неравенству (14). Вначале докажем, что

$$H_{\text{co}}(V) \subset \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}. \quad (16)$$

Пусть $x(\cdot) \in H_{\text{co}}(V)$ и $\delta > 0$. Согласно [6], [7] для $x(\cdot)$ найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, обладающих свойствами: $x_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$ и для любого $i = 1, 2, \dots$ $\dot{x}_i(\cdot) \in S(F(\cdot, x(\cdot)))$. Пусть I_1 – такой номер, что при всех $i \geq I_1$ выполняется включение $x_i(\cdot) \in V^\delta$ и при всех $i \geq I_1$ и $t \in [a, b]$ справедливо соотношение $x_i(t) \in (U(V))^\varepsilon$. Так как $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, то найдется такой номер I_2 , что при всех $i \geq I_2$ при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место включение $x(t) \in B[x_i(t), \psi(t, x_i(t), \delta)]$. Тогда при всех $i \geq \max\{I_1, I_2\}$ при почти всех $t \in [a, b]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \rho[\dot{x}_i(t), \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] &\leq h[F(t, x(t)), \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] \\ &\leq h[F(t, x_i(t)), F(t, x(t))] + h[F(t, x_i(t)), \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] \\ &\leq \varphi(\psi)(t, x_i(t), \delta) + \xi(t, x_i(t), \delta) \leq \eta(t, x_i(t), \delta). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $i \geq \max\{I_1, I_2\}$ имеет место включение $x_i(\cdot) \in H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$. Это означает, что $x(\cdot)$ – предельная точка множества $H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$ и поэтому $x(\cdot) \in \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$. Следовательно, $x(\cdot) \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$ и вложение (16) доказано.

Теперь докажем, что

$$\bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)} \subset H_{\text{co}}(V). \quad (17)$$

Пусть $x(\cdot) \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$, и пусть $\delta_i \rightarrow 0$, где δ_i – последовательность положительных чисел. Далее, пусть $x_i(\cdot) \in H_{\eta(\delta_i)}(V^{\delta_i})$, $i = 1, 2, \dots$, – такая последовательность, что $x_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как последовательность $\dot{x}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, ограничена суммируемой функцией, то $x(\cdot)$ абсолютно непрерывна и $\dot{x}_i(\cdot) \rightarrow \dot{x}(\cdot)$ слабо в $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$.

Определим последовательность абсолютно непрерывных функций $y_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, для каждого $i = 1, 2, \dots$ удовлетворяющую включению $\dot{y}_i(\cdot) \in S(F(\cdot, x(\cdot)))$, равенству $y_i(a) = x_i(a)$ и при почти всех $t \in [a, b]$ соотношению

$$|\dot{x}_i(t) - \dot{y}_i(t)| = \rho[\dot{x}_i(t), F(t, x(t))].$$

Тогда для любого $i = 1, 2, \dots$ при почти всех $t \in [a, b]$ получаем оценки

$$\begin{aligned} |\dot{x}_i(t) - \dot{y}_i(t)| &\leq h[Q_\eta(t, x_i(t), \delta_i), \tilde{F}(t, x_i(t), \delta_i)] \\ &\quad + h[\tilde{F}(t, x_i(t), \delta_i), F(t, x_i(t))] + h[F(t, x_i(t)), F(t, x(t))]. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $i = 1, 2, \dots$ при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место неравенство

$$|\dot{x}_i(t) - \dot{y}_i(t)| \leq \eta(t, x_i(t), \delta_i) + \xi(t, x_i(t), \delta_i) + h[F(t, x_i(t)), F(t, x(t))]. \quad (18)$$

Из неравенства (18) и теоремы Лебега следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\dot{x}_i - \dot{y}_i\|_L = 0.$$

Из этого вытекает, что последовательность $y_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$ и $\dot{y}_i(\cdot) \rightarrow \dot{x}(\cdot)$ слабо в пространстве $L^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Так как для любого $i = 1, 2, \dots$ $\dot{y}_i(\cdot) \in S(F(\cdot, x(\cdot)))$, то согласно [4] $\dot{x}(\cdot) \in S(\text{co } F(\cdot, x(\cdot)))$, т.е. $x(\cdot) \in H_{\text{co}}(V)$. Таким образом, вложение (17) доказано. И, следовательно, равенство (15) справедливо. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает, что для любой степени аппроксимации $\xi(\cdot, \cdot, \cdot)$ и заданного модуля непрерывности $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$ отображения $F(\cdot, \cdot)$, найдется такой радиус внешних возмущений $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ аппроксимирующего отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$, для которого выполняется равенство (15). Для этого достаточно положить $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) = \xi(\cdot, \cdot, \cdot) + \varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$. Отметим также, что модуль непрерывности $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$ отображения $F(\cdot, \cdot)$ зависит от радиуса непрерывности $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ и поэтому, подбирая радиус $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$, можно величину $\varphi(\psi)(\cdot, \cdot, \cdot)$ сделать достаточно малой. Таким образом, другими словами, теорема 1 утверждает, что если внешние возмущения $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ сравнимы со степенью аппроксимации $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ отображения $F(\cdot, \cdot)$, то справедливо равенство (15).

ТЕОРЕМА 2. Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$. Пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Тогда для того чтобы для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \overline{U(V)} \times [0, \infty)$ (с.м. (13)) удовлетворяющей соотношению $\xi(t, x, \delta) \leq \eta(t, x, \delta)$ имело место равенство

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}, \quad (19)$$

где $\overline{H(V)}$ – замыкание множества $H(V)$ в пространстве $C^n[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для включения (1) на множестве V выполнялся принцип плотности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость непосредственно вытекает из теоремы 1 (с.м. замечание 3).

Достаточность. Пусть имеет место равенство (11). Покажем вначале, что

$$\overline{H(V)} \subset \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}. \quad (20)$$

Пусть $x(\cdot) \in \overline{H(V)}$ и $\delta > 0$. Пусть последовательность функций $x_i(\cdot) \in H(V)$ обладает свойством: $x_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда для любого $i = 1, 2, \dots$ при почти всех $t \in [a, b]$ имеют место неравенства

$$\rho[\dot{x}_i(t), \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] \leq h[F(t, x_i(t)), \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] \leq \xi(t, x_i(t), \delta) \leq \eta(t, x_i(t), \delta).$$

Таким образом, при любом $i = 1, 2, \dots$ $x_i(\cdot) \in H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$ и, значит, $x(\cdot) \in \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$. Поэтому $x(\cdot) \in \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$. Следовательно, вложение (20) справедливо.

Включение

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)} \subset \overline{H(V)}$$

в силу равенства (11) доказывается точно так же, как и в теореме 1. Таким образом, равенство (19) имеет место. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что теорема 2 вместе с примером Плиса (см. [8]; [1]) доказывает, что если внешние возмущения $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ больше или равны степени аппроксимации $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ отображения $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, не обладающего свойством выпуклости значений, то аппроксимация дифференциального включения (1), вообще говоря, может и не быть устойчивой, т.е. “небольшие” изменения правой части могут существенно изменить множество решений.

Будем говорить, что отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяет условию Липшица, если существует такая суммируемая функция $l: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$h[F(t, x), F(t, y)] \leq l(t)|x - y|. \quad (21)$$

Будем говорить, что функция $q: [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ обладает свойством А, если для любого $\delta \in [0, \infty)$ функция $q(\cdot, \delta)$ измерима и для любого $\delta \in [0, \infty)$ найдется такая суммируемая функция $m_\delta: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $\tau \in [0, \delta]$ выполняется неравенство $q(t, \tau) \leq m_\delta(t)$.

Будем говорить, что отображение $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ обладает свойством В, если при всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ отображение $\tilde{F}(\cdot, x, \delta)$ измеримо и существует такая функция $q: [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, обладающая свойством А, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in [0, \infty)$ выполняется неравенство

$$h[\tilde{F}(t, x, \delta), \tilde{F}(t, y, \delta)] \leq q(t, \delta)|x - y|. \quad (22)$$

Пусть $M \in \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, и пусть $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Обозначим через $H(M)$ и $H_{\eta(\delta)}(M)$ множество решений задачи Коши включений (1) и (9), начальные значения которых принадлежат множеству M соответственно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M \in \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, и пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Далее, пусть отображение $F(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, а отображение $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ обладает свойством В. Тогда для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ имеют место равенства

$$\overline{H(M)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M)} = \bigcap_{\delta>0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M^\delta)}, \quad (23)$$

где $\overline{H(M)}$, $\overline{H_{\eta(\delta)}(M)}$, $\overline{H_{\eta(\delta)}(M^\delta)}$ — замыкания в пространстве $C^n[a, b]$ соответствующих множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем вложение

$$\bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M)} \subset \overline{H(M)}. \quad (24)$$

Действительно, пусть $x(\cdot) \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M)}$, и пусть последовательности $x_i(\cdot) \in H_{\eta(\delta_i)}(M)$ и $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$, обладают свойством: $x_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ и $\delta_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Тогда в силу неравенства (7) для каждого $i = 1, 2, \dots$ при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется соотношение

$$\rho[\dot{x}_i(t), F(t, x_i(t))] \leq \xi(t, x_i(t), \delta_i).$$

Поэтому согласно [9], [10] для каждого $i = 1, 2, \dots$ найдется $y_i(\cdot) \in H(M)$, для которого при всех $t \in [a, b]$ имеет место оценка

$$|x_i(t) - y_i(t)| \leq \int_a^t \left(\exp \int_s^t l(\tau) d\tau \right) \xi(s, x_i(s), \delta_i) ds, \quad (25)$$

где функция $l(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (21). Так как $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, то из оценки (25) следует, что $y_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому $x(\cdot) \in \overline{H(M)}$ и, следовательно, вложение (24) доказано.

Аналогично доказывается включение

$$\overline{H(M)} \subset \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M)}.$$

Таким образом, равенство

$$\overline{H(M)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(M)}$$

справедливо. Второе равенство в (23) доказывается точно так же. Теорема доказана.

Если пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ вложением, теоремы 1, 2 можно уточнить.

ТЕОРЕМА 4. Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, и пусть $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$ вложением. Тогда для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in \overline{U(V)}^\varepsilon$ (см. (13)) и $\delta \in [0, \infty)$ выполняется оценка

$$\varphi(\psi)(t, x, \delta) \leq \eta(t, x, \delta),$$

справедливо равенство (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вложение (16). Пусть $x(\cdot) \in H_{\text{co}}(V)$ и $\delta > 0$. Тогда согласно [6], [7] для $x(\cdot)$ найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, обладающая свойством: $x_i(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$ и для любого $i = 1, 2, \dots$ $\dot{x}_i(\cdot) \in S(F(\cdot, x(\cdot)))$. Пусть I – такой номер, что для любого $i \geq I$ выполняются включения $x_i(\cdot) \in V^\varepsilon$, $x_i \in V^\delta$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место соотношение $x(t) \in B[x_i(t), \psi(t, x_i(t), \delta)]$. Тогда при всех $i \geq I$ и при почти всех $t \in [a, b]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \rho[\dot{x}_i(t), \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] &\leq h^+[F(t, x(t)); \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] \\ &\leq h^+[F(t, x(t)); F(t, x_i(t))] + h^+[F(t, x_i(t)); \tilde{F}(t, x_i(t), \delta)] \\ &\leq h[F(t, x(t)), F(t, x_i(t))] \leq \varphi(\psi)(t, x_i(t), \delta) \leq \eta(t, x_i(t), \delta). \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $i \geq I$ выполняется включение $x_i(\cdot) \in H_{\eta(\delta)}(V^\delta)$. Поэтому для любого $\delta > 0$ имеет место включение $x(\cdot) \in \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$, т.е. $x(\cdot) \in \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}(V^\delta)}$. Следовательно, вложение (16) доказано. Соотношение (17) доказывается аналогично теореме 1. Теорема доказана.

Аналогично теореме 2 доказывается

ТЕОРЕМА 5. Пусть V – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$ вложением. Тогда для того чтобы для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ имело место равенство (19), необходимо и достаточно, чтобы для включения (1) на множестве V выполнялся принцип плотности.

§ 2. Аппроксимация с внутренними и внешними возмущениями

2.1. Общий случай. Пусть $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Определим функцию $\xi(\eta_0): [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ равенством

$$\xi(\eta_0)(t, x, \delta) = \sup_{z \in B[x, \eta_0(t, x, \delta)]} \xi(t, z, \delta). \quad (26)$$

ЛЕММА 2. Пусть $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Тогда функция $\xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$, заданная равенством (26), принадлежит множеству $K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, то при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in [0, \infty)$ функция $\xi(\eta_0)(\cdot, x, \delta)$ измерима и для каждого $U \in \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ и $\delta \in [0, \infty)$ найдется такая функция $m_{U, \delta}(\cdot) \in L^1[a, b]$, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $\xi(\eta_0)(t, x, \tau) \leq m_{U, \delta}(t)$.

Далее, будем рассматривать только такие точки $t \in [a, b]$, в которых функция $\xi(t, \cdot, \cdot)$ непрерывна по второму аргументу. Ниже покажем, что в каждой точке $t \in [a, b]$, в которой функции $\xi(t, \cdot, \cdot)$ и $\eta_0(t, \cdot, \cdot)$ непрерывны в точке $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, непрерывна и функция $\xi(\eta_0)(t, \cdot, \cdot)$ в этой точке. Пусть точка $t \in [a, b]$ обладает этим свойством. Вначале убедимся, что $\xi(\eta_0)(t, \cdot, \cdot)$ полунепрерывна сверху в точке (x, δ) . Действительно, пусть последовательности $x_i \in \mathbb{R}^n$,

$\delta_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2, \dots$, сходятся к x и δ соответственно. Выбирая подпоследовательность, не уменьшая общности, можно считать, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \xi(\eta_0)(t, x_i, \delta_i) = \overline{\lim_{i \rightarrow \infty}} \xi(\eta_0)(t, x_i, \delta_i). \quad (27)$$

Пусть $y_i \in B[x_i, \eta_0(t, x_i, \delta_i)]$, $i = 1, 2, \dots$, — такой элемент, для которого выполняется равенство

$$\xi(\eta_0)(t, x_i, \delta_i) = \xi(t, y_i, \delta_i). \quad (28)$$

Так как $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $y_i \rightarrow y$ в $\mathbb{R}^n$ при $i \rightarrow \infty$. Очевидно, что $y \in B[x, \eta_0(t, x, \delta)]$. Поэтому из равенств (27) и (28) вытекают соотношения

$$\overline{\lim_{i \rightarrow \infty}} \xi(\eta_0)(t, x_i, \delta_i) = \xi(t, y, \delta) \leq \xi(\eta_0)(t, x, \delta).$$

Таким образом, отображение $\xi(\eta_0)(t, \cdot, \cdot)$ полунепрерывно сверху в точке (x, δ) .

Аналогично доказывается, что $\xi(\eta_0)(t, \cdot, \cdot)$ полунепрерывно снизу в (x, δ) . Следовательно, $\xi(\eta_0)(t, \cdot, \cdot)$ непрерывно в точке (x, δ) . Так как для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\xi(\eta_0)(t, x, 0) = 0$, то из доказанного следует, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ имеет место соотношение $\lim_{\delta \rightarrow 0+0} \xi(\eta_0)(t, x, \delta) = 0$.

Таким образом, функция $\xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Лемма доказана.

Отметим, что аппроксимирующее дифференциальное включение (1) с внешними возмущениями (включение (9)) определяется погрешностями вычисления значений отображения $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ (правой части включения (1)), которые задаются парой $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$, и погрешностями вычисления значений самого аппроксимирующего отображения $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$. В то же время каждое решение $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ включения (9) может также вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать некоторой функцией $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. В связи с этим рассмотрим отображение $\tilde{F}_0: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$\tilde{F}_0(t, x, \delta) = \overline{\tilde{F}(t, B[x, \eta_0(t, x, \delta)], \delta)}, \quad (29)$$

где функция $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ в каждой точке $(t, x(t)) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \in [0, \infty)$ задает погрешность вычисления значения решения $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке $t \in [a, b]$ дифференциального включения (9), причем эти погрешности могут быть неравномерны относительно фазовой переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Далее, функцию $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot)$ будем называть *радиусом внутренних возмущений аппроксимирующего отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$* или просто радиусом внутренних возмущений.

ЛЕММА 3. Пусть $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ и пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Тогда для отображения $\tilde{F}_0: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, заданного равенством (29), при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ справедливы соотношения

$$\|\tilde{F}_0(t, x, \delta)\| \leq \sup_{z \in B[x, \eta_0(t, x, \delta)]} \|F(t, z)\| + \xi(\eta_0)(t, x, \delta), \quad (30)$$

$$h[F(t, x), \tilde{F}_0(t, x, \delta)] \leq \xi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\eta_0)(t, x, \delta), \quad (31)$$

где функция $\xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$ определена равенством (26), а $\varphi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$ — модуль непрерывности отображения $F(\cdot, \cdot)$ относительно радиуса непрерывности $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем неравенство (30). Пусть $y \in \tilde{F}_0(t, x, \delta)$, и пусть найдется такой $z \in B[x, \eta_0(t, x, \delta)]$, что $y \in \tilde{F}(t, z, \delta)$. Так как для любого $p \in F(t, z)$ справедливо неравенство $|y| \leq |p| + |p - y|$, то

$$\begin{aligned} |y| &\leq \|F(t, z)\| + \rho[y, F(t, z)] \leq \|F(t, z)\| + h[\tilde{F}(t, z, \delta), F(t, z)] \\ &\leq \|F(t, z)\| + \xi(t, z, \delta) \leq \sup_{z \in B[x, \eta_0(t, x, \delta)]} \|F(t, z)\| + \xi(\eta_0)(t, x, \delta). \end{aligned}$$

Так как согласно неравенству (5) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ ограничено в шаре $B[x, \eta_0(t, x, \delta)]$, то из доказанной выше оценки вытекает неравенство (29).

Далее, докажем неравенство (31). Очевидно что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ справедливо соотношение $h^+[F(t, x); \tilde{F}_0(t, x, \delta)] \leq \xi(t, x, \delta)$.

Далее, оценим $h^+[F_0(t, x, \delta); F(t, x)]$. Пусть $y \in \tilde{F}(t, z, \delta)$ и $z \in B[x, \eta_0(t, x, \delta)]$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho[y, F(t, x)] &\leq h^+[\tilde{F}(t, z, \delta); F(t, x)] \leq h^+[\tilde{F}(t, z, \delta); F(t, z)] + h^+[F(t, z); F(t, x)] \\ &\leq \xi(t, z, \delta) + \varphi(\eta_0)(t, x, \delta) \leq \xi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\eta_0)(t, x, \delta). \end{aligned}$$

Так как $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) \leq \xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot) + \varphi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$, то из полученных выше неравенств вытекает оценка (31). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что из оценки (31) и лемм 1 и 2 следует, что отображение $\tilde{F}_0: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, заданное равенством (29), аппроксимирует отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ со степенью аппроксимации $\xi(\cdot, \cdot, \cdot) = \xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot) + \varphi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$.

ЛЕММА 4. Пусть отображения $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ и $\eta_0: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладают свойством В, с функциями $q: [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ и $\tilde{q}: [a, b] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ соответственно, причем функция $\tilde{q}(\cdot, \cdot)$ ограничена при каждом ограниченном изменении второго аргумента. Тогда для отображения $\tilde{F}_0: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, определенного равенством (29), при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in [0, \infty)$ имеет место оценка

$$h[\tilde{F}_0(t, x, \delta), \tilde{F}_0(t, y, \delta)] \leq q(t, \delta)(1 + \tilde{q}(t, \delta))|x - y|. \quad (32)$$

Действительно, согласно условию леммы 4 и леммам 2 и 4 из [14] при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\delta \in [0, \infty)$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} h[\tilde{F}_0(t, x, \delta), \tilde{F}_0(t, y, \delta)] &\leq q(t, \delta)h[B[x, \eta_0(t, x, \delta)], B[y, \eta_0(t, x, \delta)]] \\ &\leq q(t, \delta)(1 + \tilde{q}(t, \delta))|x - y|. \end{aligned}$$

Поэтому оценка (32) справедлива.

Пусть $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ и $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Рассмотрим отображение $Q_{\eta_0, \eta}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, определенное равенством

$$Q_{\eta_0, \eta}(t, x, \delta) = (\tilde{F}_0(t, x, \delta))^{\eta(t, x, \delta)}. \quad (33)$$

Согласно замечанию 5 для отображения $Q_{\eta_0, \eta}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ из неравенства (7) при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ вытекает оценка

$$h[F(t, x), Q_{\eta_0, \eta}(t, x, \delta)] \leq \xi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\eta_0)(t, x, \delta) + \eta(t, x, \delta).$$

Поэтому для каждой функции $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ и $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+0} h[F(t, x), Q_{\eta_0, \eta}(t, x, \delta)] = 0.$$

Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta \in [0, \infty)$ дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in Q_{\eta_0, \eta}(t, x(t), \delta), \quad t \in [a, b], \quad (34)$$

где отображение $Q_{\eta_0, \eta}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ определено равенством (33). Дифференциальное включение (34) будем называть аппроксимирующим дифференциальное включение (1) с внутренними и внешними возмущениями.

Пусть $V \subset C^n[a, b]$. Обозначим через $H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(V)$ множество решений включения (34), принадлежащее заданному множеству V .

Из теорем 1–5 и лемм 2–4 вытекают следствия:

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $V \subset C^n[a, b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, и пусть $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot, \cdot)$. Тогда для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t \in [a, b]$, всех $x \in (U(V))^\varepsilon$ (см. (13)) и $\delta \in [0, \infty)$ имеет место неравенство

$$\xi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\psi)(t, x, \delta) \leq \eta(t, x, \delta),$$

где функция $\xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$ определена равенством (26), $\varphi(\cdot)(\cdot, \cdot, \cdot)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot, \cdot, \cdot)$ относительно радиусов непрерывности $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$, выполняется соотношение

$$H_{\text{co}}(V) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(V^\delta)}, \quad (35)$$

где $\overline{H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание множества $H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(V^\delta)$ в пространстве $C^n[a, b]$, V^δ – замкнутая в пространстве $C^n[a, b]$ δ -окрестность множества V .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $V \subset C^n[a, b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$ и $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Тогда для того чтобы для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in \overline{U(V)} \times [0, \infty)$ (см. (13)) удовлетворяющей соотношению

$$\xi(\eta_0)(t, x, \delta) + \varphi(\eta_0)(t, x, \delta) \leq \eta(t, x, \delta),$$

где функция $\xi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$ определена равенством (26), $\varphi(\eta_0)(\cdot, \cdot, \cdot)$ – модуль непрерывности отображения $F(\cdot, \cdot)$ относительно радиуса непрерывности $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot)$, имело место равенство

$$\overline{H(V)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(V^\delta)}, \quad (36)$$

необходимо и достаточно, чтобы для включения (1) на множестве V выполнялся принцип плотности.

Пусть $M \in \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, и пусть $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot), \eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Обозначим через $H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(M)$ множество решений задачи Коши включения (34), начальные значения которых принадлежат множеству M .

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $M \in \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, и пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$. Далее, пусть отображение $F(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, а отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot)$ удовлетворяют лемме 4. Тогда для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ имеют место равенства

$$\overline{H(M)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(M)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(M^\delta)},$$

где $\overline{H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(M)}$, $\overline{H_{\eta_0(\delta), \eta(\delta)}(M^\delta)}$ – замыкания в пространстве $C^n[a, b]$ соответствующих множеств.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $V \subset C^n[a, b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, $\psi(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$ вложением. Тогда для любой функции $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ и любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, для которой существует такое число $\varepsilon > 0$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $(x, \delta) \in (U(V))^\varepsilon \times [0, \infty)$ (см. (13)) выполняется оценка

$$\varphi(\psi)(t, x, \delta) \leq \eta(t, x, \delta),$$

справедливо равенство (35).

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $V \subset C^n[a, b]$ – ограниченное замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$ вложением. Тогда для того чтобы для любых функций $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in \tilde{K}([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ и $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ имело место равенство (36), необходимо и достаточно, чтобы для включения (1) на множестве V выполнялся принцип плотности.

2.2. Аппроксимация вложением и с положительной оценкой снизу радиуса внутренних возмущений. Здесь предполагается, что радиус внутренних возмущений $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$ вложением, а аппроксимирующее отображение $\tilde{F}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ обладает свойством: для любых $(x, \delta) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ $\tilde{F}(\cdot, x, \delta)$ измеримо; при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $\delta \in [0, \infty)$ $\tilde{F}(t, \cdot, \delta)$ непрерывно (ниже это свойство для отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ будем называть условием Каратеодори). В этом случае, как оказалось, следствие 4 можно уточнить.

Пусть $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ и $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Определим отображения $\Phi: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi_{\eta_0\eta}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ равенствами

$$\Phi(t, x, \delta) = \overline{\text{ext}}(\text{co } \tilde{F}(t, x, \delta)), \quad (37)$$

$$\Phi_{\eta_0\eta}(t, x, \delta) = (\Phi(t, B[x, \eta_0(t, x, \delta)], \delta))^{\eta(t, x, \delta)}, \quad (38)$$

где $\overline{\text{ext}}(\cdot)$ – замыкание множества крайних точек соответствующего множества. Для каждого фиксированного $\delta > 0$ рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in \Phi_{\eta_0\eta}(t, x(t), \delta), \quad t \in [a, b], \quad (39)$$

где отображение $\Phi_{\eta_0\eta}: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \text{compr}[\mathbb{R}^n]$ определено равенствами (37), (38). Дифференциальное включение (39) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (1), определенное по крайним точкам значений аппроксимирующего отображения $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$, с внутренними и внешними возмущениями.

Пусть $\tilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V)$ – множество решений включения (39), принадлежащих множеству $V \subset C^n[a, b]$, при фиксированном $\delta > 0$.

Отметим, что поскольку для любых $(t, x, \delta) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ выполняется включение $\Phi_{\eta_0\eta}(t, x, \delta) \subset Q_{\eta_0\eta}(t, x, \delta)$, где отображения $\Phi_{\eta_0\eta}(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $Q_{\eta_0\eta}(\cdot, \cdot, \cdot)$ определены равенствами (38) и (33) соответственно, то

$$\tilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V) \subset H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V).$$

Рассмотрим также при каждом $\delta > 0$ дифференциальные включения

$$\dot{x}(t) \in \text{co } \tilde{F}(t, x(t), \delta), \quad t \in [a, b], \quad (40)$$

$$\dot{x}(t) \in \Phi(t, x(t), \delta), \quad t \in [a, b]. \quad (41)$$

Пусть $\mathcal{H}_{\text{co}}(V, \delta)$ – множество решений включения (40), а $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{ext}}(V, \delta)$ – множество квазирешений включения (41), принадлежащих множеству $V \subset C^n[a, b]$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть V – замкнутое множество пространства $C^n[a, b]$, $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot), \xi(\cdot, \cdot, \cdot))$ аппроксимирует отображение $F(\cdot, \cdot)$ вложением и $\tilde{F}(\cdot, \cdot, \cdot)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда для любой функции $\eta(\cdot, \cdot, \cdot) \in K([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ справедливы равенства

$$H_{\text{co}}(V) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\tilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)} = \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}, \quad (42)$$

где $\overline{\tilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}$ – замыкание множества $\tilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)$ в пространстве $C^n[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое равенство в (42). Вначале покажем, что

$$H_{\text{co}}(V) \subset \bigcap_{\delta > 0} \overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}. \quad (43)$$

Пусть $x \in H_{\text{co}}(V)$ и $\delta > 0$. Так как $F(t, x) \subset \widetilde{F}(t, x, \delta)$, то $\text{co } F(t, x) \subset \text{co } \widetilde{F}(t, x, \delta)$ и, следовательно, $H_{\text{co}}(V) \subset \mathcal{H}_{\text{co}}(V, \delta)$. Поскольку $\mathcal{H}_{\text{co}}(V, \delta) \subset \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{ext}}(V^\delta, \delta)$ (см. [6], [7]), то $x(\cdot) \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\text{ext}}(V^\delta, \delta)$, и поэтому найдется такая последовательность абсолютно непрерывных функций $x_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, что $x_i \rightarrow x$ в $C^n[a, b]$ при $i \rightarrow \infty$ и для любого $i = 1, 2, \dots$ при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется включение

$$\dot{x}_i(t) \in \Phi(t, x(t), \delta), \quad (44)$$

где отображение $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ определено равенством (37). Так как $\eta_0(\cdot, \cdot, \cdot) \in P([a, b] \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty))$, то найдется такой номер I , что при всех $i \geq I$ и при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется включение $x(t) \in B[x_i(t), \eta_0(t, x_i(t), \delta)]$. Поэтому из включения (44) при всех $i \geq I$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеют место соотношения

$$\dot{x}_i(t) \in \Phi(t, B[x_i(t), \eta_0(t, x_i(t), \delta)], \delta) \subset \Phi_{\eta_0\eta}(t, x_i(t), \delta).$$

Следовательно, при всех $i \geq I$ $x_i \in \widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)$ и поэтому $x \in \overline{H_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)}$. Таким образом, вложение (43) доказано.

Вложение

$$\bigcap_{\delta > 0} \overline{\widetilde{H}_{\eta_0(\delta)\eta(\delta)}(V^\delta)} \subset H_{\text{co}}(V)$$

доказывается аналогично включению (17) в теореме 1. Второе равенство (42) доказывается аналогично. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Отметим, что теоремы 1–6 и следствия 1–5 обобщают и уточняют результаты работ [14]–[20].

Список литературы

1. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. Wazewski T. Sur une generalisation de la notion des solutions d'une equation au contingent // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 1962. V. 10. №1. P. 11–15.
3. Натансон И. Т. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
5. Turowicz A. Remarque sur la definition des quasitrajectoires d'un system de commande nonlineaire // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 1963. V. 11. №6. P. 367–368.
6. Булгаков А. И. Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений // Матем. сб. 1992. Т. 183. №10. С. 63–86.
7. Булгаков А. И., Ткач Л. И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т. 189. №6. С. 3–32.
8. Plis A. Trajectories and quasitrajectories of an orientor field // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 1963. V. 11. №6. P. 369–370.

9. Филиппов А. Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем. мех. 1967. №3. С. 16–26.
10. Благодатский В. И., Филиппов А. Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды МИАН. 1985. Т. 169. С. 194–252.
11. Ирисов А. Е., Тонков Е. Л. О замыкании множества периодических решений дифференциального включения // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 32–38.
12. Булгаков А. И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I, II, III // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. №3. С. 371–379; №4. С. 566–571; №5. С. 739–746.
13. Pianigiani G. On the fundamental theory of multivalued differential equations // Differential Equations. 1977. V. 25. №1. P. 30–38.
14. Булгаков А. И., Ефремов А. А., Панасенко Е. А. Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. №12. С. 1587–1598.
15. Булгаков А. И. Асимптотическое представление множеств δ -решений дифференциального включения // Матем. заметки. 1999. Т. 65. №5. С. 775–778.
16. Булгаков А. И., Ефремов А. А., Панасенко Е. А. К вопросу устойчивости дифференциальных включений // Вестн. Тамб.ГУ. Сер. естеств. и технич. науки. 1999. Т. 4. №4. С. 461–469.
17. Булгаков А. И., Ткач Л. И. Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Изв. вузов. Сер. матем. 1999. Т. 442. №3. С. 3–16.
18. Булгаков А. И., Скоморохов В. В. Дифференциальные включения с внешними возмущениями, радиус которых зависит от фазовой переменной // Вестн. Тамб. ГУ. Сер. естеств. и технич. науки. 2000. Т. 5. №4. С. 429–430.
19. Ефремов А. А., Панасенко Е. А. Устойчивость периодических и двухточечных краевых задач относительно внешних возмущений // Вестн. Тамб. ГУ. Сер. естеств. и технич. науки. 2000. Т. 5. №4. С. 446–447.
20. Hermes H. The generalised differential equation $\dot{x}(t) \in R(t, x)$ // Adv. Math. 1970. V. 4. №2. P. 149–169.

Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина;
Тамбовский государственный технический университет
E-mail: aib@tsu.tmb.ru, uua@hmd.nnn.tstu.ru

Поступила в редакцию
31.01.2001