Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский, Псевдоразностные операторы и равномерная сходимость разностных отношений, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 2, 53–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:23:57

УДК 517.5

И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский

Псевдоразностные операторы и равномерная сходимость разностных отношений

В работе вводится понятие псевдоразностного оператора (п.р.о.). Исследованы свойства некоторого класса п.р.о. в пространствах дробных отношений. Получена локальная теорема о равномерной сходимости разностных отношений любого порядка приближенного решения. В частности, на основе численного метода доказана локальная бесконечная дифференцируемость точного решения операторных уравнений эллиптического типа при локальной бесконечной дифференцируемости правой части. Приведены примеры, связанные с приложениями.

Библиография: 3 названия.

Введение

Для численного решения задач обтекания несущих поверхностей идеальной несжимаемой жидкостью в аэродинамике большое применение нашел метод дискретных вихрей. В работах [1], [2] введено и исследовано понятие пространств дробных отношений. Это дало возможность обосновать метод вихревых рамок для некоторых прикладных задач. В настоящей работе вводится понятие псевдоразностного оператора (п.р.о.). Исследованы свойства некоторого класса п.р.о. в пространствах дробных отношений. На основе описанных выше результатов получена локальная теорема о равномерной сходимости разностных отношений любого порядка. В частности, исходя из численного метода доказана локальная бесконечная дифференцируемость решения операторных уравнений эллиптического типа при локальной бесконечной дифференцируемости правой части. Приведены примеры.

§ 1. Дискретное преобразование Фурье

Напомним некоторые определения из [1]. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$ возьмем какую-нибудь декартову систему координат $O X_1, \dots, X_n$. Каждую ось X_k разобьем с шагом h_k точками $x_k^i = h_k(i - 1/2)$, $i \in \mathbb{Z}$. Тогда все пространство $\mathbb{R}_n$ разобьется на ячейки

$$D(k_1, \dots, k_n, h_1, \dots, h_n) = \prod_{j=1}^n \left(h_j \left(k_j - \frac{1}{2} \right), h_j \left(k_j + \frac{1}{2} \right) \right), \quad k_j \in \mathbb{Z};$$

символ $\prod$ здесь понимается как декартово произведение интервалов $h_j(k_j - 1/2) < x_j < h_j(k_j + 1/2)$. В дальнейшем будем обозначать $D(k_1, \dots, k_n, h_1, \dots, h_n) = D(k, h)$, где $k = (k_1, \dots, k_n)$, $h = (h_1, \dots, h_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Разбиение пространства $\mathbb{R}_n$ на ячейки $D(k, h)$ будем называть *каноническим разбиением*, а множество точек $M(k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$ — *канонической сеткой* пространства $\mathbb{R}_n$; функции $a(k_1, \dots, k_n) = a(k)$, определенные в узлах $M(k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$ канонической сетки, будем называть *сеточными*.

Обозначим через M_h множество ступенчатых комплекснозначных функций $a(x, h)$, которые на каждой ячейке канонического разбиения $D(k, h)$ принимают постоянное значение; множество комплекснозначных сеточных функций $a(k)$ обозначим через M_k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Стандартным отображением* множества M_h на множество M_k будем называть оператор π , определенный соотношением:

$$\pi a(x, h) = a(k), \quad \text{где } a(x, h) = a(k) \quad \text{при } x \in D(k, h).$$

Рассмотрим каноническое разбиение $\mathbb{R}_n$ на ячейки $D(k, h)$ с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_n)$. Каждой локально суммируемой функции $f(x)$ поставим в соответствие сеточную функцию $a(k)$ по правилу:

$$a(k) = \frac{1}{\Omega_h} \int_{D(k, h)} f(x) dx,$$

где $\Omega_h = h_1 \cdots h_n$. Далее, сеточной функции $a(k)$ поставим в соответствие ступенчатую функцию $a(x, h) \in M_h$ такую, что $a(k) = \pi a(x, h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Оператор, ставящий в соответствие локально суммируемой функции $f(x)$ функцию $a(x, h) \in M_h$ по описанному выше правилу, будем называть *интегральным проектором* и обозначать через Π_h , т.е. $\Pi_h f(x) = a(x, h)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Пространство ступенчатых функций* M_h^∞ по определению состоит из функций вида $\Pi_h \varphi(x)$, где $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ — финитные бесконечно дифференцируемые функции.

Обозначим через $\mathbb{Z}_n$ теоретико-множественное произведение n экземпляров множества целых чисел $\mathbb{Z}$, а через $\mathbb{Z}_n(N)$ — теоретико-множественное произведение n экземпляров множества целых чисел, элементы которого k удовлетворяют неравенству $-N \leq k \leq N$.

Пусть функция $a(x, h) \in M_h$ принадлежит также $L_p(\mathbb{R}_n)$, $1 \leq p \leq 2$, т.е. для нее имеет место $\int_{\mathbb{R}_n} |a(x, h)|^p dx \leq C$, что эквивалентно выполнению условия

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} |\pi a(x, h)|^p \leq \frac{C}{\Omega_h}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. *Дискретным ступенчатым преобразованием Фурье* $F_h a(x, h)$ функции $a(x, h) \in M_h$, $a(x, h) \in L_p(\mathbb{R}_n)$, $1 \leq p \leq 2$, будем называть функцию, определенную соотношением

$$F_h a(x, h) = \hat{a}_h(\varphi) = \Omega_h \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} a(k) e^{i(k\varphi, h)}, \quad (1.1)$$

где $k\varphi = \sum_{i=1}^n k_i \varphi_i$, $(k\varphi, h) = \sum_{i=1}^n k_i \varphi_i h_i$, $a(k) = \pi a(x, h)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $\Omega_h = \prod_{j=1}^n h_j$.

Правая часть в (1.1) понимается следующим образом:

$$\hat{a}_h(\varphi) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} a(k) e^{i(k\varphi, h)}.$$

Функция $\hat{a}_h(\varphi)$, определенная соотношением (1.1), периодична по каждому аргументу φ_i с периодом $2\pi/h_i$, кроме того,

$$\hat{a}_h(\varphi) \in L_{p_1}[D_h], \quad D_h = \prod_{i=1}^n \left[-\frac{\pi}{h_i} \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{h_i} \right], \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = 1$$

(см. [3]). Значение $a(k)$ ступенчатой функции $a(x, h)$ на ячейке $D(k, h)$ восстанавливается по формуле

$$a(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \hat{a}_h(\varphi) e^{i(k\varphi, h)} d\varphi.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Дискретным сеточным преобразованием Фурье* $F_c a(k)$ сеточной функции $a(k) \in l_p$, $1 \leq p \leq 2$, будем называть функцию, определенную соотношением

$$F_c a(k) = \hat{a}_c(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n(N)} a(k) e^{i(k\varphi)}.$$

Значения сеточной функции $a(k)$ восстанавливаются по формуле

$$a(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_U e^{-i(k\varphi)} \hat{a}_c(\varphi) d\varphi,$$

где $U = \prod_{j=1}^n [-\pi \leq \varphi_j \leq \pi]$.

Для дискретного ступенчатого и сеточного преобразования Фурье имеет место аналог равенства Парсеваля:

$$\begin{aligned} \int_U \hat{a}_c(\varphi) \overline{\hat{b}_c(\varphi)} d\varphi &= (2\pi)^n \sum_k a(k) \overline{b(k)} = \frac{(2\pi)^n}{\Omega_h} \int_{\mathbb{R}_n} a(x, h) \overline{b(x, h)} dx, \\ \int_{D_h} \hat{a}_h(\varphi) \overline{\hat{b}_h(\varphi)} d\varphi &= (2\pi)^n \Omega_h \sum_k a(k) \overline{b(k)} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}_n} a(x, h) \overline{b(x, h)} dx. \end{aligned} \quad (1.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если функция $a(x, h) \in M_h^\infty$, то при $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство

$$|\widehat{a}_h(\varphi)| \leq \frac{C_N}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{h_i} \sin \frac{\varphi_i h_i}{2} \right| \right)^N},$$

где C_N не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что имеет место тождество

$$e^{i(k\varphi, h)} = \frac{[\Delta_p^N + (-1)^N] e^{i(k\varphi, h)}}{(-1)^N 4^N \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \sin^2 \frac{\varphi_i h_i}{2} \right)^N + (-1)^N}, \quad (1.3)$$

где Δ_p – разностный оператор Лапласа.

Используя (1.3) и преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} \widehat{a}_h(\varphi) &= \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} a(k) e^{i(k\varphi, h)} \\ &= \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} a(k) \frac{[\Delta_p^N + (-1)^N] e^{i(k\varphi, h)}}{(-1)^N 4^N \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \sin^2 \frac{\varphi_i h_i}{2} \right)^N + (-1)^N} \\ &= \frac{\Omega_h}{(-1)^N 4^N \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \sin^2 \frac{\varphi_i h_i}{2} \right)^N + (-1)^N} \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} e^{i(k\varphi, h)} [\Delta_p^N + (-1)^N] a(k), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $a(k) = \pi a(x, h)$.

Так как $a(x, h) = \prod_h \chi(x)$, $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, то $a(x, h) \in M(r, h) \quad \forall r > 0$ ($M(r, h)$ – пространство дробных отношений, см. [1]). Из теории вложения для пространств дробных отношений (см. [1]) следует оценка

$$|[\Delta_p^N + (-1)^N] a(k)| \leq C(N). \quad (1.5)$$

С другой стороны, функция $a(x, h)$ финитна, поэтому $V(k) = [\Delta_p^N + (-1)^N] a(k)$ является финитной функцией. Следовательно, при $|h| < h_0$ (h_0 фиксировано) будет выполняться неравенство

$$\text{mes supp } V(k) \leq C_1(N). \quad (1.6)$$

Из (1.4)–(1.6) следует оценка

$$|\widehat{a}_h(\varphi)| \leq \frac{A_N}{1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \sin^2 \frac{\varphi_i h_i}{2} \right)^N} \leq \frac{C_N}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \sin^2 \frac{\varphi_i h_i}{2} \right)^N}.$$

Из последнего неравенства следует утверждение предложения 1.1.

Каждой функции $f(x) \in C(\mathbb{R}_n)$ можно поставить в соответствие сеточную функцию $a(k)$ по правилу: $a(k_1, \dots, k_n) = f(k_1 h_1, \dots, k_n h_n)$. Сеточной функции $a(k)$ поставим в соответствие ступенчатую функцию $a(x, h)$ такую, что $\pi a(x, h) = a(k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Оператор, ставящий в соответствие функции $f(x) \in C(\mathbb{R}_n)$ ступенчатую функцию $a(x, h)$ по описанному выше правилу, будем называть *точечным проектором* и обозначать через Π_h^* , т.е. $\Pi_h^* f(x) = a(x, h)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Предложение 1.1 имеет место для функций $\Pi_h^* \chi(x)$, где $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. *Псевдоразностным оператором* (п.р.о.) называется оператор, отображающий класс функций M_h^∞ в класс сеточных функций M_k и определенный соотношением

$$\pi A_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_U \widehat{A}_c(\varphi, k, h) \widehat{a}_c(\varphi) e^{-i(k, \varphi)} d\varphi, \quad (1.7)$$

где π – стандартный оператор (см. определение 1.2), $\widehat{a}_c(\varphi)$ – сеточное преобразование Фурье функции $a(k) \in M_h^\infty$; функция $\widehat{A}_c(\varphi, k, h)$ называется *символом* п.р.о., периодична по каждому аргументу с периодом $T = 2\pi$, $\widehat{A}_c(\varphi, k, h) \in L(U)$.

В интеграле (1.7) сделаем замену $\varphi_i = t_i \cdot h_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Далее получим

$$\pi A_h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{A}_c(th, k, h) \widehat{a}_h(t) e^{-i(k, th)} dt, \quad (1.8)$$

где $\widehat{a}_h(t)$ – ступенчатое преобразование Фурье функции $a(x, h)$, $\pi a(x, h) = a(k)$; функцию $\widehat{A}_h(t, k, h) = \widehat{A}_c(th, k, h)$ будем называть *ступенчатым символом* п.р.о.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Будем говорить, что семейство п.р.о. A_h со ступенчатыми символами $\widehat{A}_h(\varphi, h)$ (символ не зависит от k) принадлежит классу $S_{h\alpha}$, если существует такое $h_0 > 0$, что при $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство

$$|\widehat{A}_h(\varphi, h)| \leq C \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\varphi_i h_i}{2} \right| \right)^\alpha,$$

где C не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Будем говорить, что семейство п.р.о. A_h с постоянными ступенчатыми символами $\widehat{A}_h(\varphi, h)$ принадлежит классу $S_{h\alpha}^\infty$, если существует такое $h_0 > 0$, что при $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \varphi_1^{k_1} \dots \partial \varphi_n^{k_n}} \widehat{A}_h(\varphi, h) \right| \leq C_k \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\varphi_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha - |k|}, \quad (1.9)$$

$\varphi \in D_h$, причем функция $\frac{\partial^k}{\partial \varphi_1^{k_1} \dots \partial \varphi_n^{k_n}} \widehat{A}_h(\varphi, h)$ непрерывна для любого $\varphi \in \mathbb{R}_n$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Будем говорить, что семейство п.р.о. A_h с переменными ступенчатыми символами $\hat{A}_h(\varphi, k, h)$ принадлежит классу $S_{h\alpha}$, если существует такое $h_0 > 0$, что при $|h| \leq h_0$ выполняется неравенство для любого N :

$$|\hat{A}'_h(\varphi, \psi, h)| \leq \frac{C_N \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}\right|\right)^\alpha}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\psi_i h_i}{2}\right|\right)^N}, \quad (1.10)$$

$\varphi, \psi \in D_h$, C_N не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$, функция $\hat{A}'_h(\varphi, \psi, h)$ является ступенчатым преобразованием Фурье функции $f(\varphi, y, h)$ такой, что $\pi_y f(\varphi, y, h) = \hat{A}'_h(\varphi, k, h)$, где оператор π_y действует по переменной y .

Далее для краткости будем использовать запись вида $\hat{A}_h(\varphi, h) \in S_{h\alpha}^\infty$.

При $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ имеет место неравенство

$$|\sin x| \leq |\sin(y - x)| + |\sin y|. \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует оценка

$$\frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}\right| \leq \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{h_i(\psi_i - \varphi_i)}{2}\right| + \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\psi_i h_i}{2}\right| \quad (1.12)$$

при $\varphi_i, \psi_i \in [-\pi/h_i, \pi/h_i]$, $i = 1, \dots, n$.

Суммируя неравенства (1.12), затем прибавляя единицу, получаем

$$1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}\right| \leq \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\psi_i h_i}{2}\right|\right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{h_i(\psi_i - \varphi_i)}{2}\right|\right).$$

Из последнего неравенства следует оценка

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{h_i(\psi_i - \varphi_i)}{2}\right|\right)^{-N} \leq \left[\frac{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\psi_i h_i}{2}\right|}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}\right|}\right]^N. \quad (1.13)$$

Ввиду симметрии φ и ψ из (1.13) получим

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{h_i(\psi_i - \varphi_i)}{2}\right|\right)^{-N} \leq \left[\frac{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}\right|}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left|\sin \frac{\psi_i h_i}{2}\right|}\right]^N. \quad (1.14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Семейство п.р.о. $A_h \in S_{h\alpha}$ с переменными ступенчатыми символами $\hat{A}_h(\varphi, k, h)$ равномерно ограничено отображает пространство $M(r, h)$ в $M(r - \alpha, h)$ для любого r при $|h| \leq h_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ступенчатое преобразование Фурье функции $V(x, h)$ такой, что

$$V(k) = \pi V(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{A}_h(\varphi, k, h) \widehat{u}_h(\varphi) e^{-i(k\varphi, h)} d\varphi,$$

где $\widehat{u}_h(\varphi)$ – ступенчатое преобразование Фурье функции $u(x, h) \in M(r, h)$.

Из определения 1.5 следует

$$\begin{aligned} \widehat{V}_h(\psi) &= \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} V(k) e^{i(k\psi, h)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \left(\Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \widehat{A}_h(\varphi, k, h) e^{i(k(\psi - \varphi), h)} \widehat{u}_h(\varphi) \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{A}'_h(\varphi, \psi - \varphi, h) \widehat{u}_h(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

где $\widehat{A}'_h(\varphi, \psi, h) = \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \widehat{A}_h(\varphi, k, h) e^{i(k\psi, h)}$.

Из (1.11) следует оценка

$$|\widehat{V}_h(\psi)| \leq C_N \int_{D_h} \frac{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}|)^\alpha |\widehat{u}_h(\varphi)| d\varphi}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{(\psi_i - \varphi_i) h_i}{2}|)^N}. \quad (1.15)$$

Из неравенства (1.15) получим

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\psi_i h_i}{2} \right| \right)^{r-\alpha} |\widehat{V}_h(\psi)| \\ &\leq C_N \int_{D_h} \frac{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{\psi_i h_i}{2}|)^{r-\alpha} (1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}|)^\alpha}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{(\psi_i - \varphi_i) h_i}{2}|)^N} \cdot |\widehat{u}_h(\varphi)| d\varphi. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Из неравенств (1.13), (1.14) и (1.16) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\psi_i h_i}{2} \right| \right)^{r-\alpha} |\widehat{V}_h(\psi)| \\ &\leq C_N \int_{D_h} \frac{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{\psi_i h_i}{2}|)^r \cdot |\widehat{u}_h(\varphi)| d\varphi}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{(\psi_i - \varphi_i) h_i}{2}|)^{N-|r-\alpha|}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

При достаточно большом N имеет место оценка

$$\int_{D_h} \frac{d\varphi}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{(\psi_i - \varphi_i) h_i}{2}|)^{N-|r-\alpha|}} \leq C_1, \quad (1.18)$$

где C_1 не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$ и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Из (1.17) и (1.18) следует неравенство

$$\begin{aligned}
\|V(x, h)\|_{M(r-\alpha, h)}^2 &\leq C_2 \int_{D_h} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\psi_i h_i}{2} \right| \right)^{2(r-\alpha)} |\widehat{V}_h(\psi)|^2 d\psi \\
&\leq C_3 \int_{D_h} \left[\int_{D_h} \frac{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}|)^r |\widehat{u}_h(\varphi)| d\varphi}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{(\psi_i - \varphi_i) h_i}{2}|)^{N-|r-\alpha|}} d\psi \right] \\
&\leq C_4 \int_{D_h} \left[\int_{D_h} \frac{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{\varphi_i h_i}{2}|)^{2r} |\widehat{u}_h(\varphi)|^2 d\varphi}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{(\psi_i - \varphi_i) h_i}{2}|)^{N-|r-\alpha|}} d\psi \right] \\
&\leq C_5 \int_{D_h} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\varphi_i h_i}{2} \right| \right)^{2r} |\widehat{u}_h(\varphi)|^2 \\
&\quad \times \left[\int_{D_h} \frac{d\psi}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} |\sin \frac{(\psi_i - \varphi_i) h_i}{2}|)^{N-|r-\alpha|}} \right] d\varphi \\
&\leq C_6 \|u(x, h)\|_{M(r, h)}^2.
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует утверждение предложения 1.2.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $u(x, h) = \prod_h^* u(x)$ ($\prod_h^*$ – точечный проектор). Тогда семейство операторов A_h , определенных равенством

$$A_h a(x, h) = u(x, h) \cdot a(x, h), \quad (1.19)$$

отображает пространство $M(r, h)$ в $M(r, h)$ равномерно ограничено при $|h| \leq h_0$, $h_0 > 0$ – некоторое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор A_h можно представить в виде п.р.о.

$$\pi A_h a(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} u(k, h) \widehat{a}_h(\varphi) e^{-i(k\varphi, h)} d\varphi,$$

причем $u(k, h)$ является символом п.р.о. A_h . Согласно замечанию 1.1 п.р.о. A_h принадлежит классу S_{h_0} . Отсюда и из предложения 1.2 следует утверждение следствия 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если $u(x, h) = \prod_h u(x)$, где $\prod_h$ – интегральный проектор, то утверждение следствия 1.1 сохраняется.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть A_h – семейство п.р.о. с постоянными ступенчатыми символами $\widehat{A}_h(\varphi, h) \in S_{h\alpha}^\infty$. Тогда существует такое $h_0 > 0$, что при $|h| \leq h_0$ будет выполняться оценка

$$\left\| \prod_h^* \alpha(x) A_h \left[\left(\prod_h^* \beta(x) \right) V(x, h) \right] \right\|_{M(r, h)} \leq C_{rs}(\delta) \|V(x, h)\|_{M(s, h)}, \quad (1.20)$$

где $V(x, h) \in M(s, h)$, s – произвольно, $r \geq 0$ – произвольно, $\alpha(x), \beta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $\delta > 0$ – расстояние между носителями функций $\alpha(x), \beta(x)$, $\prod_h^*$ – точечный проектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$f(k) = \pi \prod_h^* \alpha(x) A_h \left[\left(\prod_h^* \beta(x) \right) V(x, h) \right],$$

и пусть $V(kh, h)$ – значение ступенчатой функции $V(x, h)$ на ячейке $D(k, h)$.

Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \alpha(kh) \hat{A}_h(\varphi, h) \\ &\quad \times \left(\sum_m \beta(mh) V(mh, h) e^{i(m\varphi, h)} \cdot \Omega_h \right) e^{-i(k\varphi, h)} d\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_m V(mh, h) \int_{D_h} \alpha(kh) \beta(mh) \hat{A}_h(\varphi, h) e^{i((m-k)\varphi, h)} d\varphi. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Имеет место тождество

$$\hat{\Delta}_\varphi^N e^{i((m-k)\varphi, h)} = |(m-k)h|^{2N} e^{i((m-k)\varphi, h)}, \quad (1.22)$$

где $\hat{\Delta}_\varphi^N = (-1)^N \Delta_\varphi^N$, Δ_φ^N – итерированный оператор Лапласа по переменной φ .

Используя тождество (1.22), получаем равенство

$$\begin{aligned} &\int_{D_h} \alpha(kh) \beta(mh) \hat{A}_h(\varphi, h) e^{i((m-k)\varphi, h)} d\varphi \\ &= \int_{D_h} \frac{\alpha(kh) \beta(mh) \hat{A}_h(\varphi, h)}{|(m-k)h|^{2N}} \cdot (\hat{\Delta}_\varphi^N e^{i((m-k)\varphi, h)}) d\varphi \\ &= \int_{D_h} \frac{\alpha(kh) \beta(mh)}{|(m-k)h|^{2N}} [\hat{\Delta}_\varphi^N \hat{A}_h(\varphi, h)] \cdot e^{i((m-k)\varphi, h)} d\varphi =: E_N(k, m). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Пусть $V(x, h) \in M_h^\infty$. Тогда из (1.21) и (1.23) следует соотношение

$$f(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \Omega_h \sum_m V(mh, h) E_N(k, m). \quad (1.24)$$

Применяя равенство Парсеваля по переменной m и выполняя ступенчатое преобразование Фурье по переменной k в соотношении (1.24), получаем

$$\hat{f}_h(\sigma') = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{D_h} \overline{\hat{V}_h(\sigma'')} \hat{E}_N(\sigma', \sigma'') d\sigma'', \quad (1.25)$$

где $\hat{f}_h(\sigma')$, $\hat{V}_h(\sigma'')$, $\hat{E}_N(\sigma', \sigma'')$ – ступенчатые преобразования Фурье функций $f(x, h)$, $V_h(x, h)$, $E_N(x, y, h)$ таких, что $\pi f(x, h) = f(k)$, $\pi V(x, h) = V(kh, h)$, $\pi E_N(x, y, h) = E_N(k, v)$; π – стандартный оператор (см. определение 1.2). Обозначим

$$\begin{aligned} C_1(m-k) &= \int_{D_h} [\hat{\Delta}_\varphi^N \hat{A}_h(\varphi, h) e^{i((m-k)\varphi, h)}] d\varphi, \\ C_2(m, k) &= \frac{\alpha(kh) \beta(mh)}{|(m-k)h|^{2N}}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Заметим, что существует $h_0 > 0$ такое, что при $|h| \leq h_0$ функция $C_2(x, y, h)$, $\pi C_2(x, y, h) = C_2(m, k)$, принадлежит $M(r, h) \forall r > 0$, причем выполняется неравенство

$$\|C_2(x, y, h)\|_{M(r, h)} \leq C_r(\delta), \quad (1.27)$$

где $C_r(\delta)$ не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Исходя из обозначений (1.26) и определения ступенчатого преобразования Фурье получаем

$$\widehat{E}_N(\sigma', \sigma'') = \Omega_h^2 \sum_k \sum_m C_1(m - k) C_2(m, k) e^{i[(k\sigma', h) + (m\sigma'', h)]}. \quad (1.28)$$

Ввиду финитности функции $C_2(m, k)$ в правой части (1.28) конечное число слагаемых.

Сделаем замену дискретных переменных

$$\begin{cases} m_i - k_i = p_i, \\ k_i = l_i, \\ i = 1, \dots, n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_i = p_i + l_i, \\ k_i = l_i, \\ i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.29)$$

Отсюда следует

$$C_1(m - k) = C_1(p), \quad C_2(m, k) = \frac{\alpha(lh)\beta((p+l)h)}{|ph|^{2N}} = C_2^*(l, p). \quad (1.30)$$

Кроме того, сделаем замену $\Theta'_i = \sigma'_i + \sigma''_i$, $\Theta''_i = \sigma''_i$, $i = 1, \dots, n$. Отсюда получим соотношение

$$(k\sigma', h) + (m\sigma'', h) = (l\Theta', h) + (p\Theta'', h). \quad (1.31)$$

Используя формулы (1.28)–(1.31), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{E}_N(\Theta' - \Theta'', \Theta'') &= \Omega_h^2 \sum_p \sum_l C_1(p) C_2^*(l, p) e^{i[(l\Theta', h) + (p\Theta'', h)]} \\ &= \Omega_h^2 \sum_p C_1(p) \left[\Omega_h^2 \sum_l C_2^*(l, p) e^{i(l\Theta', h)} \right] e^{i(p\Theta'', h)} \\ &= \Omega_h^2 \sum_p C_1(p) [\widehat{C}_{2h}^*(\Theta', p)] e^{i(p\Theta'', h)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{C}_{2h}^*(\Theta', \Theta'' - \beta) \widehat{C}_{1h}(\beta) d\beta. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Согласно условию теоремы и определению 1.10 для функции $\widehat{C}_{1h}(\beta)$ справедливо неравенство

$$|\widehat{C}_{1h}(\beta)| \leq C_N \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\beta_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha - 2N}. \quad (1.33)$$

В силу предложения 1.1 для функции $C_{2h}^*(\Theta', \Theta'')$ будет выполняться неравенство при $|h| \leq h_0$

$$\begin{aligned} |\widehat{C}_{2h}^*(\Theta', \Theta'')| &\leq \frac{C_k(\delta)}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta'_i h_i}{2} \right| + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta''_i h_i}{2} \right| \right)^{4k}} \\ &\leq \frac{C_k(\delta)}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta'_i h_i}{2} \right| \right)^{2k} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta''_i h_i}{2} \right| \right)^{2k}}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$-\pi/h_i \leq \Theta'_i, \Theta''_i \leq \pi/h_i, i = 1, \dots, n; k$ — любое.

Из неравенств (1.13), (1.14) и (1.34) следует оценка

$$|\widehat{C}_{2h}^*(\Theta', \Theta'' - \beta)| \leq \frac{C_k(\delta) \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\beta_i h_i}{2} \right| \right)^{2k + \alpha - 2N}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta'_i h_i}{2} \right| \right)^{2k} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta''_i h_i}{2} \right| \right)^{2k}}. \quad (1.35)$$

Выбрав N так, чтобы $2k + \alpha - 2N \leq 0$, имеем

$$\widehat{E}_N(\Theta' - \Theta'', \Theta'') \leq \frac{C_{1k}(\delta)}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta'_i h_i}{2} \right| \right)^{2k} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\Theta''_i h_i}{2} \right| \right)^{2k}}. \quad (1.36)$$

Используя (1.36), легко получить оценку

$$|\widehat{E}_N(\sigma', \sigma'')| \leq \frac{C_{2k}(\delta)}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma''_i h_i}{2} \right| \right)^{k/2} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma'_i h_i}{2} \right| \right)^{k/2}}. \quad (1.37)$$

Из оценок (1.25) и (1.37) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|f(x, h)\|_{M(r, h)}^2 &= \int_{D_h} (1 + |\sigma'|)^{2r} |\widehat{f}_h(\sigma')|^2 d\sigma' \\ &\leq C \int_{D_h} (1 + |\sigma'|)^{2r} \cdot \left| \int_{D_h} |\widehat{V}_h(\sigma'')| \cdot |\widehat{E}_N(\sigma', \sigma'')| d\sigma'' \right| d\sigma' \\ &\leq C \int_{D_h} (1 + |\sigma'|)^{2r} \left(\int_{D_h} |\widehat{V}_h(\sigma'')|^2 \cdot |\widehat{E}_N(\sigma', \sigma'')| d\sigma'' \right) d\sigma' \\ &\leq C_{3k}(\delta) \int_{D_h} \frac{(1 + \sigma')^{2r}}{(1 + |\sigma'|)^{k/2}} \left(\int_{D_h} \frac{|\widehat{V}_h(\sigma'')|^2}{(1 + |\sigma''|)^{k/2}} d\sigma'' \right) d\sigma'. \end{aligned}$$

Выбрав k достаточно большим (в зависимости от r и s), получим оценку

$$\|f(x, h)\|_{M(r, h)} = C_{rs}(\delta) \|V(x, h)\|_{M(s, h)},$$

где константа $C_{rs}(\delta)$ не зависит от h . Итак, теорема 1.1 доказана.

Свойство, доказанное в теореме 1.1, будем называть *свойством псевдолокальности* п.р.о. класса $S_{h\alpha}^\infty$ с постоянными ступенчатыми символами.

Рассмотрим семейство п.р.о. A_h с постоянными ступенчатыми символами $\widehat{A}_h(\varphi, h)$, принадлежащее классу $S_{h\alpha}^\infty$. Пусть $\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, определим семейство операторов B_h соотношением

$$B_h u(x, h) = \alpha(x, h) u(x, h), \quad (1.38)$$

где $u(x, h) \in M_h^\infty$, $\alpha(x, h) = \prod_h^* \alpha(x)$.

Семейство операторов B_h можно представить в виде п.р.о.

$$\pi B_h u(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \pi \alpha(x, h) \widehat{u}_h(\varphi) e^{-i(k\varphi, h)} d\varphi,$$

где $\widehat{A}(\varphi, k, h) = \pi \alpha(x, h)$ – ступенчатый символ п.р.о.; $\widehat{u}_h(\varphi)$ – ступенчатое преобразование Фурье функции $u(x, h)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Оператор $T_h = A_h B_h - B_h A_h$ представим в виде п.р.о. класса $S_{h(\alpha-1)}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $A_h B_h u(x, h)$ запишем в виде п.р.о.

$$\pi B_h A_h u(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \pi \alpha(x, h) \widehat{A}_h(\varphi, h) \widehat{u}_h(\varphi) e^{-i(k\varphi, h)} d\varphi. \quad (1.39)$$

Рассмотрим ступенчатое преобразование Фурье функции $B_h u(x, h) = \alpha(x, h) \times u(x, h) = V(x, h)$:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_h(\varphi) &= \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha(k) u(k) e^{i(k\varphi, h)} \\ &= \Omega_h \sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha(k) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{u}_h(\eta) e^{-i(k\eta, h)} d\eta \cdot e^{i(k\varphi, h)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{u}_h(\eta) \widehat{\alpha}(\varphi - \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оператор $A_h B_h$ можно представить в виде п.р.о.

$$\begin{aligned} \pi A_h B_h u(x, h) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int_{D_h} \int_{D_h} \widehat{A}_h(\varphi, h) \widehat{u}_h(\eta) \widehat{\alpha}_h(\varphi - \eta) d\eta d\varphi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{u}_h(\eta) e^{-i(k\eta, h)} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{A}_h(\sigma + \eta, h) \widehat{\alpha}_h(\sigma) e^{-i(k\sigma, h)} d\sigma \right] d\eta. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Из (1.39) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \pi B_h A_h u(x, h) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{u}_h(\eta) e^{-i(k\eta, h)} \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{A}_h(\eta, h) \widehat{\alpha}_h(\sigma) e^{-i(k\sigma, h)} d\sigma \right] d\eta. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Из (1.40) и (1.41) получаем представление для оператора T_h

$$\begin{aligned} \pi T_h u(x, h) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \widehat{u}_h(\eta) e^{-i(k\eta, h)} \\ &\times \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} [\widehat{A}_h(\sigma + \eta, h) - \widehat{A}_h(\eta, h)] \widehat{\alpha}_h(\sigma) e^{-i(k\sigma, h)} d\sigma \right] d\eta. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Из (1.42) следует, что символ $\widehat{T}_h(\eta, k, h)$ оператора T_h задается соотношением

$$\widehat{T}_h(\eta, k, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} [\widehat{A}_h(\sigma + \eta, h) - \widehat{A}_h(\eta, h)] \widehat{\alpha}_h(\sigma) e^{-i(k\sigma, h)} d\sigma. \quad (1.43)$$

Докажем, что функция $R_h(\eta, \sigma) = \widehat{A}_h(\sigma + \eta, h) - \widehat{A}_h(\eta, h)$ удовлетворяет неравенству

$$|R_h(\eta, \sigma)| \leq C \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\eta_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma_i h_i}{2} \right| \right)^{|\alpha|+1}, \quad (1.44)$$

где C не зависит от $h, \eta, \sigma \in D_h$.

Рассмотрим случай $|\sigma| \geq \frac{1}{2}(1 + |\eta|)$, $\sigma, \eta \in D_h$. Имеем

$$\begin{aligned} |\widehat{A}_h(\eta, h)| &\leq C \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\eta_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha} \\ &\leq C \frac{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\eta_i h_i}{2} \right|)^{\alpha}}{(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma_i h_i}{2} \right|)^{\alpha}} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma_i h_i}{2} \right| \right) \\ &\leq C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\eta_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha-1} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Перейдем к оценке $A_h(\eta + \sigma, h)$. Так как $\eta, \sigma \in D_h$, то имеют место оценки

$$-\frac{2\pi}{h_i} \leq \eta_i + \sigma_i \leq \frac{2\pi}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.46)$$

Из неравенств (1.46) следует, что множество значений индекса i , $1 \leq i \leq n$, можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $O_j(\eta, \sigma)$, $j = 1, 2, 3$, обладающих свойствами:

1) если $i \in O_1(\eta, \sigma)$, то

$$-\frac{2\pi}{h_i} \leq \eta_i + \sigma_i \leq -\frac{\pi}{h_i}; \quad (1.47)$$

2) если $i \in O_2(\eta, \sigma)$, то

$$-\frac{\pi}{h_i} \leq \eta_i + \sigma_i \leq \frac{\pi}{h_i}; \quad (1.48)$$

3) если $i \in O_3(\eta, \sigma)$, то

$$\frac{\pi}{h_i} \leq \eta_i + \sigma_i \leq \frac{2\pi}{h_i}. \quad (1.49)$$

Обозначим $\Theta_i^j = \eta_i + \sigma_i$, если $i \in O_j(\eta, \sigma)$, $j = 1, 2, 3$. Тогда $\Theta^j = (\dots, \Theta_k^j, \dots)$ есть вектор, для которого все $k \in O_j(\eta, \sigma)$. Компонентами вектора h^j являются величины h_i такие, что $i \in O_j(\eta, \sigma)$. Для функции $\hat{A}_h(\eta + \sigma, h)$ введем обозначение $\hat{A}_h(\eta + \sigma, h) = \hat{A}_{1h}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$. Очевидно, что имеет место соотношение

$$\hat{A}_h(\eta + \sigma, h) = \hat{A}_{1h}\left(\Theta^1 + \frac{2\pi}{h^1}, \Theta^2, \Theta^3 - \frac{2\pi}{h^3}\right).$$

Так как функция $\hat{A}_h(\eta, h) \in S_{h\alpha}^\infty$, а переменные $\Theta^1 + 2\pi/h^1$, Θ^2 и $\Theta^3 - 2\pi/h^3$ принадлежат D_h , то имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |\hat{A}_h(\eta + \sigma, h)| &\leq \left(1 + \sum_{i \in O_1} \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{(\eta_i + \sigma_i + 2\pi/h_i)h_i}{2} \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in O_2} \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{(\eta_i + \sigma_i)h_i}{2} \right| + \sum_{i \in O_3} \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{(\eta_i + \sigma_i - 2\pi/h_i)h_i}{2} \right| \right)^\alpha \\ &\leq C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^n |\eta_i + \sigma_i|\right)^\alpha \leq C_2 \left(1 + \sum_{i=1}^n |\eta_i|\right)^\alpha \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n |\sigma_i|\right)^{|\alpha|}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Из (1.50), используя неравенство $|\sigma| \geq \frac{1}{2}(1 + |\eta|)$, получаем оценку

$$\begin{aligned} |\hat{A}_h(\eta + \sigma, h)| &\leq C_3 \left(1 + \sum_{i=1}^n |\eta_i|\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n |\sigma_i|\right)^{|\alpha|+1} \\ &\leq C_4 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\eta_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma_i h_i}{2} \right| \right)^{|\alpha|+1}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Итак, в рассматриваемом случае из (1.45) и (1.51) следует оценка (1.44).

Рассмотрим теперь случай $|\sigma| \geq \frac{1}{2}(1 + |\eta|)$, $\sigma, \eta \in D_h$. Так как $\hat{A}_h(\eta, h) \in S_{h\alpha}^\infty$, то, применяя теорему Лагранжа, аналогично (1.50) получаем

$$\begin{aligned} |\hat{R}_h(\eta, \sigma)| &= |\hat{A}_h(\eta + \sigma, h) - \hat{A}_h(\eta, h)| = \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{A}_h(\eta + t\sigma, h)}{\partial \eta_i} \sigma_i \right| \\ &\leq C_1 \sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k} \left| \sin \frac{(\eta_k + t\sigma_k)h_k}{2} \right| \right)^{\alpha-1} |\sigma_i| \\ &\leq C_2 \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_k} \left| \sin \frac{(\eta_k + t\sigma_k)h_k}{2} \right| \right)^{\alpha-1} |\sigma|, \end{aligned} \quad (1.52)$$

где $0 < t < 1$.

Из (1.52), используя условие $|\sigma| \geq \frac{1}{2}(1 + |\eta|)$, получаем

$$\begin{aligned} |\hat{R}_h(\eta, \sigma)| &\leq C_3(1 + |\eta|)^{\alpha-1}|\sigma| \\ &\leq C_3 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\eta_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma_i h_i}{2} \right| \right). \end{aligned}$$

Итак, неравенство (1.44) доказано.

Из формулы (1.43) следует соотношение

$$F_h(\hat{T}_h(\eta, k, h)) = T'_h(\eta, \sigma, h) = [\hat{A}_h(\eta + \sigma, h) - \hat{A}_h(\eta, h)]\hat{\alpha}_h(\sigma). \quad (1.53)$$

Из предложения 1.1 и неравенства (1.44) вытекает оценка

$$|T'_h(\eta, \sigma, h)| \leq \frac{C_N \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\eta_i h_i}{2} \right| \right)^{\alpha-1}}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\sigma_i h_i}{2} \right| \right)^N}.$$

Из последнего неравенства и определения 1.11 следует предложение 1.3.

§ 2. Псевдоразностные уравнения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Семейство псевдоразностных операторов $A_h \in S_{h\alpha}^\infty$ с постоянными ступенчатыми символами $\hat{A}_h(\varphi, h)$ будем называть *сильно эллиптическим*, если выполняется неравенство

$$|\hat{A}_h(\varphi, h)| \geq C \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{\varphi_i h_i}{2} \right| \right)^\alpha,$$

где C не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

При помощи математической индукции доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $A_h \in S_{h\alpha}^\infty$ — сильно эллиптическое семейство п.р.о. Тогда семейство п.р.о. T_h , определенное соотношением

$$T_h u(x, h) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{D_h} \frac{1}{\hat{A}_h(\varphi, h)} \hat{u}_h(\varphi) e^{i(k\varphi, h)} d\varphi,$$

является сильно эллиптическим семейством п.р.о. с символами $\hat{T}_h(\varphi, h) \in S_{h(-\alpha)}^\infty$.

Рассмотрим ограниченный оператор T конечного порядка, отображающий $\mathring{H}_r(\Omega)$ в $H_{-r}(\mathbb{R}_n)$, где Ω — нормальная допускающая разбиение область (см. [2]).

Пусть устойчивое семейство операторов $T_h: \mathring{M}(r, h, \Omega_{1h}) \rightarrow M(-r, h)$, $r > 0$, $\prod_h^*$ -аппроксимирует в области Ω оператор T (см. [2]). Кроме того, пусть семейство операторов T_h является п.р.о. с постоянными ступенчатыми символами сильно эллиптического типа, причем их символы $\hat{A}_h(\varphi, h) \in S_{h(2r)}^\infty$.

Рассмотрим уравнение

$$pTu = f, \quad (2.1)$$

где $u(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$, $f(x) \in H_\lambda(\Omega)$, $\lambda > 0$, p – оператор сужения на область Ω , т.е. уравнение (2.1) понимается следующим образом: $\forall V(x) \in \mathring{H}_r(\Omega)$ выполняется равенство

$$(Tu, V) = (lf, V), \quad (2.2)$$

где $lf \in H_\lambda(\mathbb{R}_n)$ – некоторое продолжение f на $\mathbb{R}_n$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть для уравнения (2.1) выполняются указанные условия. Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать из системы

$$p_h T_h a(x, h) = p_h \prod_h f(x), \quad (2.3)$$

где $\prod_h$ – интегральный проектор, p_h – оператор сужения на область Ω_{1h} . Тогда $(\prod_h^* \psi(x))a(x, h) \in \mathring{M}(2r + \lambda, h, \Omega_{1h}) \quad \forall \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $\text{supp } \psi(x) \subset \Omega$, $\prod_h^*$ – точечный проектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(x, h)$ есть решение системы (2.3). Обозначим $f(x, h) = T_h a(x, h)$, $f(x, h) \in M(-r, h)$. Согласно предложению 2.1 оператор T_h^{-1} сильно эллиптический с постоянным ступенчатым символом $1/\hat{A}_h(\varphi, h) \in S_{h(-2r)}^\infty$.

Рассмотрим произвольную функцию $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, причем $\text{supp } \psi(x) \subset \Omega$. Возьмем $\alpha_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ такую, что $\text{supp } \alpha_1(x) \subset \Omega$, $\alpha_1(x) = 1$ при $x \in \text{supp } \psi(x)$. Если обозначить $D_1 = \{x : \alpha_1(x) = 1\}$, то существует открытая область $\mathcal{Y}_1 \subset D_1$ такая, что $\text{supp } \psi(x) \subset \mathcal{Y}_1$. Отсюда следует, что существует $h_0 > 0$ такое, что при $|h| < h_0$ $\text{supp } \psi(x) \subset \Omega_{1h}$, $\text{supp } \alpha_1(x) \subset \Omega_{1h}$. Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) T_h a(x, h) \right] &= T_h^{-1} T_h \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right] \\ &\quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) T_h a(x, h) - T_h \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right] \\ &= T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \prod_h f(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Соотношение (2.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} a(x, h) \prod_h^* \alpha_1(x) &= -T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) T_h a(x, h) - T_h \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right] \\ &\quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \prod_h f(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из предложения 2.1 и теоремы об интегральном проекторе [1] следует оценка

$$\left\| \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \prod_h f(x) \right\|_{\mathring{M}(\lambda, h, \Omega_{1h})} \leq C_\lambda \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}.$$

Так как T_h^{-1} — сильно эллиптический оператор и его символ $1/\widehat{A}_h(\varphi, h) \in S_{h(-2r)}^\infty$, то $g(x, h) = T_h^{-1}[(\prod_h^* \alpha_1(x)) \prod_h f(x)] \in M(\lambda + 2r, h)$, причем равномерно по h выполняется оценка

$$\|g(x, h)\|_{M(\lambda+2r, h)} \leq C_{\lambda, r} \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}. \quad (2.6)$$

По предложению 1.3 функция

$$g_1(x, h) = T_h^{-1}\left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x)\right) T_h a(x, h) - T_h\left(\prod_h^* \alpha_1(x)\right) a(x, h)\right] \in M(r+1, h).$$

Отсюда и из (2.5) следует, что $a(x, h) \prod_h^* \alpha_1(x) \in \mathring{M}(s, h, \Omega_{1h})$, где $s = \min(r+1, \lambda+2r)$, причем выполняется неравенство

$$\left\|a(x, h) \prod_h^* \alpha_1(x)\right\|_{\mathring{M}(s, h, \Omega_{1h})} \leq C_{\lambda, r} \|f\|_{H_\lambda(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Возьмем функцию $\alpha_2(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, обладающую следующими свойствами. Пусть $D_2 = \{x : \alpha_2(x) = 1\}$. Тогда существует открытая область $\mathcal{Y}_2 \subset D_2$, $\mathcal{Y}_2 \supset \text{supp } \psi(x)$, такая, что $\text{supp } \alpha_2(x) \subset \mathcal{Y}_1$, $\alpha_2(x) \cdot \alpha_1(x) = \alpha_2(x)$, и существует такое $h_1 > 0$, что при $|h| < h_1$ будет выполняться $(\prod_h^* \alpha_2(x)) \cdot (\prod_h^* \alpha_1(x)) = \prod_h^* \alpha_2(x)$.

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} & T_h^{-1}\left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right) T_h a(x, h)\right] \\ &= \left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right) a(x, h) \\ &+ T_h^{-1}\left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right) T_h\left(\prod_h^* \alpha_1(x)\right) a(x, h) \right. \\ &\quad \left. - T_h\left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x)\right)\left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right)\right) a(x, h)\right] \\ &+ T_h^{-1}\left(\left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right) T_h\left(\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x)) a(x, h)\right)\right) \\ &= T_h^{-1}\left(\left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right)\left(\prod_h f(x)\right)\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\Theta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $\Theta(x) = 1$ при $x \in \Omega$.

Так как носители функций $\prod_h^* \alpha_2(x)$ и $\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x))$ не пересекаются для всех h , $|h| < h_1$, то по свойству псевдолокальности (теорема 1.1) для любого s существует такое $h_2 > 0$, что при $|h| < h_2$ выполняется оценка

$$\left\|T_h^{-1}\left(\left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right) T_h\left(\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x)) a(x, h)\right)\right)\right\|_{M(s, h)} \leq C_{s\lambda} \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\left\|T_h^{-1}\left(\left(\prod_h^* \alpha_2(x)\right)\left(\prod_h f(x)\right)\right)\right\|_{M(\lambda+2r, h)} \leq C_1 \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}.$$

Используя неравенство (2.7) и предложение 1.3, получаем

$$\left\| T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) T_h \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) - T_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) \right) a(x, h) \right] \right\|_{M(r+2, h)} \leq C_2 \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}.$$

Из последних замечаний и представления (2.8) следует, что $a(x, h) \prod_h^* \alpha_2(x) \in \mathring{M}(s_1, h, \Omega_{1h})$, где $s_1 = \min(r+2, \lambda+2r)$, причем выполняется оценка

$$\left\| a(x, h) \prod_h^* \alpha_2(x) \right\|_{\mathring{M}(s_1, h, \Omega_{1h})} \leq C_{\lambda, r} \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}. \quad (2.9)$$

Рассуждая далее аналогично, получаем утверждение теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. При выполнении условий теоремы 2.1 для точного решения уравнения (2.1) имеем $\psi(x)u(x) \in \mathring{M}_{2r+\lambda}(\Omega)$, $\text{supp } \psi(x) \subset \Omega$.

Доказательство следует из теоремы 2.1 и результатов работ [1], [2].

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если $f(x) \in C^\infty(\mathcal{Y}_1)$, $\overline{\mathcal{Y}}_1 \subset \Omega$, то в любой области $\mathcal{Y}_2, \overline{\mathcal{Y}}_2 \subset \mathcal{Y}_1$, сходятся равномерно разностные отношения любого порядка приближенного решения уравнения (2.3).

Доказательство следует из теоремы 2.1 и теоремы вложения для пространств дробных отношений $M(r, h)$ (см. [1], [2]).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть для семейства операторов T_h и оператора T выполняются условия теоремы 2.1; оператор F ограниченно отображает $\mathring{H}_s(\Omega)$ в $H_k(\mathbb{R}_n)$ при $k-s+2r \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, s произвольно; ограниченное семейство операторов $F_h: \mathring{M}(s, h, \Omega_{1h}) \rightarrow M(k, h)$, $k-s+2r \geq \varepsilon$, s произвольно, $\prod_h^*$ -аппроксимирует в нормальной допускающей разбиение области Ω оператор F конечного порядка; операторы F_h принадлежат классу $S_{h(2r-\varepsilon)}^\infty$. Пусть, кроме того, сужение pA оператора $A = T + F$ на $H_r(\Omega)$ имеет ядро, состоящее из одного нулевого элемента. Приближенное решение уравнения

$$pA = f \quad (2.10)$$

находим из системы

$$p_h A_h a(x, h) = p_h \prod_h f(x), \quad (2.11)$$

где $f(x) \in L_2(\Omega)$, $f(x) \in H_\lambda(\mathcal{Y}_1)$, $\overline{\mathcal{Y}}_1 \subset \Omega$, $\lambda > 0$.

Тогда $\forall \psi(x) \in C_0^\infty(\mathcal{Y}_2)$, $\overline{\mathcal{Y}}_2 \subset \mathcal{Y}_1$, имеем

$$\left(\prod_h^* \psi(x) \right) a(x, h) \in \mathring{M}(r+2\lambda, h, \Omega_{1h})$$

при $|h| < h_0$, $h_0 > 0$, причем выполняется оценка

$$\left\| \left(\prod_h^* \psi(x) \right) a(x, h) \right\|_{\mathring{M}(2r+\lambda, \Omega_{1h})} \leq C_{\lambda, r} (\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}). \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(x, h)$ есть решение системы (2.11). Обозначим $f(x, h) = A_h a(x, h)$, $f(x, h) \in M(-r, h)$. Пусть $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathcal{Y}_2)$, возьмем $\alpha_1(x) \in C_0^\infty(\mathcal{Y}_1)$, причем $\text{supp } \alpha_1(x) \subset \mathcal{Y}_1$, $\alpha_1(x) = 1$ при $x \in \text{supp } \psi(x)$. Кроме того, если обозначить $D_1 = \{x : \alpha_1(x) = 1\}$, то существует открытая область $B_1 \subset D_1$ такая, что $\text{supp } \psi(x) \subset B_1$. Отсюда следует существование $h_0 > 0$ такого, что при $|h| < h_0$ $\text{supp } \psi(x) \subset \mathcal{Y}_{1h}$, $\text{supp } \alpha_1(x) \subset \mathcal{Y}_{1h}$.

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} & T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) A_h a(x, h) \right] \\ &= T_h^{-1} T_h \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right] \\ & \quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) T_h a(x, h) - T_h \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right] \\ & \quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) F_h a(x, h) \right] \\ &= T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \prod_h f(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \\ &= T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \prod_h f(x) \right] - T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) F_h a(x, h) \right] \\ & \quad - T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) T_h a(x, h) - T_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из предложения 2.1 и теоремы об интегральном проекторе (см. [1]) вытекает неравенство

$$\left\| \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \prod_h f(x) \right\|_{M(\lambda, h, \Omega_{1h})} \leq C_\lambda \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}.$$

Так как T_h^{-1} — сильно эллиптический оператор и его символ $1/\widehat{T}_h(\varphi, h) \in S_{h(-2r)}^\infty$, то $g(x, h) = T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \prod_h f(x) \right] \in M(\lambda + 2r, h)$, причем равномерно выполняется оценка

$$\|g(x, h)\|_{M(\lambda+2r, h)} \leq C_{\lambda, r} \|f(x)\|_{H_\lambda(\Omega)}. \quad (2.15)$$

Функция $b(x, h) = \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) F_h a(x, h) \in M(-r + \varepsilon, h)$. Отсюда следует, что функция $b_1(x, h) = T_h^{-1} b(x, h) \in M(r + \varepsilon, h)$, причем выполняется неравенство

$$\|b_1(x, h)\|_{M(r+\varepsilon, h)} \leq C_1 \|f(x)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.16)$$

где C_1 не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

По теореме о коммутаторе функция

$$g_1(x, h) = T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) T_h a(x, h) - T_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right) \right] \in M(r + \varepsilon, h).$$

Из (2.13)–(2.16) следует, что $a(x, h) \prod_h^* \alpha_1(x) \in \overset{\circ}{M}(s_1, h, \Omega_{1h})$, $s_1 = \min(r + \varepsilon, \lambda + 2r)$, причем выполняется неравенство

$$\left\| a(x, h) \prod_h^* \alpha_1(x) \right\|_{\overset{\circ}{M}(s_1, h, \Omega_{1h})} \leq C_{\lambda, r}^{(1)} (\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}). \quad (2.17)$$

Далее возьмем функцию $\alpha_2(x) \in C_0^\infty(\mathcal{Y}_1)$, обладающую следующими свойствами. Пусть $D_2 = \{x : \alpha_2(x) = 1\}$, причем существует открытая область B_2 , $B_2 \subset D_2$, $\text{supp } \psi(x) \subset B_2$, $\text{supp } \alpha_2(x) \subset B_1$. Тогда $\alpha_2(x) \cdot \alpha_1(x) = \alpha_2(x)$ и существует такое $h_1 > 0$, что при $|h| < h_1$ будет выполняться

$$\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) = \prod_h^* \alpha_2(x).$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} & T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) A_h a(x, h) \right] \\ &= T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) T_h a(x, h) \right] + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) F_h a(x, h) \right] \\ &= \left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) a(x, h) + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) T_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - T_h \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) a(x, h) \right) \right] \\ &\quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) T_h \left(\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x)) \right) \right] \\ &\quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) F_h a(x, h) \right] \\ &= T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) \prod_h f(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Соотношение (2.18) перепишем в виде

$$\sum_{i=1}^4 I_i(h) = I_5(h). \quad (2.19)$$

Функция $\Theta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $\Theta(x) = 1$ при $x \in \Omega$. Носители функций $\prod_h^* \alpha_2(x)$ и $\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x))$ не пересекаются для всех h , $|h| < h_2$. Тогда согласно свойству псевдолокальности $\forall s \exists h_3 > 0$ такое, что при $|h| < h_4$, $h_4 = \min\{h_1, h_2, h_3\}$, будет выполняться оценка

$$\begin{aligned} & \left\| T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) T_h \left(\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x)) a(x, h) \right) \right] \right\|_{\overset{\circ}{M}(s, h, \Omega_h)} \\ & \leq C_{rs} \|f(x)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Функция $g_{11}(x, h) = T_h^{-1}[(\prod_h^* \alpha_2(x)) \prod_h f(x)] \in M(\lambda + 2r, h)$, причем выполняется оценка

$$\|g_{11}(x, h)\|_{M(\lambda+2r, h)} \leq C_{1\lambda r} \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}. \quad (2.21)$$

Учитывая неравенство (2.17) и предложение 1.3, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) T_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - T_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) \left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right) \right] \right\|_{M(s_1+1, h)} \\ & \leq C_{2\lambda r} (\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для слагаемого $I_3(h)$ выполняется оценка (2.15). Слагаемое $I_4(h)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) F_h a(x, h) \right] \\ & = T_h^{-1} F_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) a(x, h) \right) \\ & \quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) F_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \right) \right. \\ & \quad \left. - F_h \left(\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) \left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) a(x, h) \right) \right] \\ & \quad + T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) F_h \left(\left(\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x)) \right) a(x, h) \right) \right] \\ & = \sum_{i=1}^3 f_i(x, h). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Выше было доказано, что если

$$\left(\prod_h^* \alpha_1(x) \right) a(x, h) \in \overset{\circ}{M}(s_1, h, \mathcal{Y}_{1h}),$$

где $s_1 = \min(r + \varepsilon, 2r + \lambda)$, то для функции

$$\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) a(x, h) \in \overset{\circ}{M}(s_1, h, \mathcal{Y}_{1h})$$

будет равномерно выполняться оценка (2.17) при $|h| < h_4$. Символ оператора F_h принадлежит классу $S_{h(2r-\varepsilon)}^\infty$, поэтому из последних замечаний вытекает оценка

$$\|f_1(x, h)\|_{M(s_1+\varepsilon, h)} \leq C_{3\lambda r} (\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}), \quad (2.24)$$

где $C_{3\lambda r}$ не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Носители функций $\prod_h^* \alpha_2(x)$ и $\prod_h^* (\Theta(x) - \alpha_1(x))$ не пересекаются при $|h| < h_4$. Тогда согласно свойству псевдолокальности для любого k существует $h_5 > 0$, $h_5 < h_4$, такое, что при $|h| < h_5$ будет выполняться оценка

$$\|f_3(x, h)\|_{M(k, h)} \leq C_{kr}^{(1)} (\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}). \quad (2.25)$$

Из предложения 1.3 и неравенства (2.17) следует

$$\|f_2(x, h)\|_{M(s_1+\varepsilon, h)} \leq C_4(\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}). \quad (2.26)$$

Из оценок (2.24)–(2.26) вытекает неравенство

$$\left\| T_h^{-1} \left[\left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) F_h a(x, h) \right] \right\|_{M(s_1+\varepsilon, h)} \leq C_5(\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}), \quad (2.27)$$

где C_5 не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$.

Из оценок (2.18)–(2.22) и (2.27) следует оценка

$$\left\| \left(\prod_h^* \alpha_2(x) \right) a(x, h) \right\|_{M(s_2, h, \Omega_{1h})} \leq C_6(\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|f(x)\|_{H_\lambda(\mathcal{Y}_1)}),$$

где $s_2 = \min(s_1 + \varepsilon, 2r + \lambda)$.

Рассуждая далее аналогично, получаем утверждение теоремы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Как видно из доказательства теоремы 2.2, утверждение теоремы останется справедливым, если для оператора F_h будут выполняться условия:

- 1) семейство операторов F_h равномерно ограничено отображает $M(s, h)$ в $M(s - 2r + \varepsilon, h)$ для любого s ;
- 2) для семейства операторов F_h выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \left(\prod_h^* \alpha(x) \right) F_h a(x, h) - F_h \left(\left(\prod_h^* \alpha(x) \right) a(x, h) \right) \right\|_{M(s-2r+1+\varepsilon, h)} \\ & \leq C_s \|a(x, h)\|_{M(s, h)}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где C_s не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, s произвольно;

- 3) существует $h_0 > 0$ такое, что при $|h| < h_0$ выполняется оценка (свойство псевдолокальности)

$$\left\| \left(\prod_h^* \alpha(x) \right) F_h \left(\left(\prod_h^* \beta(x) \right) a(x, h) \right) \right\|_{M(s, h)} \leq C_{sr} \|a(x, h)\|_{M(r, h)}, \quad (2.29)$$

где C_{sr} не зависит от $h = (h_1, \dots, h_n)$, $\alpha(x), \beta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, носители функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не пересекаются, $a(x, h) \in M(r, h)$, r и s произвольны.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим семейство операторов, определенное соотношением

$$F_h u(x, h) = \left(\prod_h^* b(x) \right) T_{\text{пр}} u(x, h) + u(x, h) \left(\prod_h^* \lambda(x) \right),$$

где $b(x), \lambda(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_1)$, $u(x, h) \in M(r, h)$, $T_{\text{пр}}$ – правый разностный оператор первого порядка.

Семейство операторов F_h равномерно ограничено отображает пространства $M(s, h)$ в $M(s - 1, h)$. Очевидно, что выполняется неравенство (2.29). Проверим свойство 2). Действительно, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & \pi \left\{ \left(\prod_h^* \alpha(x) \right) F_h a(x, h) - F_h \left(\left(\prod_h^* \alpha(x) \right) a(x, h) \right) \right\} \\ & = -b(kh)u((k+1)h) \frac{\alpha((k+1)h) - u(kh)}{h}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

где $\alpha(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_1)$, $u((k+1)h) = u((k+1)h, h)$, π – оператор, заданный определением 1.2.

Из предложения 1.1 и (2.30) следует соотношение (2.29). Отсюда вытекает, что при $r = 1$ для семейства операторов F_h справедливо замечание 2.1.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим разностный оператор $T_h = (\Delta_p)^m + (-1)^m$, где Δ_p – разностный оператор Лапласа. Сеточный символ оператора T_h имеет вид (см. [1])

$$\widehat{T}_c(\varphi, h) = (-1)^m 4^m \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \sin^2 \frac{\varphi_i}{2} \right]^m + (-1)^m. \quad (2.31)$$

Из (2.31) следует соотношение для ступенчатого символа $\widehat{T}_h(t, h)$

$$\widehat{T}_h(t, h) = (-1)^m 4^m \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \sin^2 \frac{t_i h_i}{2} \right]^m + (-1)^m. \quad (2.32)$$

Используя (2.32), получаем оценку

$$C_1 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{t_i h_i}{2} \right| \right)^{2m} \leq |\widehat{T}_h(t, h)| \leq C_2 \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \left| \sin \frac{t_i h_i}{2} \right| \right)^{2m}. \quad (2.33)$$

Из (2.33) следует, что $\widehat{T}_h(t, h) \in S_{h(2m)}$. Непосредственно проверяется, что $\widehat{T}_h(t, h) \in S_{h(2m)}^\infty$.

Рассмотрим теперь задачу Пуассона с однородными условиями Дирихле в области $\mathcal{Y}$, удовлетворяющей условиям теоремы 2.1:

$$\begin{aligned} \Delta^m u + (-1)^m u &= f(x), \quad x \in \mathcal{Y}, \\ u|_\Gamma &= 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $f(x) \in L_2(\mathcal{Y})$, $f(x) \in C^\infty(\mathcal{Y}_1)$, $\overline{\mathcal{Y}}_1 \subset \mathcal{Y}$, Γ – граница области $\mathcal{Y}$.

Приближенное решение $u(x, h)$ задачи (2.34) будем искать из системы

$$p_h(\Delta_p^m u(x, h) + (-1)^m u(x, h)) = p_h \left(\prod_h f(x) \right), \quad (2.35)$$

где p_h – оператор сужения на область $\mathcal{Y}_h$ (см. [2]).

Из результатов [2] следует, в частности, что решение $u(x) \in \mathring{H}_r(\mathcal{Y})$ существует и приближенные решения $u(x, h)$ сходятся к $u(x)$ по норме $\mathring{H}_r(\mathcal{Y})$, $0 < r < 1/2$. Из следствия 2.2 вытекает, что разностные отношения $u(x, h)$ любого порядка сходятся равномерно в любой области $\mathcal{Y}_2$ такой, что $\overline{\mathcal{Y}}_2 \subset \mathcal{Y}_1$.

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим задачу Пуассона

$$\begin{aligned} Au &= f(x), \quad x \in \mathcal{Y}, \\ u|_\Gamma &= 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $Au = \Delta u + Fu = \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda(x)u(x)$, Δ – оператор Лапласа, область $\mathcal{Y}$ и правая часть функции $f(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в примере 2.2, $b_i(x), \lambda(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$.

Приближенное решение $u(x, h)$ задачи (2.36) будем искать из системы

$$p_h A_h u(x, h) = p_h \left(\prod_h f(x) \right), \quad (2.37)$$

где $A_h = T_h + F_h$, $T_h = \Delta_p$, $F_h = \sum_{i=1}^n (\prod_h^* b_i(x)) T_{\text{пр}}(i) u(x, h) + (\prod_h^* \lambda(x)) u(x, h)$, здесь $T_{\text{пр}}(i)$ означает, что правая разностная производная берется по i -й переменной. Из примера 2.1 следует, что для оператора A_h справедливо замечание 2.1. Поэтому для задачи (2.36) справедливы все утверждения примера 2.2 (см. [2]).

ПРИМЕР 2.4. Рассмотрим задачу Пуассона

$$\begin{aligned}\Delta^m u &= f(x), & x \in \mathcal{Y}, \\ u|_{\Gamma} &= 0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Область $\mathcal{Y}$ и функция $f(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в примере 2.2. Приближенное решение $u(x, h)$ задачи (2.38) будем искать из системы

$$p_h \Delta_p^m u(x, h) = p_h \left(\prod_h f(x) \right).\tag{2.39}$$

Оператор Δ_p^m можно представить в виде

$$\Delta_p^m = (\Delta_p^m + (-1)^m) + (-1)^{m+1} = T_h + F_h = A_h.$$

Для оператора A_h выполняются все условия теоремы 2.2. Поэтому для задач (2.38) и (2.39) справедливы все утверждения примера 2.2.

ПРИМЕР 2.5. Рассмотрим одномерный оператор Прандтля

$$Au = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x_0) dx_0}{(x - x_0)^2},\tag{2.40}$$

где $u(x_0) \in H_r(\mathbb{R})$.

Ось OX разобьем с шагом h точками $x_i = h(i - 1/2)$, $i \in \mathbb{Z}$. Тогда вся числовая ось разобьется на интервалы $D(k, h) = ((k - 1/2)h, (k + 1/2)h)$. Определим числа γ_i , $i \in \mathbb{Z}$, соотношением

$$\gamma_i = \int_{D(i, h)} \frac{dx_0}{x_0^2} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{i^2 - 1/4}.\tag{2.41}$$

В (2.41) при $i = 0$ интеграл понимается по Адамару.

Дискретный оператор Прандтля определим формулой

$$\pi A_h u(x, h) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-i} a(i),\tag{2.42}$$

где $a(i) = \pi u(x, h)$.

Оператор A_h можно представить в виде псевдоразностного оператора

$$\pi A_h u(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{A}_c(\varphi, h) \hat{a}_c(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi,$$

где $\hat{a}_c(\varphi)$ – сеточное преобразование Фурье.

Для сеточного и ступенчатого символов п.р.о. имеют место соотношения

$$\hat{A}_c(\varphi, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ik\varphi}, \quad \hat{A}_h(t, h) = \hat{A}_c(th, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikh t}.$$

Построим новый оператор B_h следующим образом: возьмем четную функцию $\chi(x, a) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ (a – параметр) такую, что $0 \leq \chi(x, a) \leq 1$, $\chi(x, a) = 1$ при $-a \leq x \leq a$, и определим оператор B_h :

$$\pi B_h u(x, h) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \beta_{k-i} a_i, \quad (2.43)$$

где $\beta_k = \gamma_k \chi(k, h)$.

Ступенчатый символ $\widehat{B}_h(t, h)$ п.р.о. B_h имеет вид

$$\widehat{B}_h(t, h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ikh t} = -4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \sin^2 \frac{kh t}{2} + O(h), \quad (2.44)$$

где $O(h) = \beta_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$. Из конструкции функции $\chi(x, a)$ следует неравенство

$$C_1(a) \leq |O(h)| \leq C_2(a), \quad (2.45)$$

где $C_i(a) \geq 0$ не зависят от h .

В работах [1], [2] доказано неравенство при $-\pi/h \leq t \leq \pi/h$

$$\frac{C_3}{2} \left| \sin \frac{th}{2} \right| \leq 4 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin^2 \frac{kh t}{2} \leq \frac{C_4}{2} \left| \sin \frac{th}{2} \right|. \quad (2.46)$$

Из неравенств (2.45) и (2.46) следует, что оператор B_h является сильно эллиптическим и принадлежит классу S_{h1} .

Докажем, что $\widehat{B}_h(t, h) \in S_{h1}^\infty$. Рассмотрим выражение

$$\frac{d^n \widehat{B}_h(t, h)}{dt^n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^n \chi(kh) \gamma_k(kh)^n e^{ikh t}. \quad (2.47)$$

Для преобразования этого выражения используем тождество

$$\gamma_k h k^n = \frac{k^n}{k^2 - 1/4} = \frac{a_n k + b_n}{k^2 - 1/4} + P_{n-2}(k), \quad (2.48)$$

где $P_{n-2}(k)$ – многочлен степени $n - 2$ относительно k :

$$\begin{aligned} \frac{d^n \widehat{B}_h(t, h)}{dt^n} &= i^n b_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi(kh) \gamma_k e^{ikh t} h^n \\ &\quad + i^n a_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi(kh) \frac{k}{k^2 - 1/4} h^{n-1} e^{ikh t} \\ &\quad + i^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi(kh) P_{n-2}(k) h^{n-2} e^{ikh t} \\ &= \sum_{j=1}^3 \widehat{B}_{jn}(t, h). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Фиксируем некоторое $h_0 > 0$, тогда при $|h| < h_0$ имеет место оценка

$$|\widehat{B}_{1n}(t, h)| \leq k_{1n} \left(1 + \frac{1}{h} \left| \sin \frac{th}{2} \right| \right)^{1-n}, \quad (2.50)$$

где $t \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Ввиду равенства

$$P_{n-2}(k)h^{n-2} = C_0(kh)^{n-2} + C_1h(kh)^{n-2} + \dots + C_{n-3}(kh)h^{n-3} + C_{n-2}h^{n-2}$$

к $\widehat{B}_{3n}(t, h)$ применимо предложение 1.1. Поэтому выполняется неравенство

$$|\widehat{B}_{3n}(t, h)| \leq k_{2n} \left(1 + \frac{1}{h} \left| \sin \frac{th}{2} \right| \right)^{1-n}. \quad (2.51)$$

Преобразуем слагаемое $\widehat{B}_{2n}(t, h)$:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{2n}(t, h) &= 2i^n a_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(kh)}{k+1/2} (\sin tkh) h^{n-1} + i^n a_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(kh)}{k^2-1/4} (\sin tkh) h^{n-1} \\ &= I_1(h) + I_2(h). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Очевидно, что при $t \in [-\pi/4, \pi/4]$ справедливо неравенство

$$|I_2(h)| \leq k_{3n} \left(1 + \frac{1}{h} \left| \sin \frac{th}{2} \right| \right)^{1-n}. \quad (2.53)$$

Докажем, что имеет место оценка

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(kh)}{k+1/2} \sin tkh \right| \leq C_0. \quad (2.54)$$

Для величин $\alpha_k = \frac{\chi(kh)}{k+1/2}$ выполняются оценки

$$|\alpha_k| \leq \frac{A_1}{k+1/2}, \quad |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \leq \frac{A_2}{k^2} + \frac{A_3 h}{k}, \quad (2.55)$$

где A_i , $i = 1, 2, 3$, не зависят от h .

Так как функция $\chi(x, a)$ финитна, то существует такой отрезок $[-b, b]$, для которого $\text{supp } \chi(x, a) \subset [-b, b]$, $b = ph$, $p \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для всех $1 \leq k \leq p$ имеет место неравенство $1/k \geq 1/p = h/b = D_0 h$.

Кроме того, очевидно соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin tkh = \sum_{k=p}^{\infty} \alpha_k \sin tkh.$$

Из последних замечаний и (2.55) следует неравенство

$$|\alpha_k - \alpha_{k+1}| \leq \frac{A_3}{k^2}, \quad (2.56)$$

где A_3 не зависит от h .

При условиях (2.55), (2.56) в [2] доказано неравенство (2.54). Из (2.52) и (2.54) вытекает оценка

$$|\widehat{B}_{2n}(t, h)| \leq k_{2n} \left(1 + \frac{1}{h} \left| \sin \frac{th}{2} \right| \right)^{1-n}. \quad (2.57)$$

Из (2.49)–(2.51), (2.57) следует неравенство

$$\left| \frac{d^n \widehat{B}_h(t, h)}{dt^n} \right| \leq D_n \left(1 + \frac{1}{h} \left| \sin \frac{th}{2} \right| \right)^{1-n}.$$

Итак, символ $\widehat{B}_h(t, h) \in S_{h1}^\infty$.

Рассмотрим уравнение

$$\int_c^d \frac{u(x_0) dx_0}{(x - x_0)^2} = f(x), \quad (2.58)$$

где $f(x) \in L_2[c, d]$, $f(x) \in C^\infty(\mathcal{Y}_1)$, $\mathcal{Y}_1$ – открытая область, $\overline{\mathcal{Y}_1} \subset [c, d]$, $u(x_0) \in \overset{\circ}{H}_{1/2}[c, d]$.

Всегда можно подобрать такую функцию $\chi(x, a)$, что уравнение (2.58) и уравнение

$$\int_c^d g(x - x_0) u(x) dx_0 = f(x) \quad (2.59)$$

будут эквивалентны.

Кроме того, будут совпадать системы линейных алгебраических уравнений (С.Л.А.У.) для нахождения приближенных решений уравнений (2.58) и (2.59) соответственно:

$$\sum_{i \in \Lambda(h)} \gamma_{ij} u(ih, h) = f_h(x_j), \quad j \in \Lambda(h), \quad (2.60)$$

$$\sum_{i \in \Lambda(h)} \beta_{ij} V(ih, h) = f_h(x_j), \quad j \in \Lambda(h), \quad (2.61)$$

где $\gamma_{ij} = \gamma_{j-i}$, $\beta_{ij} = \beta_{j-i}$, $\Lambda(h)$ – множество индексов j таких, что $((j - 1/2)h, (j + 1/2)h) \subset (c, d)$, $f_h(x_j)$ – значение интегрального проектора $\prod_h f(x)$ на интервале $((j - 1/2)h, (j + 1/2)h) \subset (c, d)$.

Псевдоразностный оператор B_h соответствующей С.Л.А.У. (2.61) принадлежит классу S_{h1}^∞ и является сильно эллиптическим. Отсюда и из результатов [2] вытекает, что для (2.58) и (2.60) справедливы все утверждения примера 2.2.

Список литературы

1. *Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Пространства дробных отношений, дискретные операторы и их приложения. I // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 9. С. 41–98.
2. *Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Пространства дробных отношений, дискретные операторы и их приложения. II // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 67–134.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: ИЛ, 1962.

Военный авиационный технический
университет им. Н. Е. Жуковского,
г. Москва

Поступила в редакцию
11.02.2001