Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Марков, О. Трехос, О жесткости склеенной кусочно выпуклой поверхности,
Матем. сб., 2002, том 193, номер 2, 81–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm628>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 15:57:17

УДК 513.7

П. Е. Марков, О. Трехос

О жесткости склеенной кусочно выпуклой поверхности

В работе рассматривается признак жесткости кусочно выпуклой поверхности, склеенной из C^2 -гладких кусков выпуклых поверхностей с кусочно регулярными краями. Поверхность в целом не обязана быть выпуклой, более того, допускаются невыпуклые поверхности с условием так называемой A -звездности. Это условие является широким обобщением условия обычной звездности и означает, что точки поверхности достижимы некоторым семейством кривых (в случае обычной звездности это семейство кривых составляют прямолинейные лучи, исходящие из одной точки внутри поверхности).

Библиография: 10 названий.

Введение

В 1958 г. Б. В. Боярским и И. Н. Векуа [1] была доказана жесткость овалоида, склеенного из конечного числа кусков поверхностей класса C^3 . Позднее Б. В. Боярский [2] распространил это доказательство на случай кусочно выпуклой внутренне склеенной замкнутой поверхности, звездной относительно некоторой точки. Звездность относительно данной точки означает, что всякий луч, выходящий из этой точки, имеет не более одной общей точки с поверхностью. Такая поверхность может быть получена из овалоида отсечением от него шапочек с последующим заклеиванием образовавшихся дыр кусками плоскостей и незначительным “вдавливанием” их внутрь исходной поверхности.

В теореме Б. В. Боярского наряду с требованием звездности поверхности присутствует одно условие на линии склеивания, резко ограничивающее класс допустимых поверхностей. Геометрический смысл этого условия заключается в достаточной малости описанных вдавливаниях. В этой же работе Б. В. Боярским высказана гипотеза о несущественности требования “малости вдавливаниях”. Эта гипотеза подтверждается результатами работ [3]–[7], в которых условия теоремы Б. В. Боярского существенно ослаблены. В частности, в работе [5] доказано, что теорема Б. В. Боярского остается справедливой, если в условиях звездности и малости вдавливаниях прямолинейные лучи заменить на графики степенной функции с произвольно фиксированным показателем.

В настоящей работе доказывается, что прямолинейные лучи в условиях Б. В. Боярского могут быть заменены на криволинейные лучи довольно широкого класса. При этом ослабляются требования на гладкость и регулярность склеиваемых поверхностей (гладкость склеиваемых кусков снижена до C^2 , а также не исключается наличие конических точек). Тем самым, выделяется класс жестких внутренне склеенных поверхностей, содержащий классы, выделенные в [2], [4], [5] и некоторых других работах. Доказательство опирается на интегральную формулу, обобщающую известную формулу В. Бляшке [8] и на формулы, используемые в [2], [4], [5], [7].

§ 1. Формулировка результата

Пусть F — замкнутая поверхность, удовлетворяющая следующим условиям.¹

1. Поверхность F состоит из конечного числа кусков выпуклых поверхностей класса C^2 , каждый из которых может содержать лишь конечное число особых точек. Эти куски мы будем называть *гранями*, а особые точки — *коническими точками*.²

2. Каждая грань ограничена конечным числом регулярных дуг класса C^2 . Эти дуги будем называть *ребрами*, а точки пересечения ребер — *вершинами*. Будем говорить, что ребро γ образовано гранями S^+ и S^- , если оно лежит как на S^+ , так и на S^- . Ребра поверхности F будем классифицировать следующим образом. Ребро γ , образованное гранями S^+ и S^- , будем называть ребром *выпуклого склеивания*, если поверхность $S^+ \cup S^-$ выпукла, и ребром *невыпуклого склеивания* в противном случае. Ребро невыпуклого склеивания будем называть ребром *внутреннего склеивания*, если в каждой его точке существует опорная плоскость к поверхности $S^+ \cup S^-$.

3. Каждое ребро поверхности F является ребром либо выпуклого, либо внутреннего склеивания.³ В тех точках, где кривизна ребра отлична от нуля, его направление не является асимптотическим одновременно на обеих из образующих его граней.

4. В каждой вершине многогранный угол, образованный полукасательными к выходящим из нее ребрам, является выпуклым.

5. Конические точки не лежат на ребрах.

6. В каждой конической точке касательный конус к содержащей эту точку грани является поверхностью класса C^3 .

7. Граница каждой плоской связной компоненты на поверхности F является жордановой кривой, состоящей из конечного числа регулярных дуг класса C^2 .

Допустим, что в пространстве введена прямоугольная декартова система координат $Ox^1x^2x^3$. Каждый вектор $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ будем рассматривать как матрицу-строку. Зафиксируем (3×3) -матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и функцию $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 с производной $\varphi' > 0$. Каждую кривую с векторно-параметрическим уравнением

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} \cdot e^{\varphi(t)A}, \quad (1)$$

¹Некоторые из этих условий имеют технический характер и могут быть ослаблены.

²Определение поверхности класса C^2 с коническими точками, а также описание встречающихся ниже понятий касательного конуса и гладкого касательного конуса приведены в п. 2.1.

³Примеры нежестких поверхностей с ребрами невыпуклого внешнего склеивания имеются в [9], [10]. С другой стороны, в [7] доказана жесткость поверхности, допускающей ребра невыпуклого внешнего склеивания специального вида.

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – произвольный постоянный вектор, точкой обозначено произведение матриц, будем называть *A-лучом*. Поверхность F назовем *A-звездной*, если всякий *A-луч* пересекает ее не более чем в одной точке.

Обозначим через $\mathbf{p}'$ поле касательных векторов к *A-лучу*, через $\mathbf{n}$ – поле единичных внешних нормалей поверхности F . Вдоль произвольного ребра γ , образованного гранями S^+ и S^- , через k_n^+ и k_n^- будем обозначать нормальные кривизны поверхностей S^+ и S^- соответственно, считая, что векторы касательной и главной нормали ребра ориентированы так, что его кривизна $k \geq 0$. Обозначим через ϑ угол, отсчитываемый от вектора $\mathbf{n}^+$ до вектора $\mathbf{n}^-$, если смотреть с конца вектора касательной к ребру. Положим $\mathbf{h} = \sin \vartheta (k_n^+ \mathbf{n}^- + k_n^- \mathbf{n}^+)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если поверхность F является A-звездной и вдоль каждого ее ребра внутреннего склеивания выполняется неравенство*

$$(\mathbf{p}', \mathbf{h}) \leq 0, \quad (2)$$

где $(*, *)$ – скалярное произведение векторов в E^3 , то она обладает жесткостью вне плоских областей⁴ относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающими полями, непрерывными на F и принадлежащими классу C^2 на каждой ее грани.

Эта теорема не позволяет делать заключений о жесткости многогранника. Признак жесткости многогранников дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. *Если поверхность F является A-звездной и вдоль каждого ее ребра внутреннего склеивания выполняется неравенство (2), то она обладает жесткостью относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающими полями, непрерывными на F , принадлежащими классу C^2 на каждой грани и тривиальными на каждой плоской области.*

Приведем несколько примеров поверхностей, удовлетворяющих условиям теорем 1, 2.

ПРИМЕР 1. Возьмем в качестве A единичную матрицу и положим $\varphi(t) = \ln t$. В этом случае каждый *A-луч* задается уравнением $\mathbf{p} = (c_1 t, c_2 t, c_3 t)$, т.е. является прямолинейным лучом, выходящим из начала координат. Условие *A-звездности* совпадает с условием звездности относительно начала координат, а теорема 1 – с теоремой Б. В. Боярского из [2] (если не учитывать, что в условиях теоремы 1 снижены требования на гладкость и регулярность склеиваемых кусков).

ПРИМЕР 2. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = \ln t.$$

Простой подсчет показывает, что уравнение *A-луча* в этом случае имеет вид $\mathbf{p} = (c_1 t, c_2 t, c_3 t^\alpha)$, т.е. *A-лучи* совпадают с α -лучами из работы [5], а теоремы 1, 2 – с соответствующей теоремой из этой работы (при сниженных требованиях гладкости и регулярности).

⁴Определения жесткости, жесткости вне плоских областей, а также тривиальности изгибающего поля приведены в п. 2.3.

ПРИМЕР 3. При

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = \ln t$$

каждый A -луч имеет уравнение $\mathbf{p} = (c_1, c_2, c_3 t)$ и представляет собой прямолинейный луч с началом в плоскости Oxy , параллельный оси Oz . В этом случае условиям теорем 1 и 2 удовлетворяет поверхность, рассмотренная в работе [4].

Следующие два примера показывают, что класс поверхностей, удовлетворяющих условиям теорем 1, 2, содержит не только поверхности, рассмотренные в указанных работах.

ПРИМЕР 4. Если положить

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = \ln t,$$

то соответствующими A -лучами будут, вообще говоря, неплоские кривые с уравнениями вида $\mathbf{p} = (c_1 t^\alpha, c_2 t^\beta, c_3 t^\gamma)$. В этом случае поверхности, удовлетворяющие условиям теорем 1, 2, могут не удовлетворять условиям теорем из работ [2], [4], [5].

ПРИМЕР 5. Если положить

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(t) = t,$$

то в качестве A -лучей будем иметь винтовые линии с уравнениями вида

$$\mathbf{p} = (c_1 \cos t + c_2 \sin t, -c_1 \sin t + c_2 \cos t, c_3 e^t).$$

§ 2. Вспомогательные предложения

2.1. Пусть X – двумерное связное хаусдорфово ориентируемое компактное C^∞ -многообразие. Регулярной областью на X будем называть связное множество D с непустой внутренностью, граница которого либо пуста, либо состоит из конечного числа простых регулярных кривых класса C^∞ . Рассмотрим C^2 -отображение $\mathbf{r}: X \rightarrow E^3$ многообразия X в трехмерное евклидово пространство E^3 , ограничение которого на внутренность D^0 области D является погружением. Образ $S = \mathbf{r}(D)$ мы называем *поверхностью*, и *регулярной поверхностью*, если $\mathbf{r}$ – погружение на всей области D . Заметим, что по данному определению поверхность может содержать особые точки – образы точек, лежащих на границе ∂D области D , в которых отображение $\mathbf{r}$ не является погружением. На поверхности в индуцированной из E^3 топологии особая точка может оказаться внутренней. Простейшим примером такой точки является вершина конуса [7]. Мы будем рассматривать только внутренние изолированные особые точки на поверхности S и, принимая за модель особой точки вершину конуса, называть их *коническими*. Будем предполагать, что каждая коническая точка M_0 является образом регулярной дуги $\gamma \subset \partial D$.

В каждой точке из E^3 касательное к E^3 пространство будем отождествлять с пространством E^3 . Тогда в каждой точке $x \in X$ определено касательное к $\mathbf{r}$ отображение $T_x \mathbf{r}: T_x(X) \rightarrow E^3$, где $T_x(X)$ – касательное к X пространство в точке x . Будем считать, что если ненулевой вектор $\xi(x) \in T_x(X)$ не является касательным вектором к γ , то $T_x \mathbf{r}(\xi(x)) \neq 0$. Для фиксированного векторного поля ξ класса C^∞ на γ такого, что $\xi(x) \notin T_x(\gamma)$ в каждой точке $x \in \gamma$, будем предполагать, что отображение $\rho: \gamma \rightarrow E^3$, определяемое формулой $\rho(x) = T_x \mathbf{r}(\xi)$, является погружением. Конус с вершиной в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\gamma)$ и направляющей $\rho(\gamma)$ называется *касательным конусом* к поверхности S в точке M_0 .

В частности, если на X введены координаты (u, v) , в которых γ задается уравнением $v = 0$, и $v > 0$ для точек, близких к γ и лежащих внутри области D , то полагая $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$, получаем уравнение касательного конуса к S в M_0 в виде

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_0 + v \frac{\partial \mathbf{r}(u, 0)}{\partial v},$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки на касательном конусе. Из этого уравнения следует, что касательный конус к S в точке M_0 представляет собой множество всех полукасательных к кривым на S , выходящим из M_0 .

2.2. Рассмотрим случай, когда поверхность S не содержит особых точек и задается C^2 -погружением $\mathbf{r}: D \rightarrow E^3$, где D – регулярная область на X . Обозначим через ds^2 метрику на D , индуцированную погружением $\mathbf{r}$. В некоторой окрестности каждой точки на D существует локальный C^1 -корепер $\tau = (\tau^1, \tau^2)$, образованный 1-формами τ^1, τ^2 класса C^1 , в котором метрика ds^2 имеет нормальный вид: $ds^2 = \tau^1 \otimes \tau^1 + \tau^2 \otimes \tau^2$. Через $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ будем обозначать локальный репер, дуальный к кореперу τ . Полагая $\mathbf{e}_1 = \xi_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{e}_2 = \xi_2(\mathbf{r})$, получаем ортонормированный C^1 -репер $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в касательном расслоении поверхности S . При этом справедливо равенство

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 \tau^1 + \mathbf{e}_2 \tau^2. \quad (3)$$

Пусть $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ – поле нормалей поверхности S (здесь и далее знаком $\times$ обозначается векторное произведение в E^3). Разложение дифференциалов $d\mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_2$ по базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ приводит к формулам Гаусса:

$$d\mathbf{e}_1 = \phi_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1 \mathbf{n}, \quad d\mathbf{e}_2 = \phi_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{n}, \quad (4)$$

где $\phi_1^2 = -\phi_2^1$ – формы связности корепера τ , ω_1, ω_2 – формы погружения. Обобщенное внешнее дифференцирование формул (4) приводит к уравнению Гаусса [7]:

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = K \tau^1 \wedge \tau^2, \quad (5)$$

где K – гауссова кривизна поверхности S . Внешнее дифференцирование равенства (3) с использованием (4) дает

$$\omega_1 \wedge \tau^1 + \omega_2 \wedge \tau^2 = 0. \quad (6)$$

Если разложение форм погружения по кореперу τ записать в виде $\omega_i = b_{i1} \tau^1 + b_{i2} \tau^2$, $i = 1, 2$, то из (6) получаем $b_{12} = b_{21}$. Симметрическая билинейная форма $\Pi = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \tau^i \otimes \tau^j$ называется *второй основной формой* поверхности S . Для гауссовой кривизны получаем $K = b_{11}b_{22} - b_{12}^2$.

2.3. Рассмотрим произвольное бесконечно малое изгибание первого порядка поверхности S без особых точек, задаваемой C^2 -погружением $\mathbf{r}: D \rightarrow E^3$. Для всякой величины $\mathcal{A}$ на S через $\delta\mathcal{A}$ будем обозначать ее вариацию. Вариация $\delta\mathbf{r}$ называется *изгибающим полем* поверхности S . Поля $\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$ связаны равенством

$$(d\mathbf{r}, d\delta\mathbf{r}) = 0. \quad (7)$$

Изгибающее поле вида $\delta\mathbf{r} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ — постоянные векторы из E^3 , а также соответствующее бесконечно малое изгибание поверхности S называются *тривиальными*. Поверхность называется *жесткой*, если всякое ее изгибающее поле тривиально, и *жесткой вне плоских областей*, если всякое ее изгибающее поле тривиально на каждом связном куске, не содержащем плоских областей.

Из (7) выводится, что каждому изгибающему полю $\delta\mathbf{r}$ класса C^2 соответствует единственное векторное поле $\mathbf{V}: D \rightarrow E^3$ класса C^1 , определяемое равенством $d\delta\mathbf{r} = \mathbf{V} \times d\mathbf{r}$ и называемое *полем вращений*. Для дифференциала поля $\mathbf{V}$ справедливо разложение

$$d\mathbf{V} = \delta\omega_2 \mathbf{e}_1 - \delta\omega_1 \mathbf{e}_2. \quad (8)$$

Отсюда для производной поля вращений по длине дуги s произвольной кривой γ класса C^2 на S выводится формула [9]

$$\frac{d\mathbf{V}}{ds} = \delta k_n \mathbf{l} + \delta\tau_g \mathbf{t}, \quad (9)$$

где $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ — единичный вектор касательной к γ , $\mathbf{l} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ — единичный вектор тангенциальной нормали этой кривой, k_n и τ_g — соответственно нормальная кривизна и геодезическое кручение поверхности S вдоль γ .

Варьируя равенство (6), получаем $\delta\omega_1 \wedge \tau^1 + \delta\omega_2 \wedge \tau^2 = 0$. Отсюда и из (3), (8) следует, что

$$d\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{V} \times d\mathbf{V} = 2\Delta \mathbf{n} \tau^1 \wedge \tau^2,$$

где обозначено $\Delta = \delta b_{11} \delta b_{22} - \delta b_{12}^2$. Здесь и далее векторное произведение дифференциалов векторных полей вычисляется по правилу: $d\mathbf{V} \times d\mathbf{V} = -\delta\omega_2 \wedge \delta\omega_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 - \delta\omega_1 \wedge \delta\omega_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1$.

Варьируя равенство (5), будем иметь $\delta\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \delta\omega_2 = 0$. Отсюда следует, что

$$b_{11} \delta b_{22} - 2b_{12} \delta b_{12} + b_{22} \delta b_{11} = 0.$$

Из этого равенства и результатов книги [9; гл. 5, §§ 7, 9] вытекает

ЛЕММА 1. *Если поверхность S неотрицательной гауссовой кривизны не содержит плоских областей, то $\Delta \leq 0$ на S . Если при этом множество ее асимптотических, в каждой точке которых вариация нормальной кривизны по каждому неасимптотическому направлению отлична от нуля, не заполняет области на S , то тождество $\Delta \equiv 0$ влечет тривиальность соответствующего бесконечно малого изгибания поверхности S .*

В работе [7] для плоских областей доказано следующее предложение.

ЛЕММА 2. Пусть G – кусок плоскости с границей ∂G , состоящей из конечного числа дуг класса C^2 , звездный относительно некоторой точки $M_0 \in \partial G$. Для всякого непрерывного кусочно гладкого в классе C^2 изгибающего поля $\delta \mathbf{r}$ куска G существует непрерывное кусочно гладкое в классе C^2 изгибающее поле $\tilde{\delta \mathbf{r}}$ этого куска такое, что $\tilde{\delta} b_{11} \tilde{\delta} b_{22} - \tilde{\delta} b_{12}^2 = 0$ и $\tilde{\delta \mathbf{r}}|_{\partial G} = \delta \mathbf{r}|_{\partial G}$.

2.4. В данном пункте мы рассмотрим поведение поля вращений на регулярных участках ребер. Пусть γ – ребро класса C^2 , образованное кусками S^+ и S^- регулярных поверхностей класса C^2 . Будем считать, что γ задано уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s – длина дуги. При этом при движении вдоль γ с возрастанием параметра s поверхность S^+ лежит слева. Через $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{m}$ будем обозначать поля единичных векторов касательной, главной нормали и бинормали соответственно, через $k = \left(\frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{m} \right)$ – кривизну ребра.

Предельные значения величин на поверхностях S^+ и S^- в точках ребра будем снабжать верхними индексами $+$ и $-$ соответственно. Через $\theta^\pm$ будем обозначать угол между вектором главной нормали $\mathbf{m}$ и вектором нормали $\mathbf{n}^\pm$, отсчитываемый против движения часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{t}$. Угол $\vartheta = \theta^- - \theta^+$ между векторами $\mathbf{n}^+$ и $\mathbf{n}^-$ называется *углом склеивания* кусков S^+ и S^- .

Рассмотрим бесконечно малое изгибание поверхности $S^+ \cup S^-$ с непрерывным изгибающим полем, принадлежащим классу C^2 на каждом из кусков S^+ и S^- . Непрерывность изгибающего поля означает, что $\delta \mathbf{r}^+ = \delta \mathbf{r}^-$ вдоль γ . Отсюда для поля вращений $\mathbf{V}$ находим [9]

$$\mathbf{V}^+ - \mathbf{V}^- = -\mu \mathbf{t}, \quad (10)$$

где $\mu(s)$ – некоторая функция класса C^1 на γ .

Из равенства (9) вдоль γ имеем

$$\frac{d\mathbf{V}^\pm}{ds} = \delta k_n^\pm \mathbf{l}^\pm + \delta \tau_g^\pm \mathbf{t}, \quad (11)$$

где $\mathbf{l}^\pm = \mathbf{t} \times \mathbf{n}^\pm$. С учетом этой формулы дифференцирование равенства (10) по дуге s приводит к следующим *условиям сопряжения* [9]:

$$\begin{aligned} \delta k_n^+ \cos \theta^+ - \delta k_n^- \cos \theta^- &= 0, \\ \delta k_n^+ \sin \theta^+ - \delta k_n^- \sin \theta^- &= -k\mu, \\ \delta \tau_g^+ - \delta \tau_g^- &= -\frac{d\mu}{ds}. \end{aligned} \quad (12)$$

ЛЕММА 3. Если ребро γ , образованное кусками S^+ и S^- , имеет отличную от нуля кривизну и не является асимптотической одновременно на S^+ и S^- , то в тех точках, где выполняется равенство $\sin \vartheta = 0$, выполняется и равенство $\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sin \vartheta = 0$, то либо $\theta^- = \theta^+$, либо $\theta^- = \theta^+ + \pi$. В обоих случаях из формул (12) получаем $\mu = 0$, а из (10) следует, что $\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^-$.

2.5. В данном пункте мы рассмотрим окрестность конической точки. Доказательство двух следующих лемм содержится в работе [7].

ЛЕММА 4. *Внутренняя изолированная коническая точка M на выпуклой поверхности S класса C^1 обладает окрестностью, допускающей инъективное ортогональное проектирование на касательный конус $\hat{S}$ к поверхности S в точке M .*

ЛЕММА 5. *Пусть M – внутренняя изолированная точка на выпуклой поверхности S класса C^2 , в которой касательный конус к S является конической поверхностью класса C^3 , регулярной всюду кроме, быть может, точки M . Тогда в некоторой окрестности точки M поверхность S можно задать уравнением*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + y\rho(x) + f(x, y)\rho \times \rho',$$

где $x \in [0, L]$, $y \in [0, \varepsilon_0]$, $L > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки M , $\rho = \rho(x)$ – вектор-функция класса C^3 на $[0, L]$, удовлетворяющая условиям

$$|\rho| = |\rho'| = 1,$$

$\rho' = \frac{d\rho}{dx}$, $f(x, y)$ – неотрицательная функция класса C^2 на множестве $[0, L] \times [0, \varepsilon_0]$, удовлетворяющая условиям

$$f(x, 0) = f_y(x, 0) = f_{xy}(x, 0) = 0.$$

При этом карта на многообразии X с координатными функциями x, y C^3 -согласована с каждой картой из C^∞ -структуры на этом многообразии.

Определяемые этой леммой координаты x, y используются в формулировке следующей леммы.

ЛЕММА 6. *Если касательный конус к выпуклой поверхности S класса C^2 в конической точке M является поверхностью класса C^3 , то для всякого изгибающего поля класса C^2 поверхности S соответствующее поле вращений $\mathbf{V}(x, y)$ может быть непрерывно продолжено с множества $[0, L] \times (0, \varepsilon_0)$ на множество $[0, L] \times [0, \varepsilon_0]$. Его частная производная $\mathbf{V}_x$ на множестве $[0, L] \times (0, \varepsilon_0)$ имеет вид*

$$\mathbf{V}_x = \frac{p(x, y)}{y}\rho + \mathbf{R}(x, y),$$

где $p(x, y)$ – непрерывная функция на множестве $[0, L] \times [0, \varepsilon_0]$, $\mathbf{R}(x, y)$ – непрерывная на этом множестве вектор-функция. При этом $p(x, 0) = 0$, $\mathbf{R}(x, 0) = \mathbf{0}$ для всякого $x \in [0, L]$.

§3. Вывод интегральной формулы

Данный параграф посвящен выводу интегральной формулы, обобщающей формулы, использованные в работах [2], [4], [5], [7].

3.1. Пусть Q – произвольная вершина на поверхности S , склеенной из кусков $S_1, \dots, S_m$ выпуклых поверхностей класса C^2 вдоль ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, выходящих из Q . Будем считать, что ребра $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_1$ следуют в указанном порядке при

движении нормали к поверхности вокруг вершины против движения часовой стрелки, ребро γ_i образовано кусками S_i и S_{i+1} , $i = 1, \dots, m$ (ребро γ_m — кусками S_m и S_1), причем при движении вдоль γ_i от вершины кусок S_i расположен справа. В дальнейшем будем отождествлять S_{m+1} с S_1 , γ_{m+1} с γ_1 . Через $\mathbf{t}_i$ обозначим единичный вектор касательной к γ_i в точке Q , через $\mathbf{V}_i$ — предельное значение поля вращений куска S_i на γ_i в точке Q . Из (10) имеем

$$\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i = -\mu_i \mathbf{t}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

где μ_i — некоторые числа. Положим

$$\Omega_Q = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m (\mathbf{t}_i \times \mathbf{t}_j) \mu_i \mu_j. \quad (14)$$

Пусть M — произвольная внутренняя коническая точка на выпуклой поверхности S . Сохраняя обозначения, использованные в леммах 4–6, для произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ обозначим через $\widehat{l}_\varepsilon$ линию пересечения касательного конуса $\widehat{S}$ к поверхности S в точке M со сферой радиуса ε с центром в точке M , через l_ε — ее прообраз на поверхности S при ортогональном проектировании на $\widehat{S}$. Будем считать, что при движении нормали к поверхности вдоль l_ε точка M находится справа. Кривая l_ε в координатах x, y , определенных леммой 5, задается уравнением $y = \varepsilon$, $0 \leq x \leq L$. Будем обозначать через $\mathbf{t}$ разбиение отрезка $[0, L]$ на n частей точками $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = L$. Положим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \nu = \max_i \Delta x_i, \quad \lambda_i = \frac{p(x_i, \varepsilon) \Delta x_i}{\varepsilon}, \quad \rho_i = \rho(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Введем в рассмотрение зависящий от разбиения $\mathbf{t}$ и ε вектор $\overline{\Omega}_M$, полагая

$$\overline{\Omega}_M = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \rho_i \times \rho_j \lambda_i \lambda_j.$$

Обращаясь к поверхности F из § 1, обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность разбиений $\mathbf{t}$ по всем коническим точкам, через ν_0 — максимальное из чисел ν в этой совокупности, через F_ε — часть поверхности F , ограниченную всеми кривыми $l_\varepsilon(M)$, не содержащую конических точек, через Γ^0 — совокупность всех ребер, вдоль которых $\sin \vartheta \neq 0$. Незначительной модификацией соответствующих рассуждений из [7] устанавливаются формулы

$$\begin{aligned} 2 \iint_{F_\varepsilon} [\mathbf{r}(\mathbf{e}, \mathbf{n}) + \mathbf{e}(\mathbf{r}, \mathbf{n})] \Delta d\sigma &= - \int_{\Gamma^0} \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} [\mathbf{r}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) + \mathbf{e}(\mathbf{r}, \mathbf{h})] ds \\ &\quad - \sum_Q [\mathbf{r}_Q(\mathbf{e}, \Omega_Q) + \mathbf{e}(\mathbf{r}_Q, \Omega_Q)] \\ &\quad + \sum_M [\mathbf{r}_M(\mathbf{e}, \overline{\Omega}_M) + \mathbf{e}(\mathbf{r}_M, \overline{\Omega}_M)] + \varphi^{(1)}(\varepsilon) + \psi^{(1)}(\mathfrak{R}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} 2 \iint_{F_\varepsilon} (\mathbf{r}, \mathbf{n}) \Delta d\sigma &= \sum_M (\mathbf{r}_M, \overline{\Omega}_M) - \sum_Q (\mathbf{r}_Q, \Omega_Q) \\ &\quad - \int_{\Gamma^0} (\mathbf{r}, \mathbf{h}) \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} ds + \varphi^{(2)}(\varepsilon) + \psi^{(2)}(\mathfrak{R}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbf{e}$ – произвольный постоянный вектор, $\mathbf{r}_Q$ – радиус-вектор вершины Q , $\mathbf{r}_M$ – радиус-вектор конической точки M ,

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{0}, \quad \varphi^{(2)}(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \psi^{(1)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) &\rightarrow \mathbf{0}, \quad \psi^{(2)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{для всякого } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

3.2. Пусть $\Phi: E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – билинейная форма, сопоставляющая каждой паре векторов $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ и $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$ действительное число $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x^i y^j$. В обозначениях предыдущего пункта имеет место

ЛЕММА 7. Если поверхность F удовлетворяет условиям 1–7 из §1, то для всякого изгибающего поля, непрерывного на F и принадлежащего классу C^2 на каждой грани, справедливо равенство

$$\begin{aligned}2 \iint_{F_\varepsilon} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \Delta d\sigma &= \sum_M \Phi(\mathbf{r}_M, \bar{\Omega}_M) - \sum_Q \Phi(\mathbf{r}_Q, \Omega_Q) \\ &\quad - \int_{\Gamma^0} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{h}) \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} ds + \varphi(\varepsilon) + \psi(\mathfrak{R}, \varepsilon),\end{aligned}\quad (17)$$

где

$$\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \psi(\mathfrak{R}, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{для всякого } \varepsilon > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая равенство (16) на вектор $\mathbf{e}$ и вычитая результат из (15), приходим к формуле

$$\begin{aligned}2 \iint_{F_\varepsilon} \mathbf{r}(\mathbf{e}, \mathbf{n}) \Delta d\sigma &= - \int_{\Gamma^0} \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} \mathbf{r}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) ds - \sum_Q \mathbf{r}_Q(\mathbf{e}, \Omega_Q) \\ &\quad + \sum_M \mathbf{r}_M(\mathbf{e}, \bar{\Omega}_M) + \varphi^{(3)}(\varepsilon) + \psi^{(3)}(\mathfrak{R}, \varepsilon),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\varphi^{(3)}(\varepsilon) &\rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \psi^{(3)}(\mathfrak{R}, \varepsilon) &\rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{для всякого } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Взяв в последнем равенстве в качестве вектора $\mathbf{e}$ орт $\mathbf{e}_i$ оси Ox^i прямоугольной декартовой системы координат $Ox^1 x^2 x^3$ и умножая это равенство скалярно на орт $\mathbf{e}_j$, $i, j = 1, 2, 3$, будем иметь

$$\begin{aligned}2 \iint_{F_\varepsilon} x^j n^i \Delta d\sigma &= - \int_{\Gamma^0} \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} x^j h^i ds - \sum_Q x_Q^j \Omega_Q^i \\ &\quad + \sum_M x_M^j \bar{\Omega}_M^i + \varphi^{ij}(\varepsilon) + \psi^{ij}(\mathfrak{R}, \varepsilon),\end{aligned}$$

где $i, j = 1, 2, 3$, верхние индексы i и j означают номер координаты соответствующего вектора,

$$\begin{aligned}\varphi^{ij}(\varepsilon) &\rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \psi^{ij}(\mathfrak{R}, \varepsilon) &\rightarrow 0 \quad \text{при } \nu_0 \rightarrow 0 \quad \text{для всякого } \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Умножая это равенство на a_{ij} и суммируя по $i, j = 1, 2, 3$, получаем (17). Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Если поверхность F удовлетворяет условиям 1–7 из §1, то для всякого изгибающего поля, непрерывного на F и принадлежащего классу C^2 на каждой грани, справедливо равенство

$$2 \iint_{F_\varepsilon} \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{n})}{\varphi'} \Delta d\sigma = \sum_M \frac{(\mathbf{p}'(M), \bar{\Omega}_M)}{\varphi'(M)} - \sum_Q \frac{(\mathbf{p}'(Q), \Omega_Q)}{\varphi'(Q)} - \int_{\Gamma^0} \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{h})}{\varphi'} \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} ds + \varphi(\varepsilon) + \psi(\mathfrak{R}, \varepsilon), \quad (18)$$

где $\mathbf{p}'$ – поле касательных векторов к A -лучам в точках пересечения их с поверхностью, φ' – некоторая положительная функция на поверхности, $\mathbf{p}'(M)$ – касательный вектор к A -лучу в конической точке M , $\mathbf{p}'(Q)$ – касательный вектор к A -лучу в вершине Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения A -луча (1) для касательного вектора к произвольному A -лучу имеем $\mathbf{p}' = \mathbf{c} \cdot e^{\varphi(t)A} \cdot A\varphi' = \mathbf{p} \cdot A\varphi'$. В точке пересечения A -луча с поверхностью $\mathbf{p} = \mathbf{r}$. Поэтому $\mathbf{p}' = \mathbf{r} \cdot A\varphi'$. Раскрывая произведение матриц, последнюю формулу перепишем в виде

$$\mathbf{p}' = \varphi'(a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3, a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3, a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3).$$

Умножая это равенство скалярно на вектор $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$, получаем $\frac{(\mathbf{p}', \mathbf{n})}{\varphi'} = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{n})$, где Φ – билинейная форма, матрица коэффициентов которой в системе $Ox^1x^2x^3$ совпадает с матрицей A , фигурирующей в определении A -луча. Аналогично устанавливается, что

$$\frac{(\mathbf{p}'(M), \bar{\Omega}_M)}{\varphi'(M)} = \Phi(\mathbf{r}_M, \Omega_M), \quad \frac{(\mathbf{p}'(Q), \Omega_Q)}{\varphi'(Q)} = \Phi(\mathbf{r}_Q, \Omega_Q).$$

Подставляя эти равенства в (17), получим (18). Лемма доказана.

§4. Доказательство теорем 1, 2

4.1. Рассмотрим поверхность F , удовлетворяющую условиям 1–7 §1. Будем считать, что начало прямоугольной декартовой системы координат $Ox^1x^2x^3$ в E^3 находится внутри этой поверхности. Тогда из условия A -звездности поверхности F следует, что на каждой ее грани выполняется неравенство $(\mathbf{p}', \mathbf{n}) > 0$. В силу леммы 2, не нарушая общности, можем считать, что $\Delta \equiv 0$ на каждом плоском куске поверхности F . В силу леммы 1 отсюда следует, что $\Delta \leq 0$ на каждой грани этой поверхности. Так как $\varphi'(t) > 0$, то интеграл в левой части формулы (18) неположителен.

4.2. Рассмотрим контурный интеграл в правой части формулы (18). Вдоль каждого ребра выпуклого склеивания поверхности F , вдоль которого $\sin \vartheta \neq 0$, нормальные кривизны k_n^+ и k_n^- имеют одинаковые знаки. При этом, если $k_n^\pm \leq 0$, то $\sin \vartheta \geq 0$. Если же $k_n^\pm \geq 0$, то $\sin \vartheta \leq 0$. В обоих случаях имеем $(\mathbf{p}', \mathbf{h}) \leq 0$. В условиях теорем 1, 2 вдоль каждого ребра внутреннего склеивания, вдоль которого $\sin \vartheta \neq 0$, выполняется неравенство $(\mathbf{p}', \mathbf{h}) \leq 0$. Так как $\varphi' > 0$, то отсюда вытекает, что

$$\int_{\Gamma^0} \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{h})}{\varphi'} \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} ds \leq 0.$$

4.3. Рассмотрим произвольную вершину Q на поверхности F . Из рекуррентного соотношения (13) имеем

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_1 - \sum_{j=1}^i \mu_j \mathbf{t}_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Полагая $i = m$, получаем

$$\sum_{i=1}^m \mu_i \mathbf{t}_i = \mathbf{0}. \quad (19)$$

а. Предположим сначала, что из Q выходят ровно два ребра с касательными векторами $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$. Если векторы $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ не коллинеарны, то из (19) следует, что $\mu_1 = \mu_2 = 0$, а из (14) получаем, что $\Omega_Q = \mathbf{0}$. Если векторы $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ коллинеарны, то из (14) снова следует, что $\Omega_Q = 0$.

б. Допустим, что из вершины Q выходят ровно три ребра $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ с касательными векторами $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ соответственно. Если эти векторы не компланарны, то из (19) следует, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, и значит, $\Omega_Q = \mathbf{0}$.

Предположим, что векторы $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ компланарны. Тогда содержащая их плоскость является касательной плоскостью к поверхности в точке Q . В этом случае для каждого из ребер $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в точке Q имеем $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^-$, а значит, $\sin \vartheta = 0$. Допустим сначала, что Q не является точкой уплощения хотя бы одного из кусков S_1, S_2, S_3 , образующих ребра $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Пусть, например, таким куском будет S_2 . Обозначая через $k_n^{(1)}$ и $k_n^{(2)}$ нормальные кривизны этого куска в точке Q по направлениям $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ соответственно, из условий сопряжения (12) получаем $k_n^{(1)} \mu_1 = k_n^{(2)} \mu_2 = 0$, где либо $k_n^{(1)} \neq 0$ и, значит, $\mu_1 = 0$, либо $k_n^{(2)} \neq 0$ и, значит, $\mu_2 = 0$. Из (19) получаем, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Если теперь точка Q является точкой уплощения каждого из кусков S_1, S_2 и S_3 , то ребра γ_i можно рассматривать как выходящие из неособой точки поверхности S_{i+1} , $i = 1, 2, 3$. Значит, $\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i$, а потому $\mu_i = 0$.

с. Рассмотрим теперь вершину Q , из которой выходят m ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, $m \geq 4$. Покажем, что

$$(\mathbf{p}', \Omega_Q) \leq 0. \quad (20)$$

В силу условия 4 §1 касательным конусом к поверхности F в точке Q является выпуклый m -гранный угол, который обозначим $\hat{F}_Q$. Если для внешней нормали поверхности F построить сферическое изображение угла $\hat{F}_Q$ на сфере с центром в начале координат, то радиус-вектор $\hat{\mathbf{n}}$ каждой его точки будет удовлетворять неравенству $(\mathbf{p}', \hat{\mathbf{n}}) \geq 0$. Поэтому для доказательства неравенства (20) достаточно показать, что вектор $-\Omega_Q$ направлен внутрь сферического изображения угла $\hat{F}_Q$.

Предположим сначала, что никакая тройка векторов $\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_{i+1}$ и $\mathbf{t}_{i+2}$ не компланарна. Раскладывая каждый из векторов $\mathbf{t}_k$, $k \geq 4$, по базису $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$, будем иметь

$$\mathbf{t}_k = \sum_{i=1}^3 \beta_{ki} \mathbf{t}_i, \quad (21)$$

где

$$\beta_{k1} = \frac{(\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}, \quad \beta_{k2} = \frac{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}, \quad \beta_{k3} = \frac{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_k)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)}.$$

Из (19) для μ_1, μ_2, μ_3 находим

$$\mu_i = - \sum_{k=4}^m \beta_{ki} \mu_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Рассмотрим произведение $(-\Omega, \mathbf{t}_3)$. Используя (21) и (22), преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} (-\Omega_Q, \mathbf{t}_3) &= -\mu_1 \mu_2 (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) - \mu_1 \sum_{k=4}^m \mu_k (\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_1) \\ &\quad - \mu_2 \sum_{k=4}^m \mu_k (\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_2) - \sum_{k=4}^{m-1} \sum_{i=k+1}^m \mu_i \mu_k (\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_k, \mathbf{t}_3) \\ &= - \left(\sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \mu_i \mu_k (\beta_{i1} \beta_{k2} - \beta_{i2} \beta_{k1}) + \mu_1 \mu_2 \right) (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \\ &= - \left(\sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \mu_i \mu_k (\beta_{i1} \beta_{k2} - \beta_{i2} \beta_{k1}) + \sum_{i=4}^m \sum_{k=4}^m \beta_{k1} \beta_{i2} \mu_i \mu_k \right) (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) \\ &= - \left(\sum_{i=4}^m \sum_{k=4}^i \beta_{k1} \beta_{i2} \mu_i \mu_k + \sum_{i=4}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m \beta_{k2} \beta_{i1} \mu_i \mu_k \right) (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3). \end{aligned}$$

Следовательно, $(-\Omega_Q, \mathbf{t}_3)$ представляет собою квадратичную форму вида

$$(-\Omega_Q, \mathbf{t}_3) = - \sum_{i,k=1}^m A_{ik} (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3) X_i X_k, \quad (23)$$

где

$$X_j = \mu_{3+j}, \quad A_{ik} = \begin{cases} \beta_{i+3,2} \beta_{k+3,1} & \text{при } k \leq i, \\ \beta_{i+3,1} \beta_{k+3,2} & \text{при } k > i. \end{cases}$$

Для главных миноров Δ_k матрицы (A_{ik}) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_{11} = \frac{(\mathbf{t}_4, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_4, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)^2}, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \frac{(\mathbf{t}_4, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_5, \mathbf{t}_4, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_5, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)^3}, \\ \Delta_k &= \frac{(\mathbf{t}_4, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_5, \mathbf{t}_4, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_6, \mathbf{t}_5, \mathbf{t}_3) \cdots (\mathbf{t}_{k+3}, \mathbf{t}_{k+2}, \mathbf{t}_3)(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_{k+3}, \mathbf{t}_3)}{(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда нормаль к каждой грани угла $\widehat{F}_Q$, не содержащей вектора $\mathbf{t}_3$, направлена в то же полупространство относительно этой грани, что и вектор $\mathbf{t}_3$. В этом случае $(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{t}_k) > 0$ при $i < j < k$. Следовательно, $\Delta_k > 0$ и форма $(-\Omega_Q, \mathbf{t}_3)$ положительно определена. В силу произвольности выбора вектора $\mathbf{t}_3$ получаем, что $(-\Omega_Q, \mathbf{t}_i) \geq 0$ для всякого $i = 1, \dots, m$. Это означает, что вектор $-\Omega_Q$ направлен внутрь сферического изображения угла $\widehat{F}_Q$.

В случае, когда нормаль каждой грани, не содержащей $\mathbf{t}_3$, лежит по разные стороны с вектором $\mathbf{t}_3$ относительно этой грани, имеем $(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j, \mathbf{t}_k) < 0$ при $i < j < k$. Значит, $(-1)^i \Delta_i > 0$ и форма $(-\Omega_Q, \mathbf{t}_3)$ отрицательно определена. Отсюда вытекает, что $(-\Omega_Q, \mathbf{t}_i) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$, т.е. вектор $-\Omega_Q$ вновь лежит внутри сферического изображения угла $\hat{F}_Q$.

Из проведенных рассуждений следует, что направление вектора Ω_Q зависит только от формы угла $\hat{F}_Q$, причем эта зависимость непрерывна. Поэтому и в предельном случае, когда некоторые из векторов $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m$ (могут и все) лежат в одной плоскости, вектор $-\Omega_Q$ лежит внутри сферического изображения угла $\hat{F}_Q$.

Таким образом, для каждой вершины Q на поверхности F справедливо неравенство $(\mathbf{p}', \Omega_Q) \leq 0$.

4.4. Рассмотрим произвольную коническую точку M на поверхности F . Обозначим через $\hat{F}_M$ n -гранный угол, ребра которого направлены по векторам $\rho_1, \dots, \rho_n$. Этот угол устроен точно так же, как рассмотренный в предыдущем пункте угол $\hat{F}_Q$. Исключение составляет порядок следования ребер. Так как при обходе нормали вокруг точки M эта точка оставалась справа, то порядок следования ребер угла $\hat{F}_M$ противоположен порядку следования ребер угла $\hat{F}_Q$. Изменив порядок следования ребер угла $\hat{F}_M$ и дословно повторив рассуждения предыдущего пункта, получим неравенство

$$(\mathbf{p}', \bar{\Omega}_M) \geq 0.$$

4.5. Так как в формуле (18) от разбиений $\mathfrak{R}$ зависят только $\sum_M \frac{(\mathbf{p}'(M), \bar{\Omega}_M)}{\varphi'(M)}$ и $\psi(\mathfrak{R}, \varepsilon)$, причем $\psi(\mathfrak{R}, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow 0$, то, полагая

$$K(\varepsilon) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_M \frac{(\mathbf{p}'(M), \bar{\Omega}_M)}{\varphi'(M)}$$

и применяя к поверхности F_ε лемму 8, можем записать

$$\varphi(\varepsilon) = 2 \iint_{F_\varepsilon} \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{n})}{\varphi'} \Delta d\sigma - K(\varepsilon) + \sum_Q \frac{(\mathbf{p}'(Q), \Omega_Q)}{\varphi'(Q)} + \int_{\Gamma^0} \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{h})}{\varphi'} \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} ds.$$

В п.п. 4.1–4.4 доказано, что каждое слагаемое в правой части этого равенства не превосходит нуля. Так как $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$, то и каждое слагаемое правой части стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначая через $\dot{F}$ поверхность, полученную из F удалением конических точек, приходим к равенствам

$$2 \iint_{\dot{F}} \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{n})}{\varphi'} \Delta d\sigma = 0, \quad \int_{\Gamma^0} \frac{(\mathbf{p}', \mathbf{h})}{\varphi'} \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} ds = 0, \quad \sum_Q \frac{(\mathbf{p}'(Q), \Omega_Q)}{\varphi'(Q)} = 0. \quad (24)$$

Из того, что подынтегральная функция в данном интеграле не меняет знака на поверхности $\dot{F}$, следует, что $\Delta \equiv 0$ на каждой регулярной части этой поверхности. По лемме 1 это влечет тривиальность изгибающего поля на каждой связной области, где гауссова кривизна $K > 0$ почти всюду.

Из второго равенства (24) следует, что $(\mathbf{p}', \mathbf{h}) \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} = 0$ вдоль каждого ребра γ , вдоль которого $\sin \vartheta \neq 0$. Вдоль каждого ребра выпуклого склеивания выполняется неравенство $(\mathbf{p}', \mathbf{h}) \neq 0$. Из (12) и (10) следует, что вдоль каждого ребра выпуклого склеивания с $\sin \vartheta \neq 0$

$$\mu = 0, \quad \delta k_n^+ = \delta k_n^- = 0, \quad \mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^-. \quad (25)$$

По лемме 3 вдоль каждого криволинейного ребра, вдоль которого $\sin \vartheta = 0$, также имеют место формулы (25). Таким образом, вдоль каждого ребра выпуклого склеивания и вдоль каждого криволинейного ребра, вдоль которого $\sin \vartheta = 0$, имеют место формулы (25).

Рассмотрим криволинейное ребро внутреннего склеивания, образованное регулярными кусками S^+ и S^- . Возможны следующие случаи.

а. S^+ и S^- — поверхности с гауссовой кривизной $K > 0$ почти всюду. Тогда из леммы 1 следует, что $\mathbf{V}^+ = \text{const}$, $\mathbf{V}^- = \text{const}$. Из (11) получаем $\delta k_n^+ = \delta k_n^- = 0$, а из (12) выводим $\mu = 0$.

б. Гауссова кривизна одной из поверхностей S^+ , S^- (например, S^+) почти всюду отлична от нуля и $\sin \vartheta \neq 0$. Тогда $\delta k_n^+ = 0$, $\cos \theta^- \neq 0$ и снова из (12) получаем $\delta k_n^+ = \delta k_n^- = \mu = 0$.

с. S^+ и S^- — развертывающиеся поверхности. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ совокупность всех криволинейных ребер выпуклого склеивания, образованных развертывающимися кусками. В силу леммы 1 на каждом регулярном куске $\Delta = 0$. Поэтому $\mu = 0$ вдоль ребер совокупности $\tilde{\Gamma}$.

Так как конические точки поверхности F не лежат на ее ребрах, то всякая ломаная этой поверхности, состоящая из прямолинейных образующих развертывающихся кусков, пересекает либо ребро выпуклого склеивания, либо ребро, вдоль которого один из склеиваемых кусков имеет положительную гауссову кривизну почти всюду, либо ребро из совокупности $\tilde{\Gamma}$, либо ребро с $\sin \vartheta = 0$. Если развертывающийся кусок (например, S^+) содержит ребро γ одного из указанных типов, то по лемме 1 изгибающее поле на этом куске тривиально. Значит, на ребре γ имеем $\delta k_n^+ = 0$. Отсюда и из (12) следует, что $\delta k_n^- = 0$ и, значит, $\mu = 0$. Двигаясь от ребра одного из указанных видов, мы последовательно установим тривиальность изгибающего поля на каждом из развертывающихся кусков, склеенных друг с другом по криволинейным ребрам. Таким образом, доказана тривиальность изгибающего поля на каждом куске поверхности F , не содержащем прямолинейных ребер.

Пусть теперь γ — прямолинейное ребро, образованное регулярными кусками S^+ и S^- . Из тривиальности изгибающего поля на этих кусках следует, что $\delta \tau_g^+ = \delta \tau_g^-$ вдоль γ . Отсюда в силу третьего из условий сопряжения (12) получаем $\mu = \text{const}$ на γ . Из третьего равенства (24) следует, что $(\mathbf{p}'(Q), \Omega_Q) = 0$ в каждой вершине Q на поверхности F . В окрестности этой вершины поверхность F выпукла. Для каждого криволинейного ребра, выходящего из Q , имеем $\mu = 0$ в точке Q . Исключим эти ребра и заметим, что никакие три прямолинейных ребра, выходящие из Q , не лежат в одной плоскости. Если из Q выходит не более трех прямолинейных ребер, то, применив рассуждения п.п. 4.3.а, 4.3.б, получаем, что для этих ребер $\mu = 0$ в точке Q . Если из Q выходят m прямолинейных ребер, $m \geq 4$, то, занумеровав эти ребра по порядку и применив к Q рассуждения п. 4.3.с, получим, что форма (23) определена. Следовательно, равенство $(\mathbf{p}'(Q), \Omega_Q) = 0$ вновь возможно только

в случае, когда в точке Q для каждого прямолинейного ребра $\mu = 0$. Так как $\mu = \text{const}$, то вдоль каждого прямолинейного ребра, выходящего из вершины Q , получаем $\mu = 0$.

Из (10) следует, что поле вращений постоянно на каждом связном куске поверхности F , не содержащем плоских областей. Следовательно, изгибающее поле поверхности F тривиально на каждом таком куске. Отсюда вытекает справедливость теоремы 1.

В условиях теоремы 2 изгибающее поле тривиально на каждом плоском куске. Следовательно, поле вращений постоянно на всей поверхности F . Тем самым доказана и теорема 2.

Список литературы

1. Боярский Б. В., Векуа И. Н. Доказательство жесткости кусочно регулярных замкнутых выпуклых поверхностей неотрицательной кривизны // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. №2. С. 165–176.
2. Боярский Б. В. О жесткости некоторых составных поверхностей // УМН. 1959. Т. 14. №3. С. 141–146.
3. Сабитов И. Х. Об одном условии жесткости составных поверхностей // Матем. заметки. 1967. Т. 2. №1. С. 105–113.
4. Фоменко В. Т., Марков П. Е. О жесткости зеркально выпученных поверхностей // Матем. заметки. 1976. Т. 19. №3. С. 469–479.
5. Фоменко В. Т., Марков П. Е. О жесткости одного класса внутренне склеенных поверхностей // Укр. геом. сб. 1977. №20. С. 141–146.
6. Марков П. Е. О жесткости звездных внутренне склеенных поверхностей // Матем. заметки. 1977. Т. 22. №3. С. 321–333.
7. Марков П. Е., Шкрыль Е. В. О жесткости кусочно выпуклых поверхностей типа тора // Матем. сб. 2000. Т. 191. №4. С. 107–144.
8. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.–Л.: ОНТИ, 1935.
9. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
10. Фоменко В. Т. Некоторые результаты теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Матем. сб. 1967. Т. 72. №3. С. 388–411.

Ростовский государственный университет,
г. Ростов-на-Дону
E-mail: mpe@mail.ru, mpe@zern.donpac.ru, otrejos@excite.com

Поступила в редакцию
03.05.2001