Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, Границы сходимости и единственности интерполяционных задач
Абе́ля–Го́нчарова, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 2, 97–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:28:58

УДК 517.547

А. Ю. Попов

Границы сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова

В шкале роста целых функций, задаваемой их типами относительно функций сравнения, найдены максимальные пространства сходимости и единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова для классов узлов интерполяции (как произвольных комплексных, так и вещественных), определяемых последовательностью мажорант этих узлов.

Библиография: 25 названий.

Интерполяционная задача Абеля–Гончарова состоит в нахождении всех целых функций F из того или иного линейного топологического пространства $X \subset \mathcal{A}(\mathbb{C})$, удовлетворяющих соотношениям

$$F^{(n)}(\lambda_n) = c_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

где $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty, \{c_n\}_{n=0}^\infty$ – произвольные допустимые для X последовательности комплексных чисел. Под $\mathcal{A}(D)$, как обычно, понимается пространство функций, аналитических в области $D \subset \mathbb{C}$, с топологией равномерной сходимости на любом компакте внутри D . Ниже будут рассматриваться различные пространства $X \subset \mathcal{A}(\mathbb{C})$, как правило, с некоторой более сильной топологией, нежели индуцированная на X из $\mathcal{A}(\mathbb{C})$.

Решение поставленной задачи обычно начинается с отыскания в определенном смысле максимальных для нее пространств сходимости и единственности. Пространством сходимости интерполяционной задачи (1) называется такое линейное подпространство $S \subset X$, что любая функция $F \in S$ представима в виде суммы интерполяционного ряда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\lambda_n) P_n(\lambda, z), \quad (2)$$

сходящегося в топологии X . Через $\{P_n(\lambda, z)\}_{n=0}^\infty$ обозначена система полиномов Гончарова, соответствующих последовательности λ и задаваемых формулами [1; гл. 1] $P_0(\lambda, z) \equiv 1$,

$$P_n(\lambda, z) = P_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, z) = \int_{\lambda_0}^z \int_{\lambda_1}^{x_1} \cdots \int_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_1 \cdots dx_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Полиномы (3) образуют систему, биортогональную к системе функционалов

$$\left\{ \frac{d^n}{(dz)^n} \Big|_{z=\lambda_n} \right\}_{n=0}^{\infty},$$

т.е. выполняются равенства $P_n^{(n)}(\lambda, \lambda_n) = 1$, $P_n^{(k)}(\lambda, \lambda_k) = 0$, $k \neq n$. Из формулы (3) видно, что n -й многочлен Гончарова имеет степень n по переменной z и зависит не от всей последовательности λ , а только от n первых ее элементов. Если $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1}$, то многочлены Гончарова являются многочленами Тейлора $P_n(\lambda_0, \lambda_0, \dots, \lambda_0, z) = (z - \lambda_0)^n/n!$, а ряд (2) при совпадении всех узлов интерполяции становится классическим рядом Тейлора.

Пространством единственности E интерполяционной задачи (1) называется такое линейное подпространство X , что условия

$$F^{(n)}(\lambda_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad F \in E,$$

влекут за собой тождество $F(z) \equiv 0$. Из определений видно, что всякое пространство сходимости интерполяционной задачи (1) является ее пространством единственности. Обратное же утверждение, вообще говоря, неверно.

Приведем несколько известных результатов, относящихся к описанию пространств сходимости и единственности для задач (1) с последовательностями узлов интерполяции $\{\lambda_n\}$, лежащими на отрезке $[-1, 1]$ и в единичном круге. Символом $[\exp, \sigma)$ обозначим множество целых функций экспоненциального типа, меньшего σ . В 1928 году С. Н. Бернштейн [2], [3] доказал, что $[\exp, \pi/4)$ является пространством единственности всех интерполяционных задач (1) с узлами $\{\lambda_n\}$, расположенными на отрезке $[-1, 1]$. В то же время, целая функция $f(z) = \cos(\pi z/4) - \sin(\pi z/4)$ имеет экспоненциальный тип равный $\pi/4$, и ее n -я производная обращается в нуль в точке $(-1)^n$ при любом $n \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, в классической шкале роста целых функций “порядок–тип” было найдено пересечение максимальных пространств единственности всех задач (1) с узлами интерполяции на отрезке $[-1, 1]$.

В 1936 году И. Дж. Шёнберг [4] усилил этот результат С. Н. Бернштейна, доказав, что пространство $[\exp, \pi/4)$ с топологией $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ является пространством сходимости всех интерполяционных задач (1) с узлами из $[-1, 1]$. Ш. С. Макинтайр в [5] уточнила теорему С. Н. Бернштейна в другом направлении. Она доказала, что $[\exp, \pi/4)$ является пространством единственности интерполяционных задач (1) с произвольной последовательностью узлов $\{\lambda_n\}$, все частичные пределы которой лежат на отрезке $[-1, 1]$.

В дальнейшем много работ было посвящено интерполяционной задаче (1) с произвольными узлами внутри единичного круга и ее обобщениям. В. Л. Гончаров в [6] установил, что если $F \in [\exp, 1/(2e))$, то при условии $|\lambda_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ряд (2) сходится к $F(z)$ в топологии $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. С. Такенака в работе [7] доказал, что сходимость интерполяционного ряда (2) для таких узлов имеет место в более широком пространстве $[\exp, \ln 2)$. Впоследствии и этот результат был усилен и обобщен. Перед тем как сформулировать соответствующие утверждения, напомним несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Целая функция $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ называется *функцией сравнения*, если

- 1) $A_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$,
- 2) $A_{n+1}/A_n \searrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

Класс всех функций сравнения обозначим через $\mathfrak{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Целая функция $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ называется *сравнимой с* $A(z) \in \mathfrak{A}$, если существует постоянная $\tau > 0$ такая, что отношение $|a(z)|/A(\tau|z|)$ ограничено в $\mathbb{C}$. Нижняя грань таких чисел τ — обозначим ее $\sigma_A(a)$ — называется A -типом функции $a(z)$.

Для $A \in \mathfrak{A}$ известна теорема (полное ее доказательство имеется в [8; с. 34–38]), которая утверждает, что A -тип целой функции $a(z)$ выражается через коэффициенты рядов Маклорена $a(z)$ и $A(z)$ следующим образом:

$$\sigma_A(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{A_n} \right|^{1/n}. \quad (4)$$

Множество всех целых функций, A -тип которых строго меньше заданного числа σ , будет обозначаться $[A, \sigma)$, а множество всех целых функций, A -тип которых не превосходит σ , — через $[A, \sigma]$. Заметим, что $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! \in \mathfrak{A}$ и тип любой целой функции относительно $\exp z$ в смысле определения 2 совпадает с ее классическим экспоненциальным типом. Следовательно, введенное ранее обозначение $[\exp, \sigma)$ согласуется с принятым здесь для общего случая. В теории целых функций часто встречаются функции сравнения Миттаг-Леффлера $E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/\Gamma(1+k/\rho)$, а также $A_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/(k!)^{1/\rho}$ (очевидно, что $E_1(z) = A_1(z) = \exp z$). Об общих функциях $E_\rho(z, \mu)$ и их применениях см. монографию [9]. Нетрудно убедиться в том, что классический тип при порядке ρ функции $a(z)$, определяемый как

$$\sigma_\rho(a) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \left(R^{-\rho} \ln \left(\max_{|z| \leq R} |a(z)| \right) \right),$$

связан с ее E_ρ -типом и A_ρ -типом формулами

$$\sigma_\rho(a) = (\sigma_{E_\rho}(a))^\rho, \quad \sigma_\rho(a) = \frac{(\sigma_{A_\rho}(a))^\rho}{\rho}.$$

Функции сравнения широко используются в качестве эталонов роста в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ и для представления сравнимых с ними целых функций в виде интегральных преобразований (см. [1], [8]–[10]). Если $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in [A, \sigma)$, то

$$a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma} A(z t) \gamma_{a,A}(t) dt, \quad (5)$$

где

$$\gamma_{a,A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} t^{-n-1} \in \mathcal{A}(|t| > \sigma). \quad (6)$$

Функция $\gamma_{a,A}(t)$ называется A -ассоциированной по Борелю с $a(z)$. Очевидно, что $\gamma_{a,A}(\infty) = 0$. Подкласс функций, аналитических при $|t| \geq \sigma$ и обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке, будет обозначаться через $\mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$. Представление (5) устанавливает изоморфизм между $[A, \sigma)$ и $\mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$. Как известно, $\mathcal{A}_0(|t| \geq R)$ естественным образом отождествляется с пространством, сопряженным к $\mathcal{A}(|z| < R)$. Топология в $\mathcal{A}_0(|t| \geq R)$ задается равномерной сходимостью на

одной из окружностей $|t| = r < R$. Пространство $\mathcal{A}_0(|t| \geq R)$ с такой топологией является полным рефлексивным локально выпуклым пространством. Когда мы будем ниже говорить о топологии $[A, \sigma]$, не прибавляя к этому пояснений, всякий раз будет подразумеваться, что в $[A, \sigma]$ задана топология $\mathcal{A}^*(|t| < \sigma)$, где функция $a(z) \in [A, \sigma]$ отождествляется с ее образом $\gamma_{a,A}(t)$, задаваемым формулой (6). Известно, что последовательность функций $f_n(z)$ сходится в $[A, \sigma]$ к $f(z)$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда при некотором $\alpha < \sigma$ справедлива оценка

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{|z| \leq R} |f_n(z)| = O(A(\alpha R)), \quad R > 0, \quad (7)$$

и $f_n(z)$ сходится к $f(z)$ в топологии $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Рассматриваемая топология пространства $[A, \sigma]$ сильнее, чем топология $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, индуцированная на $[A, \sigma]$, так как равномерная сходимость $\{f_n(z)\}$ на любом компакте, вообще говоря, не влечет за собой справедливости неравенств вида (7). Аналогичным образом посредством изоморфизма (5), (6) вводится топология и в пространстве $[A, \sigma]$, которое отождествляется с пространством $\mathcal{A}_0(|t| > \sigma)$, состоящем из функций $\gamma(t)$, аналитических при $|t| > \sigma$ и обращающихся в нуль на бесконечности, наделенном стандартной топологией, порождаемой равномерной сходимостью функциональных последовательностей на окружностях $|t| = \sigma + \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$). Такие топологические пространства в теории интерполяции целых функций рассматривались ранее в ряде работ (см., например, [10]). Если пространство $[A, \sigma]$, где $A \in \mathfrak{A}$, с определенной выше в нем топологией является пространством сходимости интерполяционной задачи (1), то будем говорить, что $[A, \sigma]$ – пространство A -сходимости.

В работах [1], [11] (см. также [12], [13]) было установлено существование постоянной W такой, что $[\exp, W)$ является пространством $\exp$ -сходимости всех интерполяционных задач (1) с узлами $|\lambda_n| \leq 1$, а $[\exp, W]$ не является даже пространством единственности для некоторой последовательности узлов $\{\lambda_n^*\}$ из единичного круга. Число W носит название постоянной Уиттекера. Оказалось, что $W > \ln 2$, следовательно, упомянутые выше первые в этом направлении результаты работ [6] и [7] были неточны. В настоящее время известно [13], что $0.7362 < W < 0.7378$.

В статьях М. М. Драгилева, О. П. Чухловой [14] и Ю. К. Суетина [15] было доказано¹, что для класса узлов интерполяции

$$\lambda_n = (n+1)^{-1+1/\rho} \mu_n, \quad \rho \in (0, +\infty) \text{ фиксировано, } |\mu_n| \leq 1, \quad (8)$$

пересечением пространств единственности интерполяционных задач Абеля–Гончарова (1) в шкале роста “порядок–тип” служит пространство $[A_\rho, W)$, и, более того, эти пространства являются пространствами A_ρ -сходимости для упомянутых интерполяционных задач. Иначе говоря, при условии (8) любая функция $F \in [A_\rho, W)$ представима рядом (2), сходящимся к ней в топологии этого пространства. С другой стороны, найдутся последовательность комплексных чисел $\{\mu_n^*\}$, $|\mu_n^*| \leq 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$), и функция $f \in [A_\rho, W]$, $f(z) \not\equiv 0$, такие, что $f^{(n)}(n^{-1+1/\rho} \mu_n^*) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

¹Первая часть формулируемого здесь результата была установлена в [14], а вторая – в [15]. При этом в работах [14], [15] рассматривалось интерполирование несколько более общими функционалами, чем $d^n/(dz)^n|_{z=\lambda_n}$.

Эта теорема стала усилением раннего результата М. М. Джрбашяна [16] о том, что для задач с узлами (8) пространством сходимости является $[A_\rho, \ln 2)$. Тем самым, был полностью решен вопрос о пространствах сходимости и единственности на классе интерполяционных задач (1) с произвольными узлами, в качестве мажоранты абсолютных величин которых выступает последовательность $x_n = (n+1)^p$, $-1 < p < +\infty$.

Приведенные результаты обобщены автором на широкий класс мажорант $\{x_n\}$ для узлов интерполяции $\{\lambda_n\}$. Поскольку С. Какейя [17] доказал, что $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ является пространством сходимости интерполяционной задачи Абеля–Гончарова с любой последовательностью узлов $\lambda_n = O(1/n)$, то на последовательность $\{x_n\}$, ограничивающую сверху $|\lambda_n|$ с точностью до множителя $1 + o(1)$, наложим требование

$$(n+1)x_n \nearrow +\infty. \quad (9)$$

Поставим следующую задачу. Пусть дана произвольная последовательность положительных чисел $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющая условию (9). Через $\Lambda(\mathfrak{X})$ обозначим множество всех последовательностей комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$, для которых выполняется предельное соотношение

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_n}{x_n} \right| \leq 1 \quad (10)$$

или, что то же самое, $|\lambda_n| \leq x_n(1 + o(1))$ ($n \rightarrow \infty$). Требуется отыскать в определенном смысле максимальное пространство целых функций $V = V(\mathfrak{X})$, являющееся пространством сходимости всех интерполяционных задач (1) с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$. Под словом “максимальное” понимается то, что даже “небольшие” в соответствующей шкале расширения $V(\mathfrak{X})$ уже не будут пространствами сходимости задачи (1) для какой-то одной последовательности узлов интерполяции $\{\lambda_n^*\}_{n=0}^\infty \in \Lambda(\mathfrak{X})$. Аналогичный вопрос ставится и для пространств единственности класса интерполяционных задач Абеля–Гончарова с последовательностями узлов из $\Lambda(\mathfrak{X})$.

Сформулированная проблема решается в терминах функций сравнения, и первая трудность состоит в выборе “правильного” эталона роста. Зафиксируем последовательность $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющую условию (9), и возьмем произвольную функцию сравнения $A(z)$. Может оказаться, что пространства $[A, \sigma)$ при $\forall \sigma > 0$ будут пространствами A -сходимости всех интерполяционных задач (1) с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$, либо наоборот, ни одно из указанных пространств не будет обладать этим свойством. В первом случае мы получим некоторое позитивное утверждение относительно пространств сходимости, во втором – негативное, но найти границу для роста целых функций, представимых рядами (2) для $\forall \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty \in \Lambda(\mathfrak{X})$, не сможем. Поэтому желательно отыскать функцию $A \in \mathfrak{A}$ такую, что пространства $[A, \sigma)$ при малых σ являются пространствами A -сходимости всех задач (1) с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$, а при больших σ могут не оказаться даже пространствами единственности для какой-то одной из рассматриваемого класса интерполяционных задач. Существование такой функции сравнения является далеко не очевидным и устанавливается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (9). Положим

$$R_n = (n+1)x_n, \quad A_{\mathfrak{X}}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \cdot \prod_{j=0}^{k-1} R_j^{-1}. \quad (11)$$

Тогда $A_{\mathfrak{X}}$ – функция сравнения, а $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ при любых $\sigma \in (0, \ln 2]$ являются пространствами $A_{\mathfrak{X}}$ -сходимости интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty \in \Lambda(\mathfrak{X})$. В то же время, найдутся последовательность действительных чисел $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ и функция $f \in [A_{\mathfrak{X}}, 1]$, $f(z) \not\equiv 0$, такие, что выполняются соотношения

$$|\xi_n| \leq x_n, \quad f^{(n)}(\xi_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Другими словами, $[A_{\mathfrak{X}}, 1]$ не является пространством единственности некоторой интерполяционной задачи Абеля–Гончарова с узлами $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty \in \Lambda(\mathfrak{X})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функции сравнения, построенные в (11) по мажоранте узлов интерполяции $\mathfrak{X}$, рассматривались В. А. Осколковым в работе [18]. Там он ограничил исследование быстро растущими последовательностями $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = +\infty. \quad (12)$$

В. А. Осколков доказал, что при условии (12) для всех интерполяционных задач (1) с узлами, лежащими в $\Lambda(\mathfrak{X})$, пространствами A -сходимости будут $[A_{\mathfrak{X}}, 1)$, а $[A_{\mathfrak{X}}, 1]$ могут не оказаться даже пространствами единственности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из определения 1 нетрудно усмотреть, что если $\mathfrak{X}$ пробегает множество всех последовательностей, удовлетворяющих ограничению (9), то $A_{\mathfrak{X}}$ пробегает класс всех целых функций сравнения, нормированный условием $A(0) = 1$. Легко видеть, что если $\mathfrak{X} = \{(n+1)^{-1+1/\rho}\}_{n=0}^\infty$, $0 < \rho < +\infty$, то $A_{\mathfrak{X}} = A_\rho$.

Таким образом, теорема 1 является, с одной стороны, обобщением цитированного результата М. М. Джрбашяна из [16], а с другой стороны, – обобщением “негативной” части теоремы В. А. Осколкова из [18] на произвольные функции сравнения.

Теперь, когда выбран эталон роста целых функций, отражающий природу задачи, можно дать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть задана произвольная последовательность положительных чисел $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющая условию (9). Постоянной сходимости $\sigma_c(\mathfrak{X})$ класса интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty \in \Lambda(\mathfrak{X})$ назовем точную верхнюю грань чисел σ таких, что в топологии $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ справедливы разложения (2) для любых $F \in [A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ и $\{\lambda_n\} \in \Lambda(\mathfrak{X})$. Постоянной единственности $\sigma_u(\mathfrak{X})$ назовем точную нижнюю грань чисел σ , для которых найдутся $f \in [A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$, $f \not\equiv 0$, и $\{\lambda_n^*\} \in \Lambda(\mathfrak{X})$ такие, что $f^{(n)}(\lambda_n^*) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Другими словами, $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma)$ при любом $\sigma < \sigma_c(\mathfrak{X})$, а значит и при $\sigma = \sigma_c(\mathfrak{X})$ (см. выше определение топологии в этих пространствах), является пространством

$A_{\mathfrak{X}}$ -сходимости всех задач (1) с узлами интерполяции, лежащими в $\Lambda(\mathfrak{X})$, а при любом $\sigma > \sigma_u(\mathfrak{X})$ $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma]$ уже не будет пространством единственности какой-либо одной задачи (1) с узлами интерполяции из класса $\Lambda(\mathfrak{X})$.

Из определения 3 очевидным образом следует неравенство $\sigma_c(\mathfrak{X}) \leq \sigma_u(\mathfrak{X})$. Теорема 1 доказывает существование постоянных сходимости и единственности и устанавливает, что $\ln 2 \leq \sigma_c(\mathfrak{X}) \leq \sigma_u(\mathfrak{X}) \leq 1$. Однако найти $\sigma_c(\mathfrak{X})$ и $\sigma_u(\mathfrak{X})$ для последовательностей $\mathfrak{X}$ самого общего вида не удастся. Основным результатом этой работы является теорема о совпадении постоянных сходимости и единственности при условии

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1. \quad (13)$$

В этом случае справедливо равенство $\sigma_c(\mathfrak{X}) = \sigma_u(\mathfrak{X}) = W$, где W – постоянная Уиттекера. Тем самым, получено обобщение сформулированной выше теоремы Драгилева–Чухловой–Суетина на произвольные мажоранты для узлов интерполяции, удовлетворяющие лишь условиям (9) и (13). Аналогичная задача решена и для более узких классов последовательностей

$$\Lambda_0(\mathfrak{X}) = \left\{ \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X}) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_n}{x_n} = 0 \right\}.$$

В частности, в $\Lambda_0(\mathfrak{X})$ входят все вещественные последовательности из $\Lambda(\mathfrak{X})$. Определенные таким же способом постоянные сходимости и единственности для классов $\Lambda_0(\mathfrak{X})$ оказались при условии (13) равными $\pi/4$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям (9) и (13). Тогда $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma]$ при любых $\sigma \in (0, W]$ являются пространствами $A_{\mathfrak{X}}$ -сходимости интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda_0(\mathfrak{X})$.

В то же время, существуют последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n^*\}$, удовлетворяющих условию

$$|\lambda_n^*| \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

и функция $f \in [A_{\mathfrak{X}}, W]$, $f(z) \not\equiv 0$, такие, что $f^{(n)}(\lambda_n^*) = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказан также аналог теоремы 2 для узлов интерполяции, лежащих “вблизи” действительной оси. Следующая теорема представляет собой обобщение цитированных выше теорем С. Н. Бернштейна, Ш. С. Макинтайр и И. Дж. Шёнберга.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям (9) и (13). Тогда $[A_{\mathfrak{X}}, \sigma]$ при любых $\sigma \in (0, \pi/4]$ являются пространствами $A_{\mathfrak{X}}$ -сходимости интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda_0(\mathfrak{X})$. В то же время, существуют последовательность действительных чисел $\{\lambda_n^*\}$ и функция $f \in [A_{\mathfrak{X}}, \pi/4]$, $f(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^*(-1)^n}{x_n} = 1, \quad f^{(n)}(\lambda_n^*) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

В теоремах 2 и 3 по заданной мажоранте для $\{\lambda_n\}$ найдено пересечение максимальных пространств сходимости и единственности интерполяционных задач (1) для соответствующих классов узлов в терминах типов относительно функций сравнения. Возможна и иная постановка задачи. Для произвольной функции сравнения A требуется выделить в каком-то смысле максимальные классы узлов интерполяции, для которых пространства $[A, \sigma]$ (σ задано) будут пространствами сходимости. Из теорем 2 и 3 вытекает приводимое ниже следствие 1, решающее эту задачу для подкласса функций сравнения $\mathfrak{A}_1$, состоящего по определению из всех функций $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+2} A_n}{A_{n+1}^2} = 1. \quad (14)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}_1$, $\sigma > 0$.

Тогда $[A, \sigma]$ является пространством A -сходимости для задачи Абеля–Гончарова с произвольной последовательностью узлов интерполяции, удовлетворяющей одному из следующих условий (либо (15), либо (16))

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n|\lambda_n|A_{n+1}}{A_n} \leq \frac{W}{\sigma}, \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\operatorname{Im} \lambda_n)A_{n+1}}{A_n} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n|\lambda_n|A_{n+1}}{A_n} \leq \frac{\pi}{4\sigma}. \quad (16)$$

С другой стороны, существуют две последовательности $\{\lambda_n\}$, одна из которых удовлетворяет условию (15), а другая состоит из действительных чисел и удовлетворяет второму из условий (16), такие, что $[A, \sigma]$ не является даже пространством единственности задач (1) с этими узлами интерполяции.

Таким образом, можно утверждать, что в пространствах целых функций вида $[A, \sigma]$ и $[A, \sigma]$, где $A \in \mathfrak{A}_1$, задача о сходимости интерполяционных рядов (2) и единственности решения бесконечной системы уравнений (1) на классах узлов интерполяции, определяемых “достаточно регулярными” мажорантами их модулей вида (9), (13), получила окончательное решение. В связи с этим возникает вопрос об “обширности” класса $\mathfrak{A}_1$. Дадим этому вопросу строгую формулировку. Как отмечалось выше, функции сравнения находят широкое применение в комплексном анализе как эталоны роста. Они составляют плотный класс сравнения в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, т.е. для любой целой функции $a(z)$, отличной от многочлена, найдется функция $A \in \mathfrak{A}$, относительно которой $a(z)$ имеет конечный и положительный A -тип (см. [19], [20]). Другими словами, класс $\mathfrak{A}$ “обслуживает” в качестве эталонов роста все множество $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. В каком же подмножестве $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ плотен класс функций сравнения $\mathfrak{A}_1$? Иначе говоря, в каком подмножестве целых функций реально “работают” теоремы 2, 3 и следствие 1? Ответ на поставленный вопрос дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Какова бы ни была целая функция $a(z)$, для которой выполнено предельное соотношение

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln \max_{|z| \leq R} |a(z)|}{\ln^2 R} = +\infty, \quad (17)$$

найдется функция сравнения $A \in \mathfrak{A}_1$ такая, что A -тип $a(z)$ равен 1.

Тем самым, $\mathfrak{A}_1$ обслуживает в качестве эталонов роста все целые функции бесконечного порядка, конечного положительного порядка, а так же часть целых функций нулевого порядка.

Сформулируем теперь следствие из теорем 2 и 3 для целых функций конечного и положительного порядка в классической шкале роста. Необходимые сведения об уточненных порядках изложены в [21; гл. 1]. Напомним лишь, что типом целой функции $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ при уточненном порядке $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty)$, называется величина

$$\sigma(F) = \sigma_{\rho(r)}(F) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \left(r^{-\rho(r)} \ln \max_{|z| \leq r} |F(z)| \right),$$

которая может быть также вычислена по формуле

$$(\sigma(F)e\rho)^{1/\rho} = \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|^{1/k} v(k)), \quad (18)$$

где $v(y)$ — функция, обратная к $x^{\rho(x)}$. Определение уточненного порядка предполагает возрастание функции $x^{\rho(x)}$, следовательно, и $v(y)$ обладает тем же свойством. Поэтому

$$A_{\rho(r)}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k / \prod_{n=1}^k v(n) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$$

является функцией сравнения. Нетрудно найти асимптотику величин $-\ln A_k = \sum_{n=1}^k \ln v(n)$. Имеем

$$\begin{aligned} -\ln A_k &= \sum_{n=1}^k \ln v(n) = \int_1^k \ln v(y) dy + O(\ln v(k)) \\ &= k \ln v(k) - \int_1^k \frac{y v'(y)}{v(y)} dy + O(\ln v(k)). \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) и известного предельного соотношения [21; гл. 1, § 13]

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} y \frac{v'(y)}{v(y)} = \frac{1}{\rho}$$

находим $(1/k) \ln(1/A_k) = \ln v(k) - 1/\rho + o(1)$ ($k \rightarrow \infty$). Следовательно, справедлива эквивалентность $A_k^{-1/k} \sim v(k) \exp(-1/\rho)$ ($k \rightarrow \infty$). Отсюда и из формул (4), (18) заключаем, что типы произвольной целой функции F при уточненном порядке $\rho(r) \rightarrow \rho$ ($r \rightarrow \infty$) и относительно $A_{\rho(r)} \in \mathfrak{A}$ связаны соотношением (как и в случае $\rho(r) \equiv \rho$)

$$\sigma_{\rho(r)}(F) = \frac{(\sigma_{A_{\rho(r)}}(F))^{\rho}}{\rho}$$

или оба равны бесконечности. Через $[\rho(r), p)$, как обычно, обозначим пространство, состоящее из всех целых функций, тип которых при уточненном порядке $\rho(r)$ меньше p , а через $[\rho(r), p]$ — пространство функций, тип которых не превосходит p . Ввиду равенств множеств

$$[A_{\rho(r)}, \sigma) = [\rho(r), \sigma^{\rho}/\rho], \quad [A_{\rho(r)}, \sigma] = [\rho(r), \sigma^{\rho}/\rho] \quad \forall \sigma > 0$$

считаем, что топология в $[\rho(r), \sigma^{\rho}/\rho]$ та же, что и в $[A_{\rho(r)}, \sigma)$. Положив в теоремах 2 и 3 $x_n = v(n+1)/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, получаем с учетом сказанного

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty),$$

$v(y)$ – функция, обратная к $x^{\rho(x)}$. Пусть затем $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n|\lambda_n|}{v(n)} \leq 1. \quad (20)$$

Тогда любая целая функция $F(z)$, тип которой при уточненном порядке $\rho(r)$ меньше, чем W^{ρ}/ρ , представима рядом (2), сходящимся к ней в топологии $[\rho(r), W^{\rho}/\rho]$. Если же кроме (20) выполнено еще ограничение

$$\operatorname{Im} \lambda_n = o\left(\frac{v(n)}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

то интерполяционный ряд (2) сходится в $[\rho(r), (\pi/4)^{\rho}/\rho]$ к любой функции F , тип которой при уточненном порядке $\rho(r)$ меньше $(\pi/4)^{\rho}/\rho$. В то же время, найдутся последовательность комплексных чисел $\lambda_{n,1}^*$ такая, что $|\lambda_{n,1}^*| \leq v(n+1)/(n+1)$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$), и последовательность действительных чисел $\lambda_{n,2}^*$ с асимптотикой $\lambda_{n,2}^* \sim (-1)^n v(n)/n$ ($n \rightarrow \infty$), а также функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ с типами при уточненном порядке $\rho(r)$, равными W^{ρ}/ρ и $(\pi/4)^{\rho}/\rho$ соответственно, для которых справедливы равенства $f_1^{(n)}(\lambda_{n,1}^*) = 0$, $f_2^{(n)}(\lambda_{n,2}^*) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$).

Следствие 2 содержит в себе цитированные выше теоремы Бернштейна–Шёнберга–Макинтайр и Драгилева–Чухловой–Суетина.

Перейдем к доказательствам сформулированных утверждений.

ЛЕММА 1. Какова бы ни была последовательность $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (9) и (13), в топологии $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(x_n w) \prod_{j=0}^{n-1} x_j = e^w.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя почленно степенной ряд (11), находим

$$\begin{aligned} A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} z^{k-n} \frac{k!}{(k-n)!} \prod_{j=0}^{k-1} R_j^{-1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{z^{k-n}}{(k-n)!} \prod_{j=0}^{k-1} x_j^{-1} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j^{-1} \right) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \prod_{j=n}^{n+m-1} x_j^{-1} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) \cdot A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(x_n w) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{x_n}{x_{n+k}} \right). \quad (21)$$

Обозначим для краткости

$$b_{m,n} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{x_n}{x_{n+k}} \right), \quad \varphi_n(w) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) A_{\mathfrak{X}}^{(n)}(x_n w) \equiv 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n} w^m.$$

Ввиду (13) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{m,n} = \frac{1}{m!} \quad \forall m \geq 1. \quad (22)$$

Однако соотношения (22), вообще говоря, еще не влекут за собой сходимости в топологии $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ последовательности функций $\varphi_n(w) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n} w^m$ к $\exp w$ при $n \rightarrow \infty$. Требуемое будет доказано, если установить, что последовательности $\{b_{m,n}\}$ имеют общую мажоранту $B_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_{m,n}$, которая сама является строкой тейлоровых коэффициентов некоторой целой функции, т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B_m} = 0 \iff \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B_m} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (23)$$

(Модули всюду опущены, так как $b_{m,n} > 0$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$.)

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. Положим $N = [2/\varepsilon]$. Очевидно равенство

$$B_m = \max(B_{m,1}, B_{m,2}), \quad \text{где} \quad B_m^{(1)} = \sup_{1 \leq n < N} b_{m,n}, \quad B_m^{(2)} = \sup_{n \geq N} b_{m,n}. \quad (24)$$

Имеем

$$b_{m,n} = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n+k+1}{n+1} \right) \cdot \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{R_n}{R_{n+k}} \right).$$

Так как последовательность R_n возрастает (может быть, нестрого), а последовательность $(n+k+1)/(n+1)$, наоборот, убывает по n при любом фиксированном k , то справедливы оценки

$$\begin{aligned} b_{n,m} &\leq \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{R_n}{R_{n+k}} \right) \implies B_m^{(1)} \leq (R_{N-1})^m \prod_{k=0}^{m-1} R_k^{-1}, \\ b_{m,n} &\leq \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n+k+1}{n+1} \right), \\ B_m^{(2)} &\leq \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{N+k+1}{N+1} \right) = \binom{N+m}{m} (N+1)^{-m}. \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда, пользуясь известным неравенством для биномиальных коэффициентов

$$\binom{p}{q} < 2^p, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq q \leq p, \quad \text{находим}$$

$$\sqrt[m]{B_m^{(2)}} < \frac{2^{1+N/m}}{N+1}, \quad \sqrt[m]{B_m^{(1)}} \leq R_{N-1} \exp \left(-\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \ln R_k \right). \quad (26)$$

Поскольку $\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k = +\infty$, то и $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln R_k = +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(m^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \ln R_k \right) = +\infty. \quad (27)$$

Из (26) и (27) получаем соотношения

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B_m^{(2)}} \leq \frac{2}{N+1}, \quad \limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B_m^{(1)}} = 0. \quad (28)$$

Соотношения (28) вместе с (24) и выбором N влекут за собой неравенство

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{B_m} < \varepsilon,$$

а это и требовалось установить. Этим лемма 1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношение (23) для общей мажоранты последовательностей $\{b_{m,n}\}_{m=1}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, было установлено без предположения (13). Условие (13) оказывается необходимым лишь для вывода равенств (22).

Теперь сформулируем следствие [10; с. 50] для пространств $[A, \sigma]$ из одной теоремы, относящейся к общей теории интерполяции целых функций.

Пусть $A(z) \in \mathfrak{A}$, $\sigma > 0$, $\{\ell_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, у которой есть биортогональная система функций $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, лежащая в пространстве $[A, \sigma]$. Для того чтобы любая функция $F \in [A, \sigma]$ представлялась рядом $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n(F) P_n(z)$, сходящимся к ней в топологии $[A, \sigma]$, необходимо и достаточно, чтобы система функций $f_n(t) = \ell_n(A(zt))$ образовывала базис в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$.

В нашем случае $\ell_n = d^n / (dz)^n|_{z=\lambda_n}$. Поэтому для того чтобы $[A, \sigma]$ было пространством A -сходимости интерполяционной задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы система функций

$$\{t^n A^{(n)}(\lambda_n t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (29)$$

образовывала базис в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Ввиду сказанного выше мы сначала должны доказать, что, каковы бы ни были последовательности $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ с условием (9) и $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Lambda(\mathfrak{X})$, система функций (29), где $A(z) = A_{\mathfrak{X}}(z)$, образует базис в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$ при всех $\sigma \in (0, \ln 2]$. Положим $\mu_n = \lambda_n / x_n$. Согласно обозначениям леммы 1 функции (29), умноженные на $\prod_{j=0}^{n-1} x_j$, имеют вид

$$t^n \varphi_n(\mu_n t) = t^n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,n}(\mu_n t)^m \right).$$

Один из признаков базисности таких систем функций в пространстве $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$ [1; гл. 4], [22] состоит в выполнении неравенств

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_n(r) < 1 \quad \forall r < \sigma, \quad \text{где} \quad \theta_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} |b_{m,n}|(r|\mu_n|)^m. \quad (30)$$

Положим $p_n = [\sqrt[3]{n}]$, $a = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |\mu_n|$. В лемме 1 (см. также замечание 3) было доказано существование у последовательностей $b_{m,n}$ общей мажоранты $B_m = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} b_{m,n}$, обладающей свойством (23). Следовательно, остатки рядов в (30) с номерами p_n оцениваются суммами (напомним, что $r < \ln 2 < 1$) $\sum_{m=p_n+1}^{\infty} B_m a^m$, которые представляют собой последовательность остатков ряда Тейлора некоторой целой функции в точке a и, следовательно, стремятся к нулю. Поэтому (см. (25))

$$\begin{aligned}
 \theta_n(r) &= \sum_{m=1}^{p_n} b_{m,n} (|\mu_n| r)^m + o(1) \\
 &< \sum_{m=1}^{p_n} \frac{(|\mu_n| r)^m}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} \left(\frac{n+k+1}{n+1} \right) + o(1) \\
 &< \prod_{k=0}^{p_n-1} \left(\frac{n+k+1}{n+1} \right) \sum_{m=1}^{p_n} \frac{(|\mu_n| r)^m}{m!} + o(1) \\
 &< \left(\frac{n+p_n}{n} \right)^{p_n} \sum_{m=1}^{p_n} \frac{(|\mu_n| r)^m}{m!} + o(1) \\
 &= \left(1 + \frac{p_n}{n} \right)^{p_n} (\exp(|\mu_n| r) - 1) + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \tag{31}
 \end{aligned}$$

Переходя в соотношении (31) к верхнему пределу при $n \rightarrow \infty$, ввиду (10) получаем неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_n(r) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \exp(|\mu_n| r) - 1 \leq e^r - 1 < 1 \quad (\forall r < \ln 2).$$

Тем самым условие, достаточное для базисности в пространстве $\mathcal{A}(|z| < \sigma)$ ($\forall \sigma \in (0, \ln 2]$) системы функций (29), выполнено и первая часть теоремы 1 доказана.

Для доказательства второй части теоремы 1 положим

$$q_k = \begin{cases} 1, & k \equiv 0, k \equiv 3 \pmod{4}, \\ -1, & k \equiv 1, k \equiv 2 \pmod{4}, \end{cases} \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \prod_{j=0}^{k-1} R_j^{-1}. \tag{32}$$

По формуле (4) $A_{\mathfrak{X}}$ -тип $f(z)$ равен 1. По аналогии с доказательством леммы 1 имеем

$$H_n(x) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) f^{(n)}(z) \Big|_{z=x_n x} = q_n + q_{n+1} x + \sum_{m=2}^{\infty} q_{n+m} b_{m,n} x^m,$$

где $b_{m,n}$ — последовательность, определенная в доказательстве леммы 1. Покажем, что при любом $n > n_0$ функция $H_n(x)$ имеет по крайней мере один нуль на интервале $(-1, 1)$. Отсюда будет следовать, что при $n > n_0$ функция $f^{(n)}(z)$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi_n \in I_n = (-x_n, x_n)$, а функция $f_1(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{n_0} f^{(n)}(0) z^n / n!$ будет иметь $A_{\mathfrak{X}}$ -тип равный 1, те же нули n -ой производной, что и у $f(z)$ при $n > n_0$, а при всех $n \leq n_0$, очевидно, $f_1^{(n)}(0) = 0$. Тем самым, вторая часть теоремы 1 будет доказана.

Проверим сначала, что функция $h_n(x) = \sum_{m=2}^{\infty} q_{n+m} b_{m,n} x^m$ имеет при $n > n_0$ в точках ± 1 значения того же знака, что и q_{n+2} . Действительно,

$$h_n(x) = b_{2,n} x^2 \left(q_{n+2} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{q_{n+m} x^{m-2} b_{m,n}}{b_{2,n}} \right).$$

А так как $q_j = \pm 1$, то заключаем, что для нашей цели достаточно установить неравенство

$$S_n = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{b_{2,n}} < 1, \quad n > n_0. \quad (33)$$

Оценим сверху S_n тем же способом, что и $\theta_n(r)$ в первой части доказательства теоремы. Имеем

$$\frac{b_{m,n}}{b_{2,n}} = \frac{2}{m!} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{x_n}{x_{n+k}} \right) = \frac{2}{m!} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{n+k+1}{n+1} \frac{R_n}{R_{n+k}} \right). \quad (34)$$

Учитывая монотонное неубывание $\{R_n\}$, из (34) получаем неравенство

$$\frac{b_{m,n}}{b_{2,n}} \leq \frac{2}{m!} \prod_{k=2}^{m-1} \left(\frac{n+k+1}{n+1} \right) < \frac{2}{m!} \left(\frac{n+p_n}{n} \right)^{p_n} \quad \forall m \leq p_n. \quad (35)$$

Из (34) видно, что последовательность $b_{m,n}/b_{2,n}$ имеет точно такую же структуру, как и $b_{m,n}$. Поэтому совершенно так же, как и в лемме 1, устанавливается наличие мажоранты $\hat{B}_m = \sup_{n \in \mathbb{N}} (b_{m,n}/b_{2,n})$, являющейся строкой тейлоровых коэффициентов некоторой целой функции. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=p_n+1}^{\infty} \frac{b_{m,n}}{b_{2,n}} = 0.$$

Отсюда и из (35) выводим асимптотическое неравенство

$$\begin{aligned} S_n &< 2 \left(1 + \frac{p_n}{n} \right)^{p_n} \sum_{m=3}^{p_n} \frac{1}{m!} + o(1) \\ &= 2(1 + o(1)) \sum_{m=3}^{p_n} \frac{1}{m!} + o(1) = 2(e - 2.5) + o(1) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Тем самым, $S_n < 0.5$ при $n > n_0$ и (33) доказано. Легко видеть, что разность $H_n(x) - h_n(x) = q_n + q_{n+1}x$ обращается в нуль либо в точке $x = 1$, либо в точке $x = -1$. Следовательно, либо $\operatorname{sgn} H_n(1) = \operatorname{sgn} h_n(1) = \operatorname{sgn} q_{n+2}$, либо $\operatorname{sgn} H_n(-1) = \operatorname{sgn} h_n(-1) = \operatorname{sgn} q_{n+2}$. А так как $H_n(0) = q_n$ и числа q_n и q_{n+2} всегда имеют противоположные знаки, то функция $H_n(x)$ имеет разные знаки либо на концах интервала $(0, 1)$, либо на концах интервала $(-1, 0)$. Поскольку функции $H_n(x)$ действительнозначны на $\mathbb{R}$, то из сказанного вытекает, что при $n > n_0$ функция $H_n(x)$ хотя бы один раз обращается в нуль на интервале $(-1, 1)$, а это, как отмечалось выше, доказывает вторую часть теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2 И 3. Сперва установим справедливость содержащихся в них “позитивных” утверждений, т.е. что при дополнительном условии (13) на мажоранту $\mathfrak{X} [A_{\mathfrak{X}}, \sigma]$ являются пространствами сходимости всех интерполяционных задач Абеля–Гончарова с узлами из $\Lambda(\mathfrak{X})$ при любых $\sigma \in (0, W]$, а если узлы взяты из $\Lambda_0(\mathfrak{X})$, то даже при любых $\sigma \in (0, \pi/4]$. Как отмечалось выше, для этого требуется доказать базисность в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$ всех систем функций (29), где $A = A_{\mathfrak{X}}$, для рассматриваемых нами $\{\lambda_n\}$ и σ .

Напомним теорему Казьмина [22] о базисности близких систем. Она гласит, что если в пространстве $\mathcal{A}(|z| < R)$ заданы две ограниченные² последовательности функций $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям нормировки $g_n(0) = G_n(0) = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) и предельному соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g_n(z) - G_n(z)) = 0 \quad (*)$$

в топологии $\mathcal{A}(|z| < R)$, то либо обе системы функций

$$\{z^n g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \{z^n G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$$

образуют базис в $\mathcal{A}(|z| < R)$, либо ни одна из них не обладает этим свойством.

По лемме 1 при любом $r > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|w| \leq r} \left| \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) A^{(n)}(x_n w) - \exp(w) \right| = 0. \quad (36)$$

Нетрудно убедиться в том, что каждая последовательность $\{\lambda_n\} \in \Lambda(\mathfrak{X})$ может быть представлена в виде $\lambda_n = \mu_n x_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$), где $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет ограничению $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| \leq 1$. Включение же $\{\lambda_n\} \in \Lambda_0(\mathfrak{X})$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \mu_n = 0$. Применяя (36) для $w = t\mu_n$, $r = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |\mu_n|$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq 1} \left| \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) A^{(n)}(x_n \mu_n t) - \exp(\mu_n t) \right| = 0. \quad (37)$$

Положим $G_n(t) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) A^{(n)}(\lambda_n t)$, $g_n(t) = \exp(\mu_n t)$. Так как $G_n(0) = 1$ (см. (21)), а последовательность функций $g_n(t)$ ограничена в любом пространстве $\mathcal{A}(|t| < R)$, то в силу (37) выполнены все условия теоремы Казьмина для произвольного $R > 0$. Следовательно, базисность системы (29) в $\mathcal{A}(|t| < R)$ равносильна базисности системы $\{t^n \exp(\mu_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ в этом же пространстве. (То, что мы нормировали систему (29), не влияет на ее базисность.)

²Семейство функций $f_{\alpha}(z) \in \mathcal{A}(|z| < R)$ (α пробегает некоторое множество E) является ограниченным в пространстве $\mathcal{A}(|z| < R)$, если максимумы модулей этих функций на окружностях $|z| = r$, $r < R$, имеют общую конечную (но не обязательно ограниченную на интервале $(0, R)$) мажоранту

$$M(r) = \sup_{\alpha \in E} \left(\max_{|z| \leq r} |f_{\alpha}(z)| \right) < +\infty \quad \forall r \in (0, R).$$

Таким образом, нам осталось доказать базисность в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$, $0 < \sigma \leq W$, произвольной системы вида

$$\{t^n \exp(\mu_n t)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| \leq 1,$$

и базисность этих же систем в $\mathcal{A}(|t| < \sigma, 0 < \sigma < \pi/4)$ при дополнительном условии $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \mu_n = 0$. Пусть α_n – ближайшая точка к μ_n в круге $|z| \leq 1$. Тогда системы $\{t^n \exp(\mu_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{t^n \exp(\alpha_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ являются близкими в смысле данного соотношения (*), и, следовательно, по теореме Казьмина или обе эти системы образуют базис в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$, или ни одна из них не обладает этим свойством. Но давно известно (см. [11], [12]), что постоянная Уиттекера W как раз и является точной верхней гранью чисел σ таких, что все системы $\{t^n \exp(\alpha_n t)\}_{n=0}^{\infty}$ образуют базис в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$, какова бы ни была последовательность точек $\{\alpha_n\}$ из единичного круга. Первая часть теоремы 2 доказана.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \mu_n = 0$, то в качестве α_n берем ближайшую к μ_n точку отрезка $[-1, 1]$ и, применив еще раз цитированную теорему Казьмина, заключаем, что мы должны доказать базисность систем

$$\{t^n \exp(\alpha_n t)\}_{n=0}^{\infty} \quad (38)$$

в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$, $0 < \sigma < \pi/4$, где $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольная последовательность точек отрезка $[-1, 1]$. Система (38) является биортогональной в пространствах $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$ к системе функций

$$\gamma_n(t) = \sum_{k=0}^n P_n^{(k)}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, 0) t^{-k-1}, \quad (39)$$

которые являются образами (43) при преобразовании Лапласа полиномов Гончарова $P_n(\{\alpha_n\}, z)$. Это легко следует из соотношений

$$\begin{aligned} \delta_n^k &= P_n^{(k)}(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, z) \Big|_{z=\alpha_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r>0} \frac{d^k}{(dz)^k} (e^{tz} \gamma_n(t)) \Big|_{z=\alpha_k} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r>0} t^k e^{\alpha_k t} \gamma_n(t) dt \end{aligned}$$

(δ_n^k – символ Кронеккера) и теоремы об общем виде линейного функционала в $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$. Но коль скоро $\mathcal{A}(|t| < \sigma)$ – рефлексивное пространство Фреше ($\forall \sigma > 0$), то базисность в нем какой-либо системы функций равносильна базисности биортогональной к ней системы в $\mathcal{A}^*(|t| < \sigma) = \mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$ (см. [23; гл. 6]). Следовательно, требуется установить базисность системы (39) в $\mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$, $0 < \sigma \leq \pi/4$. Этот факт, насколько мне известно, не был отмечен в публикациях. Поэтому я и привожу его доказательство, не претендуя, в то же время, на новизну. Читатель сам может убедиться в том, что все необходимое для этого было сделано в статье Шёнберга [4].

Возьмем произвольную функцию $\gamma(t) \in \mathcal{A}_0(|t| < \sigma)$, $0 < \sigma \leq \pi/4$. Через σ_0 обозначим модуль наиболее удаленной от нуля особой точки $\gamma(t)$. Ясно, что $0 \leq \sigma_0 < \sigma \leq \pi/4$ и σ_0 совпадает с экспоненциальным типом преобразования Бореля

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\sigma} e^{zt} \gamma(t) dt. \quad (40)$$

Покажем, что при любом $\tau \in (\sigma_0, \sigma)$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n) \gamma_n(\lambda, t) \quad (41)$$

равномерно сходится на окружности $|t| = \tau$. Согласно теореме Шёнберга из работы [4] об оценке полиномов Гончарова с узлами $\lambda \subset [-1, 1]$ имеем

$$\sup_{\lambda \subset [-1, 1]} |P_n(\lambda, 0)| \leq c(4/\pi)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad (42)$$

где c — абсолютная постоянная. (В [4] было получено более точное неравенство, но для наших целей достаточно и этого огрубления.) Из представления (3) вытекает, что производная

$$\frac{d^k P_n(\lambda, z)}{(dz)^k} = \int_{\lambda_k}^z \int_{\lambda_{k+1}}^{x_{k+1}} \cdots \int_{\lambda_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_{k+1} \cdots dx_n$$

является полиномом Гончарова степени $n-k$ для некоторой другой последовательности узлов интерполяции из отрезка $[-1, 1]$. Следовательно, из (42) находим

$$|P_n^{(k)}(\lambda, 0)| \leq c(4/\pi)^{n-k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}_0. \quad (43)$$

Из (43) и (41) получаем оценку

$$\begin{aligned} \max_{|t|=\tau} |\gamma_n(\lambda, t)| &\leq c \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{\pi}\right)^{n-k} \tau^{-k-1} \\ &= \frac{c}{\tau} \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{\pi}{4\tau}\right)^k = \frac{c}{\tau} \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \frac{(\pi/(4\tau))^{n+1} - 1}{\pi/(4\tau) - 1} \\ &< \frac{c}{\pi/4 - \tau} \left(\frac{4}{\pi}\right)^n \cdot \left(\frac{\pi}{4\tau}\right)^{n+1} < \frac{c\tau^{-n-1}}{\pi/4 - \tau}. \end{aligned} \quad (44)$$

Согласно определению величины σ_0 справедливо включение $\gamma \in \mathcal{A}_0(|t| > \sigma_0)$, поэтому в интеграле (40) можно интегрировать по любой окружности $|t| = \varkappa$ $\forall \varkappa > \sigma$. Ввиду сказанного имеем

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\varkappa > \sigma} t^n e^{zt} \gamma(t) dt. \quad (45)$$

Из (45) получаем оценку

$$\max_{|z| \leq 1} |f^{(n)}(z)| \leq e^{\varkappa} \varkappa^n \max_{|t|=\varkappa} |\gamma(t)|. \quad (46)$$

А так как $\varkappa$ можно выбрать меньше, чем τ , то на основании (44) и (46) заключаем, что максимум на окружности $|t| = \tau$ n -го члена ряда (41) убывает не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы. Тем самым, установлена сходимость ряда (41) в топологии $\mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$. Нетрудно убедиться

в том, что он сходится именно к $\gamma(t)$, поскольку его образ при преобразовании Бореля, равный $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(\lambda_n) P_n(\lambda, z)$, сходится в $\mathcal{A}(\mathbb{C})$ к $f(z)$, как было доказано Шёнбергом в [4] для любой функции $f \in [\exp, \pi/4)$. А так как преобразование Бореля взаимно однозначно и f является образом γ , то ряд (41) сходится к $\gamma(t)$. Итак, установлено, что любая функция $\gamma \in \mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$ может быть разложена в ряд (41), сходящийся к ней в топологии этого пространства. Коэффициенты разложения в ряд по системе (39) определяются однозначно. Действительно, если $\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \gamma_n(\lambda, t)$ в $\mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$, $0 < \sigma \leq \pi/4$, то $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\lambda, z)$ в $[\exp, \pi/4)$, а тем более в топологии $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Взяв от обеих частей k -ю производную в точке λ_k , получим $c_k = f^{(k)}(\lambda_k)$ (см. свойства полиномов Гончарова, отмеченные в начале статьи). Тем самым, базисность системы (39) в $\mathcal{A}_0(|t| \geq \sigma)$, $0 < \sigma \leq \pi/4$, полностью доказана. Это завершает доказательство первой части теоремы 3.

Введем несколько необходимых в дальнейшем обозначений. Для произвольного набора из n комплексных чисел $(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ положим

$$\alpha_n(\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) = P_n(\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, 0) = \int_{\xi_0}^0 dx_1 \int_{\xi_1}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{\xi_{n-1}}^{x_{n-1}} dx_n$$

— значение в точке $z = 0$ n -го интерполяционного многочлена Гончарова для узлов $(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$. Для любых $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m < n$, и последовательности положительных чисел $\mathfrak{X} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (9), определим величины

$$d(\mathfrak{X}, m, n) = \left(\prod_{j=m}^{n-1} x_j^{-1} \right) \max_{|\xi_j| \leq x_j} |\alpha_{n-m}(\xi_m, \dots, \xi_{n-1})|.$$

Для краткости вместо $d(\mathfrak{X}, 0, n)$ будем писать $d_n(\mathfrak{X})$.

ЛЕММА 2. Если последовательность положительных чисел $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям (9) и (13), то справедливо предельное соотношение

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{d_n(\mathfrak{X})} \geq \frac{1}{W}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала одно неравенство. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}^m$ — произвольный компакт, а $\mathcal{K} = (z_m, \dots, z_{n-1}) \subset \mathbb{C}^{n-m}$ представляет собой произведение звездообразного относительно точки $z_m = 0$ компакта в $\mathbb{C}$ на произвольный компакт в $\mathbb{C}^{n-m-1}$ (с координатами $z_{m+1}, \dots, z_{n-1}$). Тогда

$$\begin{aligned} & \max_{(z_0, \dots, z_{m-1}) \in \mathcal{F}} |\alpha_m(z_0, \dots, z_{m-1})| \cdot \max_{(z_m, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{K}} |\alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1})| \\ & \leq 2 \max_{(\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{K}} |\alpha_n(\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1})|. \end{aligned} \quad (47)$$

(Под декартовым произведением $\mathcal{F} \times \mathcal{K}$ понимается, как обычно, множество в $\mathbb{C}^n$, вектор из первых координат которого пробегает $\mathcal{F}$, а следующие $n - m$ координат независимо пробегает $\mathcal{K}$.) Воспользуемся следующим тождеством из работы [15]:

$$\begin{aligned} & \alpha_m(z_0, \dots, z_{m-1}) \alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1}) \\ & = \alpha_n(z_0, \dots, z_{n-1}) - \alpha_n(z_0, \dots, z_{m-1}, 0, z_{m+1}, \dots, z_{n-1}). \end{aligned} \quad (48)$$

Из (48) находим

$$\begin{aligned} & |\alpha_m(z_0, \dots, z_{m-1})| |\alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1})| \\ & \leq |\alpha_n(z_0, \dots, z_{n-1})| + |\alpha_n(z_0, \dots, z_{m-1}, 0, z_{m+1}, \dots, z_{n-1})|. \end{aligned} \quad (49)$$

Очевидно, что неравенство (49) справедливо, в частности, для точек $(z_0^*, \dots, z_{m-1}^*) \in \mathcal{F}$ и $(z_m^*, \dots, z_{n-1}^*) \in \mathcal{K}$, в которых функции $|\alpha_m|$ и $|\alpha_{n-m}|$ достигают максимума на этих компактах. А так как ввиду специальной структуры $\mathcal{K}$ имеем $(0, z_{m+1}^*, \dots, z_{n-1}^*) \in \mathcal{K}$ и тем самым

$$(z_0^*, \dots, z_{n-1}^*), (z_0^*, \dots, z_{m-1}^*, 0, z_{m+1}^*, \dots, z_{n-1}^*) \in \mathcal{F} \times \mathcal{K},$$

то приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \max_{(z_0, \dots, z_{m-1}) \in \mathcal{F}} |\alpha_m(z_0, \dots, z_{m-1})| \cdot \max_{(z_m, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{K}} |\alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1})| \\ & = |\alpha_m(z_0^*, \dots, z_{m-1}^*)| \cdot |\alpha_{n-m}(z_m^*, \dots, z_{n-1}^*)| \\ & \leq |\alpha_n(z_0, \dots, z_{n-1})| + |\alpha_n(z_0, \dots, z_{m-1}, 0, z_{m+1}, \dots, z_{n-1})| \\ & \leq 2 \max_{(\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{K}} |\alpha_n(\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1})|. \end{aligned}$$

Итак, (47) доказано. Теперь в качестве $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$ возьмем произведения кругов $\mathfrak{F} = \{(z_0, \dots, z_{m-1}) \subset \mathbb{C}^m \mid |z_j| \leq x_j, 0 \leq j \leq m-1\}$, $\mathfrak{K} = \{(z_m, \dots, z_{n-1}) \subset \mathbb{C}^{n-m} \mid |z_j| \leq x_j, m \leq j \leq n-1\}$. Умножая неравенства (47) для этих множеств на $\prod_{k=0}^{n-1} x_k^{-1}$ и распределяя этот множитель соответствующим образом, находим

$$\begin{aligned} & \left(\left(\prod_{k=0}^{m-1} x_k^{-1} \right) \max_{|\xi_j| \leq x_j, 0 \leq j \leq m-1} |\alpha_m(\xi_0, \dots, \xi_{m-1})| \right) \\ & \quad \times \left(\left(\prod_{k=m}^{n-1} x_k^{-1} \right) \max_{|\xi_j| \leq x_j, m \leq j \leq n-1} |\alpha_{n-m}(\xi_m, \dots, \xi_{n-1})| \right) \\ & \leq 2 \left(\prod_{k=0}^{n-1} x_k^{-1} \right) \max_{|\zeta_j| \leq x_j, 0 \leq j \leq n-1} |\alpha_n(\zeta_0, \dots, \zeta_{n-1})|. \end{aligned}$$

Полученное неравенство с помощью введенных перед леммой 2 обозначений переписывается в виде

$$d_m(\mathfrak{X}) d(\mathfrak{X}, m, n) \leq 2 d_n(\mathfrak{X}). \quad (50)$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_{n+1}/R_n) = 1$ (напомним, что $R_n = (n+1)x_n \nearrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$), то $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_{n+q}/R_n)^q = 1$ при любом фиксированном q . Следовательно, найдется неубывающая целозначная функция $q(n)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R_{n+q(n)}}{R_n} \right)^{q(n)} = 1. \quad (51)$$

А так как при любом $n \in \mathbb{N}$ последовательность $(R_{n+q}/R_n)^q$ возрастает по q , то мы можем выбрать функцию q удовлетворяющей условию

$$q(n) = o(\sqrt{n}) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (52)$$

Теперь построим последовательность натуральных чисел $\{n_p\}$ по рекуррентной формуле $n_1 = 1$, $n_{p+1} = n_p + q(n_p)$. Для краткости обозначим $\nu_p = q(n_p)$. Из (51) и (52) заключаем, что

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{n_p} = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \nu_p = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\nu_p^2}{n_p} = 0, \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{R_{n_{p+1}}}{R_{n_p}} \right)^{\nu_p} = 1. \end{aligned} \quad (53)$$

Докажем вначале неравенство

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{d_{n_p}(\mathfrak{X})} \geq \frac{1}{W}. \quad (54)$$

Последовательность $\mathfrak{X}$ считаем заданной и далее вместо $d_n(\mathfrak{X})$ и $d(\mathfrak{X}, m, n)$ будем писать соответственно d_n и $d(m, n)$. Согласно (50) при произвольном $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$d_{n_k} \cdot d(n_k, n_{k+1}) \leq 2d_{n_{k+1}}.$$

Перемножая эти неравенства по k в пределах от 1 до $p-1$, находим

$$d_1 \prod_{k=1}^{p-1} d(n_k, n_{k+1}) \leq 2^{p-1} d_{n_p}. \quad (55)$$

Возводя обе части неравенства (55) в степень $1/n_p$, переходя к нижнему пределу и учитывая первое из соотношений (53), получаем оценку

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{p-1} d(n_k, n_{k+1}) \right)^{1/n_p} \leq \liminf_{p \rightarrow \infty} (d_{n_p})^{1/n_p}. \quad (56)$$

Из определения величин $d(m, n)$ выводим очевидное в силу монотонности R_n неравенство

$$d(m, n) \geq \left(\prod_{j=m}^{n-1} x_j^{-1} \right) \max_{|\xi_j| \leq R_m/n} |\alpha_{n-m}(\xi_m, \dots, \xi_{n-1})|, \quad (57)$$

а однородность³ функций α_s вместе с (57) приводит к оценке снизу

$$\begin{aligned} d(m, n) &\geq \left(\prod_{j=m}^{n-1} x_j^{-1} \right) \left(\frac{R_m}{n} \right)^{n-m} \max_{|z_j| \leq 1} |\alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1})| \\ &= \frac{n!}{m!} \left(\prod_{j=m}^{n-1} R_j^{-1} \right) \left(\frac{R_m}{n} \right)^{n-m} \max_{|z_j| \leq 1} |\alpha_{n-m}(z_m, \dots, z_{n-1})| \\ &\geq \left(\frac{m R_m}{n R_n} \right)^{n-m} D_{n-m}, \end{aligned} \quad (58)$$

где $D_s = \max_{|z_j| \leq 1} |\alpha_s(z_0, \dots, z_{s-1})|$.

³ Речь идет о тождестве $\alpha_s(\xi_0, \dots, \xi_{s-1}) = u^s \alpha_s(\xi_0/u, \dots, \xi_{s-1}/u)$, справедливом при любых $(\xi_0, \dots, \xi_{s-1}) \in \mathbb{C}^s$ и $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Полагая в (58) $m = n_k$, $n = n_{k+1}$, находим

$$d(n_k, n_{k+1}) > \left(\frac{n_k R_{n_k}}{n_{k+1} R_{n_{k+1}}} \right)^{\nu_k} D_{\nu_k}.$$

Отсюда и из (56), обозначая $(n_k/n_{k+1})^{\nu_k} = T_k$, $(R_{n_k}/R_{n_{k+1}})^{\nu_k} = T'_k$, получаем

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} (d_{n_p})^{1/n_p} \geq \liminf_{p \rightarrow \infty} \left(\left(\prod_{k=1}^{p-1} D_{\nu_k} \right)^{1/n_p} \left(\prod_{k=1}^{p-1} T_k \cdot T'_k \right)^{1/n_p} \right). \quad (59)$$

Докажем сейчас, что последовательность, стоящая в правой части неравенства (59) под знаком нижнего предела, в действительности имеет обычный предел, равный $1/W$. Из соотношений (53) вытекает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \lim_{k \rightarrow \infty} T'_k = 1$. Следовательно,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{p-1} T_k \cdot T'_k \right)^{1/p} = 1$$

и, тем более,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{p-1} T_k \cdot T'_k \right)^{1/n_p} = 1. \quad (60)$$

В работе [12] было установлено, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{D_n} = 1/W$. Обозначим для краткости $\ell_n = (1/n) \ln D_n$. Тем самым, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = -\ln W = \lim_{k \rightarrow \infty} \ell_{\nu_k}$, а значит,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\nu_k}{n_p} \ell_{\nu_k} = -\ln W. \quad (61)$$

(Нетрудно убедиться в том, что $(t_{k,p})_{k,p \in \mathbb{N}}$, где $t_{k,p} = \nu_k/n_p$ при $1 \leq k \leq p-1$ и $t_{k,p} = 0$ при $k \geq p$, представляет из себя матрицу Тёплица.) Потенцируя соотношение (61), получаем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^{p-1} D_{\nu_k} \right)^{1/n_p} = \frac{1}{W}.$$

Это вместе с (59) и (60) приводит к (54). Из (54) в силу условия $\lim_{p \rightarrow \infty} n_p/n_{p+1} = 1$ будет вытекать утверждение леммы, если установить монотонное неубывание величин d_n .

В статье [15] было показано, что

$$\alpha_n(z_0, \dots, z_{n-1}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r>0} \frac{\alpha_{n+1}(z_0, \dots, z_{n-1}, w)}{w^2} dw. \quad (62)$$

Взяв $r = x_n$ и переходя в (62) к максимуму по $|z_j| \leq x_j$, получим неравенство

$$\max_{|z_j| \leq x_j} |\alpha_n(z_0, \dots, z_{n-1})| \leq x_n^{-1} \max_{|z_j| \leq x_j} |\alpha_n(z_0, \dots, z_{n-1}, z_n)|. \quad (63)$$

Умножив обе части (63) на $\prod_{j=0}^{n-1} x_j^{-1}$ и вспомнив определение d_n , приходим к неравенству $d_n \leq d_{n+1}$, которое и требовалось доказать. Тем самым, лемма 2 полностью доказана.

Перейдем к построению примеров, демонстрирующих точность полученных результатов. Сделаем это вначале в теореме 3. Построим функцию $f(z)$, A_X -тип которой равен $\pi/4$ и при любом целом неотрицательном n ее n -я производная обращается в нуль в точке $\lambda_n^* \sim (-1)^n x_n$ ($n \rightarrow \infty$). Положим (см. выше (32))

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{\pi z}{4} \right)^k \prod_{j=0}^{k-1} R_j^{-1}. \quad (64)$$

По формуле (4) находим, что A_X -тип $f(z)$ равен $\pi/4$. При $z = 4x_n x/\pi$ имеем

$$\left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) f^{(n)}(z) = \left(\frac{\pi}{4} \right)^n \left(q_n + q_{n+1} x + \sum_{m=2}^{\infty} q_{n+m} b_{m,n} x^m \right), \quad (65)$$

где $b_{m,n}$ – последовательность, определенная в доказательстве леммы 1. Ввиду (23) и наличия у последовательностей $\{b_{m,n}\}$ общей мажоранты B_m , удовлетворяющей условию (24), получаем предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\prod_{j=0}^{n-1} x_j \right) f^{(n)} \frac{4x_n x}{\pi} \left(\frac{4}{\pi} \right)^n - \psi_n(x) \right) = 0, \quad (66)$$

где

$$\psi_n(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_{n+m} x^m}{m!} = \begin{cases} (-1)^k (\cos x - \sin x), & n = 2k, \\ (-1)^k (\cos x + \sin x), & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \quad (67)$$

а сходимость в (66) равномерна на любом компакте в $\mathbb{C}$. Рассмотрим последовательности интервалов $I_{p,0} = (\pi/4 - 1/p, \pi/4 + 1/p)$, $I_{p,1} = -I_{p,0}$, $p \in \mathbb{N}$. Из (66) и (67) заключаем, что для любого $p \in \mathbb{N}$ найдется такой номер ν_p , что функции $f^{(n)}(4x_n x/\pi)$ принимают на концах интервалов $I_{p,j}$ значения разных знаков при $n = 2\nu + j$, $\nu > \nu_p$, $j = 0, 1$. Отсюда вытекает существование у $f^{(n)}(4x_n x/\pi)$ по крайней мере одного нуля $\eta_n \in I_{p,j}$ при $n = 2\nu + j$, $j = 0, 1$, $\nu_p < \nu \leq \nu_{p+1}$ при любом $p \in \mathbb{N}$. Тем самым $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \eta_n = \pi/4$. Из сказанного заключаем, что $f^{(n)}(z)$ имеет при любом $n > n_0$ действительный нуль λ_n^* , для последовательности которых справедлива асимптотика $\lambda_n^* \sim (-1)^n x_n$. Требуемый пример почти окончательно построен. Осталось обеспечить существование у каждой из функций $f^{(n)}(z)$ по крайней мере одного действительного нуля при $0 \leq n \leq n_0 = 2\nu_1 + 1$. Для этого (если потребуются) вместо $f(z)$ достаточно взять функцию $f_1(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n_0} f^{(k)}(0) z^k / k!$. Вычитание из целой функции полинома степени n_0 не меняет ни ее A_X -типа, ни ее производных порядка $n > n_0$. В то же время, все производные функции f_1 порядков $n \leq n_0$ обращаются в нуль в точке $z = 0$. Построение примера завершено, и теорема 3 полностью доказана.

Теперь завершим доказательство теоремы 2. Через K_m обозначим полидиск в $\mathbb{C}^m$, задаваемый неравенствами $K_m = \{(z_0, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{C}^m \mid |z_j| \leq x_j, 0 \leq$

$j \leq m-1\}$, а через $\xi^{(m)} = (\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})$ — точку K_m , в которой функция $|\alpha_m(z_0, \dots, z_{m-1})|$ достигает на K_m максимума. Положим

$$Q_m(z) = \frac{P_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}, z)}{\alpha_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (68)$$

Покажем, что последовательность полиномов (68) образует предкомпактное множество в топологическом пространстве $[A_{\mathcal{X}}, W]$ или, что то же самое, множество $A_{\mathcal{X}}$ -ассоциированных по Борелю с $Q_m(z)$ функций

$$\gamma_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q_m^{(k)}(0)}{k! A_k t^{k+1}} \quad (69)$$

образует предкомпактное множество в $\mathcal{A}_0(|t| > W)$. Здесь через A_k мы обозначили k -й коэффициент Тейлора функции сравнения $A_{\mathcal{X}}$. Исходя из известного критерия Монтея предкомпактности множеств в таких пространствах [24; гл. 6], убеждаемся в том, что для этого необходимо и достаточно доказать наличие общей мажоранты $V_k = \sup_{m \geq k} |Q_m^{(k)}(0)/(k! A_k)|$ последовательности лорановых коэффициентов функций (69) такой, что функция $V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k t^{-k-1}$ лежит в $\mathcal{A}_0(|t| > W)$, т.е. $\limsup_{k \rightarrow \infty} (V_k)^{1/k} \leq W$.

Имеем $Q_m^{(k)}(0) = P_{m-k}(\xi_k^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}, 0)/\alpha_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})$, $0 \leq k \leq m$. По определению величин $d(k, m)$ справедлива оценка

$$|P_{m-k}(\xi_k^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}, 0)| \leq \max_{|z_j| \leq x_j} |\alpha_{m-k}(z_k, \dots, z_{m-1})| = \left(\prod_{j=k}^{m-1} x_j \right) d(k, m), \quad (70)$$

а согласно выбору точек $\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}$ выполняется равенство

$$|\alpha_m(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})| = d_m \prod_{j=0}^{m-1} x_j. \quad (71)$$

Из (70), (71) и (11) находим

$$|Q_m^{(k)}(0)| \leq \left(\prod_{j=0}^{k-1} x_j^{-1} \right) d(k, m)/d_m = k! A_k d(k, m)/d_m,$$

а это вместе с (50) влечет за собой оценку

$$V_k = \sup_{k \leq m} \frac{|Q_m^{(k)}(0)|}{k! A_k} \leq \sup_{k \leq m} \frac{d(k, m)}{d_m} \leq \frac{2}{d_k}.$$

Следовательно, $\limsup_{k \rightarrow \infty} (V_k)^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d_k^{-1/k}$, а последний предел согласно лемме 2 не превосходит W . Тем самым, предкомпактность множества функций (68) в $[A_{\mathcal{X}}, W]$ доказана.

Из сказанного в силу полноты пространств $[A, \sigma]$ вытекает существование последовательности номеров $\{m_k\}$ и функции $f \in [A_{\mathcal{X}}, W]$ таких, что $Q_{m_k}(z)$ сходится к $f(z)$ в топологии $[A_{\mathcal{X}}, W]$. Заметим, что $f(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{m_k}(0) = 1$, а значит, $f(z) \neq 0$. Теперь вложим рассматриваемые выше полидиски K_n , поставив в соответствие каждой точке $(z_0, \dots, z_{n-1}) \in K_n$ бесконечную финитную последовательность $(z_0, \dots, z_{n-1}, 0, 0, 0, \dots)$, в множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}^\infty$, состоящее из всех последовательностей комплексных чисел $\{\zeta_n\}_{n=0}^\infty$, координаты которых удовлетворяют условиям $|\zeta_n| \leq x_n \ (\forall n \in \mathbb{N}_0)$. Пространство $\mathbb{C}^\infty$, как обычно, снабдим стандартной топологией произведения. Множество $\mathcal{K}$ представляет из себя компакт, поскольку является произведением счетного числа кругов. Рассмотрим определенные выше точки $\xi^{(m)} \in K_m$, координаты которых дополнены нулями до бесконечных последовательностей, как элементы $\mathcal{K}$. Поскольку компакт $\mathcal{K}$ метризуем, то из последовательности $\{\xi^{(m_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность $\{\xi^{(\nu_s)}\}_{s \in \mathbb{N}}$, $\{\nu_s\}_{s \in \mathbb{N}} \subset \{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, имеющую предел в топологии $\mathbb{C}^\infty$ (т.е. покоординатно сходящуюся) равный $\eta = \{\eta_n\}_{n=0}^\infty \in \mathcal{K}$. Итак, мы доказали существование функции f и последовательностей комплексных чисел $\{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ и натуральных чисел $\{\nu_s\}_{s=1}^\infty$ таких, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Q_{\nu_s}(z) = f(z) \in [A_{\mathcal{X}}, W], \quad f(z) \neq 0, \quad (72)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_n^{(\nu_s)} = \eta_n, \quad |\eta_n| \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (73)$$

Осталось проверить, что $f^{(n)}(\eta_n) = 0$ при всех целых неотрицательных n . Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}_0$ и зафиксируем его. Напомним, что сходимость в (72) имеет место в топологии $[A_{\mathcal{X}}, W]$, а значит, и в топологии $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Поэтому $Q_{\nu_s}(z)$ стремится при $s \rightarrow \infty$ к $f(z)$ равномерно в любом круге и то же самое верно относительно сходимости $Q_{\nu_s}^{(p)}(z)$ к $f^{(p)}(z)$ при каждом $p \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$f^{(n)}(\eta_n) = \lim_{s \rightarrow \infty} Q_{\nu_s}^{(n)}(\eta_n) = \lim_{s \rightarrow \infty} (Q_{\nu_s}^{(n)}(\eta_n) - Q_{\nu_s}^{(n)}(\xi_n^{(\nu_s)})). \quad (74)$$

Последнее равенство справедливо, поскольку $Q_m^{(n)}(\xi_n^{(m)}) = 0$ при любом $m \neq n$ ввиду того, что многочлен $Q_m(z)$ получается умножением на константу $\alpha_m^{-1}(\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)})$ полинома Гончарова m -го порядка для набора узлов $\xi_0^{(m)}, \dots, \xi_{m-1}^{(m)}$. Теперь применим к разности, находящейся под знаком предела в (74), оценку, верную для любой целой функции $H(z)$:

$$|H(a) - H(b)| \leq |b - a| \max_{|z| \leq R} |H'(z)| \quad (\forall a, b \in \mathbb{C}), \quad \text{где } R = \max(|a|, |b|).$$

Получим

$$|Q_{\nu_s}^{(n)}(\eta_n) - Q_{\nu_s}^{(n)}(\xi_n^{(\nu_s)})| \leq |\eta_n - \xi_n^{(\nu_s)}| \cdot \max_{|z| \leq x_n} |Q_{\nu_s}^{(n+1)}(z)|. \quad (75)$$

Поскольку производные $(n+1)$ -го порядка (n фиксировано) функций $Q_{\nu_s}(z)$ ограничены в любом круге, то из (73)–(75) получаем $f^{(n)}(\eta_n) = 0$, а это полностью доказывает теорему 2.

Доказательство предложения 1 предварим одной леммой.

ЛЕММА 3. Пусть $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная невозрастающая и стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда существует неубывающая и неограниченная последовательность положительных чисел $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n \beta_n) = 0$,
- 2) $y_0 = y_1 = 1$, $y_{n+1} \leq y_n + 1/(4n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- 3) последовательность $\{y_n/\sqrt{\beta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ убывает и $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n/\sqrt{\beta_n} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала, что свойство 3) следует из предыдущих. Действительно, при $n \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{y_n^2}{n} - \frac{y_{n+1}^2}{n+1} &= \frac{y_n^2 - n(y_{n+1}^2 - y_n^2)}{n^2 + n} \geq \frac{y_n - n(y_{n+1} - y_n)(y_{n+1} + y_n)}{n^2 + n} \\ &\geq \frac{y_n - (1/4)(y_{n+1} + y_n)}{n^2 + n} = \frac{3y_n - y_{n+1}}{4n^2 + 4n} > 0, \end{aligned}$$

поскольку $y_{n+1} < 1 + y_n \leq 2y_n$ по свойству 2). Тем самым, последовательность y_n^2/n убывает, а значит, тем же свойством обладает и $\{y_n/\sqrt{\beta_n}\}$. Стремление к нулю $y_n/\sqrt{\beta_n}$ вытекает из 2):

$$\begin{aligned} y_n &= y_1 + \sum_{k=2}^n (y_k - y_{k-1}) \leq y_1 + \sum_{k=2}^n (4(k-1))^{-1} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{n-1} (4m)^{-1} = O(\ln n), \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Теперь построим неубывающую и неограниченную последовательность y_n , обладающую свойствами 1) и 2). Положим $y_0 = y_1 = 1$. Согласно посылке леммы последовательность $1/\sqrt{\beta_n}$ является неубывающей и стремится к $+\infty$. Определим y_n рекуррентными соотношениями

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n, & \text{если } y_n > 1/\sqrt{\beta_n}, \\ y_n + 1/(4n) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (76)$$

Монотонность построенной последовательности очевидна. Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty.$$

Предположим противное: существует постоянная $C > 0$ такая, что $y_n < C$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). В этом случае при всех достаточно больших n имеем $y_n \leq 1/\sqrt{\beta_n}$, а раз так, то $y_{n+1} = y_n + 1/(4n)$ для всех номеров n , начиная с некоторого. Но тогда y_{n+1} отличается на $O(1)$ от n -ой частичной суммы гармонического ряда $(1/4) \sum_{k=1}^n (1/k)$, а ввиду расходимости этого ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Теперь установим неравенства

$$y_n < 1 + \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \quad \forall n \geq 2. \quad (77)$$

Снова предположим противное: множество $M = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \mid y_n \geq 1 + 1/\sqrt{\beta_n}\}$ непусто. Пусть m – наименьший его элемент. Тогда из (76) находим $y_{m-1} \geq y_m - (4m-4)^{-1} \geq y_m - 1/4 > 1/\sqrt{\beta_m}$. А так как $\{1/\sqrt{\beta_n}\}$ является неубывающей последовательностью, то $y_{m-1} > 1/\sqrt{\beta_{m-1}}$. Но тогда согласно (74) имеем $y_{m-1} = y_m \geq 1 + 1/\sqrt{\beta_m} \geq 1 + 1/\sqrt{\beta_{m-1}}$ и $m-1 \in M$, если только $m \neq 2$. Но m – наименьший элемент M , а значит, $m = 2$ и $y_1 > 1 + 1/\sqrt{\beta_1}$. Это противоречит выбору y_1 и тем самым доказывает неравенство (77). Из (77) немедленно следует свойство 1), а свойством 2) последовательность y_n обладает в соответствии со способом ее построения. Лемма 3 полностью доказана.

В дальнейшем будет использоваться еще одно важное свойство последовательности y_n . А именно, суммы $\sum_{k=0}^n (y_k)^{-1}$ допускают оценку сверху

$$\sum_{k=0}^n (y_k)^{-1} < 1 + \frac{5n}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (78)$$

Действительно, пусть 2^p – наименьшая из целых степеней двойки, превосходящих n . Тогда, разбивая сумму $\sum_{k=0}^{2^p-1}$ на пачки, получим

$$\sum_{k=0}^n (y_k)^{-1} \leq \sum_{k=0}^{2^p-1} (y_k)^{-1} = (y_0)^{-1} + \sum_{\nu=0}^{p-1} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (y_k)^{-1} \leq 1 + \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{2^\nu}{y_{2^\nu}} \quad (79)$$

(сумму $\sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (y_k)^{-1}$ мы оценили сверху через произведение количества слагаемых на наибольшее из них). Так как последовательность $\sqrt{n}/y_n$ возрастает, то $\max_{0 \leq \nu \leq p-1} (2^{\nu/2}/y_{2^\nu}) = 2^{(p-1)/2}/y_{2^{p-1}}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{2^\nu}{y_{2^\nu}} &\leq \frac{2^{(p-1)/2}}{y_{2^{p-1}}} \sum_{\nu=0}^{p-1} 2^{\nu/2} = \frac{2^{p-1}}{y_{2^{p-1}}} \sum_{\nu=0}^{p-1} 2^{(\nu+1-p)/2} \\ &< \frac{2^{p-1}}{y_{2^{p-1}}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j/2} < 3.5 \frac{2^{p-1}}{y_{2^{p-1}}} \leq 3.5 \frac{n}{y_{2^{p-1}}}. \end{aligned}$$

Используя неравенство $y_q \leq y_m + 1/4$, $m+1 \leq q \leq 2m$, которое немедленно вытекает из свойства 2, находим $1/y_{2^{p-1}} \leq 1/(y_n - 1/4) \leq (4/3)y_n^{-1}$. Отсюда и из (79) выводим

$$\sum_{k=0}^n (y_k)^{-1} < 1 + \frac{4}{3} \frac{3.5n}{y_n} < 1 + \frac{5n}{y_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

а это и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Пусть $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – произвольная целая функция, удовлетворяющая условию (17). Требуется построить функцию сравнения $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, для коэффициентов ряда Маклорена которой выполняется предельное соотношение (14) и A -тип $a(z)$ равен 1, т.е.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{A_n} \right|^{1/n} = 1. \quad (80)$$

Из (17) следует, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} (n^{-2} \ln |1/a_n|) = 0^4$. (Всюду в доказательстве предложения 1 считаем, что если $a_n = 0$, то $\ln |1/a_n| = +\infty$.) Положим

$$u_n = \begin{cases} n^{-2} \ln |1/a_n|, & \text{если } n \geq 1, |a_n| < 1/e, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то при всех достаточно больших n имеем

$$u_n = n^{-2} \ln |1/a_n| \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Если теперь взять $\beta_n = \min_{0 \leq k \leq n} u_k$, то получим, что $\{\beta_n\}$ является невозрастающей стремящейся к нулю последовательностью положительных чисел и $\beta_n = u_n$ для бесконечного количества номеров n . По последовательности $\{\beta_n\}$ построим $\{y_n\}$ согласно лемме 3 и обозначим $\varepsilon_n = 1/y_n$. Положим

$$c_n = \begin{cases} \varepsilon_n n^2, & \text{если } \ln |1/a_n| \geq \varepsilon_n n^2, \\ \ln |1/a_n| & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (81)$$

Из (81) и очевидного соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1} \ln |1/a_n|) = +\infty$ вытекают равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{n} = +\infty. \quad (82)$$

В соответствии с (81) натуральный ряд разбивается на два множества $\mathcal{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid c_n < \varepsilon_n n^2\}$ и $\mathcal{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \mathcal{N}_1$. Множество $\mathcal{N}_2$ может быть и пустым, но в силу предельных соотношений

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n \beta_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\varepsilon_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |1/a_n|}{n^2 \varepsilon_n}$$

получаем, что $\ln(1/|a_n|) < n^2 \varepsilon_n$ для бесконечного количества номеров n , а значит, согласно (81) множество $\mathcal{N}_1$, на котором последовательности c_n и $\ln |1/a_n|$ совпадают, состоит из бесконечного числа элементов.

Наша цель состоит в том, чтобы построить на $\mathbb{R}_+$ функцию $L(x)$, обладающую следующими четырьмя свойствами.

1. График $L(x)$ является ломаной. На отрезках $[n, n+1]$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$) функция L линейна.

2. $L(x)$ является огибающей множества точек плоскости $\{(n, \ln |1/a_n|), n \in \mathbb{N}_0\}$, т.е. $L(n) \leq \ln |1/a_n|$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$) и равенство $L(n) = \ln |1/a_n|$ выполняется для бесконечного числа номеров n .

3. Угловые коэффициенты звеньев ломаной образуют возрастающую последовательность, стремящуюся к $+\infty$.

4. Разности между угловыми коэффициентами двух последовательных звеньев ломаной L стремятся к нулю.

Убедимся в том, что этого достаточно для доказательства предложения 1. Положим $A_n = \exp(-L(n))$, $n \in \mathbb{N}_0$. Из свойств 1 и 3 следует включение $A(z) =$

⁴В противном случае $|a_n| = O(q^{-n(n+1)/2})$ при некотором $q > 1$, а тогда согласно оценкам роста функций $\sum_{n=0}^{\infty} z^n q^{-n(n+1)/2}$ из [25] мы получили бы, что условие (17) не выполняется.

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \in \mathfrak{A}$. Свойство 2 влечет за собой справедливость предельного соотношения (80). И, наконец, (14) вытекает из свойства 4.

Опишем процесс построения ломаной L и последовательности точек с абсциссами n_k , в которых ломаная L будет касаться множества E . Пусть $c_{n_0} = \min_{n \in \mathbb{N}_0} c_n$, причем n_0 — наибольший из номеров, на которых достигается этот минимум. В силу (82) такой номер существует. Если $n_0 > 0$, то начальное звено ломаной L будет горизонтальным:

$$L(x) = c_{n_0}, \quad 0 \leq x \leq n_0.$$

Если же $n_0 = 0$, то построена начальная точка ломаной L : $(0, c_0)$. Теперь проведем в правую сторону горизонтальный луч из точки (n_0, c_{n_0}) и начнем его поворачивать относительно этой точки против часовой стрелки до тех пор, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. 1) Луч коснулся множества E . 2) Тангенс угла наклона луча достиг значения $0.1\varepsilon_{n_0}$, но множество E лежит выше луча. В случае 1) в качестве n_1 берем абсциссу самой далекой точки касания⁵ и полагаем $L(x) = c_{n_0} + (c_{n_1} - c_{n_0})(x - n_0)/(n_1 - n_0)$, $n_0 \leq x \leq n_1$. В случае 2) образовался луч ℓ_0 , выходящий из точки (n_0, c_{n_0}) с угловым коэффициентом, равным $0.1\varepsilon_{n_0}$, и лежащий ниже множества E . Определим ломаную на отрезке $[n_0, 1 + n_0]$ как часть луча ℓ_0 на этом отрезке:

$$L(x) = c_{n_0} + 0.1(x - n_0)\varepsilon_{n_0}.$$

Возьмем часть луча ℓ_0 , начинающуюся в точке с абсциссой $1 + n_0$ и начнем его поворачивать относительно этой точки против часовой стрелки до тех пор, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. 1') Повернутый луч коснулся множества E . 2') Тангенс угла наклона луча в процессе поворота достиг значения $0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0})$. В случае 1') в качестве n_1 берем абсциссу самой далекой точки касания (она существует в силу (82)) и полагаем

$$L(x) = L(1 + n_0) + \frac{(c_{n_1} - L(1 + n_0))(x - n_0 - 1)}{n_1 - n_0 - 1}, \quad 1 + n_0 < x \leq n_1.$$

В случае 2') образовался луч ℓ_1 , выходящий из точки $(1 + n_0, L(1 + n_0))$ с угловым коэффициентом $0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0})$ и лежащий ниже множества E . Тогда полагаем

$$L(x) = L(1 + n_0) + 0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0})(x - n_0 - 1), \quad 1 + n_0 < x \leq 2 + n_0.$$

Потом берем часть луча ℓ_1 , выходящую из точки $(2 + n_0, L(2 + n_0))$, и поворачиваем ее либо до касания множества E , либо до увеличения тангенса угла наклона до $0.1(\varepsilon_{n_0} + \varepsilon_{1+n_0} + \varepsilon_{2+n_0})$ и т. д.

Докажем, что описанный процесс не может продолжаться бесконечно, а именно на каком-то шаге этого алгоритма поворачиваемый луч ℓ_ν коснется множества E . Предположим противное. А именно, допустим, что все звенья ломаной L при $x \geq n_0$ имеют длину проекции на ось OX , равную 1, а угловой коэффициент звена, идущего от точки $(\nu + n_0, L(\nu + n_0))$ до $(\nu + 1 + n_0, L(\nu + 1 + n_0))$, увеличивается

⁵ Она существует в силу равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n/n) = +\infty$.

на $0.1\varepsilon_{\nu+n_0}$ по сравнению с предыдущим. При этом при всех $n > x_0$ выполнено неравенство $L(n) < c_n$ (это и означает, что ломаная лежит ниже E). В этом случае по построению получим

$$L(\nu + 1 + n_0) = L(\nu + n_0) + \sigma_\nu, \quad \text{где} \quad \sigma_\nu = 0.1 \sum_{j=0}^{\nu} \varepsilon_{j+n_0}.$$

Отсюда в силу монотонного убывания ε_ν находим

$$L(\nu + 1 + n_0) \geq L(\nu + n_0) + 0.1(\nu + 1)\varepsilon_{\nu+n_0}.$$

Тем самым,

$$L(m + n_0) \geq L(n_0) + 0.1 \sum_{\nu=0}^{m-1} (k+1)\varepsilon_{\nu+n_0} \geq L(n_0) + 0.05m(m+1)\varepsilon_{m+n_0}.$$

Следовательно, $c_n > L(n) > L(n_0) + 0.05(n - n_0)^2 + \varepsilon_n$. Отсюда находим $\liminf_{n \rightarrow \infty} (n^{-2}c_n/\varepsilon_n) \geq 1/20$, а значит, по построению c_n и ε_n имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n u_n) \geq \frac{1}{20}.$$

Но последовательность x_n строилась так, что $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n u_n) = 0$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

В результате непрерывная кусочно-линейная функция L построена на отрезке $[0, n_1]$ и обладает следующими свойствами.

а) График функции $L(x)$ является ломаной, состоящей из нескольких звеньев (или одного звена, если $n_0 = 0$, т.е. $c_n - c_0 > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\min_{n \in \mathbb{N}} (c_n - c_0)/n \leq 0.1\varepsilon_0 = 0.1$), угловые коэффициенты которых возрастают. График функции $L(x)$ может иметь излом только в точках, абсциссы которых – натуральные числа.

б) Угловой коэффициент последнего звена всегда положителен, а первого – положителен или в случае $n_0 > 0$ равен нулю.

с) Если $L(x)$ имеет излом в точке с абсциссой $x = n \in \mathbb{N}$, то разность между угловыми коэффициентами звеньев, граничащих в точке $(n, L(n))$, не превосходит $0.1\varepsilon_n$, т.е. выполняются неравенства

$$L(n+1) - 2L(n) + L(n-1) \leq 0.1\varepsilon_n. \quad (83)$$

Если в точке $x = n$ график $L(x)$ не имеет излома, то неравенство (83) заведомо справедливо, так как в этом случае выражение, стоящее в левой части, обращается в нуль.

д) Имеет место равенство $L(n_1) = c_{n_1}$, а луч, являющийся продолжением последнего звена, лежит ниже множества $\{(n, c_n) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}, n > n_1\}$.

е) При всех $n \leq n_1$ справедливо неравенство $L(n) \leq c_n$.

Далее построим по индукции последовательность $\{n_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ и кусочно-линейную функцию L , принимающую значения c_{n_ν} в точках n_ν , а при остальных n удовлетворяющую неравенству $L(n) \leq c_n$. Основание индукции у нас имеется. Пусть

теперь $k \in \mathbb{N}$ и на отрезке $[0, n_k]$ построена кусочно-линейная функция L , обладающая свойствами а)–е), в которых n_1 всюду заменено на n_k . Наша задача – построить номер $n_{k+1} > n_k$ и продолжить непрерывную кусочно-линейную функцию L на $[n_k, n_{k+1}]$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} L(m) &\leq c_m, \quad n_k < m < n_{k+1}, \quad L(n_{k+1}) = c_{n_{k+1}}, \\ L(m+1) - 2L(m) + L(m-1) &\leq 0.1\varepsilon_m, \quad n_k \leq m < n_{k+1}, \end{aligned}$$

и угловые коэффициенты звеньев графика $L(x)$ на отрезке $[0, n_{k+1}]$ (как и ранее на $[0, n_k]$) образовывали возрастающую последовательность. Через t_k обозначим тангенс угла наклона последнего звена ломаной.

Возьмем луч, являющийся продолжением последнего звена ломаной и начинающийся в точке $(n_k, L(n_k))$. Согласно свойству d), в котором n_1 заменено на n_k , этот луч лежит ниже множества $E_k = \{(n, c_n) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}, n > n_k\}$. Поворачиваем рассматриваемый луч относительно точки $(n_k, L(n_k))$ до тех пор, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. 1) Повернутый луч коснулся множества E_k . 2) Тангенс угла наклона повернутого луча возрос в сравнении с прежним положением на $0.1\varepsilon_{n_k}$, но множество E_k лежит выше луча. В случае 1) в качестве n_{k+1} берем абсциссу самой далекой точки касания и полагаем

$$L(x) = L(n_k) + \frac{(c_{n_{k+1}} - c_{n_k})(x - n_k)}{n_{k+1} - n_k}, \quad n_k < x \leq n_{k+1}.$$

(Напоминаем, что $L(n_k) = c_{n_k}$.) В случае 2) определяем $L(x)$ на отрезке $[n_k, 1+n_k]$ по формуле $L(x) = L(n_k) + (x - n_k)(t_k + 0.1\varepsilon_{n_k})$. После этого возьмем луч, выходящий из точки $(1+n_k, L(1+n_k))$ под углом $\arctg(t_k + 0.1\varepsilon_{n_k})$ с положительным направлением оси OX (он является продолжением построенного только что последнего звена ломаной), и снова будем поворачивать его против часовой стрелки, пока не возникнет одна из следующих ситуаций. 1') Повернутый луч коснулся множества E_k . 2') Тангенс угла наклона повернутого луча возрос в сравнении с прежним положением на $0.1\varepsilon_{1+n_k}$, но множество E_k лежит выше луча. В случае 1') в качестве n_{k+1} берем абсциссу самой далекой точки касания и полагаем

$$L(x) = L(1+n_k) + \frac{(x - 1 - n_k)(c_{n_{k+1}} - L(1+n_k))}{n_{k+1} - n_k - 1}, \quad 1+n_k < x \leq n_{k+1}.$$

В случае 2') определяем $L(x)$ на отрезке $[1+n_k, 2+n_k]$ по формуле $L(x) = L(1+n_k) + (x - n_k)(t_k + 0.1(\varepsilon_{n_k} + \varepsilon_{1+n_k}))$ и луч, являющийся продолжением последнего звена ломаной, вновь поворачиваем против часовой стрелки либо до его касания с множеством E_k , либо до увеличения тангенса угла наклона на $0.1\varepsilon_{2+n_k}$ и т. д. Описанный процесс не будет продолжаться бесконечно. На некотором шаге этого алгоритма поворачиваемый луч коснется множества E . Доказательство этого утверждения полностью совпадает с доказательством, проведенным выше в случае $k = 1$. Нужно лишь всюду n_0 заменить на n_k . Таким образом, точка n_{k+1} окажется построенной, и в силу проведенного построения свойства а)–е) ломаной L , в которых n_1 заменено на n_k , перенесутся с отрезка $[0, n_k]$ на $[0, n_{k+1}]$. Тем самым, общий шаг индукции сделан, и непрерывная кусочно-линейная функция $L(x)$ построена на всей полуоси. График $L(x)$ представляет из себя ломаную, которая

в силу построения является огибающей для множества E и ее угловые коэффициенты строго возрастают. Разность между угловыми коэффициентами соседних звеньев стремится к нулю, так как при переходе от предыдущего звена к последующему мы следили за тем, чтобы тангенс угла наклона звена в точке m возрос не более чем на $0.1\varepsilon_m$, а последовательность ε_m была заранее построена стремящейся к нулю.

Из сказанного вытекает, что построенная функция L обладает свойствами 1, 3, 4, сформулированными в начале доказательства предложения 1. А так как $L(n) \leq c_n$ и согласно (81) имеем $c_n \leq \ln |1/a_n|$, то $L(n) \leq \ln |1/a_n|$ и нам для проверки свойства 2 осталось установить, что уравнение $L(n) = \ln |1/a_n|$ имеет бесконечно много решений. Это верно относительно уравнения $L(n) = c_n$: ему удовлетворяют все элементы последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. По определению последовательности $\{c_n\}$ имеем $c_n = \ln |1/a_n|$, если $c_n < \varepsilon_n n^2$. Поэтому если при достаточно больших n установить неравенство $L(n) < \varepsilon_n n^2$ (оно же будет верно и в точках n_k при $k > k_0$) и поскольку $L(n_k) = c_{n_k}$, то тогда мы получим, что $L(n_k) = \ln |1/a_{n_k}|$ при всех достаточно больших k . Этим предложение 1 будет полностью доказано. Поэтому заключительным этапом его доказательства станет проверка справедливости предельного соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-2} L(n)}{\varepsilon_n} < 1. \quad (84)$$

С этой целью оценим $L(n)$ сверху. Имеем $L(n) = L(1) + \sum_{k=2}^n (L(k) - L(k-1))$. Обозначив $\Delta_k = L(k) - L(k-1)$ и представив Δ_k в виде $\Delta_k = \Delta_1 + \sum_{m=2}^k (\Delta_m - \Delta_{m-1})$, учитывая равенство $\Delta_m - \Delta_{m-1} = L(m) - 2L(m-1) + L(m-2)$, находим

$$\begin{aligned} L(n) &= L(1) + \sum_{k=2}^n \Delta_k = L(1) + \sum_{k=2}^n \left(\Delta_1 + \sum_{m=2}^k (\Delta_m - \Delta_{m-1}) \right) \\ &= O(n) + \sum_{k=2}^n \sum_{m=2}^k (L(m) - 2L(m-1) + L(m-2)). \end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой сверху (83) второй разности для L , получим

$$L(n) \leq O(n) + 0.1 \sum_{k=2}^n \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_p. \quad (85)$$

Из (85) и (78) (напомним, что у нас $\varepsilon_p = 1/y_p$) вытекает неравенство

$$L(n) \leq O(n) + 0.1 \sum_{k=2}^n (1 + 5k\varepsilon_k) = O(n) + 0.5 \sum_{k=2}^n k\varepsilon_k.$$

Согласно утверждению 3) леммы 3 последовательность $y_k/\sqrt{k}$ убывает, а значит, $\sqrt{k}/y_k = \sqrt{k}\varepsilon_k$ возрастает. Следовательно, последовательность $k\varepsilon_k$ также возрастает и тем самым $\sum_{k=1}^n k\varepsilon_k \leq n^2\varepsilon_n$. Отсюда находим $L(n) \leq 0.5n^2\varepsilon_n + O(n)$, что и доказывает (84). Этим, как отмечалось выше, предложение 1 полностью доказано.

Список литературы

1. *Евграфов М. А.* Интерполяционная задача Абея–Гончарова. М.: ГИТТЛ, 1954.
2. *Bernstein S. N.* Sur les fonctions régulièrement monotones // Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna, 3–10 Settembre. 1928. V. 2. P. 267–275.
3. *Бернштейн С. Н.* О некоторых свойствах циклически монотонных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1950. Т. 14. № 5. С. 381–404.
4. *Schoenberg I. J.* On zeros of successive derivatives of integral functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 12–23.
5. *Macyntyre S. S.* On the zeros of successive derivatives of integral functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 67. № 1. P. 241–251.
6. *Gontcharoff V. L.* Recherche sur les dérivées successives des fonctions analytiques // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1930. V. 47. P. 1–78.
7. *Takenaka S.* On the expansion of analytic functions in generalized Taylor's series // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. (3). 1932. V. 14. № 10. P. 529–542.
8. *Казьмин Ю. А.* Методы интерполяции аналитических функций и их приложения // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1972.
9. *Джербашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
10. *Евграфов М. А.* Основные понятия интерполяции целых функций // Препринт № 20. М.: Ин-т прикладн. математики АН СССР, 1975.
11. *Евграфов М. А.* Метод близких систем в пространстве аналитических функций и его применения к проблеме интерполяции // Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 90–200.
12. *Осколков В. А.* О полноте и квазистепенной базисности систем $\{z^n f(\lambda_n z)\}$ // Матем. сб. 1989. Т. 130. № 3. С. 375–384.
13. *Осколков В. А.* О некоторых вопросах теории целых функций // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 1. С. 129–148.
14. *Драгилев М. М., Чушлова О. П.* О сходимости некоторых интерполяционных рядов // Сиб. матем. журнал. 1963. Т. 4. № 2. С. 287–294.
15. *Суетин Ю. К.* Совпадение постоянных единственности и сходимости некоторых интерполяционных задач // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1966. № 5. С. 16–25.
16. *Джербашян М. М.* Теорема единственности и представимости для аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1952. Т. 16. № 3. С. 225–252.
17. *Takeya S.* An extension of power series // Proc. Phys. Math. Soc. Japan. (3). 1932. V. 14. № 4. P. 125–138.
18. *Осколков В. А.* Некоторые базисы в пространствах регулярных функций и их применение в теории интерполяции // Матем. сб. 1978. Т. 105(147). № 2. С. 238–260.
19. *Казьмин Ю. А.* Сравнения функция // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. С. 160.
20. *Попов А. Ю.* Об обращении обобщенного преобразования Бореля // Фундам. и прикл. матем. 1999. Т. 5. № 3. С. 817–841.
21. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
22. *Казьмин Ю. А.* Теорема о базисности близких систем и ее приложения // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 1. С. 80–88.
23. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969.
24. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1977.
25. *Казьмин Ю. А.* Об одной задаче А. О. Гельфонда // Матем. сб. 1973. Т. 90. № 4. С. 509–530.