Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, Следы операторов с относительно компактным возмущением, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 2, 129–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm630>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:34:45

УДК 517.94

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

Следы операторов с относительно компактным возмущением

Доказаны формулы регуляризованных следов для абстрактных операторов таких, что возмущающий оператор B подчинен невозмущенному оператору A_0 в том смысле, что BA_0^{-1} – компактный оператор, принадлежащий некоторому классу Шаттена–фон Неймана конечного порядка. Здесь существенно различаются два случая: является резольвента оператора A_0 ядерной или нет. Получено пять теорем, охватывающих различные варианты подчинения операторов и структуры спектра невозмущенного оператора.

Библиография: 21 название.

Статья продолжает цикл исследований, начатый работами [1], [2], в которых проводилось изучение регуляризованных следов абстрактных дискретных операторов и было доказано, что если A_0 – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с ядерной резольвентой, $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – собственные числа оператора A_0 , занумерованные в порядке возрастания, B – ограниченный в $\mathcal{H}$ оператор и $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей, то существуют подпоследовательности натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{l=-k_m}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l)) = 0, \quad (1)$$

где $\{\varphi_n\}$ – базис из собственных векторов оператора A_0 .

Регуляризованные следы дискретных операторов в абстрактной постановке рассматривались с конца 70-х годов, пионерской здесь была работа [3]. Наиболее сильный результат для конечномерных возмущений получен в [4], где были охвачены некоторые классы неограниченных возмущений. Центральным направлением стало изучение следов возмущений самосопряженных операторов с заданным поведением собственных чисел $\lambda_n \sim cn^\alpha$, здесь наиболее сильные результаты получены в работе [5], в которой при $\alpha > 1$ для ограниченного возмущения в зависимости от α и порядка следа указано количество поправок теории возмущений, которые необходимо учесть при получении формул следа, в частности формула (1) была доказана при $\alpha \geq 2$, а для возмущения типа Гильберта–Шмидта аналогичная формула была доказана при $\alpha = 1$. В ряде работ получены более точные (по сравнению с [5]) формулы за счет более детальных предположений о спектре невозмущенного оператора – либо предполагалась дополнительно известной оценка остатка в асимптотической формуле для собственных чисел, либо делались предположения об особой регулярности их распределения. Среди последних выделим работу [6].

Заслуживает внимания и работа Лакса [7], в которой (к сожалению, без строгих доказательств) автор предложил оригинальный метод вычисления следов, основанный на известном по его работам в теории обратных задач методе дифференцирования семейства операторов по внешнему параметру. Наконец, упомянем работу [8], в которой получен регуляризованный след для неядерного интегрального оператора. Это единственный известный нам результат такого рода, и эта задача нашими рассмотрениями не затрагивается.

В настоящей работе мы рассматриваем более общую¹ по сравнению с [2] задачу, в которой возмущающий оператор B подчинен оператору A_0 в том смысле, что BA_0^{-1} — компактный оператор, принадлежащий некоторому классу Шаттена–фон Неймана конечного порядка. Здесь существенно различаются два случая: является ли резольвента оператора A_0 ядерной или нет, и мы предъявляем пять теорем, охватывающих различные варианты подчинения операторов и структуры спектра невозмущенного оператора. Эти результаты анонсированы нами в [10], однако теоремы 3 и 5 здесь заметно усилены.

Первые две теоремы посвящены случаю ядерности оператора A_0^{-1} , при этом оператор B предполагается, вообще говоря, неограниченным. В теории регуляризованных следов дискретных операторов случай неограниченного возмущения исследован мало, целостное и законченное исключение составляют лишь результаты для регулярных дифференциальных операторов, да и то условно, так как основной в данном разделе теории метод работы [11] опирается на теорию функций и не нуждается в структурировании оператора на невозмущенный и возмущение.

Две последние теоремы строго ограничены случаем, в котором оператор A_0^{-1} — компактный, но неядерный (впрочем, теорема 4 включает в себя при $\delta = 0$ основную теорему работы [2]). Этот случай до сих пор рассматривался в литературе лишь для некоторых конкретных операторов, обладающих специальной структурой спектра, наиболее полные и интересные результаты получены для оператора Лапласа–Бельтрами на симметрических пространствах ранга 1 в работах [12], [13]. В этом контексте упомянем исследования возмущенного гармонического осциллятора, см., например, [14] и там дальнейшие ссылки. Фундаментальная причина малоизученности этого случая заключается в том, что в общем положении расстояние между собственными числами невозмущенного оператора, вообще говоря, не ограничено снизу. Это обстоятельство отразилось и на результатах нашей работы, являясь главной причиной несимметричности формулировок теорем 4 и 5 формулировкам теорем 1 и 2 соответственно, хотя на первый взгляд подобная симметрия должна присутствовать. Сгущение спектра оператора A_0 приносит дополнительные трудности и в доказательства этих теорем.

Третья теорема является, на наш взгляд, своего рода связующим звеном между этими случаями. Здесь от невозмущенного оператора требуется наличие неограниченно возрастающих лакун в спектре, при этом никаких условий на порядок оператора не налагается. Мы отнесли эту теорему в один раздел со случаем неядерности резольвенты A_0 , так как здесь разбирается случай возмущения $B \in \mathfrak{S}_p$. Результаты трех последних теорем являются новыми даже для случая принад-

¹В 1999 году в работе [9] анонсированы теоремы, частично перекрывающие результаты работы [2], или, что то же самое, частный случай теоремы 1 настоящей работы для $\delta = 0$, а также часть теоремы 3 настоящей работы (только случай $p = 2$); однако нам неизвестно, опубликованы ли где-нибудь доказательства.

ложности возмущения классу Гильберта–Шмидта, так как известные результаты работ [15]–[17], посвященных обобщению формулы следа Крейна на случай возмущения типа Гильберта–Шмидта, не охватывают нашего результата ни по классу функций от операторов, рассмотренных в этих работах, ни по возможной у нас не-самосопряженности возмущения.

Доказанные нами теоремы для абстрактных операторов позволяют получать новые результаты для обширных классов конкретных операторов математической физики, и в конце работы мы поместили ряд примеров подобных приложений. Выделим среди них впервые полученную формулу регуляризованного следа для оператора в частных производных, возмущенного также оператором в частных производных.

§ 1. Обозначения и предварительные сведения

На протяжении работы все рассматриваемые операторы действуют в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, через $\mathcal{D}(\cdot) \subset \mathcal{H}$ обозначается область определения оператора. Через A_0 мы будем обозначать самосопряженный положительный дискретный оператор, его дробные степени – также положительные операторы, определяемые по спектральной теореме; через $R_0(\lambda)$ всегда обозначается резольвента оператора A_0 , через $\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – его собственные числа, занумерованные в порядке возрастания, через $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ – базис из его собственных векторов. Через B мы всегда обозначаем возмущающий оператор, через $\{\mu_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – собственные числа оператора $A_0 + B$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей, через $R(\lambda)$ – его резольвенту.

Подчеркнем, что условие положительности оператора A_0 непринципиально и введено лишь для сокращения формулировок и технической части доказательств. Если самосопряженный оператор A_0 таков, что для его модуля $|A_0|$ верна какая-либо из доказанных в работе теорем, то эта же теорема верна и для самого оператора. Формулы следов при этом приобретают “двусторонний” вид подобно формуле (1).

Компактные операторы, сингулярные числа которых образуют сходящийся ряд $\sum s_n^p$ при некотором $p > 0$, мы традиционно обозначаем через $\mathfrak{S}_p$; это множество операторов при $p \geq 1$ образует симметрично-нормированный идеал в алгебре всех компактных операторов с нормой $\|\cdot\|_p = (\sum s_n^p)^{1/p}$. При $p = 1$ эта норма называется ядерной нормой операторов, при $p = 2$ – нормой Гильберта–Шмидта или абсолютной нормой.

На протяжении всей работы одним и тем же символом c обозначаются различные положительные константы, не зависящие от основных переменных встречающихся неравенств.

ЛЕММА 1. Для любых чисел $a, b > 0$, $a \neq b$, и для любых $\delta, \varepsilon \in [0, 1]$, $\delta + \varepsilon \leq 1$, верно

$$\left| \frac{a^\delta b^\varepsilon (a^{1-\delta-\varepsilon} - b^{1-\delta-\varepsilon})}{a - b} \right| \leq 1. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $a > b$. Тогда

$$\begin{aligned} a^\delta b^\varepsilon (a^{1-\delta-\varepsilon} - b^{1-\delta-\varepsilon}) &\leq a - b \Leftrightarrow a^{1-\delta-\varepsilon} - b^{1-\delta-\varepsilon} \leq a^{1-\delta} b^{-\varepsilon} - b^{1-\varepsilon} a^{-\delta} \\ &\Leftrightarrow b^{1-\varepsilon} a^{-\delta} - b^{1-\delta-\varepsilon} \leq a^{1-\delta} b^{-\varepsilon} - a^{1-\delta-\varepsilon} \\ &\Leftrightarrow b^{1-\varepsilon} (a^{-\delta} - b^{-\delta}) \leq a^{1-\delta} (b^{-\varepsilon} - a^{-\varepsilon}) \end{aligned}$$

и мы получили слева отрицательное число, а справа положительное. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для любых чисел $a > b > 0$ и для любого $\delta > 0$ верно

$$\frac{1}{a-b} \leq \frac{(\delta+1)a^\delta}{a^{1+\delta} - b^{1+\delta}}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$a^{1+\delta} - b^{1+\delta} \leq (\delta+1)a^{\delta+1} - (\delta+1)a^\delta b,$$

или

$$(\delta+1) \leq \delta \frac{a}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)^\delta.$$

Заметим, что функция $\delta x + 1/x^\delta$ при $\delta > 0$ и $x > 0$ имеет минимум в точке $x = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть оператор B таков, что $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$, и пусть существует $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного. Предположим также, что существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$, где $\rho > \delta$. Тогда существует последовательность действительных чисел $\{a_m\}$, $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, такая, что внутри окружностей с центрами в нуле и радиусами a_m содержится одинаковое количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующее известное равенство для резольвент операторов

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (BR_0(\lambda))^k = R_0(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (BA_0^{-\delta} A_0^\delta R_0(\lambda))^k \quad (4)$$

и стандартную оценку (см., например, [18])

$$\|A_0^\delta R_0(\lambda)\| \leq \max_{1 \leq k < \infty} \frac{\lambda_k^\delta}{|\lambda_k - \lambda|}.$$

Из последней оценки мы немедленно получаем, что при $|\lambda| = a_m$ и $|\lambda_{n_m+1} - a_m| \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$, $|\lambda_{n_m} - a_m| \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$ верно

$$\max_{|\lambda|=a_m} \|A_0^\delta R_0(\lambda)\| \leq c\lambda_{n_m+1}^{\delta-\rho},$$

тогда

$$\max_{|\lambda|=a_m} \|(BA_0^{-\delta} A_0^\delta R_0(\lambda))^k\| \leq c^k \|BA_0^{-\delta}\|^k a_m^{-k(\rho-\delta)} \quad (5)$$

и так как $\rho > \delta$, то ряд (4) сходится при $a_m^{\rho-\delta} > c\|BA_0^{-\delta}\|$, следовательно, все λ такие, что $|\lambda| = a_m$, принадлежат его резольвентному множеству. Сделанные предположения об операторах A_0 и B позволяют говорить о семействе операторов $A_0 + \tau B$ как о голоморфном семействе типа “А” [18; гл. VII]. Результаты аналитической теории возмущений [18] говорят, что собственные числа семейства операторов $A_0 + \tau B$ заведомо являются непрерывными функциями параметра τ . Так как проведенные рассуждения верны и для возмущения τB при $\tau \in [0, 1]$, то все рассматриваемые λ остаются в резольвентном множестве этого семейства при всех $\tau \in [0, 1]$ и, следовательно, собственные числа семейства операторов $A_0 + \tau B$ не пересекают окружности $|\lambda| = a_m$ при $\tau \in [0, 1]$. Лемма доказана.

В работе [2] доказана следующая

ЛЕММА 4. Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность положительных чисел и при этом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/b_n < +\infty$. Тогда существует последовательность чисел $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, $a_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b_n - a_m|} = 0.$$

§ 2. $R_0(\lambda)$ – ядерный оператор

В этом параграфе оператор $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор B таков, что $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$, и пусть существуют число $\delta \in [0, 1)$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, и некоторое число $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$, такое, что $A_0^{-(1-\delta-\omega)}$ – ядерный оператор. Тогда существуют подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и последовательность контуров $\Gamma_m \in \mathbb{C}$ такие, что при $\omega \geq \delta/l$ верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{Tr}((BR_0(\lambda))^k) d\lambda \right) = 0. \quad (6)$$

В частности, при $\omega \geq \delta$ верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы² начнем со следующей леммы.

² Отметим, что теорема 1 включает в себя при $\delta = \omega = 0$ теорему работы [2].

ЛЕММА 5. *Существует бесконечно большая последовательность положительных чисел a_m такая, что $\|BR_0(a_m)\|_1 = o(a_m^{-\omega})$ при $m \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Для оценки $\|BR_0(a_m)\|_1$ воспользуемся следующим неравенством Стайнспринга [19; гл. III, § 8]:

$$\|A\|_1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A\chi_j\|,$$

где $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис пространства. Тогда

$$\begin{aligned} \|BR_0(\lambda)\|_1 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (BR_0(\lambda)\varphi_k, BR_0(\lambda)\varphi_k)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B\varphi_k, B\varphi_k)^{1/2}}{|\lambda_k - \lambda|} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BA_0^{-\delta}\varphi_k, BA_0^{-\delta}\varphi_k)^{1/2}\lambda_k^{\delta}}{|\lambda_k - \lambda|} \leq \|BA_0^{-\delta}\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\delta}}{|\lambda_k - |\lambda||}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя (2) к неравенству (7), имеем

$$\begin{aligned} \|BR_0(\lambda)\|_1 &\leq \|BA_0^{-\delta}\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^{\delta}}{\lambda_k^{\delta}|\lambda|^{\omega}|\lambda_k^{1-\delta-\omega} - |\lambda|^{1-\delta-\omega}|} \\ &= \frac{\|BA_0^{-\delta}\|}{|\lambda|^{\omega}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k^{1-\delta-\omega} - |\lambda|^{1-\delta-\omega}|}. \end{aligned} \quad (8)$$

Сходимость ряда здесь обеспечена ядерностью оператора $A_0^{-(1-\delta-\omega)}$.

Воспользуемся далее результатом леммы 4 и выберем последовательность $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k^{1-\delta-\omega} - a_m^{1-\delta-\omega}|} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

тогда из (8) следует

$$\|BR_0(a_m)\|_1 = o(a_m^{-\omega}). \quad (9)$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы 1. Определим систему контуров Γ_m на комплексной плоскости как систему окружностей с центрами в нуле и радиусами a_m . Из леммы 3 и оценок леммы 5 немедленно следует, что внутри контуров Γ_m количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$ совпадает при всех достаточно больших m .

Далее заметим, что

$$\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda, \quad (10)$$

и исследуем правую часть этого равенства.

Для пары операторов A_0 и $A_0 + B$ таких, что $BR_0(\lambda)$ – ядерный, можно ввести так называемый определитель возмущения [19]³:

$$D_{A/A_0}(\lambda) = \det[(A - \lambda I) \cdot (A_0 - \lambda I)^{-1}] = \det[I + BR_0(\lambda)].$$

Нам потребуются два хорошо известных (см. [19]) соотношения для этого определителя:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) &= \frac{d}{d\lambda}(\ln D_{A/A_0}(\lambda)), \\ \ln D_{A/A_0}(\lambda) &= \operatorname{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)). \end{aligned} \quad (11)$$

Второе равенство мы будем использовать в форме степенного ряда для логарифма, что справедливо при $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, а это выполнено в нашем случае при $\lambda \in \Gamma_m$ и достаточно большом m (см. (5)).

Из (10) интегрированием по частям с использованием формул (11) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \left[\operatorname{Tr}(BR_0(\lambda)) + \operatorname{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим отдельно слагаемое с $\operatorname{Tr}(BR_0(\lambda))$. Так как $BR_0(\lambda)$ – ядерный, то его след может быть вычислен как матричный в любом ортонормированном базисе и при этом:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_n \frac{(B\varphi_n, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} d\lambda = -\sum_{n=0}^{n_m} (B\varphi_n, \varphi_n). \quad (13)$$

Таким образом, равенство (10) с учетом (12) и (13) записывается в виде

$$\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l)) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda. \quad (14)$$

Теперь необходимо оценить члены ряда (14) при $k \geq 2$. С помощью (2) оценим норму оператора $BR_0(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in \Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\| &\leq \|BA_0^{-\delta}\| \cdot \max_{\lambda \in \Gamma_m} \left(\max_n \frac{\lambda_n^\delta}{|\lambda_n - \lambda|} \right) \leq c \max_n \frac{\lambda_n^\delta}{|\lambda_n - a_m|} \\ &\leq c \max_n \frac{1}{|\lambda_n^{1-\delta} - a_m^{1-\delta}|} = \frac{c}{a_m^{1-\delta} - \lambda_{n_m}^{1-\delta}}. \end{aligned} \quad (15)$$

³Строго говоря, в [19] рассматриваются определители возмущения для ограниченных операторов, но эти результаты монографии переносятся на неограниченные операторы практически без изменений в доказательствах, см., например, [20]. Мы сохраняем ссылку на [19] как более корректную исторически.

Здесь $\{\lambda_{n_m}\}$ — та подпоследовательность собственных чисел, для которой $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, и без ограничения общности мы полагаем, что ближайшим к a_m является λ_{n_m} .

Запишем оценку (используемые свойства следа ядерного оператора см. в [19]):

$$|\operatorname{Tr}((BR_0(\lambda))^k)| \leq \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} \cdot \|BR_0(\lambda)\|_1. \quad (16)$$

Тогда из (16) получим, что

$$\int_{\Gamma_m} |\operatorname{Tr}((BR_0(\lambda))^k)| |d\lambda| \leq \max_{\lambda \in \Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|_1 \cdot \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} |d\lambda|. \quad (17)$$

Используя (15), оценим интеграл в (17) при $k \geq 3$ на дуге $0 \leq \arg \lambda \leq \pi/2$, на остальных дугах аналогично:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \|BR_0(a_m e^{i\varphi})\|^{k-1} a_m |e^{i\varphi}| d\varphi \\ & \leq c^{k-1} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\lambda_{n_m}^\delta}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|} \right)^{k-1} a_m d\varphi \\ & = c^{k-1} \lambda_{n_m}^{\delta(k-1)} \int_0^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|^{k-1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Так как $|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}| \geq |\lambda_{n_m} - a_m|$ и $|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}| \geq a_m \sin \varphi$, то из (18) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \|BR_0(a_m e^{i\varphi})\|^{k-1} a_m |e^{i\varphi}| d\varphi \\ & \leq c^{k-1} \lambda_{n_m}^{\delta(k-1)} \left(\int_0^{\varphi_m} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m|^{k-1}} + \int_{\varphi_m}^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m|^{k-3} a_m^2 \sin^2 \varphi} \right) \\ & \leq c^{k-1} \lambda_{n_m}^{\delta(k-1)} \left(\frac{a_m \varphi_m}{|\lambda_{n_m} - a_m|^{k-1}} + \frac{c}{|\lambda_{n_m} - a_m|^{k-3} a_m \varphi_m} \right) \\ & \leq \frac{c^k \lambda_{n_m}^{\delta(k-1)}}{|\lambda_{n_m} - a_m|^{k-2}}, \end{aligned}$$

здесь в последнем неравенстве сделан выбор $\varphi_m = |\lambda_{n_m} - a_m|/a_m$. И, применяя неравенство (2), окончательно имеем

$$\int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} |d\lambda| \leq \frac{c^k \lambda_{n_m}^\delta}{(a_m^{1-\delta} - \lambda_{n_m}^{1-\delta})^{k-2}}. \quad (19)$$

Тогда для остатка ряда (14) при $l \geq 3$ с учетом (19), (2) и (9) имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| \\
 & \leq \|BR_0(a_m)\|_1 \int_{\Gamma_m} \sum_{k=l}^{\infty} \|(BR_0(\lambda))^{k-1}\| \|d\lambda\| \\
 & \leq \|BR_0(a_m)\|_1 \lambda_{n_m}^{\delta} \sum_{k=l}^{\infty} \left(\frac{c}{a_m^{1-\delta} - \lambda_{n_m}^{1-\delta}} \right)^{k-2} \\
 & \leq \frac{\lambda_{n_m}^{\delta} \|BR_0(a_m)\|_1}{(a_m^{1-\delta} - \lambda_{n_m}^{1-\delta})^{l-2}} \\
 & \leq \frac{\lambda_{n_m}^{\delta-\omega(l-2)} \|BR_0(a_m)\|_1}{(a_m^{1-\delta-\omega} - \lambda_{n_m}^{1-\delta-\omega})^{l-2}} = o(\lambda_{n_m}^{\delta-\omega(l-1)}). \tag{20}
 \end{aligned}$$

Оценить аналогично вторую поправку нельзя: при $k = 2$ оценка части интеграла (17) в пределах $\varphi_m \leq \varphi \leq \pi/2$ содержит в знаменателе отрицательную степень. Проведем оценку этого слагаемого ряда (14) непосредственно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(BR_0(\lambda)B\varphi_n, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} d\lambda. \tag{21}$$

Разложим вектор $\psi_n = B\varphi_n$ по базису $\{\varphi_k\}_{k=0}^{+\infty}$

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (\psi_n, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (B\varphi_n, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{nk} \varphi_k$$

и продолжим равенство (21):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (BR_0(\lambda)b_{nk}\varphi_k, \varphi_n) d\lambda \\
 & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_{nk}(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda} d\lambda \\
 & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{(\lambda_n - \lambda)(\lambda_k - \lambda)} d\lambda \\
 & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\lambda_k = \lambda_n} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{(\lambda_k - \lambda)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{k, n=0, \lambda_k \neq \lambda_n}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n} \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda} - \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \right) \right) d\lambda. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Интегрируя (22) по контуру почленно, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda = \sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n}. \tag{23}$$

Рассмотрим внутренний ряд и, используя неравенство (2) и преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k - \lambda_n} &= \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n^\delta \lambda_k^\delta |(BA_0^{-\delta} \varphi_n, \varphi_k)(BA_0^{-\delta} \varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k - \lambda_n} \\
&\leq \lambda_n^\delta \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(BA_0^{-\delta} \varphi_n, \varphi_k)(BA_0^{-\delta} \varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k^{1-\delta} - \lambda_n^{1-\delta}} \\
&= \lambda_n^\delta \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{l=n_m+1}^k |(BA_0^{-\delta} \varphi_n, \varphi_l)(\varphi_l, (BA_0^{-\delta})^* \varphi_n)| \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\lambda_k^{1-\delta} - \lambda_n^{1-\delta}} - \frac{1}{\lambda_{k+1}^{1-\delta} - \lambda_n^{1-\delta}} \right) \\
&\leq \lambda_n^\delta \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \|BA_0^{-\delta}\|^2 \left(\frac{1}{\lambda_k^{1-\delta} - \lambda_n^{1-\delta}} - \frac{1}{\lambda_{k+1}^{1-\delta} - \lambda_n^{1-\delta}} \right) \\
&= \frac{\lambda_n^\delta \|BA_0^{-\delta}\|^2}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta} - \lambda_n^{1-\delta}}.
\end{aligned}$$

Тогда из (23), вновь применяя (2), получаем

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda \right| &= \left| \sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{n_m} \frac{\lambda_n^\delta \|BA_0^{-\delta}\|^2}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta} - \lambda_n^{1-\delta}} \leq \lambda_{n_m}^{\delta-\omega} \sum_{n=0}^{n_m} \frac{\|BA_0^{-\delta}\|^2}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} - \lambda_n^{1-\delta-\omega}}, \quad (24)
\end{aligned}$$

и так как $\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} > a_m^{1-\delta-\omega}$, то по лемме 4 сумма в (24) как часть ядерной нормы резольвенты оператора $A_0^{1-\delta-\omega}$ стремится к нулю. Таким образом, из (24)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda \right| = o(\lambda_{n_m}^{\delta-\omega})$$

и оценка (20) верна при $l \geq 2$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что при $\omega \geq \delta/l$ в силу (20) стремится к нулю остаток ряда из правой части (14), начинающийся со слагаемого с номером $l+1$, и, перенося остальные слагаемые в (14) вправо, мы получаем формулу (6). Теорема доказана.

Далее мы рассмотрим случай принадлежности оператора BA_0^{-1} классу Шаттена-фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ при некотором натуральном $p > 1$. В этом случае для операторов A_0 и $A_0 + B$ можно ввести регуляризованный определитель возмущения [19]

$$D_p(\lambda) = \det_p(I + BR_0(\lambda)), \quad (25)$$

здесь для оператора $C \in \mathfrak{S}_p$ с собственными числами ν_n обозначено

$$\det_p(I + C) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n) \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k} \nu_n^k\right);$$

$D_p(\lambda)$ обладает следующим необходимым нам свойством:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln D_p(\lambda) = (-1)^{p-1} \text{Tr}(R(\lambda)(BR_0(\lambda))^p). \quad (26)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор B таков, что $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$, и пусть существует число $\delta \in [0, 1)$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, а оператор $A_0^{-1+\delta} \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, где p натуральное, $p \geq 2$, $\omega \in [0, 1)$. Предположим также, что для подпоследовательности собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty}$, для которой $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, где⁴ $\|R_0(a_m)\|_1 \rightarrow 0$, выполнено $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$, $\rho > \delta$. Тогда при $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$q = \min_{\delta < \rho_1 \leq \rho} \frac{(p-1)(1-\rho_1) - \omega(1-\delta)}{\rho_1 - \delta}$$

в случае выполнения неравенства $\delta < \rho_2(p+q-1)$, где $\rho_2 = \rho - \rho_1$, верна следующая формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p+q} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0, \quad (27)$$

а если $\delta \geq \rho_2(p+q-1)$, то при $l \geq 2$ и таком, что $\delta - \rho_2(p+q-1) - (\rho - \delta) \times (l-1) \leq 0$, верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p+q+l-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы мы начнем с одной формулы для регуляризованного определителя возмущения, отсутствующей в известных нам источниках.

ЛЕММА 6. Если $BA_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, то при $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, для логарифма регуляризованного определителя возмущения (25) верно представление

$$\ln D_p(\lambda) = \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Исследуем функцию, стоящую в (29) справа. Во-первых, при λ таких, что $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, мы можем разложить в ряд Тейлора функцию $\ln(I + BR_0(\lambda))$ и получить равенство

$$\operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) = \operatorname{Tr} \left(\ln(I + BR_0(\lambda)) + \sum_{l=1}^{p-1} \frac{(-1)^l}{l} (BR_0(\lambda))^l \right). \quad (30)$$

Далее, дифференцируя по λ правую часть (30) и используя формулу [19; гл. IV, § 1, (1.16)]

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{Tr}(F(A(\mu))) = \operatorname{Tr} \left(F'(A(\mu)) \frac{dA(\mu)}{d\mu} \right),$$

⁴Последовательность $\{a_m\}$ выбрана по лемме 4.

где $F(z)$ – скалярная функция, голоморфная в некоторой содержащей спектр оператора $A(\mu)$ области комплексной плоскости, мы получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left((I + BR_0(\lambda))^{-1} BR_0^2(\lambda) + \sum_{l=1}^{p-1} (-1)^l (BR_0(\lambda))^l R_0(\lambda) \right), \end{aligned}$$

из которого с помощью соотношения $R(\lambda) = R_0(\lambda)(I + BR_0(\lambda))^{-1}$ и свойства следа $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ немедленно получается (26), что дает совпадение производных функций из обеих частей равенства (29). Кроме того, из (25) имеем $D_p(\lambda) \rightarrow 1$ при $\|BR_0(\lambda)\| \rightarrow 0$, что заведомо имеет место в формуле (29) (если норма компактного оператора меньше единицы, то и его первое сингулярное число $s_1 < 1$, и тогда $\|BR_0(\lambda)^{p+k}\|_1 \leq s_1^k \|BR_0(\lambda)^p\|_1$). Лемма доказана.

Теперь мы готовы приступить непосредственно к исследованию формулы следа. Условия теоремы (в силу того, что из $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$ следует $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$) позволяют выбрать контур Γ_m в соответствии с результатом леммы 3 так, чтобы внутри контура количество собственных чисел A_0 и $A_0 + B$ было одинаково, и так, что на Γ_m выполнено $\|BR_0(\lambda)\| < 1$. Тогда из (29) интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \ln D_p(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln D_p(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (31)$$

и, используя (26), продолжаем (31):

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R(\lambda)(BR_0(\lambda))^p) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr} \left(R_0(\lambda) - R(\lambda) + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k R_0(\lambda)(BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее нам надо разбить интеграл (32) на сумму интегралов, но сделать это непосредственно нельзя, так как каждый из операторов по отдельности под операцией Tr в (32), вообще говоря, не ядерный. Однако операторы вида

$$\int_{\Gamma_m} \lambda R_0(\lambda)(BR_0(\lambda))^k d\lambda$$

являются конечномерными как сумма конечного числа вычетов в точках спектра оператора A_0 внутри контура, а разложение в ряд Лорана оператора $R_0(\lambda)$ в окрестности каждой из этих точек имеет коэффициентами главной части конечномерные проекторы, что обеспечивает конечномерность и всех возникающих композиций операторов – коэффициентов разложения. Таким образом, используя перестановочность операции Tr и интегрирования по параметру семейства ядерных

операторов, мы можем записать интеграл от следа суммы операторов (32) как сумме следов конечномерных операторов:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda (R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda R_0(\lambda) (BR_0(\lambda))^k d\lambda \\
 &= \sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda (BR_0(\lambda))^{k-1} BR_0^2(\lambda) d\lambda \\
 &= \sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda (BR_0(\lambda))^{k-1} d(BR_0(\lambda)) \\
 &= \sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Цепочка равенств (31)–(33) дает нам основное равенство

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{34}$$

Приступим теперь к оценке слагаемых в правой части (34) и начнем с ядерной нормы оператора $(BR_0(\lambda))^{p+q}$, где q – некоторое целое неотрицательное число:

$$\begin{aligned}
 \max_{|\lambda|=a_m} \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 &\leq \|BA_0^{-\delta}\|^{p+q} \max_{|\lambda|=a_m} \|(A_0^\delta R_0(\lambda))^{p+q}\|_1 \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q} \lambda_n^{\delta(p+q)}}{|\lambda_n - a_m|^{p+q}}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Так как $A_0^{-1+\delta} \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, то $A_0^{(-1+\delta)(p-\omega)} \in \mathfrak{S}_1$ и по лемме 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)}|} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Тогда продолжим (35), применив (2):

$$\begin{aligned}
 \max_{|\lambda|=a_m} \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q} \lambda_n^{\delta(p+q)+(1-\delta)(p-\omega)-1}}{|\lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)}| |\lambda_n - a_m|^{p+q-1}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q} \lambda_n^{\delta q}}{|\lambda_n - a_m|^{p+q-1} |\lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)}| |\lambda_n^{1-p+\omega-\delta\omega}|}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Далее, так как $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$, то тем более $|\lambda_n^{1-\rho} - a_m^{1-\rho}| \geq c$ для любых n, m , и тогда для любых неотрицательных $\rho_1, \rho_2, \rho_1 + \rho_2 = \rho$, из неравенства (2) имеем

$$\frac{1}{|\lambda_n - a_m|} \leq \frac{1}{\lambda_n^{\rho_1} a_m^{\rho_2} |\lambda_n^{1-\rho} - a_m^{1-\rho}|} \leq \frac{c}{\lambda_n^{\rho_1} a_m^{\rho_2}}. \tag{37}$$

Выберем число $\rho_1 > \delta$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\rho_1(p+q-1) + 1 - p + \omega - \delta\omega - \delta q = 0$$

при наименьшем из возможных q , т.е.

$$q = \min_{\delta < \rho_1 \leq \rho} \frac{(p-1)(1-\rho_1) - \omega(1-\delta)}{\rho_1 - \delta} \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (38)$$

Так как при $\rho_1 \rightarrow \delta$ минимизируемая функция в (38) стремится к бесконечности, то в силу условия $\rho_1 \leq \rho$ такой выбор q возможен.

Применяя теперь в (36) неравенство (37) с выбранным в соответствии с (38) ρ_1 , мы получаем оценку

$$\|(BR_0(a_m))^{p+q}\|_1 = o(\lambda_{n_m}^{-\rho_2(p+q-1)}). \quad (39)$$

Тогда аналогично (18) и (19) имеем при $l \geq 2$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda))^{p+q+l} d\lambda \right| &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^l |d\lambda| \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c^l \int_{\Gamma_m} \left(\frac{\lambda_{n_m}^\delta}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|} \right)^l a_m d\varphi \\ &= o(\lambda_{n_m}^{\delta - \rho_2(p+q-1) - (\rho-\delta)(l-1)}). \end{aligned} \quad (40)$$

И, таким образом, для остатка ряда (34) из (40) при $l \geq 2$ имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=p+q+l}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| = o(\lambda_{n_m}^{\delta - \rho_2(p+q-1) - (\rho-\delta)(l-1)}),$$

что и доказывает формулу (28). Для доказательства (27) нам необходимо оценить интеграл

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda))^{p+q+1} d\lambda \right| &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\| |d\lambda| \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c \lambda_{n_m}^\delta \int_0^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|} \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c \lambda_{n_m}^\delta \left(\int_0^{\varphi_m} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m|} + \int_{\varphi_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \right) \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c \lambda_{n_m}^\delta \left(\frac{a_m \varphi_m}{\lambda_{n_m}^\rho} + \ln \frac{1}{\varphi_m} \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю при выборе $\varphi_m = 1/a_m$, но второе неограничено. Однако при выполнении условия теоремы $\delta < \rho_2(p+q-1)$ из (39) и того, что любая степень подавляет логарифмический рост, следует (27). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 2 не рассмотрен предельный случай $p = 1, \omega = 0$. Однако этот случай теперь может быть легко исследован: доказательство в точности совпадает с доказательством теоремы 1, в котором надо лишь везде вместо параметра ω (из формулировки теоремы 1) использовать параметр $\rho - \delta$ (из формулировки теоремы 2). При этом полученная формула совпадает с формулой теоремы 1.

§ 3. $R_0(\lambda)$ – неядерный оператор

Здесь мы рассматриваем случай, когда оператор A_0^{-1} неядерный. Этот случай существенно отличается от предыдущего тем, что в общем положении в спектре оператора A_0 отсутствуют растущие лакуны.

ТЕОРЕМА 3. Пусть существует подпоследовательность собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=0}^{+\infty}$ оператора A_0 такая, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Пусть оператор $B \in \mathfrak{S}_p$, где p натуральное, $p \geq 2$. Тогда верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим систему контуров Γ_m на комплексной плоскости как систему окружностей с центрами в нуле и радиусами $a_m = (\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m})/2$. Из леммы 3 и условий теоремы немедленно следует, что внутри контуров Γ_m количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$ одинаково при всех достаточно больших m для любого ограниченного оператора B . Тогда по лемме 6 в силу $BR_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_p$ имеем

$$\ln D_p(\lambda) = \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) \quad (41)$$

и аналогично (34) верно

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (42)$$

Для оценки слагаемых ряда (42) при $l \geq p$ аналогично (18) и (19) имеем (здесь существенно условие $p \geq 2$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} (BR_0(\lambda))^l d\lambda \right| &\leq \|B^p\|_1 \|B^{l-p}\| \int_{\Gamma_m} \|R_0(\lambda)\|^l |d\lambda| \\ &\leq c^l \int_0^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|^l} \leq \frac{c^l}{|\lambda_{n_m} - a_m|^{l-1}} \end{aligned} \quad (43)$$

и далее, суммируя геометрическую прогрессию, из (42) и (43) получаем утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть существует число $\delta \geq 0$ такое, что оператор BA_0^δ продолжается до ограниченного и $A_0^{-(1+\delta)}$ – ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, покажем, что можно выбрать систему контуров Γ_m на комплексной плоскости, разделяющую спектр оператора A_0 так, что при возмущении B количество собственных чисел внутри контура не изменяется. Действительно, мы можем аналогично доказательству леммы 3 записать

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (BR_0(\lambda))^k = R_0(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (BA_0^\delta A_0^{-\delta} R_0(\lambda))^k$$

и

$$\|A_0^{-\delta} R_0(\lambda)\| \leq \max_{1 \leq k < \infty} \frac{1}{\lambda_k^\delta |\lambda_k - \lambda|}. \quad (44)$$

Теперь, обозначая $d_n(\xi) = \lambda_{n+1}^{1+\xi} - \lambda_n^{1+\xi}$, заметим, что в силу ядерности оператора $A_0^{-(1+\delta)}$ существует подпоследовательность λ_{n_m} такая, что $d_{n_m}(\delta) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Далее заметим, что либо $\lambda_{n_m+1}/\lambda_{n_m} \rightarrow 1$, $d_{n_m}(0)/\lambda_{n_m} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, либо для некоторой подпоследовательности последовательности λ_{n_m} (мы не будем вводить дополнительный индекс, полагая, что такая подпоследовательность выбрана сразу в качестве основной) $\lambda_{n_m+1}/\lambda_{n_m} > 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $d_{n_m}(0)/\lambda_{n_m} > \varepsilon$. В первом случае запишем

$$\frac{d_{n_m}(\delta)}{\lambda_{n_m}^\delta} = \frac{\lambda_{n_m+1}^\delta}{\lambda_{n_m}^\delta} \lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} = \left(1 + \frac{d_{n_m}(0)}{\lambda_{n_m}}\right)^\delta \lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m}, \quad (45)$$

и так как $d_n(0)/\lambda_n \rightarrow 0$, то мы можем в (45) использовать формулу Тейлора, тогда получим

$$d_{n_m}(\delta) \sim (1 + \delta) d_{n_m}(0) \lambda_{n_m}^\delta. \quad (46)$$

Выбирая в (44) $\lambda = a_m$ между λ_{n_m} и λ_{n_m+1} , мы получим в знаменателе величину порядка $d_{n_m}(0) \lambda_{n_m}^\delta$, и так как $d_{n_m}(\delta) \rightarrow \infty$, то в силу (44) и (46) $\|A_0^{-\delta} R_0(a_m)\| \rightarrow 0$. Во втором случае $d_{n_m}(0) > \varepsilon \lambda_{n_m} \rightarrow \infty$ и правая часть в (44) очевидно стремится к нулю при том же выборе $\lambda = a_m$. Дальнейшие рассуждения ничем не отличаются от доказательства леммы 3.

Докажем, что в предположениях теоремы существует бесконечно большая последовательность положительных чисел $\{a_m\}_{m=1}^{+\infty}$ такая, что $\|BR_0(\lambda)\|_1 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Аналогично доказательству теоремы 1 оценим $\|BR_0(\lambda)\|_1$:

$$\|BR_0(\lambda)\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BA_0^\delta \varphi_k, BA_0^\delta \varphi_k)^{1/2}}{\lambda_k^\delta |\lambda_k - \lambda|} \leq \|BA_0^\delta\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^\delta |\lambda_k - |\lambda||}. \quad (47)$$

Так как неравенство (3) в отличие от неравенства (2) несимметрично относительно входящих в него переменных, то оценить (47) подобно предыдущему нельзя и мы будем оценивать (47) частями. Далее мы оперируем уже выбранной последовательностью $\{a_m\}$ — она выбрана по лемме 4 для оператора $A_0^{1+\delta}$. Очевидно, она разделяет спектр нужным нам способом. При $n > n_m$ $\lambda_n > a_m$ и по (3)

$$\sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^\delta (\lambda_k - a_m)} \leq \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{\delta + 1}{\lambda_k^{1+\delta} - a_m^{1+\delta}}. \quad (48)$$

Так как оператор $A_0^{-1-\delta} \in \mathfrak{S}_1$, то по лемме 4 сумма (48) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $b_\varepsilon > 0$, что

$$\sum_{\lambda_n \geq b_\varepsilon} \frac{1}{\lambda_n^{1+\delta}} < \varepsilon, \quad (49)$$

и одновременно существует $A > 0$ такое, что для любого $a > A$

$$\sum_{\lambda_n < b_\varepsilon} \frac{1}{\lambda_n^\delta |\lambda_n - a|} < \varepsilon \quad (50)$$

в силу фиксированности числа слагаемых для любого выбранного ε .

Теперь если $\lambda_n < a_m/2$, то

$$2\lambda_n < a_m \Leftrightarrow \lambda_n < a_m - \lambda_n \Leftrightarrow \frac{1}{a_m - \lambda_n} < \frac{1}{\lambda_n} \quad (51)$$

и, выбрав $\varepsilon > 0$ и для этого ε такие b_ε и A , что выполнено (49) и (50), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n_m} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} &= \sum_{\lambda_k < a_m/2} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} + \sum_{a_m/2 \leq \lambda_k \leq \lambda_{n_m}} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} \\ &= \sum_{\lambda_k < b_\varepsilon} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} + \sum_{b_\varepsilon \leq \lambda_k < a_m/2} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} \\ &\quad + \sum_{a_m/2 \leq \lambda_k \leq \lambda_{n_m}} \frac{1}{\lambda_k^\delta (a_m - \lambda_k)} \\ &\leq \varepsilon + \sum_{b_\varepsilon \leq \lambda_k < a_m/2} \frac{1}{\lambda_k^{1+\delta}} + \sum_{a_m/2 \leq \lambda_k \leq \lambda_{n_m}} \frac{a_m^\delta}{\lambda_k^\delta (a_m^{1+\delta} - \lambda_k^{1+\delta})}, \end{aligned} \quad (52)$$

здесь первое слагаемое оценено по (50), для оценки второго использовано (51), а к третьему мы применили (3). Далее, очевидно, второе слагаемое меньше ε в силу (49), а так как в третьем $a_m/\lambda_k \leq 2$ для всех k , входящих в сумму, то оно стремится к нулю по лемме 4.

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, приведенные нами в доказательстве теоремы 1 при получении формул (10)–(19) (оценку нормы оператора $\|BR_0(a_m)\|$ см. в (44) и (3)), мы имеем при $k \geq 3$

$$\int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} |d\lambda| \leq \frac{c^k}{\lambda_{n_m}^\delta (a_m^{1+\delta} - \lambda_{n_m}^{1+\delta})^{k-2}}, \quad (53)$$

и тогда при $l \geq 3$ верно

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| \leq \frac{c}{\lambda_{n_m}^\delta (a_m^{1+\delta} - \lambda_{n_m}^{1+\delta})^{l-2}}. \quad (54)$$

Опять требуется отдельно оценивать вторую поправку:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(B R_0(\lambda) B R_0(\lambda)) d\lambda = \sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Заметим, что из-за неядерности оператора A_0^{-1} сходимость ряда справа неочевидна и само записанное нами равенство нуждается в обосновании. Мы получим его вместе с оценкой. Рассмотрим внутренний ряд и, используя преобразование Абеля и неравенство (3), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k - \lambda_n} &= \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(BA_0^\delta \varphi_n, \varphi_k)(BA_0^\delta \varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_n^\delta \lambda_k^\delta (\lambda_k - \lambda_n)} \\ &\leq \frac{\delta + 1}{\lambda_n^\delta} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(BA_0^\delta \varphi_n, \varphi_k)(BA_0^\delta \varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta}} \\ &= \frac{\delta + 1}{\lambda_n^\delta} \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \sum_{l=n_m+1}^k |(BA_0^\delta \varphi_n, \varphi_l)(\varphi_l, (BA_0^\delta)^* \varphi_n)| \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\lambda_k^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta}} - \frac{1}{\lambda_{k+1}^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta}} \right) \leq \frac{c \|BA_0^\delta\|^2}{\lambda_n^\delta (\lambda_{n_m+1}^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta})}, \end{aligned}$$

тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(B R_0(\lambda) B R_0(\lambda)) d\lambda \right| \leq \sum_{n=0}^{n_m} \frac{c \|BA_0^\delta\|^2}{\lambda_n^\delta (\lambda_{n_m+1}^{1+\delta} - \lambda_n^{1+\delta})}$$

и здесь правая часть стремится к нулю по лемме 4. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть существует число $\delta \geq 0$ такое, что оператор BA_0^δ продолжается до ограниченного, оператор $A_0^{-(1+\delta)} \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, где p натуральное, $p \geq 2$, $\omega \in [0, 1)$. Предположим также, что для подпоследовательности собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty}$, для которой $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, где $\{a_m\}$ — последовательность чисел, на которой стремится к нулю резольвента оператора $A_0^{(1+\delta)(p-\omega)}$, выполнено $\lambda_{n_m+1}^{1+\rho} - \lambda_{n_m}^{1+\rho} \geq c$, $c > 0$, $\rho < \delta$. Тогда при $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и

$$q = \min_{\rho \leq \rho_1 < \delta} \frac{(1 + \rho_1)(p - 1) - \omega(1 + \delta)}{\delta - \rho_1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

в случае выполнения условия $q + \delta + \omega > 0$ верна следующая формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p+q} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} (B R_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0.$$

Если $q = \delta = \omega = 0$, то верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} (B R_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия теоремы позволяют немедленно применить лемму 3 и верно, что система контуров $\Gamma_m = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = a_m\}$ содержит внутри себя одинаковое число собственных чисел возмущенного и невозмущенного операторов. Мы вновь используем формулу для регуляризованного определителя возмущения (29) и без изменений в рассуждениях теоремы 2 приходим к верному в условиях теоремы 5 равенству (34).

Точно так же далее нам необходимо оценить ядерную норму оператора $(BR_0(a_m))^{p+q}$ в поисках q , при котором эта ядерная норма стремится к нулю:

$$\|(BR_0(a_m))^{p+q}\|_1 \leq \|BA_0^\delta\|^{p+q} \|(A_0^{-\delta}R_0(a_m))^{p+q}\|_1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q}}{(\lambda_n^\delta |\lambda_n - a_m|)^{p+q}}. \quad (55)$$

Так же как и в предыдущей теореме, в силу несимметричности неравенства (3) ряд (55) надо оценивать частями. Так как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n^{(1+\delta)(p-\omega)} - a_m^{(1+\delta)(p-\omega)}|} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

то для части ряда (55) с $n \geq n_m + 1$ аналогично рассуждениям теоремы 2 получаем следующее условие на q , при котором эта часть стремится к нулю:

$$q = \min_{\rho \leq \rho_1 < \delta} \frac{(1 + \rho_1)(p - 1) - \omega(1 + \delta)}{\delta - \rho_1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (56)$$

при этом выполнена оценка

$$\sum_{n=n_m+1}^{\infty} \frac{c^{p+q}}{(\lambda_n^\delta |\lambda_n - a_m|)^{p+q}} = o(a_m^{(p+q-1)\rho_2}) \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \quad (57)$$

здесь $\rho_2 = \rho - \rho_1 \leq 0$.

Далее q полагается заданным по (56). Часть ряда (55) с $n \leq n_m$ оценивается сложнее. Во-первых,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n < a_m/2} \frac{1}{\lambda_n^{\delta(p+q)} |\lambda_n - a_m|^{p+q}} &= \sum_{\lambda_n < a_m/2} \frac{\lambda_n^{p-\delta q-\omega(1+\delta)}}{\lambda_n^{(1+\delta)(p-\omega)} |\lambda_n - a_m|^{p+q}} \\ &\leq \frac{c}{a_m^{(1+\delta)(q+\omega)}} \sum_{\lambda_n < a_m/2} \frac{1}{\lambda_n^{(1+\delta)(p-\omega)}} = O(a_m^{-(1+\delta)(q+\omega)}), \end{aligned} \quad (58)$$

здесь мы использовали (51). Заметим, что нам необходимо доказать, что (55) стремится к нулю, и по возможности получить квалифицированную оценку скорости, что и сделано для части ряда в (58). Однако если $q = \omega = 0$, то (58) не обеспечивает убывания. В этом случае необходимо оценивать эту часть ряда так же, как и в теореме 4, — разбивая сумму по схеме формул (49)–(52) с очевидными изменениями. Так что далее мы считаем (58) равным $o(1)$ при $q = \omega = 0$.

Во-вторых, используя (3), имеем

$$\sum_{a_m/2 \leq \lambda_k \leq \lambda_{n_m}} \frac{1}{\lambda_k^{\delta(p+q)} (a_m - \lambda_k)^{p+q}} \leq \sum_{a_m/2 \leq \lambda_k \leq \lambda_{n_m}} \frac{a_m^{\delta(p+q)}}{\lambda_k^{\delta(p+q)} (a_m^{1+\delta} - \lambda_k^{1+\delta})^{p+q}},$$

а так как $a_m/\lambda_k \leq 2$ для всех k , входящих в эту сумму, то она стремится к нулю аналогично ряду (57) с той же оценкой остатка. Таким образом, вся сумма (55) стремится к нулю при выполнении условия (56) и, что важно в дальнейшем, с худшей из (57) и (58) оценкой скорости.

Теперь необходимо оценить члены ряда (34), ниже $l \geq 2$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda))^{p+q+l} d\lambda \right| &\leq \| (BR_0(\lambda))^{p+q} \|_1 \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^l |d\lambda| \\ &\leq \| (BR_0(\lambda))^{p+q} \|_1 c^l \int_{\Gamma_m} \left(\frac{1}{\lambda_{n_m}^\delta |\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|} \right)^l a_m d\varphi \\ &\leq \frac{c^l \| (BR_0(\lambda))^{p+q} \|_1}{\lambda_{n_m}^{\delta l} |\lambda_{n_m} - a_m|^{l-1}} \leq \frac{\| (BR_0(\lambda))^{p+q} \|_1}{\lambda_{n_m}^\delta} \left(\frac{ca_m^\rho}{\lambda_{n_m}^\delta (a_m^{1+\rho} - \lambda_{n_m}^{1+\rho})} \right)^{l-1} \end{aligned} \quad (59)$$

и, учитывая то, что $a_m/\lambda_{n_m} \rightarrow 1$ при $m \rightarrow \infty$, для остатка ряда (34) при $l = 2$ имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=p+q+2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| = o(a_m^{\rho-2\delta}). \quad (60)$$

Теперь, чтобы доказать теорему, осталось оценить слагаемое в (34) с $l = 1$. Здесь ключевой является оценка следующего интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{\lambda_{n_m}^\delta |\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|} &\leq \int_0^{\varphi_m} \frac{a_m d\varphi}{\lambda_{n_m}^\delta |\lambda_{n_m} - a_m|} + \int_{\varphi_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\lambda_{n_m}^\delta \sin \varphi} \\ &\leq \frac{ca_m^{1+\rho} \varphi_m}{\lambda_{n_m}^\delta} + \frac{c \ln(1/\varphi_m)}{\lambda_{n_m}^\delta}. \end{aligned} \quad (61)$$

Умножая (61) на $\| (BR_0(a_m))^{p+q} \|_1$, мы получаем нужную оценку. При выборе $\varphi_m = 1/a_m$ получаем, что первое слагаемое есть $O(a_m^{\rho-\delta})$ и всегда стремится к нулю, а второе есть $O(\| (BR_0(a_m))^{p+q} \|_1 a_m^{-\delta} \ln a_m)$, и так как $(\ln x)/x^\delta \rightarrow 0$ при $\delta > 0$, $x \rightarrow \infty$, то и данная поправка стремится к нулю во всех случаях, кроме $q = \delta = \omega = 0$. Теорема доказана.

§ 4. Примеры

В этом разделе мы рассмотрим ряд примеров применения полученных результатов к конкретным операторам математической физики. Впрочем, большая часть этих примеров по сути является постановками важных самостоятельных задач — ведь во многих случаях интерес вызывает точное вычисление расходящейся части величин типа $(B\varphi_n, \varphi_n)$ в терминах собственных чисел невозмущенного оператора и суммирование сходящейся составляющей к выражению, содержащему только явные параметры операторов A_0 и B .

1) Все условия теоремы 1 выполнены для самосопряженного эллиптического псевдодифференциального оператора на компактном многообразии, возмущенного псевдодифференциальным оператором меньшего порядка, если только разность порядков операторов больше размерности многообразия.

1а) Рассмотрим в качестве оператора A_0 степень $\alpha > 1$ оператора Лапласа $-\Delta$, действующего в $L_2([0, \pi] \times [0, \pi])$ с условиями Дирихле на границе квадрата, а в

качестве оператора B – оператор умножения на ограниченную измеримую (комплекснозначную) функцию $q(x, y)$. Формула (1) ранее была известна (с достоверным доказательством) [21] для степени оператора $\alpha > 53/40$, и доказательство опиралось на тонкие результаты теории чисел. Так как в этой задаче $\lambda_n \sim n^\alpha$, то из теоремы 1 следует, что формула следа верна для $\alpha > 1$ с необходимым вычитанием одной поправки для потенциала $q(x, y) \in C^{1+\beta}$ с $\beta > 0$. При этих условиях имеем (исходная формула верна для любого ограниченного измеримого потенциала, но гладкость нужна для абсолютного суммирования коэффициентов Фурье и существования значений на границе):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r_k < n^2 + m^2 < r_{k+1}} \left(\mu_{nm} - (n^2 + m^2)^\alpha - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dy \right) \cos 2nx dx + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dx \right) \cos 2my dy \right) \\ & = \frac{1}{16} (q(\pi, \pi) + q(0, \pi) + q(\pi, 0) + q(0, 0)) \\ & \quad - \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^\pi (q(0, y) + q(\pi, y)) dy + \int_0^\pi (q(x, 0) + q(x, \pi)) dx \right) \\ & \quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

1б) Весьма важен также пример дифференциального оператора – второй степени оператора Лапласа на трехмерном параллелепипеде; получающаяся в этом случае формула следа мы приводить не будем, она однотипна с предыдущей, но более громоздка.

1в) Возьмем в качестве оператора A_0 обыкновенный дифференциальный оператор, действующий в $L_2[0, \pi]$ и определяемый дифференциальным выражением $-y^{(6)}$ и краевыми условиями $y(0) = y^{(2)}(0) = y^{(4)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = y^{(4)}(\pi) = 0$, а в качестве возмущения B возьмем оператор $q(x)y^{(2)} + p(x)y$ с областью определения $y(0) = y^{(2)}(0) = y(\pi) = y^{(2)}(\pi) = 0$. Конечно, для обыкновенных операторов все вопросы теории решены [11], но реальные вычисления для данного оператора известными методами практически необозримы. В обозначениях теоремы 1 имеем $\delta = 1/3$, $\omega < 1/2$ и можно выбрать $\omega > \delta$. Таким образом, необходимо вычисление только величины $(B\varphi_n, \varphi_n)$. Так как $\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$, то соответствующие вычисления несложны, и для $p(x)$ и $q''(x)$ гёльдеровых с показателем $\alpha > 1/2$ на окружности формула следа имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - n^6 + \frac{n^2}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{4\pi} (q'(\pi) - q'(0)) \right) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{4} (p(0) + p(\pi)) + \frac{1}{8\pi} (q'(\pi) - q'(0)) - \frac{1}{16} (q''(0) + q''(\pi)). \end{aligned}$$

1г) Рассмотрим в качестве оператора A_0 степень $2 + \varepsilon$ оператора $-\Delta$, $\varepsilon > 0$, действующего в $L_2([0, \pi] \times [0, \pi])$ с условиями Дирихле на границе квадрата, а в качестве оператора B – дифференциальный оператор первого порядка

$q(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + p(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$, где периодические продолжения функций $\frac{\partial p(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial q(x, y)}{\partial x}$ принадлежат пространству $C^{1+\beta}$, $\beta > 0$. В обозначениях теоремы 1 $\delta = 1/(4+2\varepsilon)$, а в силу того что $\lambda_n \sim n^{2+\varepsilon}$, можно взять $\delta + \omega = 1/2$ и, следовательно, можно принять $\omega > \delta$. Тогда формула первого следа имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r_k \leq n^2 + m^2 \leq r_{k+1}} \left(\mu_{nm} - (n^2 + m^2)^2 - \frac{n}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) \sin 2nx \, dx \, dy \right. \\
& \quad - \frac{m}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi p(x, y) \sin 2my \, dx \, dy - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi (q(\pi, y) - q(0, y)) \cos 2my \, dy \\
& \quad \left. - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi (p(x, \pi) - p(x, 0)) \cos 2nx \, dx \right) \\
& = \frac{1}{16\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial q}{\partial x}(0, y) + \frac{\partial q}{\partial x}(\pi, y) \right) dy + \frac{1}{16\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial p}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial p}{\partial y}(x, \pi) \right) dx \\
& \quad - \frac{1}{32} \left(\frac{\partial q}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial q}{\partial x}(0, \pi) + \frac{\partial q}{\partial x}(\pi, 0) + \frac{\partial q}{\partial x}(\pi, \pi) + \frac{\partial p}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial p}{\partial y}(0, \pi) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial p}{\partial y}(\pi, 0) + \frac{\partial p}{\partial y}(\pi, \pi) \right) + \frac{1}{16\pi} (q(\pi, 0) - q(0, 0) + q(\pi, \pi) - q(0, \pi) + p(0, \pi) \\
& \quad - p(0, 0) + p(\pi, \pi) - p(\pi, 0)) - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi (q(\pi, y) - q(0, y)) \, dy \\
& \quad - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi (p(x, \pi) - p(x, 0)) \, dx.
\end{aligned}$$

2) Теорема 5 применима к операторам со спектром неограниченно возрастающей кратности. Рассмотрим в качестве оператора A_0 оператор Лапласа–Бельтрами на каком-либо симметрическом пространстве M ранга 1, а в качестве оператора B – оператор умножения на ограниченную измеримую функцию на этом многообразии. Хорошо известно, что спектр оператора A_0 состоит из точек положительной полуоси $\lambda_{n,k} = c(n+a)^2$, $k = 1, \dots, K_n$, $K_n \sim bn^{\dim M - 1}$, где a, b, c – положительные константы. Тогда, выбирая в качестве подпоследовательности точек спектра, по которым расставляются скобки, пары соседних различных точек, имеем (в обозначениях теоремы 5): $\delta = 0$, $\rho = -1/2$. Выбор p и ω зависит от размерности, для двумерного многообразия $p = 2$, ω выбирается сколь угодно близким к 1. Формула для q приобретает вид

$$q = \min_{-\frac{1}{2} < \rho_1 \leq 0} \frac{\omega - 1}{\rho_1} - 1,$$

и видно, что при любом ρ_1 за счет выбора $\omega = 1 + \rho_1$ можно добиться равенства $q = 0$. Тогда выполнено $q + \delta + \omega > 0$ и верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0.$$

Данная задача интенсивно исследовалась в последние годы, и то, что необходимо вычитать две поправки, ранее было получено (даже при использовании дополнительных сведений в силу конкретности оператора) на пути весьма трудных и объемных вычислений и оценок. Наша абстрактная теорема легко дает здесь точный ответ.

3) В качестве оператора A_0 рассмотрим оператор, задаваемый дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ с $q(x) > x^{2+\delta}$ для всех больших $|x|$ и некоторым $\delta > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R})$ или $L_2[0, +\infty)$ с каким-либо условием на границе, а в качестве оператора B — оператор умножения на ограниченную измеримую функцию $p(x)$. Наложенное условие на потенциал гарантирует не только дискретность спектра, но и ядерность резольвенты оператора A_0 , и в этом случае по теореме 1 верна формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n - \lambda_n - \int p(x) \varphi_n^2(x) dx \right) = 0,$$

где $\varphi_n(x)$ — собственные функции невозмущенного оператора. Эта формула является новым результатом в весьма обширных исследованиях операторов второго порядка на неограниченных интервалах, так как вообще не было формул следов с убывающими потенциалами. Представляется интересной дальнейшая расшифровка стоящего в ней интеграла (хотя эта задача явно выходит за рамки спектральной теории).

Список литературы

1. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 34. № 4. С. 556–564.
2. Садовничий В. А., Конягин С. В., Подольский В. Е. Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Докл. РАН. 2000. Т. 373. № 1. С. 26–28.
3. Садовничий В. А., Дубровский В. В. Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 7. С. 1264–1271.
4. Садовничий В. А., Любишкин В. А. Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Функци. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 3. С. 55–65.
5. Дубровский В. В. Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2164–2166.
6. Dostanić M. Trace formulas of Gelfand–Levitan type // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). 1994. V. 55. P. 51–63.
7. Lax P. D. Trace formulas for the Schroedinger operator // Comm. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 503–512.
8. Dostanić M. Spectral properties of the operator of Riesz potential type // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. № 8. P. 2291–2297.
9. Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю. О формулах следов для неядерных возмущений // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 442–444.
10. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Следы операторов с относительно ядерным возмущением // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 3. С. 1–2.
11. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функци. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 2. С. 52–59.
12. Садовничий В. А., Дубровский В. В. О классической формуле первого регуляризованного следа оператора Лапласа с нечетным потенциалом на сфере // Труды сем. им. И. Г. Петровского. Т. 19. М.: Изд-во МГУ, 1996. С. 37–72.

13. *Podol'skii V. E.* On the summability of regularized sums of eigenvalues of the Laplace–Beltrami operator with potential on symmetric spaces of rank one // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4. №1. P. 123–130.
14. *Александрова Е. В., Бочкарева О. В., Подольский В. Е.* Суммирование регуляризованных следов сингулярного оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №3. С. 291–295.
15. *Коплиенко Л. С.* О формуле следов для возмущений неядерного типа // Сиб. матем. журн. 1984. Т. 25. №5. С. 62–71.
16. *Neidhardt H.* Spectral shift function and Gilbert–Schmidt perturbation: extensions of some work of L. S. Koplienko // Math. Nachr. 1988. V. 138. P. 7–25.
17. *Dostanić M.* Trace formulas for nonnuclear perturbations of selfadjoint operators // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.). 1993. V. 54. P. 71–79.
18. *Kato T.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
19. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
20. *Яфаев Д. Р.* Математическая теория рассеяния. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1994.
21. *Дубровский В. В.* Регуляризованный след степени оператора Лапласа с потенциалом на квадрате // Матем. заметки. 1996. Т. 60. №1. С. 136–138.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
25.04.2001