Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Сучков, О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 2, 153–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm631>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 08:58:45

УДК 512.544

Н. М. Сучков

О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций

Получен полный периодический аналог известной теоремы Судзуки о строении конечной группы, у которой централизатор любой инволюции абелев.

Библиография: 8 названий.

Введение

В 1959 г. М. Судзуки [1] доказал следующую теорему. Пусть G – конечная группа, в которой централизатор любой инволюции абелев, S – силовская 2-подгруппа группы G . Тогда либо S – циклическая группа, либо $S \triangleleft G$, либо $G = R \times L_2(Q)$, где R – абелева группа нечетного порядка, Q – поле из 2^n элементов. Целью настоящей работы является доказательство периодического аналога этого известного утверждения М. Судзуки.

ТЕОРЕМА. Пусть G – периодическая группа, содержащая инволюцию, S – силовская 2-подгруппа из G и централизатор любой инволюции из S абелев. Тогда либо S – локально циклическая группа, либо $S \triangleleft G$, либо $G = R \times L_2(Q)$, где R – абелева группа без инволюций, Q – локально конечное поле характеристики 2.

Инволюция в группе называется *конечной*, если она с каждой своей сопряженной инволюцией порождает конечную подгруппу. В. Д. Мазуровым [2], а также независимо А. И. Созутовым и автором [3] исследовались группы с конечной инволюцией, в которых централизатор каждой инволюции является (элементарной) абелевой 2-подгруппой.

§ 1. Определения. Известные факты. Предварительные результаты

Собственная подгруппа B группы G называется *сильно вложенной* в G , если B содержит хотя бы одну инволюцию и для любого элемента $g \in G \setminus B$ подгруппа $B \cap B^g$ не содержит инволюций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть G – периодическая группа, B – ее сильно вложенная подгруппа, i – некоторая инволюция из B , $U = C_G(i) = C_B(i)$, v – инволюция из $G \setminus B$, $H = B \cap B^v$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) в группе G все инволюции сопряжены; инволюции из B сопряжены в B ;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00542) и Красноярского краевого фонда науки (грант № 9F132).

- 2) порядок элемента vi нечетен; каждый элемент $g \in G \setminus B$ обладает представлением $g = dj$, где $d \in U$, j – инволюция из $G \setminus B$;
- 3) каждый смежный класс Ub , $b \in B$, содержит точно один строго вещественный относительно v элемент, в частности, $B = UH$ [4; с. 11]).

Подгруппа L группы G называется *сильно изолированной* в G , если $C_G(x) < L$ для любого неединичного элемента $x \in L$. Дважды транзитивная группа подстановок, в которой лишь единица оставляет неподвижной три точки, называется *группой Цассенхауза* (Z -группой).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть G – периодическая Z -группа, B – ее стабилизатор точки, v – инволюция из $G \setminus B$, $H = B \cap B^v$ – абелева подгруппа, инвертируемая инволюцией v . Если $B = U \rtimes H$ – группа Фробениуса с абелевым ядром U , содержащим инволюции, и дополнительным множителем H , то G изоморфна группе $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

Предложение 1.2 является непосредственным следствием теоремы из [5].

Предположим теперь, что группа G удовлетворяет условию нашей теоремы.

ЛЕММА 1.1. Подгруппа S абелева, $C_G(i) = C_G(j)$ для любых двух инволюций $i, j \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждый элемент из S содержится в централизаторе некоторой инволюции из S , то достаточно установить второе утверждение леммы. Пусть i, j – различные инволюции из S . Тогда $i, j \in C_G(k)$, где k – инволюция из $\langle ij \rangle$. Теперь из условия теоремы непосредственно вытекают равенства $C_G(i) = C_G(k) = C_G(j)$. Лемма доказана.

Зафиксируем инволюцию $i \in S$ и обозначим $U = C_G(i)$. По условию теоремы подгруппа U абелева, а потому ввиду леммы 1.1 $U = S \times R$, где R – абелева $2'$ -подгруппа. Пусть $B = N_G(U)$. Если подгруппа S локально циклическая, или $B = G$, а значит, $S \triangleleft G$ в силу характеричности S в U , то заключение теоремы выполняется. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что S содержит более одной инволюции и $B \neq G$.

ЛЕММА 1.2. Любая инволюция из B содержится в S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть инволюция $k \in B$. Так как S – абелева подгруппа и $S \triangleleft B$, то из этого легко вытекает существование такой инволюции $j \in S$, что $k \in C_G(j) = U$ (лемма 1.1). Отсюда и получаем включение $k \in S$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.3. Подгруппа B сильно вложена в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу нашего предположения $B \neq G$. Далее, поскольку $S < B$, то в B есть инволюции. Предположим, что пересечение $B \cap B^g$, где $g \in G \setminus B$, содержит инволюцию j . Согласно лемме 1.2 $j \in S$ и $j = t^g$, где $t \in S$. Поэтому, сопрягая подгруппу $C_G(t) = U$ (лемма 1.1) элементом g , мы получаем подгруппу $C_G(j) = U$, т.е. $U^g = U$, что противоречит выбору элемента g . Таким образом, $B \cap B^g$ не содержит инволюций и подгруппа B сильно вложена в G . Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. Если $g \in G \setminus B$, то $B \subseteq \langle U, g \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G_1 = \langle U, g \rangle$, $D = N_{G_1}(U)$. Так как $D \leq B$, то $D \neq G_1$ в силу условия. Повторяя рассуждения леммы 1.3, убеждаемся, что подгруппа D сильно вложена в G_1 . Если теперь $x \in B$, а i – инволюция из S , то $i^x = i^d$ для некоторого $d \in D$ (предложение 1.1). Следовательно, $xd^{-1} \in C_G(i) = U$, т.е. $x \in Ud \subseteq D < G_1$. Итак, $B < G_1$ и лемма доказана.

Пусть теперь $Z = Z(G)$ – центр группы G . Заметим, что $Z < U$ в силу определения подгруппы U , а поскольку подгруппа B сильно вложена в G (лемма 1.3), то Z не содержит инволюций, т.е. $Z \leq R$. Рассмотрим факторгруппу $\bar{G} = G/Z$. Полагаем, далее, $\bar{S} = SZ/Z$, $\bar{U} = U/Z$, $\bar{B} = B/Z$.

ЛЕММА 1.5. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $\bar{S}$ – силовская 2-подгруппа группы $\bar{G}$;
- 2) $C_{\bar{G}}(\bar{i}) = \bar{U}$ для любой инволюции $\bar{i} \in \bar{S}$;
- 3) подгруппа $\bar{B} = N_{\bar{G}}(\bar{U})$ сильно вложена в $\bar{G}$;
- 4) группа $\bar{G}$ имеет тривиальный центр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что $\bar{S} < \bar{L}$ – 2-подгруппа из $\bar{G}$ и $\bar{x} \in \bar{L}$. Очевидно, что $\bar{x} = \bar{y} = yZ$, где $|y| = 2^n$. Если k – инволюция из $\langle y \rangle$ и $k \in S$, то $y \in C_G(k) = U$, а значит, $y \in S$ и $\bar{x} = \bar{y} \in \bar{S}$. Если же $k \notin S$, то $k \in G \setminus B$ (лемма 1.2). В силу леммы 1.3 и предложения 1.1 элемент ik имеет нечетный порядок, а поскольку $\bar{i}\bar{k} \in \bar{L}$, то $\bar{i}\bar{k} = \bar{1}$, $k \in iZ < B$, противоречие. Итак, $\bar{x} \in \bar{S}$ и $\bar{S} = \bar{L}$. Утверждение доказано.

2) Инволюция $\bar{i} \in \bar{S}$ имеет вид $\bar{i} = \bar{j} = jZ$, где j – инволюция из S . Так как $C_G(j) = U$ (лемма 1.1), то $\bar{U} \leq C_{\bar{G}}(\bar{j})$. Пусть $\bar{g} = gZ \in C_{\bar{G}}(\bar{j})$, что равносильно включению $j^g \in jZ$. Поскольку j – единственная инволюция в смежном классе jZ , то $j^g = j$, т.е. $g \in C_G(j) = U$ и $\bar{g} \in \bar{U}$. Таким образом, $\bar{U} = C_{\bar{G}}(\bar{j})$.

3) Очевидно, что $\bar{B} = N_{\bar{G}}(\bar{U})$. В силу утверждений 1), 2) леммы группа $\bar{G}$ удовлетворяет условиям теоремы, а значит, ввиду леммы 1.3 $\bar{B}$ сильно вложена в $\bar{G}$.

4) Пусть $\bar{Z}_1 = Z(\bar{G})$ – центр группы $\bar{G}$. Тогда $\bar{Z}_1 < \bar{U}$ по утверждению 2) леммы. Следовательно, если Z_1 – полный прообраз $\bar{Z}_1$ в G , то $Z_1 < U$. Обозначим через v произвольную инволюцию из $G \setminus B$. Так как $Z_1^v = Z_1$, то v перестановочна с каждым элементом из Z_1 ввиду предложения 1.1 3). Теперь на основании леммы 1.4 и предложения 1.1 2) заключаем, что Z_1 содержится в Z . Таким образом, $Z_1 = Z$ и $\bar{Z}_1 = \bar{1}$. Лемма доказана.

§ 2. Изучение основного частного случая

В этом параграфе мы будем предполагать дополнительно, что $Z(G) = 1$ и $G = \langle B, v \rangle$, где v – инволюция из $G \setminus B$.

ЛЕММА 2.1. Если инволюция $w \in C_G(v)$, то $G = \langle B, w \rangle = \langle U, w \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\langle B, w \rangle = G_1$. Для доказательства равенства $G = G_1$ достаточно установить включение $v \in G_1$. Очевидно, подгруппа B сильно вложена в G_1 . Пусть $V_1 = C_{G_1}(w)$, $V = C_G(w)$. В силу предложения 1.1 в G_1 найдется элемент x такой, что $w^x = i$. Тогда $V_1^x = C_{G_1}(i) = U = C_G(i) = V^x$. Отсюда $V_1 = V$ и $v \in G_1$.

Второе равенство вытекает из леммы 1.4. Итак, лемма верна.

ЛЕММА 2.2. $U \cap U^v = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в лемме 2.1 $w = v$, мы заключаем, что $N = U \cap U^v$ есть нормальная подгруппа группы G . При этом в силу предложения 1.1 3) $N < C_G(v)$, а значит, $N < Z(G) = 1$. Лемма доказана.

Обозначим через H пересечение $B \cap B^v$.

ЛЕММА 2.3. $U \cap B^v = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L = U \cap B^v = U \cap H$. Так как $U \triangleleft B$, то $L \triangleleft H$ и $L^v \triangleleft H^v = H$. Ввиду коммутативности подгруппы U и леммы 2.2 отсюда выводим, что $\langle L, L^v \rangle = L \times L^v$ — абелева подгруппа и $L^v \cap U = 1$.

Предположим, что $L \neq 1$. Так как подгруппа B сильно вложена в G , то $L < R$ — максимальная $2'$ -подгруппа из U . Пусть u — элемент простого порядка p из L , $F = \langle u \rangle \times \langle u^v \rangle$. Поскольку $u^v \notin U$, то $j^{u^v} \neq j$ для любой инволюции $j \in S$. Этим же свойством обладает и элемент $x = uu^v$, действие которого сопряжениями на S совпадает с действием на S элемента u^v ($u \in C_G(S)$). Пусть $iv = y$. Тогда $|y| = 2k - 1$ по предложению 1.1 2) и для инволюции $t = iy^k$ имеем

$$v^t = y^{-k} i i y i y^k = y^{1-k} i y^k = i y^{2k-1} = i.$$

Следовательно, $x^t = u_1 \in C_G(v^t) = C_G(i) = U$ и индуцирует регулярный автоморфизм на подгруппе S^t , содержащей элемент v . Поэтому если $v^{u_1} = v_1$, то $u_1^v = u_1 u_1^{-1} v u_1 v = u_1 v_1 v = u_1 v_2$, где $v_2 = v_1 v$ — инволюция.

Покажем теперь, что $[u_1, F] = 1$. Так как $F = \langle u \rangle \times \langle x \rangle$, а элементы u, u_1 подгруппы U перестановочны, то для этого достаточно установить, что $[u_1, x] = 1$. Действительно, предположим, что $u_1^x \notin \langle u_1 \rangle$. Поскольку $v^{u_1} = v_1$, $v^{x^{-1}u_1x} = v^{u_1x} = v_1^x = v_1$, то мы имеем $1 \neq u_1^x u_1^{-1} \in C_G(v) \cap U$. Но согласно лемме 2.1 элементы из этого пересечения содержатся в центре группы G , который по нашему предположению тривиален. Полученное противоречие означает, что $u_1^x \in \langle u_1 \rangle$. Учитывая, что $|x| = |u_1| = p$ — простое число, отсюда выводим $u_1^x = u_1$, т.е. $[u_1, x] = 1$. Итак, $[u_1, F] = 1$.

Далее, так как $F^v = F$, то $[u_1^v, F] = 1$. По доказанному выше $u_1^v = u_1 v_2$, где v_2 — инволюция из $C_G(v)$. Но тогда, в частности, $[v_2, u] = 1$ и в силу леммы 2.1 $[v, u] = 1$. Противоречие. Итак, $L = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. Подгруппа $H = B \cap B^v$ абелева и инвертируется инволюцией v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in H$. Согласно предложению 1.1 3) смежный класс Uh содержит единственный строго вещественный относительно инволюции v элемент $x = uh$, $u \in U$. Очевидно, $x \in H$, а значит, $u \in H \cap U = 1$ (лемма 2.3). Итак, $x = h$, т.е. v инвертирует каждый элемент из подгруппы H . Очевидно, что тогда H — абелева подгруппа. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. $M = S \rtimes H$ — локально конечная группа Фробениуса с локально циклическим неизменяемым множителем H , действующим транзитивно на множестве всех инволюций из S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из коммутативности S и H (леммы 1.1, 2.4) вытекает, что M – локально конечная группа. Если $s^h = s$ для $1 \neq s \in S$, $h \in H$, то h централизует некоторую инволюцию из S , а потому $h \in U$. Теперь по лемме 2.3 $h = 1$. Таким образом, M – группа Фробениуса с ядром S и дополнительным множителем H . В силу теоремы Бернсайда [6] и теоремы 12.5.2 из [7] H – локально циклическая подгруппа. Транзитивность действия H на множестве инволюций из S непосредственно вытекает из предложения 1.1. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть k – инволюция из $G \setminus B$. Тогда $B \cap B^k = Z \times H_1$, где $Z < U$, $[k, Z] = 1$ и k инвертирует H_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подгруппу $G_1 = \langle B, k \rangle$. Очевидно, подгруппа B сильно вложена в G_1 . В силу леммы 1.4 $G_1 = \langle U, k \rangle$. Обозначим через Z центр группы G_1 . Так как Z не содержит инволюций, то $Z < R < U$. Для факторгруппы $\bar{G}_1 = G_1/Z = \langle U/Z, kZ \rangle$ выполняется лемма 1.5. В частности, $\bar{G}_1$ имеет тривиальный центр. Поэтому для $\bar{G}_1$ справедливы все утверждения, доказанные в этом параграфе. Если $\bar{B} = B/Z$, $\bar{k} = kZ$, то $\bar{B} \cap \bar{B}^{\bar{k}} = \bar{T}$ – локально циклическая $2'$ -группа, инвертируемая инволюцией $\bar{k}$ в силу лемм 2.4, 2.5. Пусть теперь T – полный прообраз $\bar{T}$ в группе G . Поскольку T является расширением центра Z с помощью локально циклической группы $\bar{T}$, то подгруппа T абелева. Очевидно, что подгруппа T допустима относительно инволюции k , а потому $T = Z_1 \times H_1$, $Z_1 = C_T(k)$, $H_1 = \{t : t \in T, t^k = t^{-1}\}$. Ясно, что $Z \leq Z_1$, а если существует элемент $x \in Z_1 \setminus Z$, то $\bar{k}$ одновременно инвертирует и централизует неединичный элемент $\bar{x} = xZ$ нечетного порядка, что невозможно. Значит, $Z_1 = Z$ и лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Подгруппа H сильно изолирована в G , $B = U \rtimes H$ – группа Фробениуса с ядром U и дополнительным множителем H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 \neq h \in H$, $C = C_G(h)$. Предположим, что существует элемент $r \in C \setminus H$. Так как инволюция v инвертирует H (лемма 2.4), то мы можем образовать подгруппу $C \rtimes \langle v \rangle$. По определению подгруппы H элементы r, r^v не могут одновременно содержаться в B . Значит, в множестве $C \setminus B$ найдется некоторый элемент w . В силу предложения 1.1 2) $w = uk$, где $u \in U$, k – инволюция из $G \setminus B$.

Далее, на основании леммы 2.6 мы имеем $A = B \cap B^w = B \cap B^k = Z \times H_1$, где $Z < U$, $[k, Z] = 1$ и k инвертирует H_1 . Очевидно, $h \in A$ и потому $h = zh_1$, $z \in Z$, $h_1 \in H_1$. Следовательно, $zh_1 = h = h^w = (zh_1)^{uk} = zh_1^{uk}$, $h_1^u = h_1^k = h_1^{-1}$. Отсюда $[u, h_1^{-1}] = u^{-1}h_1uh_1^{-1} = h_1^{-2} \in H_1 \cap U$. Но инволюция k инвертирует элементы из пересечения $H_1 \cap U$. Поэтому в силу предложения 1.1 3) $H_1 \cap U = 1$ и $h_1 = 1$ (подгруппа A не содержит инволюций). Таким образом, $h = z \in Z < U$, что противоречит лемме 2.3. Следовательно, $C = H$, т.е. H – сильно изолированная в группе G подгруппа. Второе утверждение леммы непосредственно вытекает из доказанного, леммы 2.3 и предложения 1.1 3). Лемма доказана.

Теперь мы можем уточнить лемму 2.6.

ЛЕММА 2.8. Пусть k – инволюция из $G \setminus B$. Тогда $B \cap B^k = H_1$ – дополнительный множитель группы Фробениуса B с ядром U , инволюция k инвертирует H_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2.6 $B \cap B^k = Z \times H_1$, где $Z < U$, $[k, Z] = 1$ и k инвертирует H_1 , а по лемме 2.7 $B = U \rtimes H$ – группа Фробениуса с ядром U и дополнительным множителем H . Поскольку k инвертирует подгруппу H_1 , то ввиду предложения 1.1 3) $H_1 \cap U = 1$ и $B = U \rtimes H_1$. Поэтому если $1 \neq h_1 \in H_1$, то $h_1 = uh$, где $u \in U$, $h \in H$ и $h \neq 1$. Следовательно, действия (сопряжениями) на U элементов h_1 и h совпадают. Отсюда непосредственно выводим, что $Z = 1$, а H_1 – дополнительный множитель группы Фробениуса B с ядром U . Итак, лемма верна.

§ 3. Доказательство теоремы

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Как отмечалось, мы предполагаем, что силовская 2-подгруппа S группы G содержит более одной инволюции и $B = N_G(U) \neq G$, а значит, для G справедливы все утверждения из § 1.

Предположим сначала, что $Z(G) = 1$ и $G = \langle B, v \rangle$, где v – инволюция из $G \setminus B$. Тогда для группы G выполняются все леммы из § 2, которые доказаны именно при этих условиях.

ЛЕММА 3.1. Если j, k – инволюции из $G \setminus B$, то $j = k^b$ для некоторого элемента $b \in B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, ввиду леммы 2.8 пересечения $H_j = B \cap B^j$ и $H_k = B \cap B^k$ являются дополнительными множителями группы Фробениуса B с ядром U , а поэтому они сопряжены с H и между собой элементами из U . Далее, согласно той же лемме 2.8 инволюции j и k инвертируют соответственно подгруппы H_j и H_k . Поэтому из сильной изолированности подгрупп H_j и H_k в группе G (лемма 2.7) вытекает, что все инволюции из $G \setminus B$, инвертирующие H_j , содержатся в $L_j = H_j \rtimes \langle j \rangle$, а инволюции из $G \setminus B$, инвертирующие H_k , содержатся в $L_k = H_k \rtimes \langle k \rangle$. Таким образом, если $H_k^u = H_j$, где $u \in U$, то $L_k^u = L_j$. Инволюции k^u, j сопряжены в L_j некоторым элементом $h \in H_j$, т.е. $k^{uh} = j$, где $uh = b \in B$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Группа G изоморфна группе $L_2(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.1 вытекает, в частности, что B действует сопряжениями транзитивно на множестве всех подгрупп вида $C_G(j)$, где j – инволюция из $G \setminus B$. Так как в группе G все инволюции сопряжены (предложение 1.1 1)), U совпадает с централизатором любой своей инволюции (лемма 1.1) и $N_G(U) = B$, то B действует транзитивно на множестве $\Omega \setminus \{B\}$, где Ω – множество всех сопряженных с B подгрупп группы G . Отсюда и из равенства $N_G(B) = B$ (лемма 1.3) следует, что G действует сопряжениями дважды транзитивно на множестве Ω и при этом $B = G_\alpha$ – стабилизатор точки $\alpha = B \in \Omega$.

Покажем теперь, что G является Z -группой на Ω , т.е. стабилизатор трех различных точек из Ω тривиален. Из этого будет вытекать и точность действия G на Ω . Нам надо доказать тривиальность пересечения трех различных сопряженных с B подгрупп. Очевидно, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что одна из этих подгрупп совпадает с B . В силу предложения 1.1 2) любая сопряженная с B подгруппа имеет вид B^z , где z – инволюция. Итак, пусть B, B^k, B^j (k, j – инволюции) – различные подгруппы. По лемме 2.8 пересечения $H_k = B \cap B^k$,

$H_j = B \cap B^j$ являются дополнительными множителями группы Фробениуса B с ядром U . При доказательстве леммы 3.1 установлено, что если $H_k = H_j$, то $k = j^h$ для некоторого $h \in H_j$. Поскольку j инвертирует подгруппу H_j (лемма 2.8), то $k = h^{-2}j$ и $B^k = B^j$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, H_j, H_k – различные дополнительные множители группы Фробениуса B и потому $H_j \cap H_k = 1$ и $B \cap B^j \cap B^k = 1$.

Наконец, ввиду доказанного в этой лемме и на основании лемм 2.4, 2.7 применимо предложение 1.2, согласно которому $G \simeq L_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики 2. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, т.е. откажемся от предположений $Z(G) = 1$ и $G = \langle B, v \rangle$. Напомним, что для инволюции i из силовой 2-подгруппы S мы обозначили $C_G(i) = U = S \times R$, где R – абелева 2'-подгруппа. Пусть, далее, Δ – множество всех инволюций из $G \setminus B$.

ЛЕММА 3.3. *Подгруппа R совпадает с центром группы G и с центром любой подгруппы вида $G_1 = \langle B, v \rangle$, где $v \in \Delta$. При этом факторгруппа $G_1/R \simeq L_2(Q)$, Q – локально конечное поле характеристики 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.1 2) $G = \langle B, \Delta \rangle$. Докажем, что R совпадает с центром подгруппы $G_1 = \langle B, v \rangle$. Из этого очевидным образом будет вытекать равенство $Z(G) = R$.

Итак, пусть Z_1 – центр группы G_1 . Поскольку $Z_1 < U = C_G(i)$, а подгруппа B сильно вложена в G_1 , то $Z_1 \leq R$. Положим $\overline{G}_1 = G_1/Z = \langle B/Z, vZ \rangle$. Ввиду леммы 1.5 к группе $\overline{G}_1$ применимы все полученные ранее леммы. В частности, согласно лемме 3.2 $\overline{G}_1$ изоморфна группе $L_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики 2. Так как в группе $L_2(Q)$ централизатор любой инволюции является элементарной абелевой подгруппой, то в силу леммы 1.5 U/Z – элементарная абелева 2-подгруппа. Отсюда и из включения $Z_1 \leq R$ непосредственно выводим, что $Z_1 = R$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Если $v \in \Delta$, $G_1 = \langle B, v \rangle$, то $G_1 = G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что любая инволюция $k \in \Delta$ сопряжена с v элементом из подгруппы B . Тогда ввиду предложения 1.1 2) будет выполняться и равенство $G_1 = G$.

Согласно лемме 3.3 R есть центр группы G и центр подгрупп $G_1, G_2 = \langle B, k \rangle$. Рассмотрим факторгруппу $\overline{G} = G/R$ и ее подгруппы $\overline{G}_1 = G_1/R, \overline{G}_2 = G_2/R$. Если $\overline{B} = B/R, \overline{v} = vR, \overline{k} = kR$, то $\overline{G}_1 = \langle \overline{B}, \overline{v} \rangle, \overline{G}_2 = \langle \overline{B}, \overline{k} \rangle$, а так как в силу леммы 1.5 эти подгруппы имеют тривиальные центры, то для них справедливы все леммы §2. В частности, на основании лемм 2.4, 2.7 выводим, что $\overline{H}_1 = \overline{B} \cap \overline{B}^{\overline{v}}, \overline{H}_2 = \overline{B} \cap \overline{B}^{\overline{k}}$ – дополнительные множители группы Фробениуса $\overline{B}$ с ядром $\overline{U}$, инволюции $\overline{v}, \overline{k}$ инвертируют соответственно подгруппы $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$, подгруппа $\overline{H}_1$ сильно изолирована в $\overline{G}_1$, а $\overline{H}_2$ сильно изолирована в $\overline{G}_2$.

Докажем, что подгруппы $\overline{H}_i$ ($i = 1, 2$) сильно изолированы и в $\overline{G}$. Так как $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$ сопряжены в $\overline{B}$, то достаточно установить сильную изолированность в $\overline{G}$ подгруппы $\overline{H}_1$. Пусть, напротив, в множестве $C_{\overline{G}}(\overline{h}) \setminus \overline{H}_1$, где $\overline{h} \in \overline{H}_1$, содержится некоторый элемент $\overline{x}$. Тогда $\overline{x} \notin \overline{B}$ ($\overline{B}$ – группа Фробениуса с дополнительным множителем $\overline{H}_1$ и ядром $\overline{U}$) и по предложению 1.1 2) $\overline{x} = \overline{b} \cdot \overline{j}$, где $\overline{b} \in \overline{B}, \overline{j}$ – инволюция

из $\overline{G} \setminus \overline{B}$. В силу лемм 2.4, 2.7 подгруппа $\overline{H}_3 = \overline{B} \cap \overline{B}^{\overline{x}} = \overline{B} \cap \overline{B}^{\overline{j}}$ инвертируется инволюцией $\overline{j}$ и является дополнительным множителем в группе Фробениуса $\overline{B}$, а так как в пересечении $\overline{H}_1 \cap \overline{H}_3$ содержится неединичный элемент $\overline{h}$, то $\overline{H}_1 = \overline{H}_3$. Поэтому $\overline{h}^{-1} = \overline{h}^{\overline{j}} = \overline{b}^{-1} \overline{x} \overline{h} \overline{x}^{-1} \overline{b} = \overline{b}^{-1} \overline{h} \overline{b}$, т.е. $\overline{h}^{\overline{b}} = \overline{h}^{-1}$, что невозможно, так как $\overline{h}$ – неединичный элемент нечетного порядка из абелева инвариантного множителя группы Фробениуса $\overline{B}$. Итак, $\overline{H}_1$ – сильно изолирована в $\overline{G}$.

Теперь мы можем повторить рассуждения при доказательстве в лемме 3.1 сопряженности инволюций j, k элементом из B и установить существование такого элемента $\overline{b} \in \overline{B}$, что $\overline{v}^{\overline{b}} = \overline{k}$. Если b – прообраз элемента $\overline{b}$ в B , то мы имеем $v^b Z = kZ$. Поскольку k – единственная инволюция в смежном классе kZ , то $v^b = k$ и лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. $G \simeq R \times L_2(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3.3, 3.4 R – центр группы G и факторгруппа G/R изоморфна группе $L_2(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2. Обозначим через W множество всех инволюций из G . Тогда G/R порождается множеством $\{xR : x \in W\}$, а значит, $G = \langle R, W \rangle = \langle R, L \rangle$, где $L = \langle W \rangle$.

Предположим, что $R \cap L \neq 1$. По теореме Шмидта [8] группа G локально конечна. Поэтому в W найдется такое конечное подмножество W_1 , что W_1 содержит хотя бы две инволюции из S и $L_1 = \langle W_1 \rangle$ нетривиально пересекается с R . Но это противоречит теореме Судзуки, сформулированной в начале статьи. Таким образом, $R \cap L = 1$ и $G = R \times L$. При этом $L \simeq G/R \simeq L_2(Q)$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Список литературы

1. Suzuki M. On characterizations of linear groups. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 92. №2. P. 191–219.
2. Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. №1. С. 74–86.
3. Созутов А. И., Сучков Н. М. О некоторых дважды транзитивных группах // Препринт № 17. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1998.
4. Шучков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: ВО Наука, 1992.
5. Peterfalvi T. A characterization of some 2-transitive groups // J. Algebra. 1994. V. 164. №3. P. 849–858.
6. Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
7. Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
8. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.

Красноярский государственный университет,
г. Красноярск

Поступила в редакцию
24.08.2000