Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Богатая, С. А. Богатый, Х. Цишанг, О композициях открытых отображений,
Матем. сб., 2002, том 193, номер 3, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm632>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 11:30:14

УДК 515.162.2

С. И. Богатая, С. А. Богатый, Х. Цишанг

О композициях открытых отображений

Построено 4-кратное накрытие поверхности рода 2 поверхностью рода 5, которое не представляется в виде композиции двух открытых нетривиальных отображений, что показывает неполноту препятствия Баилдона. Доказываются различные теоремы о разложимости регулярного накрытия в композицию (регулярных) накрытий разных кратностей в разных последовательностях. Для разветвленных накрытий предложено новое препятствие к разложимости – массив ветвления точек ветвления.

Библиография: 62 названия.

Введение

Борсук и Мольски показали [1], что всякое локально взаимно однозначное отображение компакта (т.е. компактного метрического пространства) является композицией конечного числа простых отображений (т.е. отображений кратности 2). Сиеклукский доказал [2], что *всякое отображение конечной кратности конечного компакта является композицией простых отображений*. Кржемпек улучшил [3] теорему Сиеклукского: *всякое замкнутое отображение кратности $\leq k$, заданное на n -мерном метрическом пространстве, является композицией не более чем $(n+1)k-1$ простых замкнутых отображений метризуемых пространств*.

Ситуация с открытыми отображениями совершенно иная. Кржемпек доказал [3], что *всякое открытое (открыто-замкнутое) сюръективное отображение $f: X \rightarrow Y$ кратности $\leq k+1$, заданное на нульмерном метрическом пространстве X , является композицией $f_k \circ \dots \circ f_1$ k простых открытых (открыто-замкнутых) сюръективных отображений $f_1, \dots, f_k$* . Дыдак изучил [4] 1-мерный случай: *отображение $z \mapsto z^p$ единичной окружности на комплексной плоскости не является композицией локально взаимно однозначных отображений порядка $\leq p-1$* . Баилдон получил [5] препятствие к разложимости отображения в композицию открытых отображений в 2-мерном случае. Пусть S_g означает замкнутую ориентируемую поверхность рода g . Баилдон доказал [5; теорема 2], что *если открытое отображение $f: S_h \rightarrow S_g$ является композицией $f_k \circ \dots \circ f_1$ k открытых простых сюръективных отображений, то $\text{Ord } f = 2^k$* .

Частично работа выполнена в ноябре–декабре 2000 г. во время визита второго автора в Ruhr-Universität Bochum в рамках DFG-проекта “Niedrigdimensionale Topologie und geometrisch-topologische Methoden in der Gruppentheorie”; первые два автора поддерживаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00-01-00289).

Мы переносим теорему Баилдона на композицию произвольных открытых отображений (теорема 2.3) и показываем, что (в отличие от одномерного случая) даже для накрытий поверхностей это арифметическое препятствие на число $\text{Ord } f$ не является полным (следствия 3.3 и 3.8'). Доказываются различные теоремы о разложимости регулярного накрытия в композицию (регулярных) накрытий разных кратностей в разных последовательностях. Даются примеры, показывающие существенность возникающих ограничений. Для открытых отображений поверхностей с различными кратностями некоторых точек (т.е. разветвленных накрытий) мы предлагаем новое препятствие к разложимости: массив ветвления точек ветвления.

§ 1. Одномерный случай

Когда говорится о композиции, первым называется то отображение, которое стоит ближе к аргументу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Говорят, что отображение $f: X \rightarrow Y$ имеет кратность (порядок) $\leq n$ ($\text{Ord } f \leq n$), если $|f^{-1}(y)| \leq n$ для всякой точки $y \in Y$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [6; X, (1.2)]. Если $f: S^1 \rightarrow S^1$ — открытое отображение, то $n = \text{Ord } f$ конечно и f является n -кратным накрытием и топологически сопряжено отображению $z \mapsto z^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [6; X, (1.2) и (1.3)]. Если $S^1 \rightarrow X \rightarrow S^1$ — открытые отображения, то $X = S^1$.

Результат Дыдака может быть сформулирован в следующей более сильной форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Для открытого отображения $f: S^1 \rightarrow S^1$ следующие условия эквивалентны:

- (1) $\text{Ord } f = n_1 \cdots n_k$;
- (2) $f = f_k \circ \cdots \circ f_1$, где $S^1 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} X_{k-1} \xrightarrow{f_k} S^1$ являются открытыми отображениями и $\text{Ord } f_i = n_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Согласно предложению 1.2 отображение f сопряжено отображению z^n , которое является композицией отображений $z^{n_1}, \dots, z^{n_k}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Согласно предложению 1.3 все компакты X_i гомеоморфны окружности, и согласно предложению 1.2 f_i является накрытием порядка n_i . Тогда композиция является накрытием порядка $n_1 \cdots n_k$.

Для открытых отображений разветвленных одномерных многообразий (графов) кратность композиции может отличаться от произведения кратностей отображений разложения. Но и в этом случае справедливы некоторые аналоги предложений 1.2 и 1.3 [6; VIII, (7.31)], поэтому справедлив “асимптотический” аналог предложения 1.4.

§ 2. Двумерный случай

Мультипликативность кратности — это “многообразное” свойство. Мы ограничимся рассмотрением ориентируемых поверхностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [6; X, (6.3)]. Если $f: S_h \rightarrow S_g$ – открытое нульмерное отображение, то $n = \text{Ord } f$ конечно и f является n -кратным разветвленным накрытием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если $S_h \rightarrow X \rightarrow S_g$ – открытые нульмерные отображения, то $X = S_q$ для некоторого q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.1 отображение $S_h \rightarrow X$ является конечнократным и открытым, поэтому X – компактное 2-мерное многообразие (с граничными окружностями или без них) [6; X, (4.2)]. Кроме того, так как S_g – замкнутая ориентируемая поверхность, то X также является замкнутой ориентируемой поверхностью [6; X, 7, следствие].

ТЕОРЕМА 2.3. Если дана последовательность открытых нульмерных отображений $S_h \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} X_{k-1} \xrightarrow{f_k} S_g$, то $X_i = S_{h_i}$ для некоторого h_i и

$$\text{Ord}(f_k \circ \dots \circ f_1) = \text{Ord } f_1 \dots \text{Ord } f_k. \quad (\text{M})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.2 все промежуточные пространства X_i являются замкнутыми ориентируемыми поверхностями. Согласно предложению 2.1 все промежуточные отображения являются разветвленными накрытиями и, в частности, имеют максимальную кратность $\text{Ord } f_i$ во всех точках, кроме конечного множества. Отсюда вытекает мультипликативная формула (M).

В одномерном случае (для многообразий) разложимость числа $\text{Ord } f$ является необходимым и достаточным условием разложимости (в классе открытых отображений) отображения f . В двумерном случае это не так.

Мы начнем изучение открытых отображений кратности $\leq n$ с изучения открытых точно n -кратных отображений, т.е. накрытий. Хаймес и Штёккер доказали [7], [8; § 3.4] (мы формулируем замкнутую ориентируемую часть их результата), что поверхность S_h n -листно покрывает поверхность S_g тогда и только тогда, когда $h - 1 = n(g - 1)$. Эта теорема показывает, что в случае составного числа n существует n -кратное накрытие S_h на S_g , которое разложимо. Но она оставляет открытым вопрос о существовании такого неразложимого накрытия.

Назовем накрытие f *простым*, если оно не разлагается в композицию двух нетривиальных накрытий. Ясно, что всякое накрытие простого порядка является простым. Индукцией по числу $\text{Ord } f$ легко показать, что всякое накрытие разлагается в композицию простых накрытий. Такое разложение ни в коей мере не является единственным: два разложения на простые накрытия могут отличаться даже количеством простых составляющих (разложения (2) и (1) или (3) из теоремы 3.2).

Накрытия над связным и локально линейно связным полулокально односвязным пространством Y соответствуют подгруппам фундаментальной группы $\pi_1(Y)$ [9; гл. 2, § 5, 13]. Впредь все пространства предполагаются именно такими, хотя имеется много работ, посвященных накрытиям общих пространств [10], [11], которые позволяют формулировать получаемые утверждения в более общем виде. Из мультипликативной формулы (M) следует, что если накрытие поверхностей разложено в композицию открытых отображений, то каждое отображение разложения является накрытием. Вопрос о разложимости общего накрытия сводится к вопросу о всех разложениях некоторого регулярного накрытия (теорема 4.1). Поэтому

мы будем, в основном, рассматривать задачу разложения регулярных накрытий. Здесь возникают два неэквивалентных случая: накрытия разложения регулярны; некоторые накрытия разложения могут быть нерегулярны. Напомним, что накрытие $p: X \rightarrow Y$ называется *регулярным*, если для всякого замкнутого пути в Y все его поднятия одновременно замкнуты или одновременно незамкнуты. Известно, что накрытие $p: X \rightarrow Y$ является регулярным тогда и только тогда, когда образ фундаментальной группы X в фундаментальной группе Y является нормальным делителем, и является регулярным тогда и только тогда, когда на X можно задать такое свободное действие некоторой группы G , что p совпадает с орбитной проекцией. Вопрос разложимости заданного регулярного накрытия $f: X \rightarrow Y$ нам будет удобнее изучать и формулировать не в терминах свойств группы $\pi_1(Y)$ и ее нормальной подгруппы $f_\#(\pi_1(X))$, а в терминах группы $G = \pi_1(Y)/f_\#(\pi_1(X))$. Последняя группа является в точности группой накрывающих преобразований накрытия f [9; гл. 2, § 6, 3].

Яворовский доказал [12], что для не более чем двукратного отображения $f: X \rightarrow Y$ следующие условия эквивалентны:

- (1) f открыто;
- (2) f порождено действием $\mathbb{Z}_2$, т.е. f является проекцией на пространство орбит некоторого действия группы $\mathbb{Z}_2$ на X .

Отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Всякое двукратное накрытие регулярно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Сформулированное следствие является геометрическим эквивалентом следующего алгебраического утверждения: *всякая подгруппа индекса 2 является нормальным делителем.*

Для заданного действия конечной группы G на компакте X орбитная проекция $p_G: X \rightarrow X/G$ обладает (например, согласно теореме Сиеклуцкого–Кржемпека) различными разложениями. Но есть некоторые естественные разложения. Именно всякая подгруппа $H \subset G$ порождает разложение $X \rightarrow Z = X/H \rightarrow Y = X/G$. При этом если подгруппа H является нормальным делителем, то на промежуточном пространстве Z имеется естественное действие факторгруппы G/H и второе отображение разложения также является орбитной проекцией $p_{G/H}: Z \rightarrow Z/(G/H) = X/G$. Оказывается, что для открытых разложений *свободных* действий это есть общая ситуация.

ТЕОРЕМА 2.6. *Если орбитная проекция $p_G: X \rightarrow Y = X/G$ свободного действия группы G на пространстве X представлена в виде композиции двух накрытий $f: X \rightarrow Z$ и $g: Z \rightarrow Y$, то первое накрытие регулярно, более того, существует такая подгруппа $H \subset G$, что $f = p_H$. При этом накрытие g регулярно тогда и только тогда, когда подгруппа H является нормальным делителем в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем замкнутый путь ω в Z , и пусть ω_1 и ω_2 – два его поднятия в X . Тогда ω_1 и ω_2 – два поднятия в X замкнутого пути $g \circ \omega$ в Y . Следовательно, оба эти поднятия ω_1 и ω_2 одновременно замкнуты или незамкнуты. Но это и означает, что накрытие f регулярно. Регулярность f означает, что на X можно задать такое свободное действие некоторой группы H , что $f = p_H$. Группа H является группой накрывающих преобразований накрытия f , следовательно,

и накрытия p_G . Последнее и означает, что группа H естественным образом может рассматриваться как подгруппа группы G .

Пусть теперь накрытие g регулярно. Это означает, что подгруппа $g_{\#}(\pi_1(Z)) \subset \pi_1(Y)$ является нормальным делителем. Следовательно, подгруппа

$$H' = g_{\#}(\pi_1(Z))/p_{G\#}(\pi_1(X))$$

является нормальным делителем в группе

$$\pi_1(Y)/p_{G\#}(\pi_1(X)).$$

Но подгруппа H' соответствует именно подгруппе H при естественном изоморфизме групп $\pi_1(Y)/p_{G\#}(\pi_1(X))$ и G .

ТЕОРЕМА 2.7. *Орбитная проекция $p_G: X \rightarrow Y = X/G$ действия абелевой группы порядка $n = p_1 \cdots p_k$ представляется в виде композиции орбитных проекций действий групп $\mathbb{Z}_{p_1}, \dots, \mathbb{Z}_{p_k}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу n (k). В абелевой группе G порядка $p_1 \cdots p_k$ имеется подгруппа H порядка $p_1 \cdots p_{k-1}$. Тогда орбитная проекция p_G является композицией орбитных проекций p_H и $p_{G/H}$, где на X/H рассматривается фактордействие группы $\mathbb{Z}_{p_k} = G/H$.

В случае $G = \mathbb{Z}_n$, т.е. в случае периодического гомеоморфизма, теорема 2.7 превращается в теорему разложимости Баилдона [5; теорема 5].

ТЕОРЕМА 2.8. *Орбитная проекция $p_G: X \rightarrow Y = X/G$ действия разрешимой группы порядка $n = p_1 \cdots p_k$ представляется в виде композиции орбитных проекций действий групп $\mathbb{Z}_{p_1}, \dots, \mathbb{Z}_{p_k}$ в некотором порядке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. У разрешимой группы G все факторы композиционного ряда абелевы. Отсюда следует, что проекция p_G разлагается в композицию проекций действий абелевых групп, которые, в свою очередь, разлагаются в композицию проекций действий циклических групп простого порядка.

ТЕОРЕМА 2.9. *Орбитная проекция $p_G: X \rightarrow Y = X/G$ действия группы порядка $n = p^k$, где $k \geq 2$, представляется в виде композиции орбитных проекций действий групп порядка $n = p^m$ и порядка $n = p^{k-m}$ для всякого $1 \leq m \leq k-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В группе G порядка $n = p^k$ имеется нормальный делитель H порядка $n = p^m$ (для всякого $1 \leq m \leq k-1$) [13; 4.4.20.У], факторизация по которому и задает искомое разложение.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. *Орбитная проекция свободного действия разрешимой группы разлагается в композицию регулярных накрытий простых порядков.*

СЛЕДСТВИЕ 2.11. *Регулярное накрытие нечетного порядка разлагается в композицию регулярных накрытий простых порядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Фейта–Томпсона [14; гл. 2, §5] всякая конечная группа нечетного порядка разрешима.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. *Регулярное накрытие порядка < 60 разлагается в композицию регулярных накрытий простых порядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякая конечная группа порядка < 60 разрешима [15; гл. 11, § 4, задача 2].

СЛЕДСТВИЕ 2.13. *Каждое регулярное накрытие порядка $p^k q$, где p и q такие простые, что $p \geq q$, разлагается в композицию регулярного накрытия порядка p^k и регулярного накрытия порядка q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярное накрытие порядка $p^k q$ является орбитной проекцией свободного действия некоторой группы G порядка $p^k q$. Если $p = q$, то группа G имеет порядок p^{k+1} и применима теорема 2.9. Если же $p > q$, то силовская p -подгруппа G_p группы G имеет порядок p^k и является нормальным делителем [15; гл. 11, § 3, пример 8]. Нормальная подгруппа G_p определяет разложение заданного накрытия в композицию регулярного накрытия порядка p^k и регулярного накрытия порядка q .

ТЕОРЕМА 2.14. *Если регулярное накрытие f порядка $p^k q$, где $k \leq 2$, p и q такие простые, что $p > q$, разлагается в композицию регулярного накрытия порядка q и регулярного накрытия порядка p^k , то группа покрывающих преобразований накрытия f абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $p > q$, то силовская p -подгруппа G_p группы G (группы покрывающих преобразований заданного накрытия) имеет порядок p^k и является нормальным делителем [15; гл. 11, § 3, пример 8]. Так как согласно условию $k \leq 2$, то группа G_p абелева [15; гл. 11, § 4, следствие 2]. Согласно теореме 2.6 разложение заданного накрытия f определяет в группе G некоторый нормальный делитель H порядка q . Так как порядки подгрупп G_p и H взаимно просты, то эти подгруппы пересекаются только по единичному элементу. Из последнего вытекает, что элементы этих подгрупп коммутируют [15; гл. 11, § 1, предложение 1].

ТЕОРЕМА 2.15. *Орбитная проекция $p_G: X \rightarrow Y = X/G$ действия группы порядка $n = p^k n_1$ представляется в виде композиции орбитной проекции действия группы порядка p^k и некоторого открытого отображения порядка $\leq n_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа G имеет порядок $p^k n_1$, то в ней имеется подгруппа порядка p^k [13; 4.4.6.Т.У], факторизация по которой и задает искомое разложение.

СЛЕДСТВИЕ 2.16. *Каждое регулярное накрытие не простого порядка разложимо.*

§ 3. Примеры и характеристизация групп

Теперь мы покажем, что препятствие из теоремы 2.3 не является полным даже в самом простом случае ровно n -кратного открытого отображения, т.е. накрытия.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует регулярное накрытие $f: S_{61} \rightarrow S_2$ порядка 60, которое непредставимо в виде нетривиальной композиции регулярных накрытий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим регулярное накрытие $f: S_{61} \rightarrow S_2$ порядка 60 с группой накрывающих преобразований A_5 . Как показал Джонс [16; таблица 5], имеется ровно 2016 таких неэквивалентных накрытий. Пусть f представлено в виде композиции $f_k \circ \dots \circ f_1$ накрытий, и пусть f_k – регулярное накрытие. Рассмотрим разложение $f = f_k \circ h$, где $h = f_{k-1} \circ \dots \circ f_1$. Согласно теореме 2.6 имеется такая подгруппа $H \subset A_5$, что $h = p_H$. Так как f_k – регулярное накрытие, то согласно теореме 2.6 подгруппа H является нормальным делителем, но в A_5 нет нетривиальных нормальных делителей.

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует регулярное накрытие $f: S_{13} \rightarrow S_2$ порядка 12, всякое разложение $f = f_{i,2} \circ f_{i,1}$ которого на два открытых отображения имеет один из следующих типов:*

- (1) $\text{Ord } f_{1,1} = 2$, $\text{Ord } f_{1,2} = 6$ и $f_{1,2}$ нерегулярно;
- (2) $\text{Ord } f_{2,1} = 3$, $\text{Ord } f_{2,2} = 4$ и $f_{2,2}$ нерегулярно;
- (3) $\text{Ord } f_{3,1} = 4$, $\text{Ord } f_{3,2} = 3$ и $f_{3,2}$ регулярно.

Причем в случаях (1) и (3) и только в этих случаях возможно разложение на три открытых отображения $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Разложения (1) и (3) соответствуют композициям $f_{1,1} = f_1$, $f_{1,2} = f_3 \circ f_2$ и $f_{3,1} = f_2 \circ f_1$, $f_{3,2} = f_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим регулярное накрытие $f: S_{13} \rightarrow S_2$ порядка 12 с группой накрывающих преобразований A_4 . Как показал Джонс [16; таблица 3], имеется ровно 200 таких неэквивалентных накрытий. Согласно теореме 2.3 разложение f в композицию открытых отображений является разложением в композицию накрытий. Согласно теореме 2.6 всякое разложение f в композицию двух нетривиальных накрытий соответствует собственной подгруппе H группы A_4 . В группе A_4 имеются [16; таблица 3], [15; гл. 11, §5, задача 2] собственные подгруппы только следующих типов:

$$\begin{aligned} H = \mathbb{Z}_2, \quad |\mathbb{Z}_2| = 2, \quad \mathbb{Z}_2 \text{ не является нормальной подгруппой;} \\ H = \mathbb{Z}_3, \quad |\mathbb{Z}_3| = 3, \quad \mathbb{Z}_3 \text{ не является нормальной подгруппой;} \\ H = V_4, \quad |V_4| = 4, \quad V_4 \text{ является нормальной подгруппой.} \end{aligned}$$

Эти три типа подгрупп соответствуют трем типам разложений в теореме. Так как накрытие $f_{3,1}$ регулярно, то согласно следствию 2.16 оно разлагается в композицию двух 2-кратных накрытий $f_{3,1} = f_2 \circ f_1$. Разложение $f = (f_{3,2} \circ f_2) \circ f_1$ соответствует разложению типа (1).

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Существует накрытие $f: S_5 \rightarrow S_2$ порядка 4, которое не разлагается в композицию двух нетривиальных открытых отображений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве отображения f возьмем $f_{2,2}$ из (2) теоремы 3.2. Если бы $f_{2,2}$ разлагалось, то мы имели бы $f_{2,2} = g \circ h$ и h – двукратно. Тогда мы получили бы новое разложение $f = g \circ (h \circ f_{2,1})$ в отображение кратности 6 и отображение кратности 2.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Существует накрытие $f: S_7 \rightarrow S_2$ порядка 6, которое разлагается в композицию регулярных накрытий порядков 2 и 3, но не разлагается в композицию открытых отображений порядков 3 и 2 и, следовательно, не является регулярным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение $f_{1,2} = f_3 \circ f_2$ из теоремы 3.2 дает искомый пример. Отображение с указанными свойствами не может быть регулярным согласно теореме 2.15.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Существует регулярное накрытие $f: S_{13} \rightarrow S_2$ порядка 12, которое*

- (1) *разлагается в композицию регулярного накрытия порядка 2 и накрытия порядка 6, но не разлагается в композицию двух открытых отображений кратностей 6 и 2;*
- (2) *разлагается в композицию регулярных накрытий кратностей 2, 2 и 3, но не разлагается в композицию открытых отображений кратностей 2, 3 и 2 или 3, 2 и 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомым регулярным накрытием является накрытие теоремы 3.2.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Существует регулярное накрытие $f: S_7 \rightarrow S_2$ порядка 6, которое представляется в виде композиции регулярных накрытий порядка 3 и 2, представляется в виде композиции регулярного накрытия порядка 2 и накрытия порядка 3, но во втором разложении второе накрытие не может быть регулярным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим регулярное накрытие $f: S_7 \rightarrow S_2$ порядка 6 с группой накрывающих преобразований D_3 . Как показал Джонс [16; таблица 1], имеется ровно 60 таких неэквивалентных накрытий. Согласно теореме 2.3 разложение f в композицию открытых отображений является разложением в композицию накрытий. Согласно теореме 2.6 всякое разложение f в композицию двух нетривиальных накрытий соответствует собственной подгруппе H группы D_3 . В группе D_3 есть нормальный делитель порядка 3 и нет нормального делителя порядка 2 [15; гл. 11, § 1, пример 16].

При изучении поверхности S_g важное значение имеет группа

$$\Pi_g = \pi_1(S_g) = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = e\},$$

где $[\cdot, \cdot]$ означает коммутатор.

ТЕОРЕМА 3.7. *Всякая группа G с k образующими является гомоморфным образом группы Π_g при $g \geq k$. Всякая группа G с k образующими является группой накрывающих преобразований некоторого регулярного накрытия поверхности S_g при $g \geq k$. Всякая группа G порядка n с k образующими свободно действует на S_h при $h = n(g-1) + 1$ и $g \geq k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого $i = 1, \dots, g$ фиксируем целое число k_i (например, положим $k_i = 0$). Отображение $a_i \mapsto a_i, b_i \mapsto a_i^{k_i}$ задает гомоморфизм группы Π_g в свободную группу F_g с g образующими. Всякая группа с k образующими является гомоморфным образом свободной группы F_g при $g \geq k$.

Пусть G – группа с k образующими, а $\varphi: \Pi_g \rightarrow G$ – некоторый эпиморфизм. Подгруппа $H = \ker \varphi \subseteq \pi_1(S_g)$ является нормальным делителем. Поэтому накрытие, соответствующее этой подгруппе, регулярно и группой его накрывающих преобразований является группа $\pi_1(S_g)/H = G$.

Согласно только что доказанному утверждению существует регулярное накрытие $f: S \rightarrow S_g$ с заданной группой накрывающих преобразований G . Так как группа G конечна, то поверхность S замкнута и компактна и $\chi(S) = |G| \cdot \chi(S_g)$, т.е. $2 - 2h = n \cdot (2 - 2g)$.

Отсюда вытекает следующий регулярный вариант теоремы Хаймеса–Штёккера.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. *Для замкнутых ориентируемых поверхностей S_h , S_g и числа $n \geq 2$ следующие условия эквивалентны:*

- (1) *существует регулярное накрытие $f: S_h \rightarrow S_g$ с группой накрывающих преобразований $\mathbb{Z}_n$;*
- (2) *существует накрытие $f: S_h \rightarrow S_g$ кратности n ;*
- (3) $h - 1 = n(g - 1)$.

ЛЕММА 3.9. *При $n \geq 5$ всякая собственная подгруппа A_n имеет индекс $\geq n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – собственная подгруппа A_n . На множестве левых смежных классов группы A_n по подгруппе H определено левое действие группы A_n . Так как группа A_n при $n \geq 5$ простая [15; гл. 11, §5], то гомоморфизм $A_n \rightarrow S(A_n/H)$ является мономорфизмом. Отсюда следует неравенство $n!/2 \leq m!$, где $m = |A_n/H| = |A_n : H|$, равносильное требуемому.

СЛЕДСТВИЕ 3.8'. *В случае $g \geq 2$ условия (1)–(3) следствия 3.8 эквивалентны условию:*

- (4) *существует накрытие $f: S_h \rightarrow S_g$ кратности n , которое не разлагается в композицию двух нетривиальных открытых отображений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (4) $\Rightarrow$ (2) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (4). При $n = 2, 3$ все справедливо, так как эти значения n являются простыми.

Группа A_n порождена двумя элементами. Согласно теореме 3.7 существует регулярное накрытие $F: S_{(n!/2)(g-1)+1} \rightarrow S_g$ с группой накрывающих преобразований A_n .

Будем считать, что A_{n-1} вложена в A_n в виде подгруппы, оставляющей на месте символ n . Подгруппа A_{n-1} имеет индекс n , поэтому индуцированное накрытие $f: S_{(n!/2)(g-1)+1}/A_{n-1} \simeq S_{n(g-1)+1} \rightarrow S_g$ имеет порядок n .

Согласно лемме 3.9 при $n \geq 5$ подгруппа A_{n-1} является максимальной в A_n . В максимальной подгруппе A_3 в A_4 можно убедиться по таблице 3 из [16]. Поэтому согласно теореме 2.6 накрытие f неразложимо.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. *Существует регулярное накрытие $f: S_{361} \rightarrow S_2$ порядка 360, во всяком разложении которого в композицию нетривиальных открытых отображений кратность последнего отображения является непрос-тым числом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.7 существует регулярное накрытие

$$f: S_{361} \rightarrow S_2$$

с группой накрывающих преобразований A_6 .

Согласно теореме 2.6 для всякого разложения $f = f_k \circ \dots \circ f_1$ существует такая подгруппа $H \subset A_6$, что $f_{k-1} \circ \dots \circ f_1 = p_H$. Согласно теореме 2.3 кратность отображения f_k равна индексу $|A_6 : H|$, который ≥ 6 согласно лемме 3.9, а согласно теореме Лагранжа [15; гл. 4, § 4] делит порядок группы $|A_6| = 6!$. Полученные два условия показывают, что порядок $\text{Ord } f_k$ не может быть простым числом.

ТЕОРЕМА 3.11. *Существует регулярное накрытие $f: S_{121} \rightarrow S_2$ порядка 120, которое представимо в виде композиции регулярных накрытий порядка 2 и 60, но непредставимо в виде композиции открытых отображений порядка 60 и 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\text{SL}_2(\mathbb{Z}_5)$ имеет порядок 120 и содержит единственный нетривиальный нормальный делитель – центр $Z(\text{SL}_2(\mathbb{Z}_5))$ [14; гл. 2, начало доказательства § 3]. Следовательно, эта группа не содержит подгрупп порядка 60. Группа $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}_5) = \text{SL}_2(\mathbb{Z}_5)/Z(\text{SL}_2(\mathbb{Z}_5)) \simeq A_5$ [15; гл. 11, § 5, задача 3 или 4] порождена двумя элементами. Отсюда вытекает, что и группа $\text{SL}_2(\mathbb{Z}_5)$ порождена любыми двумя элементами, проекции которых порождают группу $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}_5)$. Согласно теореме 3.7 существует регулярное накрытие $f: S_{121} \rightarrow S_2$ порядка 120 с группой накрывающих преобразований $\text{SL}_2(\mathbb{Z}_5)$. Группа $\text{SL}_2(\mathbb{Z}_5)$ содержит нормальный делитель порядка 2 (центр), но не содержит подгруппу порядка 60, что согласно теореме 2.6 завершает доказательство.

Для всякой конечнопорожденной группы G определен инвариант

$$g(G) = \min\{g : \text{группа } G \text{ является гомоморфным образом группы } \Pi_g\}.$$

Легко видеть, что $g(G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа G является абелевой и порождена двумя элементами. Для всякой неабелевой группы G с двумя образующими $g(G) = 2$. Для всякой абелевой группы G с k образующими справедливо равенство $g(G) = [(k+1)/2]$, где $[\cdot]$ означает целую часть. В работах Фробениуса, Медных и Джонса [17], [18], [16] даются точные формулы для числа $\Phi_g(G)$ эпиморфизмов Π_g на G (числа $n_g(G)$ неэквивалентных накрытий S_g с заданной группой накрывающих преобразований G), однако анализ этих формул для получения неравенства $n_g(G) \geq 1$ в общем случае представляет значительные трудности. Видимо, в общем случае инвариант $g(G)$ вычислить довольно сложно. Имеется много работ, в которых рассматривается “обратная” задача – по роду h поверхности оценивается порядок эффективно (не обязательно свободно) действующей на ней группы [8; § 4.15].

ТЕОРЕМА 3.12. *Для конечной группы G следующие условия эквивалентны:*

- (1) G – не простая группа;
- (2) всякое регулярное накрытие $f: X \rightarrow Y$ связных пространств с группой накрывающих преобразований G разлагается в композицию двух нетривиальных регулярных накрытий;
- (3) всякое регулярное накрытие $f: S_h \rightarrow S_g$ с группой накрывающих преобразований G разлагается в композицию двух нетривиальных регулярных накрытий;

- (4) *существует регулярное накрытие $f: X \rightarrow Y$ связных пространств с группой накрывающих преобразований G , которое разлагается в композицию двух нетривиальных регулярных накрытий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Если G не простая группа, то существует нормальный делитель $H \subset G$ и орбитная проекция $p_G: X \rightarrow Y = X/G$ разлагается в композицию двух орбитных проекций $X \rightarrow Z = X/H \rightarrow Y = X/G = Z/(G/H)$.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) содержится в теореме 3.7.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть некоторое регулярное накрытие $p: X \rightarrow Y$ с группой накрывающих преобразований G представляется в виде композиции $X \rightarrow Z \rightarrow Y$ двух регулярных накрытий. Согласно теореме 2.6 это разложение соответствует некоторой подгруппе $H \subset G$. Так как второе накрытие $Z \rightarrow Y$ тоже регулярно, то подгруппа H является нормальным делителем, т.е. группа G не является простой.

ТЕОРЕМА 3.13. *Для конечной группы G следующие условия эквивалентны:*

- (1) G – разрешимая группа;
- (2) *всякое регулярное накрытие $f: X \rightarrow Y$ связных пространств с группой накрывающих преобразований G разлагается в композицию регулярных накрытий простых порядков;*
- (3) *всякое регулярное накрытие $f: S_h \rightarrow S_g$ с группой накрывающих преобразований G разлагается в композицию регулярных накрытий простых порядков;*
- (4) *существует регулярное накрытие $f: X \rightarrow Y$ связных пространств с группой накрывающих преобразований G , которое разлагается в композицию регулярных накрытий простых порядков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Разложимость является в точности утверждением теоремы 2.8.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) содержится в теореме 3.7.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $n = p_1 \cdots p_k$. Доказательство проведем индукцией по числу k . Если $k = 1$, то $G = \mathbb{Z}_{p_1}$ – разрешимая группа. Пусть $k \geq 2$ и $f = f_k \circ \cdots \circ f_1$, где f_k – регулярное накрытие порядка p_{i_k} . Согласно теореме 2.6 существует такой нормальный делитель $H \subset G$, что $G/H = \mathbb{Z}_{p_{i_k}}$ и орбитная проекция $p_H = f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1$ является композицией регулярных накрытий простых порядков. По индуктивному предположению группа H разрешима, и так как факторгруппа G/H абелева, то группа G также разрешима.

§ 4. Регуляризация

Со всяким регулярным накрытием связана группа накрывающих преобразований. Ниже мы показываем, что с общим накрытием порядка n естественным образом связаны некоторая конечная группа G и ее подгруппа H индекса n , не содержащая нетривиальный нормальный делитель G .

ТЕОРЕМА 4.1. *Для всякого накрытия $f: X \rightarrow Y$ порядка n существуют регулярные накрытия $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow Y$ порядка $\tilde{n}$, делящегося на n и делящего $n!$, и $p_f: \tilde{X} \rightarrow X$ такие, что $\tilde{f} = f \circ p_f$ и всякое регулярное накрытие $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$,*

факторизующееся через накрытие f , факторизуется через накрытие $\tilde{f}$, т.е. из $\hat{f} = f \circ g$ для некоторого накрытия $g: \hat{X} \rightarrow X$ вытекает существование такого накрытия $p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}: \hat{X} \rightarrow \tilde{X}$, что $g = p_f \circ p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим в пространстве X некоторую точку x_0 , и пусть $y_0 = f(x_0)$. В группе $\pi_1(Y, y_0)$ рассмотрим подгруппу $H = f_*(\pi_1(X, x_0))$ индекса n . В [13; 4.3.10.T] описан максимальный нормальный делитель $\tilde{H}$, содержащийся в данной подгруппе H группы G . Из теоремы Пуанкаре [19; гл. III, § 8] вытекает, что если H имеет в G конечный индекс n , то $\tilde{H}$ имеет конечный индекс $\leq n^n$. Из рассмотрения группы монодромии [20; § 58] накрытия, соответствующего подгруппе H , вытекает требуемое более сильное условие на индекс $\tilde{H}$ в G . Накрытие пространства (Y, y_0) , соответствующее нормальному делителю $\tilde{H}$, и является искомым минимальным регулярным накрытием, факторизующимся через накрытие f .

Пусть теперь $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow Y$ – такое регулярное накрытие, что $\hat{f} = f \circ g$ для некоторого накрытия $g: \hat{X} \rightarrow X$. Выберем какую-нибудь точку $\hat{x}_0 \in g^{-1}(x_0)$. Так как накрытие $\hat{f}$ регулярно и $\hat{f} = f \circ g$, то $\hat{H} = \hat{f}_*(\pi_1(\hat{X}, \hat{x}_0))$ является нормальной подгруппой, которая содержится в подгруппе H . Отсюда вытекает включение $\hat{H} \subseteq \tilde{H}$. Последнее включение влечет существование такого отображения $p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}: (\hat{X}, \hat{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, что $\hat{f} = \tilde{f} \circ p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}$, т.е. $f \circ g = f \circ p_f \circ p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}$. Отображения g и $p_f \circ p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}$ являются двумя поднятиями в X отображения $\hat{f}$. Так как при этом $g(\hat{x}_0) = x_0 = p_f(\tilde{x}_0) = p_f(p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}(\hat{x}_0))$ и пространство $\hat{X}$ связно, то эти поднятия g и $p_f \circ p_{\tilde{f}}^{\hat{f}}$ совпадают на всем пространстве $\hat{X}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Вопрос разложимости произвольного накрытия f в композицию двух накрытий является довольно сложным. Построенное регулярное накрытие $\tilde{f}$ сводит вопрос о разложениях накрытия f к вопросу о разложениях накрытия $\tilde{f}$ большего порядка, которое, однако, уже является регулярным и поэтому разложения которого описываются теоремой 2.6. Построенное регулярное накрытие $\tilde{f}$ “минимально”, поэтому группа накрывающих преобразований накрытия $\tilde{f}$ (это есть группа монодромии накрытия f [20, § 58]) и подгруппа (индекса n) накрывающих преобразований накрытия p_f однозначно определяются накрытием f .

Продemonстрируем один пример применения теоремы.

Напомним, что под *слабо соленоидальной последовательностью* (соленоидальной последовательностью) замкнутых многообразий понимается обратная последовательность замкнутых многообразий X_n , в которой связывающие отображения $f_m^n: X_n \rightarrow X_m$ являются (регулярными) накрытиями. Обратный предел X_∞ называется *слабо соленоидальным пространством* (соленоидальным пространством). Маккорд показал [21], что *всякое соленоидальное пространство топологически однородно*. Шори [22] и Роджерс, Толлефсон [23] построили *примеры топологически неоднородных слабо соленоидальных пространств*. Пример Роджерса–Толлефсона 2-кратно накрывается соленоидальным пространством. В некотором смысле это есть общий случай.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для всякого слабо соленоидального пространства Y_∞ существуют соленоидальное пространство X_∞ и расслоение Гуревича $p_\infty: X_\infty \rightarrow Y_\infty$ со свойством единственности накрывающего пути.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектр $\{X_n, g_m^n\}$ построим индукцией по n . Положим $X_1 = Y_1$. Для накрытия $f_1^n: Y_n \rightarrow Y_1$ рассмотрим минимальное регуляризующее накрытие $\tilde{f}_1^n: \tilde{Y}_n \rightarrow Y_1$ из теоремы 4.1. Положим $X_n = \tilde{Y}_n$. Из минимальности $\tilde{f}_1^{n-1}$ и равенства $f_1^n = f_1^{n-1} \circ f_{n-1}^n$ вытекает существование такого накрытия $g_{n-1}^n = p_{\tilde{f}_1^{n-1}}^{f_1^n}: \tilde{Y}_n = X_n \rightarrow \tilde{Y}_{n-1} = X_{n-1}$, что $f_{n-1}^n \circ p_{f_1^n} = p_{f_1^{n-1}} \circ g_{n-1}^n$. Согласно теореме 2.6 все связывающие отображения g_m^n суть регулярные накрытия, поэтому обратный предел X_∞ является соленоидальным пространством.

Отображения $\{p_{f_1^n}: X_n \rightarrow Y_n\}$ являются регулярными накрытиями и задают отображение спектра $\{X_n, g_m^n\}$ в спектр $\{Y_n, f_m^n\}$.

Действительно, согласно теореме 2.6 все накрытия $p_{f_1^n}$ регулярны; равенство $f_{n-1}^n \circ p_{f_1^n} = p_{f_1^{n-1}} \circ g_{n-1}^n$ означает, что $\{p_{f_1^n}\}_{n=1}^\infty$ является отображением спектров. Предельное отображение $p_\infty: X_\infty \rightarrow Y_\infty$ и есть расслоение Гуревича со свойством единственности накрывающего пути (как обратный предел накрытий).

§ 5. Разветвленные накрытия

Построенные выше препятствия к разложимости накрытия в композицию имеют глобальный характер. Теперь мы обсудим чисто локальное препятствие.

Напомним [6; X, (7.3)], [24]–[27], что открытое отображение $f: S_h \rightarrow S_g$ конечной кратности n является локальным гомеоморфизмом во всех точках поверхности S_h , кроме конечного *сингулярного подмножества*. Образ B_f этого сингулярного множества называется *множеством ветвления*. В окрестности всякой точки $x \in S_h$ отображение f эквивалентно комплексной функции $z \mapsto z^{n_x}$ для некоторого $n_x \geq 1$, и x соответствует нулю в $\mathbb{C}$. Для всякой точки $y \in S_g$ справедливо равенство $n = \sum_{x \in f^{-1}(y)} n_x$. Следовательно, всякой точке $y \in S_g$ соответствует такое разбиение $A(y) = [n_1, \dots, n_{\mu_y}]$ числа n , что $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_{\mu_y}\}$ и $n_i = n_{x_i}$. Множество точек $y \in S_g$, для которых $A(y)$ не является тривиальным разбиением $[1, \dots, 1]$ числа n , и есть в точности множество ветвления B_f . Семейство разбиений $\mathcal{D}(f) = \{A(y)\}_{y \in B_f}$ называется *массивом ветвлений*. Массив ветвлений дает новое препятствие к разложимости.

Ясно, что если $y \in Y$ – точка ветвления композиции $f = g \circ h$, где $h: X \rightarrow Z$ и $g: Z \rightarrow Y$ – разветвленные накрытия, то или y – точка ветвления разветвленного накрытия g , или по крайней мере одна из точек $g^{-1}(y)$ является точкой ветвления разветвленного накрытия h .

Пусть $h: X \rightarrow Z$ и $g: Z \rightarrow Y$ – разветвленные накрытия порядков n_1 и n_2 соответственно, $f = g \circ h$ – композиция, а $B_f = \{y_1, \dots, y_m\}$ – множество всех точек ветвления композиции. Пусть $[n_{1,1}, \dots, n_{1,q_1}], \dots, [n_{m,1}, \dots, n_{m,q_m}]$ – массив ветвления f , а $z_{i,1}, \dots, z_{i,t_i}$ – все прообразы точки y_i при отображении g , которое имеет в них ветвления порядков $k_{i,1}, \dots, k_{i,t_i}$ соответственно. Сумма порядков ветвления равна порядку g : $k_{i,1} + \dots + k_{i,t_i} = n_2$ для всех $i = 1, \dots, m$. Пусть $x_{i,j,1}, \dots, x_{i,j,v_{i,j}}$ – все прообразы точки $z_{i,j}$ при отображении h , которое имеет в них ветвления порядков $r_{i,j,1}, \dots, r_{i,j,v_{i,j}}$ соответственно. Сумма порядков ветвления равна порядку h : $r_{i,j,1} + \dots + r_{i,j,v_{i,j}} = n_1$ для всех $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, t_i$. Отображение $f = g \circ h$ имеет ветвление в точке $x_{i,j,l}$ порядка $r_{i,j,l} \cdot k_{i,j}$. Следова-

тельно, массивом ветвления точки y_i является набор чисел

$$[r_{i,j,l} \cdot k_{i,j}]_{\substack{l=1,\dots,v_{i,j} \\ j=1,\dots,t_i}}. \quad (\text{m})$$

Представимость заданного разбиения $[n_{i,1}, \dots, n_{i,q_i}]$ числа $n = n_1 n_2$ в виде произведения (m) является сильным локальным препятствием разложимости заданного разветвленного накрытия в виде композиции разветвленных накрытий. Приведем примеры.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Открытое отображение $f: S_h \rightarrow S_g$ порядка 4, массив ветвления которого содержит разбиение $[3, 1]$, непредставимо в виде нетривиальной композиции открытых отображений.*

Примером такого отображения является отображение сферы Римана, задаваемое многочленом $z^4 + z^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Известная теорема Кнезера [8; § 3.3], [28] утверждает, что если непрерывное отображение поверхностей $f: S_h \rightarrow S_g$ имеет положительную степень n , то $h \geq n(g-1) + 1$. Неравенство Кнезера налагает сильное ограничение на поверхность Z , через которую факторизуется заданное отображение f (если такая факторизация возможна). Так, отображение сферы в сферу может факторизоваться только через сферу.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Более сильное ограничение на поверхность Z , через которую факторизуется заданное отображение f (если такая факторизация возможна), и на индексы ветвления точек ветвления отображений разложения налагает формула Римана–Гурвица [6; X, (7.3)], [24]–[32].

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Отображение сферы Римана, задаваемое многочленом $f(z) = z^5(z-a)^4 p_6(z) + \lambda z^5(35z^3 - 120az^2 + 140a^2z - 56a^3) = z^5(z-a)^4 p_6(z) + \lambda(z-a)^4(35z^4 + 20az^3 + 10a^2z^2 + 4a^3z + a^4) - \lambda a^8$, где $p_6(z)$ – такой многочлен степени 6, что $ap_6(0) \neq 56\lambda$, $ap_6(a) \neq -70\lambda$ и $a \neq 0$, непредставимо в виде нетривиальной композиции открытых отображений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = g \circ h$, где $h: S_0 \rightarrow S_0$ и $g: S_0 \rightarrow S_0$ – открытые отображения кратностей ≥ 2 . Согласно теореме 2.3 одно из этих отображений имеет кратность 3, а другое – кратность 5.

Точка ∞ является точкой ветвления f с массивом ветвления [15]. Из заданных условий вытекает, что точка 0 является точкой ветвления с массивом ветвления $[5, \dots]$. Как число 15, так и число 5 единственным образом разлагаются в произведение двух таких чисел α и β , что $\alpha \leq 5$ и $\beta \leq 3$. Следовательно, отображение порядка 5 имеет по крайней мере 2 точки ветвления порядка 5. Из формулы Римана–Гурвица вытекает, что отображение кратности 5 имеет только эти две точки ветвления. Тогда из формулы (m) вытекает, что в массиве ветвления любой точки ветвления композиции $f = g \circ h$ числа кратны 5 или не превосходят 3. Однако из заданных условий вытекает, что при $\lambda \neq 0$ точка $-\lambda a^8$ является точкой ветвления f с массивом ветвления $[4, \dots]$, а при $\lambda = 0$ точка 0 является точкой ветвления f с массивом ветвления $[5, 4, \dots]$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. *Отображение f сферы Римана, задаваемое многочленом $f(z) = z^9 p_6(z)$, где $p_6(z)$ — такой многочлен степени 6, что $p_6(0) \neq 0$, представимо в виде композиции открытых отображений кратностей 5 и 3 тогда и только тогда, когда многочлен $p_6(z)$ является кубом некоторого многочлена второй степени.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $f(z) = z^9(Az^2 + Bz + C)^3$ обладает искомым разложением. Достаточно положить $g(z) = z^3$ и $h(z) = z^3(Az^2 + Bz + C)$.

Пусть $f = g \circ h$, где $h: S_0 \rightarrow S_0$ и $g: S_0 \rightarrow S_0$ — открытые отображения и $\text{Ord } h = 5$, $\text{Ord } g = 3$.

Из заданного условия вытекает, что точка 0 является точкой ветвления с массивом ветвления $[9, \dots]$. Число 9 единственным образом разлагается в произведение двух таких чисел α и β , что $\alpha \leq 5$ и $\beta \leq 3$. Следовательно, отображение порядка 3 имеет в точке 0 ветвление порядка 3. Тогда из формулы (m) вытекает, что массив ветвления точки 0 при композиции $f = g \circ h$ будет $[9, 6]$ или $[9, 3, 3]$ в зависимости от того, каков массив ветвления точки $g^{-1}(0)$ при отображении h . Это означает, что композиция f имеет вид $\tilde{A}z^9(z - a)^6$ в первом случае и $\tilde{A}z^9(z - a_1)^3(z - a_2)^3$ во втором случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Неразветвленные накрытия порядка n над пространством Y описываются представлениями группы $\pi_1(Y)$ в симметрической группе от n символов, т.е. в группе Σ_n [20; §58]. Это означает, что любое свойство накрытия, в частности разложимость в композицию, может быть описано в терминах соответствующего представления. Для примера укажем, что если представление накрытия порядка 4 содержит перестановку $(1, 2, 3)(4)$, то это накрытие не разлагается в композицию двух накрытий.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Разветвленные накрытия порядка n над поверхностью S с множеством ветвления $B \subset S$ описываются представлениями группы $\pi_1(S \setminus B)$ в симметрической группе Σ_n [24]–[27]. Это означает, что разложимость разветвленного накрытия в композицию также может быть описана в терминах соответствующего представления. Для примера укажем, что следствие 5.1 может быть получено и таким алгебраическим способом. Именно таким образом показывается, что формула Римана–Гурвица не дает полное препятствие для реализуемости над сферой или проективным пространством абстрактного массива ветвления, что дает дополнительное препятствие к разложимости разветвленных накрытий над сферой [24; 3.5], [26; 5.3, 5.6, 5.7, 6.3, 6.4] и проективным пространством [24; 3.6], [26; 5.9].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. В работах [24]–[27] строятся различные примитивные разветвленные накрытия. Вместе с классификационными теоремами Габаи–Казеса [33] и Натансона [34], [35], Протопопова [36], Хованского–Здравковской [37] эти накрытия позволяют доказать разложимость некоторых классов примитивных разветвленных накрытий. Всякое непримитивное разветвленное накрытие представимо в виде композиции примитивного разветвленного накрытия и обычного накрытия [27; 5.19]. Композиция примитивных разветвленных накрытий является примитивным разветвленным накрытием, а нетривиальное неразветвленное накрытие (в том числе и простое) не является примитивным. Следовательно, простота и примитивность неразветвленного накрытия являются несравнимыми понятиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. Хованский и Здравковска с помощью групп кос получили результаты о разложимости полиномиальных отображений, которые не определяются массивом ветвления [37; примеры 1 и 2].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.10. Согласно теореме Сиеклукского–Кржемпека аналог формулы (М) для разложений в композицию неоткрытых отображений не может иметь место. Однако если в “неоткрытом” разложении предполагать, что промежуточные пространства являются поверхностями, то с помощью неравенства Римана–Гурвица–Кнезера–Хопфа [31], [38] можно получить довольно сильные условия на пространства и отображения разложения. Мультипликативность в этом случае является проявлением обычной мультипликативности степени отображения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. В работах [39], [40] предложены препятствия к представлению заданного отображения (полинома [41]) в виде итерации одного и того же произвольного (мероморфного [42]) отображения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.12. Так как открытый конечнократный образ n -многообразия при $n \geq 3$ не всегда является n -многообразием, то в многомерном случае дословное повторение рассуждений настоящей работы невозможно. Однако результаты и методы работ [43]–[54] позволяют получить некоторые многомерные аналоги формулы (М).

Авторам приятно выразить свою благодарность А. Ю. Ольшанскому и И. А. Чубарову за полезные беседы.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. Задаче описания всех полиномиальных разложений данного полиномиального отображения сферы Римана в себя посвящена обширная литература [55]–[62]. Так называемая первая теорема Ритта утверждает [55], что для любых двух разложений полинома f в композицию неразложимых полиномов $f = f_k \circ \dots \circ f_1 = g_m \circ \dots \circ g_1$ обязательно $k = m$ и $\deg f_i = \deg g_{\sigma(i)}$ для некоторой перестановки σ . Подчеркнем, что согласно теореме 3.2 для поверхностей рода ≥ 2 единственности числа отображений в композиции нет даже в случае регулярного накрытия.

Список литературы

1. Borsuk K., Molski R. On a class of continuous mappings // Fund. Math. 1957. V. 45. № 1. P. 84–98.
2. Sieklucki K. On superposition of simple mappings // Fund. Math. 1960. V. 48. № 2. P. 217–228.
3. Krzempke J. Compositions of simple maps // Fund. Math. 1999. V. 162. P. 149–162.
4. Dydak J. On elementary maps // Colloq. Math. 1974. V. 31. № 1. P. 67–69.
5. Baillon J. D. Open simple maps and periodic homeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 39. № 2. P. 433–436.
6. Whyburn G. T. Analytic topology. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1963. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 28.)
7. Heimes R., Stöcker R. Coverings of surfaces // Arch. Math. 1978. V. 30. № 2. P. 181–187.
8. Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.
9. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
10. Lubkin S. Theory of covering spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 104. № 2. P. 205–238.
11. Fox R. H. Shape theory and covering spaces // Lecture Notes in Math. 1974. V. 375. P. 71–90.

12. *Jaworowski J. W.* On simple regular mappings // *Fund. Math.* 1958. V. 45. № 2. P. 119–129.
13. *Ляпин Е. С., Айзенштат А. Я., Лесохин М. М.* Упражнения по теории групп. М.: Наука, 1967.
14. *Баштулин Ю. А.* Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990.
15. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал, 1999.
16. *Jones G. A.* Enumeration of homomorphisms and surface-coverings // *Quart. J. Math. Oxford (2)*. 1995. V. 46. P. 485–507.
17. *Frobenius G.* Über Gruppencharaktere // *Sitzungsber. Königlich Preuss. Akad. Wiss. Berlin*. 1896. P. 985–1021.
18. *Медных А. Д.* Определение числа неэквивалентных накрытий над компактной римановой поверхностью // *Докл. АН СССР*. 1978. Т. 239. № 2. С. 269–271.
19. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
20. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. М.-Л.: ГОНТИ, 1938.
21. *McCord M. C.* Inverse limit sequences with covering maps // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1965. V. 114. P. 197–209.
22. *Schori R. M.* Inverse limits and homogeneity // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966. V. 124. P. 533–539.
23. *Rogers J. T., Jr., Tollefson J. L.* Involutions on solenoidal spaces // *Fund. Math.* 1971. V. 73. P. 11–19.
24. *Ezell C. L.* Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1978. V. 243. P. 123–133.
25. *Berstein I., Edmonds A. L.* On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1979. V. 247. № 1. P. 87–124.
26. *Edmonds A. L., Kulkarni R. S., Stong R. E.* Realizability of branched coverings of surfaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. V. 282. № 2. P. 773–790.
27. *Bogatyĭ S., Gonçalves D. L., Zieschang H.* The minimal number of roots of surface mappings and quadratic equations in free groups // *Math. Z.* 2001. V. 236. № 3. P. 419–452.
28. *Kneser H.* Die Kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen // *Math. Ann.* 1930. V. 103. P. 347–358.
29. *Hopf H.* Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. I // *Math. Ann.* 1928. V. 100. P. 579–608.
30. *Hopf H.* Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. II // *Math. Ann.* 1929/1930. V. 102. P. 562–623.
31. *Hopf H.* Über den Defekt stetiger Abbildungen von Mannigfaltigkeiten // *Rend. Mat. Appl. (5)*. 1963. V. 21. P. 275–285.
32. *Shepardson C. B.* Generalized Hurwitz–Riemann formulas // *Indiana Univ. Math. J.* 1973. V. 23. P. 277–285.
33. *Gabai D., Kazez W. H.* The classification of maps of surfaces // *Invent. Math.* 1987. V. 90. P. 219–242.
34. *Натанзон С. М.* Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых // *Труды сем. по вектор. и тензор. анализу*. 1988. Т. 23. С. 79–103.
35. *Натанзон С. М.* Топология двумерных накрытий и мероморфные функции на вещественных и комплексных алгебраических кривых. II // *Труды сем. по вектор. и тензор. анализу*. 1991. Т. 24. С. 104–132.
36. *Протопопов А. Н.* Гомеоморфизмы разветвленных накрытий двумерной сферы // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 290. № 4. С. 792–795.
37. *Khovanskii A. G., Zdravkovska S.* Branched covers of S^2 and braid groups // *J. Knot Theory Ramifications*. 1996. V. 5. № 1. P. 55–75.
38. *Dolcher M.* Exceptions to n -covering for continuous mappings of a plane region // *Proc. Internat. Cong. Math. Amsterdam*. 1954. V. II. Amsterdam: North-Holland, 1954. P. 95.
39. *Isaacs R.* Iterates of fractional order // *Canad. J. Math.* 1950. V. 2. P. 409–416.
40. *Lojasiewicz S.* Solution générale de l'équation fonctionnelle $f(f(\dots f(x) \dots)) = g(x)$ // *Ann. Soc. Polon. Math.* 1952. V. 24. P. 88–91.

41. *Rice R. E., Schweizer B., Sklar A.* When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$? // Amer. Math. Monthly. 1980. V. 87. P. 252–263.
42. *Baker I. N.* Fixpoints and iterates of entire functions // Math. Z. 1959. V. 71. P. 146–153.
43. *Трохимчук Ю. Ю.* О непрерывных отображениях областей евклидова пространства // Укр. матем. журн. 1964. Т. 16. №2. С. 196–211.
44. *Чернавский А. В.* Конечнократные открытые отображения многообразий // Матем. сб. 1964. Т. 65. №3. С. 357–369.
45. *Чернавский А. В.* Дополнение к статье “О конечнократных открытых отображениях многообразий” // Матем. сб. 1965. Т. 66. №3. С. 471–472.
46. *Church V. T., Hemmingsen E.* Light open maps on n -manifolds // Duke Math. J. 1960. V. 27. №4. P. 527–536.
47. *Church V. T., Hemmingsen E.* Light open maps on n -manifolds. II // Duke Math. J. 1962. V. 28. №4. P. 607–623.
48. *Church V. T., Hemmingsen E.* Light open maps on n -manifolds. III // Duke Math. J. 1963. V. 30. №3. P. 379–380.
49. *Church V. T.* Differentiable open maps on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. №1. P. 87–100.
50. *Hemmingsen E.* Open simplicial mappings of manifolds on manifolds // Duke Math. J. 1965. V. 32. №2. P. 325–331.
51. *Väisälä J.* Discrete open mappings on manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1966. V. 392. P. 1–10.
52. *Honkapohja M.* Degree and point inverses of mappings on generalized manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. Dissertationes. 1975. V. 4. P. 1–19.
53. *Church V. T.* Discrete maps on manifolds // Michigan Math. J. 1978. V. 25. №3. P. 351–357.
54. *Church V. T., Timourian J. G.* Deficient points of maps on manifolds // Michigan Math. J. 1980. V. 27. №3. P. 321–338.
55. *Ritt J. F.* Prime and composite polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. V. 23. №1. P. 51–66.
56. *Müller P.* Primitive monodromy groups for polynomials // Recent developments in the inverse Galois problem. A joint summer research conference, July 17–23, 1993, University of Washington, Seattle, WA, USA / ed. M. D. Fried et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 385–401. (Contemp. Math. V. 186.)
57. *Dorey F., Whaples G.* Prime and composite polynomials // J. Algebra. 1974. V. 28. P. 88–101.
58. *Fried M.* On a theorem of Ritt and related Diophantine problems // J. Reine Angew. Math. 1973. V. 264. P. 40–55.
59. *Engstrom H. T.* Polynomial substitutions // Amer. J. Math. 1941. V. 63. P. 249–255.
60. *Levi H.* Composite polynomials with coefficients in an arbitrary field of characteristic zero // Amer. J. Math. 1942. V. 64. P. 389–400.
61. *Dorfer G., Woracek H.* Formal power series and some theorems of J. F. Ritt in arbitrary characteristic // Monatsh. Math. 1999. V. 127. P. 277–293.
62. *Schinzel A.* Polynomials with special regard to reducibility. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

Московский государственный университет дизайна и технологий;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;

Ruhr-Universität Bochum

E-mail: bogatyi@mech.math.msu.su;

Marlene.Schwarz@ruhr-uni-bochum.de

Поступила в редакцию

14.02.2001