Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Применение обобщенных многочленов к оценке кратности некоторых многообразий ассоциативных алгебр, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 3, 25–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm634>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:24:41

УДК 512

А. В. Гришин

Применение обобщенных многочленов к оценке кратности некоторых многообразий ассоциативных алгебр

Работа посвящена оценке индекса нильпотентности радикала относительно свободной алгебры из достаточно широкого класса многообразий ассоциативных алгебр. В качестве основного вычислительного инструмента используются обобщенные многочлены.

Библиография: 6 названий.

После положительного решения проблемы представимости относительно свободных ассоциативных алгебр, а также некоторых ее обобщенных аналогов (см. [1], [2]) естественно возникает вопрос: какой конкретно конечномерной алгеброй может быть порождено данное многообразие, какова представляющая конечномерная алгебра с наименьшим индексом нильпотентности радикала? Этот вопрос связан с проблемой вычисления (или хотя бы оценки сверху) *кратности* данного многообразия, т. е. индекса нильпотентности радикала относительно свободной алгебры этого многообразия. Теорема Кемера–Размыслова–Брауна гарантирует конечность кратности для весьма широкого класса многообразий. Всюду ниже рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр над бесконечным полем k . В случае поля нулевой характеристики, как хорошо известно, конечная кратность равносильна представимости свободной алгебры этого многообразия и выполнению тождества Капелли (или, что эквивалентно, стандартного тождества). Пусть X_n и Y_n – многообразия алгебр над полем нулевой характеристики, заданные тождеством Капелли порядка n и соответственно стандартным тождеством степени n , и $\mu(X_n)$, $\mu(Y_n)$ – кратности этих многообразий. Большой интерес вызывает задача эффективной оценки этих кратностей как функций аргумента n . Решение этой задачи, как представляется, еще впереди. Однако в некоторых частных случаях кратность многообразия можно оценить, используя технику обобщенных многочленов.

Основной целью настоящей работы является нахождение некоторых соотношений в специальных алгебрах (в том числе и в так называемых “модельных алгебрах”), порождающих данные многообразия, и оценка с помощью этих соотношений кратностей многообразий.

§1. Предварительные определения, обозначения и конструкции

Пусть k – бесконечное поле, которое во всех рассматриваемых ниже вопросах можно считать алгебраически замкнутым, бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем, k_r – алгебра $(r \times r)$ -матриц и $\mathfrak{R}$ – многообразие

ассоциативных алгебр над полем k . Обозначим через M_r T -идеал тождеств алгебры k_r в свободной счетнопорожденной k -алгебре $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$.

Скажем, что натуральное число $r = r(\mathfrak{R})$ является *сложностью* многообразия $\mathfrak{R}$, если $k_r \in \mathfrak{R}$, но $k_{r+1} \notin \mathfrak{R}$.

Назовем *кратностью* $\mu(\mathfrak{R})$ многообразия $\mathfrak{R}$ индекс нильпотентности радикала свободной счетнопорожденной алгебры многообразия $\mathfrak{R}$ или ∞ , если радикал не нильпотентен.

Скажем, что $\mathfrak{R}$ – *представимое многообразие*, если $\mathfrak{R} = \text{Var}(A)$, где A – конечномерная алгебра, имеющая (в силу сделанных выше предположений) вид $A = L + N$, где $L = k_{r_1} \oplus \dots \oplus k_{r_m}$, N – нильпотентный идеал (радикал) алгебры A .

Нетрудно видеть, что $r(\mathfrak{R}) = \max\{r_i\}$, а $\mu(\mathfrak{R})$ не превосходит индекса нильпотентности идеала N . Однако более точная информация о числе $\mu(\mathfrak{R})$, очевидно, содержится в идеале $M = M_r(A)$ – вербальном идеале алгебры A , порожденном T -идеалом M_r , т.е.

$$M = \{f(a_1, \dots, a_l) \mid f \in M_r, a_i \in A\}.$$

Всюду ниже рассматриваются только унитарно замкнутые многообразия и предполагается, что A – алгебра с единицей, унитарно содержащая подалгебру L .

Если все r_i равны между собой (и, следовательно, равны $r(\mathfrak{R})$), то алгебру A назовем *равносоставленной*. Этому важному частному случаю в дальнейшем уделяется особое внимание. С помощью диагонального вложения алгебру k_r можно рассматривать как унитарную подалгебру равносоставленной алгебры.

Назовем *r -замкнутым* многообразие ассоциативных алгебр, порожденное алгеброй с единицей, которая унитарно содержит подалгебру k_r . Отметим, что при $r = 1$ получается определение унитарно замкнутого многообразия. Примером r -замкнутого многообразия может служить многообразие, порожденное равносоставленной алгеброй.

Назовем k -алгебру B *L -алгеброй*, если B – унитарный L -бимодуль и выполнены все естественные условия согласования умножений (произведение элемента из алгебры L , элементов из алгебры B и элемента из L не зависит от расстановки скобок). Например, алгебры A , M и N являются L -алгебрами.

Пусть $F^* = L * F$ – свободное произведение над k , которое будем называть *алгеброй обобщенных многочленов* с коэффициентами в алгебре L .

В алгебре F^* рассмотрим подалгебру обобщенных многочленов от конечного набора переменных: $F^*(d) = L * k\langle x_1, \dots, x_d \rangle$.

Рассмотрим в алгебрах F^* и $F^*(d)$ идеалы $F_0^* = (x_1, \dots, x_i, \dots)$ и $F_0^*(d) = (x_1, \dots, x_d)$, состоящие из обобщенных многочленов без компоненты нулевой степени (по переменным x_i). В алгебрах F^* и F_0^* естественным образом вводится понятие T -идеала как идеала, устойчивого относительно подстановок элементов алгебры F^* (соответственно F_0^*) вместо переменных x_i .

Будем считать, что $d \geq \dim N$, и рассмотрим алгебру $A^* = F^*(d)/I \cap F^*(d)$, где $I = T(A) + I_0$, $T(A)$ – T -идеал обобщенных тождеств алгебры A в F^* , а I_0 – T -идеал алгебры F_0^* , порожденный одночленом $x_1 \cdots x_d = 0$.

Алгебру A^* назовем *модельной алгеброй* многообразия $\mathfrak{R} = \text{Var}(A)$.

Обозначим через N^* образ идеала $F_0^*(d)$ в алгебре A^* . Так как на алгебре N^* выполнено тождество $x_1 \cdots x_d = 0$, то алгебра A^* конечномерна. С другой стороны, на ней определено очевидным образом действие подстановки вместо переменных x_i элементов алгебры $F_0^*(d)$, т.е. задана структура T -пространства (см. [1]). В частности, на алгебре A^* задано действие симметрической группы, т.е. эта алгебра определяет некоторое представление симметрической группы S_d . Это представление несет в себе информацию о тождествах алгебры A^* . Насколько известно автору, оно пока мало изучено. С другой стороны, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $\text{Var}(A) = \text{Var}(A^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует очевидный сюръективный гомоморфизм алгебры A^* на алгебру A . Следовательно, $\text{Var}(A)$ – подмногообразие в $\text{Var}(A^*)$. Включение в другую сторону следует из самой конструкции алгебры A^* , что и доказывает предложение.

Обозначим через $\bar{f}$ образ элемента f из алгебры $F^*(d)$ относительно канонического гомоморфизма на алгебру A^* . Ясно, что любой элемент алгебры A^* можно представить в виде суммы элемента из алгебры L (свободного члена) и линейной комбинации обобщенных одночленов вида

$$\varepsilon_0 \bar{x}_{i_1} \varepsilon_1 \cdots \bar{x}_{i_n} \varepsilon_n,$$

где $n \leq d$, ε_q – матричная единица одной из алгебр $k_{r_1}, \dots, k_{r_m}$, т.е. ε_q имеет вид $e_{ij}^{(p)}$.

Среди конечномерных алгебр, порождающих данное многообразие $\mathfrak{R}$, модельная алгебра выделяется своей, так сказать, “большой инвариантностью и равномерностью” (в силу действия на ней полугруппы подстановок элементов из алгебры $F_0^*(d)$ вместо переменных x_i , а также действия группы S_d). Поэтому в качестве порождающей алгебры данного многообразия удобнее рассматривать именно модельную алгебру A^* . Представляют интерес соотношения в этой алгебре, которые, как уже отмечалось, определяют тождества многообразия $\mathfrak{R}$.

Скажем, что $\mathfrak{R}$ – *многообразие Капелли порядка n* , если на алгебрах этого многообразия выполнено тождество Капелли порядка n

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma y_0 x_{\sigma(1)} y_1 \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)} y_n = 0.$$

§ 2. Модельные алгебры, у которых на идеале M^* выполняется тождество типа Капелли

В этом параграфе мы рассмотрим соотношения на L -алгебрах, из которых, в частности, следует оценка кратности многообразия $\mathfrak{R}$ в некоторых специальных случаях.

Назовем *многочленом типа Капелли порядка n* многочлен алгебры F следующего вида

$$\Delta_n = u_1 + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{e\}} a_\sigma u_\sigma,$$

где $u_1 = y_0 x_1 y_1 \cdots y_{n-1} x_n y_n$, $y_0, \dots, y_n$ — часть переменных алгебры F , отличных от $x_1, \dots, x_n$, обозначенных для удобства другими буквами, u_σ получается из u_1 с помощью подстановки σ из симметрической группы S_n , действующей на переменных $x_1, \dots, x_n$, a_σ — элемент поля k . Переменные y_i будем называть *неподвижными*. Если $a_\sigma = (-1)^\sigma$, то $\Delta_n = c_n$ — обычный многочлен Капелли порядка n .

Рассмотрим следующую подстановку φ на алгебре F^* : $x_i \mapsto a_i x_i b_i, y_i \mapsto c_i y_i d_i$, где a_i, b_i, c_i, d_i — некоторые матричные единицы из алгебр $k_{r_1}, \dots, k_{r_m}$, причем a_i и b_i — диагональные матричные единицы, т.е. имеют вид: $e_{\alpha\alpha}^{(p)}, e_{\beta\beta}^{(q)}$. Результат действия такой подстановки φ на обобщенный многочлен f из алгебры F^* обозначим через f^φ . Тогда

$$\Delta_n^\varphi = u_1^\varphi + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{e\}} a_\sigma u_\sigma^\varphi.$$

Скажем, что φ — *допустимая подстановка* для Δ_n , если $u_1^\varphi \neq 0$.

Пары соседних неподвижных переменных $(y_0, y_1), \dots, (y_{n-1}, y_n)$ назовем *ячейками* многочлена Δ_n .

Две ячейки (y_i, y_{i+1}) и (y_j, y_{j+1}) назовем *однотипными* относительно допустимой подстановки φ , если для одночлена u_τ , получающегося из u_1 с помощью транспозиции $\tau = (ij)$, одночлен $u_\tau^\varphi \neq 0$. Другими словами, ячейки однотипны, если

- а) матричные единицы d_i и d_j принадлежат одной и той же алгебре k_{r_α} и оканчиваются одним и тем же индексом γ ;
- б) c_{i+1} и c_{j+1} принадлежат одной и той же алгебре k_{r_β} и начинаются с одного и того же индекса δ .

Типом ячейки назовем четверку $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Если алгебра коэффициентов L состоит всего из одного слагаемого k_r , то типом ячейки естественно считать пару (γ, δ) .

Множество всех ячеек разбивается на классы однотипных, чему соответствует разбиение множества $\{1, \dots, n\}$:

$$\{1, \dots, n\} = A_1 \cup \dots \cup A_l, \quad |A| = m_i.$$

Пусть $H_\varphi \cong S_{m_1} \times \dots \times S_{m_l}$ — подгруппа, действующая на классах однотипных относительно φ ячеек.

Если в допустимой подстановке φ однотипные ячейки идут подряд, то назовем φ *упорядоченной* подстановкой.

В случае упорядоченной подстановки имеет место разложение $u_1 = v_1 \cdots v_l$, где $v_1, \dots, v_l$ — подслова одночлена u_1 , соответствующие классам однотипных ячеек. Положим

$$v_i^{S_{m_i}} = \sum_{\sigma \in S_{m_i}} (-1)^\sigma v_i^\sigma,$$

где v_i^σ — результат действия на одночлен v_i подстановки σ из S_{m_i} . Прямо из введенных определений и конструкций вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть φ – допустимая подстановка. Тогда

- а) $\Delta_n^\varphi = u_1^\varphi + \sum_{\sigma \in H_\varphi \setminus \{e\}} a_\sigma u_\sigma^\varphi$;
- б) если φ – упорядоченная подстановка и $\Delta_n = c_n$ – многочлен Капелли, то

$$c_n^\varphi = (v_1^{S_{m_1}})^\varphi \cdots (v_l^{S_{m_l}})^\varphi.$$

Отсюда очевидным образом получается

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть B – L -алгебра, на которой выполнено тождество $\Delta_n = 0$ и все ячейки в Δ_n имеют различные типы относительно некоторой подстановки φ , т.е. $H_\varphi = \{e\}$. Тогда $u_1^\varphi = 0$ – L -тождество алгебры B . В частности, если на N^* выполнено тождество $\Delta_n = 0$, то $\bar{u}_1^\varphi = 0$ в алгебре A^* .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть B – k_r -алгебра, на которой выполнено тождество $\Delta_{r^2} = 0$. Тогда B – нильпотентная алгебра, причем $B^{2r^2+1} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлен Δ_{r^2} имеет r^2 ячеек. Ровно столько же, очевидно, можно реализовать различных типов ячеек подходящей допустимой подстановкой φ . Согласно следствию 1 на B выполнено тождество

$$\varepsilon_0 y_0 \delta_0 x_1 \varepsilon_1 \cdots x_n \varepsilon_n y_n \delta_n = 0,$$

где ε_i, δ_i – некоторые матричные единицы алгебры k_r . Учитывая полилинейность этого соотношения, с помощью подстановок можно осуществить умножения слева и справа элементов ε_i и δ_i на элементы из алгебры k_r . Ввиду отсутствия нетривиальных идеалов в алгебре k_r отсюда следует, что на алгебре B выполнено тождество

$$y_0 x_1 y_1 \cdots x_n y_n = 0,$$

что и доказывает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{R}$ – r -замкнутое многообразие, на котором выполнено тождество

$$\tilde{\Delta}_{r^2} = \Delta_{r^2}(f_1, \dots, f_{r^2}, g_0, \dots, g_{r^2}) = 0,$$

где все f_i и g_i – стандартные многочлены порядка $2r$ (т.е. имеющие вид $y \sum_{\sigma \in S_{2r}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(2r)} z$) от попарно непересекающихся наборов переменных. Тогда $\mu(\mathfrak{R}) \leq 2r^2 + 1$. Если при этом многообразие $\mathfrak{R}$ представимо, то индекс нильпотентности идеала M^* в алгебре A^* не превосходит $2r^2 + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_r^* – T -идеал обобщенных тождеств алгебры k_r в алгебре $F^* = k_r * F$. Как известно (см. [1], [3]), этот T -идеал порождается стандартным тождеством степени $2r$. Поэтому из условия получаем, что в алгебре F^*/I , где I – T -идеал, порожденный многочленом $\tilde{\Delta}_{r^2}$, алгебра $B = M_r^*/I$ удовлетворяет условию следствия 2. Следовательно, $B^{2r^2+1} = 0$. Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулировках следствий 2 и 3 можно рассматривать многочлены Δ_n , где $2 \leq n \leq r^2$.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще один тип многообразий, для которых несложно оценить кратность. Назовем *матрично-коммутаторным многообразием порядка r* многообразие сложности r , на котором выполнены все тождества вида $[f, g] = 0$, где $f, g \in M_r$, $r \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\mathfrak{R}$ – матрично-коммутаторное многообразие, то $\mu(\mathfrak{R}) \leq 3$. Если при этом многообразие $\mathfrak{R}$ представимо, то $(M^*)^3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как M_r лежит в коммутаторе алгебры F , то достаточно показать, что $[x, y]fg = 0$ – тождество на многообразии $\mathfrak{R}$. В самом деле, по модулю тождеств многообразия $\mathfrak{R}$ имеем

$$xyfg \equiv xgyf \equiv yfxg \equiv yxgf \equiv yxfg,$$

что и доказывает предложение.

§ 3. Оценка кратности r -замкнутого многообразия Капелли

В этом параграфе будет дана оценка кратности r -замкнутого многообразия Капелли сложности r (см. также [4]). В частности, отсюда следует оценка кратности многообразия, порожденного равносоставленной алгеброй $A = k_r \oplus \cdots \oplus k_r + N$, что равносильно, по сути дела, оценке индекса нильпотентности идеала M . Для этих целей нам понадобятся нижеследующие понятия и факты.

Пусть $F^* = F * k_r$ – алгебра обобщенных k_r -многочленов. По определению T -идеалы алгебры F^* – это ее идеалы, устойчивые относительно подстановок вместо переменных x_i элементов из алгебры F^* , и, следовательно, они состоят из обобщенных тождеств алгебры k_r . Обозначим через M_r^* T -идеал всех обобщенных тождеств алгебры k_r . Ясно, что $M_r^* \cap F = M_r$ (см. также [1]). Для любого T -идеала I алгебры F^* , содержащего хотя бы один многочлен из алгебры F и некоторый обобщенный многочлен из M_r^* , не обращающийся в нуль на алгебрах k_s при $s > r$, радикал алгебры F^*/I совпадает с $(M_r^* + I)/I$ (см. также [1]).

Отметим следующие хорошо известные факты (см. [1], [3], [5]).

I. В алгебре F^* линейный обобщенный многочлен вида

$$\psi_{ij}(x_q) = \sum_{\alpha=1}^{r^2} e_{\alpha i} x_q e_{j \alpha}$$

является центральным на алгебре k_r и в F^* выполнено тождество

$$[\psi_{ij}(x_q), a] = 0 \tag{1}$$

для любой матрицы a из k_r . Будем называть $\psi_{ij}(x_q)$ *центральным многочленом типа (i, j)* .

II. Имеет место следующее разложение переменной

$$x_q = \sum_{i,j} \psi_{ij}(x_q) e_{ij}. \tag{2}$$

III. Идеал M_r^* порождается (как T -идеал) коммутатором $[\psi_{ij}(x_1), x_2]$.

Допустимую подстановку φ назовем *нормированной*, если подслово в u_1 , отвечающее одной ячейке, имеет вид

$$y_l e_{ti} x_{l+1} e_{jm} y_{l+1}.$$

Пусть c_l – многочлен Капелли (где $l = 2, 3, 4$) и φ – некоторая нормированная допустимая для этого многочлена подстановка на алгебре F^* . Если все ячейки многочлена c_l однотипны относительно подстановки φ (имеют тип (i, j)), то обобщенный многочлен c_l^φ назовем *элементарным блоком типа (i, j)* . Например, обобщенный многочлен

$$c_3^\varphi = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma e_{11} y_0 e_{11} x_{\sigma(1)} e_{11} y_1 e_{11} x_{\sigma(2)} e_{11} y_2 e_{11} x_{\sigma(3)} e_{11} y_3 e_{11}$$

является элементарным блоком типа $(1, 1)$ относительно подстановки, которая умножает все переменные справа и слева на e_{11} .

ЛЕММА 1. При $i = 2$ или 3 T -идеал, порожденный элементарным блоком c_i^φ в алгебре F^* , совпадает с M_r^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По модулю T -идеала $(c_2^\varphi)^T$, порожденного многочленом c_2^φ , в котором все ячейки имеют тип (i, j) , справедливы следующие сравнения

$$[\psi_{ij}(x_1), x_2] \cdot 1 \equiv [\psi_{ij}(x_1), x_2] \psi_{ij}(e_{ij}) \equiv [\psi_{ij}(e_{ij}), x_2] \psi_{ij}(x_1) \equiv [1, x_2] \psi_{ij}(x_1) \equiv 0.$$

Что и доказывает (с учетом III) лемму 1 для многочлена c_2^φ .

Для рассмотрения случая $i = 3$ докажем сначала, что по модулю $(c_3^\varphi)^T$ имеет место сравнение

$$[\psi_{ij}(x_1), \psi_{ij}(x_2)] \equiv 0. \quad (3)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} [\psi_{ij}(x_1), \psi_{ij}(x_2)] \cdot 1 &\equiv [\psi_{ij}(x_1), \psi_{ij}(x_2)] \psi_{ij}(e_{ij}) \\ &\equiv [\psi_{ij}(x_1), \psi_{ij}(e_{ij})] \psi_{ij}(x_2) + [\psi_{ij}(e_{ij}), \psi_{ij}(x_2)] \psi_{ij}(x_1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Из (3) с помощью очевидной подстановки в x_2 следует

$$[\psi_{ij}(x_1), \psi_{\alpha\beta}(x_2)] \equiv 0$$

для любых α и β . Применим к левой части полученного сравнения *операцию восстановления*, т.е. рассмотрим сумму (преобразуемую с учетом I)

$$\sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq r} e_{\alpha\beta} [\psi_{ij}(x_1), \psi_{\alpha\beta}(x_2)] = \left[\psi_{ij}(x_1), \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq r} e_{\alpha\beta} \psi_{\alpha\beta}(x_2) \right].$$

Тогда с учетом (1), (2) получаем

$$[\psi_{ij}(x_1), x_2] \equiv 0.$$

Остается применить III. Лемма доказана.

С каждым многочленом $f(x_1, \dots, x_d)$ из свободной алгебры F можно связать обобщенный многочлен $f^{(i,j)}(x_1, \dots, x_d) = f(\psi_{ij}(x_1), \dots, \psi_{ij}(x_d))$.

ЛЕММА 2. Идеал $(c_4^\varphi)^T$ содержит обобщенный многочлен $c_4^{(\alpha, \beta)}$ для любых α и β из $\{1, \dots, r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все ячейки в c_4^φ имеют тип (i, j) относительно подстановки φ . Тогда

$$c_4^\varphi = \sum_{\sigma \in S_4} (-1)^\sigma \varepsilon y_0 e_{m_1 i} x_{\sigma(1)} e_{j m_1} y_1 \cdots y_3 e_{m_4 i} x_{\sigma(4)} e_{j m_4} y_4 \delta.$$

Подстановками в y_0 и y_4 и умножениями слева и справа можно избавиться от ε и δ (т.е. сделать на их местах 1). Далее, вместо данных m_k с помощью очевидных подстановок можно поставить любые натуральные числа из $\{1, \dots, r\}$. Остается заметить, что $c_4^{(i, j)}$ есть сумма c_4^φ и всех остальных многочленов, получающихся из него подобными подстановками, с последующей заменой y_k на $\psi_{ij}(y_k)$. Для получения любого $c_4^{(\alpha, \beta)}$ из $c_4^{(i, j)}$ нужно сделать подстановку, умножающую все переменные $x_1, \dots, x_4$ слева на $e_{i\alpha}$ и справа на $e_{\beta j}$, и сделать подходящую подстановку в y_i . Лемма доказана.

Для дальнейшего нам понадобится следующая константа. Как известно, в случае поля характеристики 0 T -идеал алгебры F , порожденный многочленом c_4 , содержит многочлен $[x_1, x_2] \cdots [x_{2\omega-1}, x_{2\omega}]$ для некоторого натурального числа ω . Будем предполагать, что ω — наименьшее из натуральных чисел, для которых выполнено указанное включение. Автору не известно точное значение числа ω , а грубую оценку его здесь приводить не представляется уместным.

ЛЕММА 3. В алгебре F^* T -идеал, порожденный обобщенным многочленом c_4^φ , содержит $M_r^{*\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу сказанного выше произведение

$$y_0 [x_1, x_2] y_1 \cdots y_{\omega-1} [x_{2\omega-1}, x_{2\omega}] y_\omega \quad (4)$$

содержится в $(c_4)^T$. Заменяя в (4) все переменные на центральные многочлены типа (i, j) и учитывая свойство I, получаем, что в алгебре F^* T -идеал, порожденный $c_4^{(i, j)}$, содержит произведение

$$\psi_{ij}(y_0) [\psi_{ij}(x_1), \psi_{ij}(x_2)] \psi_{ij}(y_2) \cdots \psi_{ij}(y_{\omega-1}) [\psi_{ij}(x_{2\omega-1}), \psi_{ij}(x_{2\omega})] \psi_{ij}(y_\omega).$$

Применяя к этому выражению $2\omega + 1$ раз операцию восстановления, приведенную в доказательстве леммы 1, получаем, что произведение

$$y_0 [\psi_{ij}(x_1), x_2] y_1 \cdots y_{\omega-1} [\psi_{ij}(x_{2\omega-1}), x_{2\omega}] y_\omega$$

содержится в идеале $(c_4^{(i, j)})^T$.

В силу леммы 2 и свойства III отсюда следует утверждение леммы 3.

Прежде чем исследовать поставленный в начале этого параграфа вопрос, выясним, какую сложность может иметь r -замкнутое многообразие Капелли порядка $n \geq r^2 + 1$ (n не может быть меньше, чем $r^2 + 1$, так как тогда не будет r -замкнутости).

Если $n \geq 4r^2 + 1$, то в многообразии X_n содержится алгебра матриц k_{2r} . Следовательно, сложность такого многообразия не меньше $2r$. Если же $r^2 + 1 \leq n \leq 4r^2$, то r -замкнутое многообразие Капелли порядка n , как будет показано ниже, имеет сложность r , а соответствующая кратность имеет хорошую оценку сверху.

ТЕОРЕМА. Если $\mathfrak{R}$ — r -замкнутое многообразие Капелли порядка $r^2 + n$, то при $r^2 + 1 \leq r^2 + n \leq 4r^2$ многообразие $\mathfrak{R}$ имеет сложность r , причем

- (1) при $n = 1, \dots, 2r^2$ имеет место неравенство $\mu(\mathfrak{R}) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a ;
- (2) при $n = 1, \dots, 3r^2$ и нулевой характеристике основного поля $\mu(\mathfrak{R})$ ограничена линейной функцией от n вида $\frac{\omega}{3}n + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Предположим, что $n = 1$ или 2 . Тогда очевидным образом строится упорядоченная нормированная подстановка φ , для которой (в обозначениях предложения 2 из § 2) $m_1 = 2$ или 3 , $m_i = 1$ при $i \geq 2$. Следовательно,

$$c_{r^2+n}^\varphi = (v_1^{S_{m_1}})^\varphi v_2^\varphi \cdots v_l^\varphi = c_{m_1}^\varphi v_2^\varphi \cdots v_l^\varphi.$$

В силу полилинейности c_{r^2+n} после очевидных специализаций и линейных действий все сомножители, начиная со второго, исчезнут (т.е. превратятся в единицы), и мы получим, что в T -идеале $(c_{r^2+n})^T$ содержится элементарный блок $c_{m_1}^\varphi$. В силу леммы 1 в нем содержится и T -идеал M_r^* , т.е. $\mu(\mathfrak{R}) \leq 1$.

Если $n \geq 3$, то $n = 2m$ или $n = 2m + 1$, где m — некоторое натуральное число. При четном n очевидным образом строится упорядоченная нормированная подстановка φ , для которой (см. предложение 2)

$$c_{r^2+n}^\varphi = b_1 \cdots b_m v_{m+1}^\varphi \cdots v_l^\varphi,$$

где $b_1, \dots, b_m$ — элементарные блоки вида c_3^φ , имеющие различные типы. Избавляясь с помощью специализаций и линейных действий от сомножителей v_i^φ и применяя лемму 1, получаем, что в данном T -идеале содержится M_r^{*m} , т.е. $\mu(\mathfrak{R}) \leq m = \left\lfloor \frac{2m-1}{2} \right\rfloor + 1$.

Если $n = 2m + 1$, то нетрудно построить упорядоченную нормированную подстановку φ , для которой

$$c_{r^2+n}^\varphi = b_1 \cdots b_m b_{m+1} v_{m+2}^\varphi \cdots v_l^\varphi,$$

где $b_1, \dots, b_m$ — элементарные блоки типа c_3^φ , а b_{m+1} — элементарный блок типа c_2^φ . По лемме 1 $\mu(\mathfrak{R}) \leq m + 1 = \left\lfloor \frac{2m+1-1}{2} \right\rfloor + 1$. Что и завершает рассмотрение случая (1).

(2) При $1 \leq n \leq 3r^2$ и нулевой характеристике основного поля оценка несколько более грубая. Пусть $n = 3m + q$, где $q = 0, 1$ или 2 . Ясно, что можно указать упорядоченную нормированную подстановку φ , для которой (см. предложение 2)

$$c_{r^2+n}^\varphi = b_1 \cdots b_m b_{m+1} v_{m+1}^\varphi \cdots v_l^\varphi,$$

где $b_1, \dots, b_m$ — элементарные блоки вида c_4^φ , имеющие разные типы, b_{m+1} — единица или элементарный блок вида c_2^φ или c_3^φ . Используя лемму 3 аналогично случаю (1), получаем, что

$$\mu(\mathfrak{R}) \leq \omega m + 1 \leq \omega \frac{n}{3} + 1.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Общая оценка (достаточно завышенная) кратности многообразия Капелли без предположения об r -замкнутости, как представляется, может быть получена с помощью индукционного спуска по сложности многообразия. Вероятно, существуют более тонкие оценки функции $\mu(X_n)$. Кроме того, было бы весьма интересно исследовать строение модельной алгебры многообразия X_n .

§ 4. Оценка кратности многообразий, получаемых с помощью некоторых конструкций

В этом параграфе будет дана оценка кратности для многообразий, получающихся из некоторых основных компонент, рассмотренных в предыдущем параграфе, с помощью операций суммы и так называемого ниль-произведения. Эти операции не повышают сложности многообразия в том смысле, что получающееся в результате многообразие имеет сложность, равную максимуму сложностей компонент.

Пусть многообразие $\mathfrak{R}$ раскладывается в сумму

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \dots + \mathfrak{R}_s,$$

т. е. порождается многообразиями $\mathfrak{R}_i$, причем μ_i — кратность многообразия $\mathfrak{R}_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $\mu(\mathfrak{R}) = \max\{\mu_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свободная алгебра $\overline{F} = k\langle \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots \rangle$ многообразия $\mathfrak{R}$ естественным образом вкладывается в прямую сумму свободных алгебр $F_j = k\langle x_1^{(j)}, \dots, x_i^{(j)}, \dots \rangle$ многообразий $\mathfrak{R}_i$ посредством сопоставления

$$\overline{x}_i \mapsto x_i^{(1)} + \dots + x_i^{(s)}.$$

Радикал алгебры F , очевидно, определяется слагаемым многообразия $\mathfrak{R}$, имеющим наибольшую сложность r . Таким образом, радикал алгебры $\overline{F}$ совпадает с идеалом $\overline{M}_r$ (образ идеала M_r в алгебре $\overline{F}$). Ясно, что он исчезает в степени, равной максимуму индексов нильпотентности радикалов алгебр F_i . Отсюда и следует предложение 4.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие определения.

Многообразие $\mathfrak{R}$ назовем r -согласованным, если оно r -замкнуто и является многообразием Капелли порядка $r^2 + n$, где $1 \leq n \leq 3r^2$. Последнее условие по сути дела означает, что из выполнения на многообразии данного тождества Капелли следует (в силу доказанной теоремы), что оно имеет сложность r .

Аналогично, конечномерную равносоставленную алгебру A назовем r -согласованной, если на ней выполнено тождество Капелли порядка $r^2 + n$, где $1 \leq n \leq 3r^2$.

Из предложения 4, доказанной выше теоремы и введенных определений следует ряд утверждений (характеристика основного поля предполагается нулевой).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{R}$ — сумма r_i -согласованных многообразий Капелли порядка $r_i^2 + n_i$. Тогда

$$\mu(\mathfrak{R}) \leq \frac{\omega}{3}n + 1,$$

где $n = \max\{n_i\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ – прямая сумма r_i -согласованных алгебр, то кратность многообразия $\text{Var}(A)$ не превосходит $\frac{\omega}{3}n + 1$, где $n = \max\{n_i\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathfrak{R}$ – многообразие Капелли порядка $r^2 + n$, являющееся суммой r_i -замкнутых многообразий, где $r = \max\{r_i\}$, $r_0 = \min\{r_i\}$, $1 \leq r^2 - r_0^2 + n \leq 3r_0^2$. Тогда

$$\mu(\mathfrak{R}) \leq \frac{\omega}{3}(r^2 - r_0^2 + n) + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию каждое из многообразий, входящих в сумму, является r_i -согласованным, так как $1 \leq r^2 - r_i^2 + n \leq 3r_i^2$. Остается заметить, что $\max\{r^2 - r_i^2 + n\} = r^2 - r_0^2 + n$, и воспользоваться предложением 4.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ – прямая сумма r_i -согласованных алгебр, причем на алгебре A выполнено тождество Капелли порядка $r^2 + n$, где $1 \leq r^2 - r_i^2 + n \leq 3r_i^2$, $r = \max\{r_i\}$, $r_0 = \min\{r_i\}$, то кратность многообразия $\text{Var}(A)$ не превосходит $\frac{\omega}{3}(r^2 - r_0^2 + n) + 1$.

Для рассмотрения еще одной конструкции напомним сначала следующее определение. Пусть A и B – некоторые k -алгебры.

Ниль-произведением алгебр A и B называется алгебра $A \circ B$ (ее явная конструкция дана в [6]), удовлетворяющая следующим условиям

- 1) A и B – подалгебры алгебры $A \circ B$, причем $AB = BA = (0)$;
- 2) в алгебре $A \circ B$ имеется такой элемент t , что для любых $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (a_1 t) b_1 &= a_1 (t b_1), \quad a_1 (a_2 t) = (a_1 a_2) t, \quad (t b_1) b_2 = t (b_1 b_2), \\ a_1 (a_2 t b_1) &= (a_1 a_2) t b_1, \quad (a_2 t b_1) b_2 = a_1 t (b_1 b_2); \end{aligned}$$

- 3) если (t) – идеал алгебры $A \circ B$, порожденный элементом t , то

$$Bt = tA = (t)^2 = (kt + At + tB + AtB)^2 = (0);$$

- 4) $At \cong A$, $tB \cong B$, $AtB \cong A \otimes_k B$ как k -модули;
- 5) $A \circ B = A \oplus B \oplus kt \oplus At \oplus tB \oplus AtB = A \oplus B \oplus (t)$ как k -модули.

Ниль-произведение любого конечного набора k -алгебр определяется через ниль-произведение двух алгебр, причем это определение с точностью до изоморфизма, очевидно, не зависит от расстановки скобок.

Назовем ниль-произведением многообразий $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ многообразие $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2 = \text{Var}(F_1 \circ F_2)$, где F_1 и F_2 – свободные счетнопорожденные алгебры многообразий $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ соответственно. Ясно, что, как и в случае суммы многообразий,

$$r(\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2) = \max\{r(\mathfrak{R}_1), r(\mathfrak{R}_2)\}.$$

В силу сказанного выше очевидным образом определяется ниль-произведение любого конечного числа многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. $\mu(\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2) \leq 2 \max\{\mu_1, \mu_2\}$, где μ_1 и μ_2 — кратности многообразий $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть r — сложность многообразия $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ и f, g — многочлены из идеала M_r^n , где $n = \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Если F_1 и F_2 — свободные алгебры многообразий $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ соответственно, то множества $f(F_1 \circ F_2)$ и $g(F_1 \circ F_2)$ лежат в идеале (t) . Следовательно, $f(F_1 \circ F_2)g(F_1 \circ F_2) = 0$. Таким образом, идеал M_r^{2n} обращается в нуль на алгебре $F_1 \circ F_2$, что и доказывает предложение 5.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{R}$ — ниль-произведение многообразий кратностей $\mu_1, \dots, \mu_s$. Тогда

$$\mu(\mathfrak{R}) \leq 2^{s-1} \max\{\mu_1, \dots, \mu_s\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathfrak{R}$ — ниль-произведение r_i -согласованных многообразий Капелли порядка $r_i^2 + n_i$, $i = 1, \dots, s$. Тогда

$$\mu(\mathfrak{R}) \leq 2^{s-1} \left(\frac{\omega}{3} n + 1 \right),$$

где $n = \max\{n_i\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если A — ниль-произведение r_i -согласованных алгебр $A_1, \dots, A_s$, то кратность многообразия $\text{Var}(A)$ не превосходит $2^{s-1} \left(\frac{\omega}{3} n + 1 \right)$, где $n = \max\{n_i\}$.

В заключение отметим, что полученные в этом параграфе оценки очевидным образом распространяются на любые подмногообразия рассматриваемых здесь конструкций, если эти подмногообразия имеют максимальную сложность r .

Список литературы

1. Гришин А. В. О конечной базирруемости систем обобщенных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 899–927.
2. Кемер А. Р. Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 4. С. 726–753.
3. Бейдар К. И. Полупервичные кольца с обобщенными тождествами // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 249–250.
4. Гришин А. В. Оценка кратности r -замкнутого многообразия Капелли // Междунар. алгебр. семинар. Тезисы докл. Москва, 2000. С. 15–16.
5. Littlewood D. E. Identical relations, satisfied in an algebra // Proc. London Math. Soc. 1931. V. 32. P. 312–320.
6. Гришин А. В. Асимптотические свойства свободных конечно порожденных алгебр некоторых многообразий // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 6. С. 608–625.

Московский педагогический государственный университет

Поступила в редакцию
04.06.2001