Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразования Кокстера и спектры операций, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 3, 37–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm635>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:18:21

УДК 512.543.14+512.643.5+512.817.73

В. А. Колмыков

Преобразования Кокстера и спектры операций

Рассматриваются преобразования Кокстера, связанные с оснащенными деревьями. Минус единица играет исключительную роль по отношению к спектрам таких деревьев. В множествах всех оснащенных деревьев, содержащих и не содержащих “–1” в спектре, находятся системы образующих элементов и операций.

Библиография: 6 названий.

Преобразование Кокстера – это суперпозиция операторов, являющихся отражениями (или даже псевдоотражениями) относительно некоторого набора гиперплоскостей. Правда, это – слишком общая конструкция, и в ее исследовании пока не удалось достаточно далеко продвинуться. Если же наложить дополнительное условие, которое можно коротко охарактеризовать как “древесность”, то многое значительно упрощается.

Древесность – и это отмечено в [1] и [2] – является достаточно важным случаем в ситуациях, когда преобразования Кокстера появляются в теории алгебр Ли или в теории представлений колчанов.

В настоящей работе получено несколько утверждений, касающихся спектра и характеристического многочлена преобразования Кокстера, ассоциированного с произвольным оснащенным деревом. На языке операций над деревьями показано, что минус единица играет исключительную роль по отношению к спектрам оснащенных деревьев. Затем в множествах $\mathcal{L}_-$ и $\mathcal{L}_+$ оснащенных деревьев, содержащих и не содержащих минус единицу в спектре, найдены системы образующих элементов и операций. Тем самым усилены соответствующие результаты работы [3].

Почти все приведенные примеры не только иллюстрируют определения и теоремы, но содержат расчеты, необходимые для доказательств лемм.

§ 1. Преобразование Кокстера и его бинарное разложение

Пусть A – комплексная $(n \times n)$ -матрица. Если $U = U(i, j)$ – некоторое условие, наложенное на i и j , то через $A_{(U)}$ обозначим матрицу, получающуюся из A , если в ней оставить все элементы, индексы которых удовлетворяют условию U , а остальные заменить нулями. Говоря об индексах, мы имеем в виду, что во всех конструкциях вида $A_{(U(i, j))}$ индекс i отвечает за номер строки, а j – за номер столбца. Например, если k – фиксированное число, то $A_{(j=k)}$ получается из A занулением всех элементов, кроме тех, которые стоят в k -м столбце. Положим $R_k = R_k(A) = I - A_{(j=k)}$. Введем обозначение:

$$C(A) = R_1(A)R_2(A) \cdots R_n(A).$$

Преобразованием Кокстера, связанным с матрицей A , называется преобразование пространства строк $x \mapsto xC(A)$.

Следующее утверждение и его следствие имеются в [1; гл. 5, § 6, упр. 3].

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Имеет место представление:*

$$C(A) = (I - A_{(i \geq j)})(I + A_{(i < j)})^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, предложенное в [1], несколько громоздко. Попробуем доказать короче. Матрицу $I + A_{(i < j \leq k)} - A_{(i \geq j > k)}$ обозначим X_k (так как внутри она своими очертаниями напоминает букву X). Легко видеть, что $R_k X_k = X_{k-1}$. Поэтому $R_1 \cdots R_n X_n = X_0$. Иными словами, $C(A)(I + A_{(i < j)}) = I - A_{(i \geq j)}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место представление:*

$$|\lambda I - C(A)| = |A_{(i > j)} + ((\lambda - 1)I + A_{(i = j)}) + \lambda A_{(i < j)}|.$$

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим $(n+1) \times (n+1)$ -матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -l \\ -s^t & 2I_n \end{pmatrix}$, где l и s — некоторые $(1 \times n)$ -матрицы. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в пространстве $(1 \times n)$ -матриц. Тогда

$$|\lambda I - C(A)| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -l\lambda \\ -s^t & (\lambda + 1)I_n \end{vmatrix} = \begin{cases} (\lambda + 1)^{n+1} - \langle l, s \rangle (\lambda + 1)^{n-1} \lambda & \text{при } n > 1, \\ (\lambda + 1)^2 - \langle l, s \rangle \lambda & \text{при } n = 1, \\ \lambda + 1 & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

Например, минус единица *не* принадлежит спектру матрицы $C(A)$ в “редких” случаях — тогда и только тогда, когда одновременно $n = 1$ и $\langle l, s \rangle \neq 0$.

§ 2. Древесность

С матрицей A можно связать граф G_A следующим образом. Рассмотрим произвольное n -элементное множество V и произвольную биекцию $\mu: \{1, \dots, n\} \rightarrow V$. На множестве V как на вершинах построим граф, в котором вершины $\mu(i)$ и $\mu(j)$ (где $i \neq j$) соединены ребром тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$ либо $a_{ji} \neq 0$.

ПРИМЕР 2.1. Звездой Z_n (где n — неотрицательное целое число) называется $(n+1)$ -вершинное дерево, в котором одна “центральная” вершина соединена ребрами с остальными n вершинами и других ребер нет. Возьмем A из примера 1.1. Для матриц-строк l и s через $N = N(l, s)$ обозначим количество тех значений индекса i , для которых $l_{1i} = s_{1i} = 0$. Граф G_A представляет собой объединение звезды Z_{n-N} и N экземпляров звезды Z_0 .

ЛЕММА 2.1 [1; гл. 5, § 6, упр. 3]. Пусть G_A — лес и $a_{ii} = 2 \ \forall i$. Тогда

$$|\lambda^2 I - C(A)| = \lambda^n |A_{(i > j)} + (\lambda + \lambda^{-1})I + A_{(i < j)}|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Во французском и в русском изданиях [1] — опечатка. Написано: “ $a_{ii} = 1$ ”; следует читать: “ $a_{ii} = 2$ ”.

ЛЕММА 2.2. Пусть G_A – лес и $a_{ii} = 2 \quad \forall i$. Если матрица A' получается из A некоторой перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов, то характеристические многочлены матриц $C(A)$ и $C(A')$ совпадают.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – конечный граф без петель и кратных ребер, V – множество всех его вершин. Оснащением этого графа называется отображение $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ такое, что $f(u, v) = f(v, u) = 0$ тогда и только тогда, когда u и v не соединены ребром. Вектор $\mathbf{f}(u, v) = (f(u, v), f(v, u))$ назовем *ив-оснасткой*. Если вершины u и v инцидентны, то этот вектор назовем *оснасткой ребра $\overline{uv}$* . Пара (G, f) называется *оснащенным графом*. Занумеруем как-нибудь его вершины. Матрицей оснащения (в этой нумерации) назовем матрицу F с элементами $f_{ij} = f(u_i, u_j)$. Множество всех оснащенных деревьев обозначим $\mathcal{L}$. Если к этому множеству добавить пустое дерево Emp , то полученное множество обозначим $\mathcal{L}_0$.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим звезду Z_1 . Ее вершины обозначим u и v . Пусть a и b – два комплексных числа, из которых хотя бы одно не равно нулю. Определим оснащение следующим образом: $f(u, u) = f(v, v) = 0$, $f(u, v) = a$, $f(v, u) = b$. Это оснащение будем обозначать $a \bullet b$. Если u считать первой вершиной, а v – второй, то матрицей оснащения в такой нумерации будет матрица $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

СОГЛАШЕНИЕ. С каждым графом можно связать естественное оснащение:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \text{ и } v \text{ инцидентны,} \\ 0, & \text{если } u \text{ и } v \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$

Иногда, если это не вызывает путаницы, оснащенный граф (G, δ) мы будем обозначать буквой G .

ЛЕММА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $H = (G, f)$ – оснащенный лес. Характеристический многочлен матрицы $C(2I - F)$ не зависит от нумерации вершин. Этот многочлен назовем *характеристическим многочленом оснащенного леса H* и обозначим $H(\lambda)$.

ПРИМЕР 2.3. 1) Легко видеть, что $(Z_1, a \bullet b)(\lambda) = (\lambda + 1)^2 - ab\lambda$.
 2) Из примера 1.1 видно, что $Z_n(-1) \neq 0$, если и только если $n = 1$.
 3) Более общо: $(Z_n, f)(-1) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $n = 1$ и $f(u, v)f(v, u) \neq 0$ (здесь u и v – вершины Z_1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть H – оснащенный лес. Множество корней многочлена $H(\lambda)$ назовем *спектром H* и обозначим $\text{Spec } H$. Для пустого дерева Emp удобно положить $\text{Emp}(\lambda) \equiv 1$, $\text{Spec } \text{Emp} = \emptyset$.

ЛЕММА 2.3. Объединение спектров всех оснащенных деревьев состоит из всех ненулевых комплексных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – оснащенное дерево с матрицей оснащения F . Так как $\det R_i(2I - F) = -1$, то $\det C(2I - F) = (-1)^{|H|}$. Поэтому нуль не принадлежит объединению спектров оснащенных деревьев. Пусть z – ненулевое комплексное число. Тогда (см. пример 2.3) имеем: $z \in \text{Spec}(Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$.

§ 3. Простейшие спектральные свойства оснащенных деревьев

ЛЕММА 3.1. *Спектр оснащенного дерева возвратен, т.е. из $z \in \text{Спекс } T$ следует, что $z^{-1} \in \text{Спекс } T$. Спектр матрицы оснащения дерева симметричен относительно нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возвратность очевидно следует из леммы 2.1 и того факта (лемма 2.3), что нуль не принадлежит спектру оснащенного дерева.

Матрица оснащения дерева в некоторой нумерации имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ F_2 & 0 \end{pmatrix}$ с нулевыми квадратными блоками на диагонали, а спектр такой матрицы симметричен относительно нуля.

Определим $Q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ и $R: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом: $Q(z) = z^2$, $R(z) = z + z^{-1}$. Эти отображения сюръективны, но не инъективны. Рассмотрим многозначные сюръекции $\text{сох}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ и $\text{сох}^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, действующие по формулам $\text{сох}(z) = Q(R^{-1}(z))$ и $\text{сох}^{-1}(z) = R(Q^{-1}(z))$.

ЛЕММА 3.2. *Отображение сох переводит спектр матрицы оснащения на спектр дерева, а отображение сох^{-1} — наоборот.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В наших обозначениях лемма 2.1 переписется в виде $|Q(\lambda)I - C| = \lambda^n |R(\lambda)I - F|$, где $C = C(2I - F)$.

Пусть μ — собственное значение C . Через $\sqrt{\mu}$ обозначим одно из двух значений квадратного корня. Тогда $0 = |\mu I - C| = (\sqrt{\mu})^n |R(\sqrt{\mu})I - F|$. Так как $\mu \neq 0$, то $R(\sqrt{\mu})$ — собственное значение F . Итак, отображение сох^{-1} переводит спектр матрицы C в спектр матрицы F .

Пусть ν — собственное значение матрицы F . Через α обозначим одно из решений уравнения $R(z) = \nu$. Тогда $|\alpha^2 I - C| = \alpha^n |\nu I - F| = 0$. Итак, отображение сох переводит спектр матрицы F в спектр матрицы C .

Совмещение этих утверждений показывает, что отображения сох и сох^{-1} переводят спектр на спектр.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более подробно рассматриваемые отображения выглядят так:

$$\text{сох}(z) = \frac{z^2 - 2 + z\sqrt{z^2 - 4}}{2}; \quad \text{сох}^{-1}(z) = \frac{z + 1}{\sqrt{z}}.$$

СЛЕДСТВИЕ. 1) *Минус единица принадлежит спектру оснащенного дерева тогда и только тогда, когда его матрица оснащения вырождена.*

2) *Если число вершин оснащенного леса нечетно, то в его спектре есть минус единица.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно. 2) Матрица оснащения леса в некоторой нумерации имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ F_2 & 0 \end{pmatrix}$ с нулевыми квадратными блоками на диагонали, а такая матрица нечетного порядка вырождена.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пунктированным оснащенным деревом называется оснащенное дерево, в котором отмечена одна вершина. Множество всех пунктированных оснащенных деревьев обозначим $\dot{\mathcal{L}}$.*

СОГЛАШЕНИЕ. На звездах Z_n имеются естественные оснащения. На них также имеются естественные пунктирования, заключающиеся в выделении центра звезды (т.е. вершины степени n). Иногда, если это не вызывает путаницы, эти пунктированные оснащенные звезды будем обозначать теми же буквами Z_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если T и F – пунктированные оснащенные деревья, то $T \oplus F$ означает оснащенное дерево, получающееся из T и F отождествлением отмеченных вершин, $T \ominus F$ означает оснащенное дерево, получающееся из T и F соединением отмеченных вершин ребром, которому приписывается оснастка $\mathbf{f}(u, v) = (1, 1)$. Через $T \uparrow F$ обозначим оснащенное дерево, получающееся из T и F соединением отмеченных вершин ребром, которому приписывается оснастка $\mathbf{f}(u, v) = (1, 0)$, здесь u – отмеченная вершина T . Наконец, $\check{T}$ означает оснащенный лес, получающийся из T удалением отмеченной вершины.

ПРИМЕР 3.1. Проиллюстрируем эти операции на звездах: $Z_n \oplus Z_k = Z_{n+k}$; $Z_0 \ominus Z_0 = Z_1$; $Z_0 \uparrow Z_0 = (Z_1, 1 \bullet 0)$; $\check{Z}_1 = Z_0$; $\check{Z}_0 = \text{Emp}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Операции $\oplus$, $\ominus$ и $\uparrow$ – бинарные операции, определенные на $\check{\mathcal{L}}$ со значениями в $\mathcal{L}$.

ЛЕММА 3.3. Пусть T и F – пунктированные оснащенные деревья. Имеют место соотношения:

$$T \oplus F(\lambda) = \check{T}(\lambda) F(\lambda) + T(\lambda) \check{F}(\lambda) - (\lambda + 1) \check{T}(\lambda) \check{F}(\lambda), \quad (3.1)$$

$$T \ominus F(\lambda) = T(\lambda) F(\lambda) - \lambda \check{T}(\lambda) \check{F}(\lambda), \quad (3.2)$$

$$T \uparrow F(\lambda) = T(\lambda) F(\lambda). \quad (3.3)$$

В частности,

$$T \oplus F(-1) = \check{T}(-1) F(-1) + T(-1) \check{F}(-1), \quad (3.1')$$

$$T \ominus F(-1) = T(-1) F(-1) + \check{T}(-1) \check{F}(-1), \quad (3.2')$$

$$T \uparrow F(-1) = T(-1) F(-1). \quad (3.3')$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем первую формулу.

Случай 1: пусть ни T , ни F не равно Z_0 . Занумеруем вершины дерева $T \oplus F$ так: числами $1, 2, \dots, k = |T|$ – вершины, унаследованные от дерева T , причем отмеченную вершину – номером k , остальные вершины $T \oplus F$ занумеруем как угодно. Положим $\lambda^2 = \mu$. Определитель $T \oplus F(\mu) = |\lambda^2 - C|$ перепишем согласно лемме 2.1. Разложим его в сумму трех определителей вслед за разложением k -й строки $(t, \lambda + \lambda^{-1}, f) = (t, \lambda + \lambda^{-1}, 0) + (0, \lambda + \lambda^{-1}, f) + (0, -\lambda - \lambda^{-1}, 0)$. Эти три определителя соответственно равны $T(\mu) \check{F}(\mu)$, $\check{T}(\mu) F(\mu)$, $-(\mu + 1) \check{T}(\mu) \check{F}(\mu)$.

Случай 2: пусть $T = Z_0$. Иными словами, $T(\lambda) = \lambda + 1$, $\check{T}(\lambda) = \text{Emp}(\lambda) = 1$. Левая часть равенства (3.1) равна $F(\lambda)$. Правая его часть равна $(\lambda + 1) \cdot \check{F}(\lambda) + 1 \cdot F(\lambda) - (\lambda + 1) \cdot 1 \cdot \check{F}(\lambda)$.

Формула (3.2) является следствием формулы (3.1), так как $T \ominus F$ можно склеить из T , F и Z_1 при помощи операции $\oplus$ и операции пунктирования.

Формула (3.3) очевидна: достаточно занумеровать в дереве $T \uparrow F$ сначала вершины, унаследованные от дерева T , затем применить лемму 2.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для деревьев с естественным оснащением δ формулы (3.1) и (3.2) доказаны (минуя утверждение леммы 2.1) соответственно в [4] и [5], исходя непосредственно из определения преобразования Кокстера. Полученные в этих работах формулы названы *формулами разрезания* по вершине и по ребру. Для деревьев с естественным оснащением δ утверждения леммы 3.2 выведены в [6], с помощью формулы разрезания по вершине.

§ 4. Спектры операций на спектрализованных множествах

Сначала – несколько неформальных фраз. В математике слово “спектр” используется в различных значениях. Некоторые из этих значений можно объединить (допуская довольно сильное обобщение) следующим образом. Пусть имеется некоторый набор объектов и некоторое множество Λ , которому принадлежат (наблюдаемые) характеристики объектов. Спектром объекта M (точнее, Λ -спектром) называется множество $\text{спес } M \subseteq \Lambda$, состоящее из выбранных (в рамках какой-то спектральной теории) характеристик. Если имеется некоторая операция над объектами, то ее собственным значением назовем такое $\lambda \in \Lambda$, что из принадлежности его спектру каждого операнда следует принадлежность спектру результата операции. Антисобственным значением можно назвать такое $\lambda \in \Lambda$, что из отсутствия его в спектре хотя бы одного операнда следует отсутствие его в спектре результата операции. Теперь формализуем сказанное.

Множество $\mathcal{M}$ назовем *спектрализованным*, если для каждого его элемента M определено некоторое множество, обозначаемое $\text{спес } M$. Для $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ через $\text{Спес } \mathcal{K}$ обозначим объединение, а через $\text{спес } \mathcal{K}$ – пересечение всех $\text{спес } M$, где $M \in \mathcal{K}$. В частности, если для любого $M \in \mathcal{M}$ отождествлять $\{M\}$ и M , то $\text{Спес } M = \text{спес } M$.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – спектрализованные множества, причем $\text{Спес } \mathcal{M} = \text{Спес } \mathcal{N}$. Пусть $\mathcal{O}$ – некоторая частичная бинарная (или унарная) многозначная операция, определенная на $\mathcal{M}$, со значениями в $\mathcal{N}$. *Собственным значением* операции $\mathcal{O}$ назовем всякий элемент z из $\text{Спес } \mathcal{M}$, удовлетворяющий условию а) в случае бинарной операции и б) в случае унарной:

- а) для любых $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ из принадлежности $z \in \text{спес } \{M_1, M_2\}$ следует $z \in \text{спес } \mathcal{O}(M_1, M_2)$,
- б) для любого $M \in \mathcal{M}$ из принадлежности $z \in \text{спес } M$ следует $z \in \text{спес } \mathcal{O}(M)$.

Множество всех собственных значений операции $\mathcal{O}$ назовем ее *спектром* и обозначим $\text{спес } \mathcal{O}$.

Антисобственным значением операции $\mathcal{O}$ назовем всякий элемент z из $\text{Спес } \mathcal{M}$, удовлетворяющий условию а') в случае бинарной операции и б') в случае унарной:

- а') для любых $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ из не принадлежности $z \notin \text{Спес } \{M_1, M_2\}$ следует $z \notin \text{Спес } \mathcal{O}(M_1, M_2)$,
- б') для любого $M \in \mathcal{M}$ из не принадлежности $z \notin \text{Спес } M$ следует $z \notin \text{Спес } \mathcal{O}(M)$.

Множество всех антисобственных значений операции $\mathcal{O}$ назовем ее *антиспектром* и обозначим $\text{АСпес } \mathcal{O}$.

§ 5. Минус единица и спектры операций над оснащенными деревьями

Пусть на произвольном множестве $\mathcal{M}$ задана бинарная операция θ со значениями в некотором множестве $\mathcal{N}$. Сюръекция $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ индуцирует (вообще говоря) многозначную бинарную операцию $f(\theta)$, определенную на множестве $\mathcal{M}'$ со значениями в $\mathcal{N}$:

$$f(\theta)(A, B) = \{f(\theta(X, Y)) \mid X \in f^{-1}(A), Y \in f^{-1}(B)\}.$$

Операции $\oplus$, $\ominus$ и $\uparrow$ определены на множестве $\dot{\mathcal{L}}$. Отображение забывания пунктирования $\dot{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}$ индуцирует многозначные операции на $\mathcal{L}$, которые удобно обозначить теми же символами $\oplus$, $\ominus$ и $\uparrow$. Менее формально и более наглядно: если S и T – оснащенные деревья, то $S \oplus T$ – это множество, которое состоит из результатов всевозможных склеек S и T по паре вершин; множество $S \ominus T$ состоит из результатов соединений ребром произвольной вершины из S с произвольной вершиной из T , при этом добавленному ребру приписывается оснастка $(1, 1)$, что вместе с уже имеющимися оснастками остальных ребер задает оснащение; $S \uparrow T$ отличается от $S \ominus T$ лишь тем, что добавленному ребру приписывается оснастка $(1, 0)$.

Введем две унарные многозначные операции на $\mathcal{L}$, вторая из которых будет частичной.

Для $T \in \mathcal{L}$ через $\odot(T)$ обозначим множество всех оснащенных деревьев, получающихся из T , если любые ненулевые координаты любых uv -оснасток заменить на любые ненулевые.

Пусть $T \in \mathcal{L}$ таково, что уравнение $T = X \ominus Y$ разрешимо на множестве $\dot{\mathcal{L}}$. Через $\downarrow(T)$ обозначим множество всех деревьев вида $X \uparrow Y$, где X и Y – решения упомянутого уравнения. Другими словами, $\downarrow(T)$ состоит из всех оснащенных деревьев, получающихся из T , если в нем какую-нибудь оснастку вида $(1, 1)$ заменить на оснастку $(1, 0)$ или $(0, 1)$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Таблица спектров и антиспектров введенных на $\mathcal{L}$ операций такова:*

	$\oplus$	$\ominus$	$\odot$	$\downarrow$	$\uparrow$
спес	$\{-1\}$	$\emptyset$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\mathbb{C}^*$
ASпес	$\emptyset$	$\{-1\}$	$\{-1\}$	$\emptyset$	$\mathbb{C}^*$

Доказательство см. в § 7.

§ 6. Множества $\mathcal{L}_-$ и $\mathcal{L}_+$

Если $\mathcal{G}$ – некоторое множество оснащенных деревьев, то оно естественно разбивается на два подмножества $\mathcal{G}_- \sqcup \mathcal{G}_+$ оснащенных деревьев, содержащих и не содержащих минус единицу в спектре.

ЛЕММА 6.1. *Множество $\mathcal{L}_+$ замкнуто относительно операций $\ominus$, $\odot$ и $\uparrow$. Множество $\mathcal{L}_-$ замкнуто относительно операций $\oplus$, $\odot$, $\uparrow$ и $\downarrow$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно следует из теоремы 5.1.

В этом параграфе для множеств $\mathcal{L}_-$ и $\mathcal{L}_+$ предъявляются системы образующих элементов и операций. Поясним точнее, что имеется в виду.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество, $\mathcal{P}$ – его подмножество, $\mathcal{R}$ – набор операций (возможно, частичных и многозначных), позволяющих из элементов $\mathcal{P}$ строить какие-то элементы $\mathcal{M}$, а из полученных – другие и т. д. Если в результате такого конструирования из $\mathcal{P}$ посредством $\mathcal{R}$ получается все $\mathcal{M}$, то пару $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ назовем *конструктором* множества $\mathcal{M}$; обозначается $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P} \mid \mathcal{R} \rangle$. В [3] приведены примеры, показывающие, что понятие конструктора в какой-то мере формализует понятие “основная теорема”.

Положим $\mathcal{Z} = \{Z_n\}_{n=0}^3$. Тогда $\mathcal{Z}_+ = \{Z_1\}$, $\mathcal{Z}_- = \{Z_0, Z_2, Z_3\}$.

ТЕОРЕМА 6.1. *Имеют место представления:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_+ &= \langle \mathcal{Z}_+ \mid \odot, \ominus, \uparrow \rangle, \\ \mathcal{L}_- &= \langle \mathcal{Z}_- \mid \odot, \oplus, \uparrow, \downarrow \rangle.\end{aligned}$$

Иными словами, деревья из $\mathcal{L}_+$ и только они получаются из звезды Z_1 многократным применением операций $\odot$, $\ominus$ и $\uparrow$; деревья из $\mathcal{L}_-$ и только они получаются из звезд Z_0 , Z_2 и Z_3 многократным применением операций $\odot$, $\oplus$, $\uparrow$ и $\downarrow$.

Доказательство см. в § 8.

§ 7. Доказательство теоремы 5.1

Утверждения об операциях $\oplus$, $\ominus$ и $\uparrow$ получаются применением леммы 7.5 к утверждениям лемм 7.1, 7.2 и 7.4. Утверждения об операциях $\odot$ и $\downarrow$ доказаны в леммах 7.7 и 7.8.

ЛЕММА 7.1. *Спектр операции $\oplus$, определенной на множестве $\dot{\mathcal{L}}$, равен $\{-1\}$, а ее антиспектр пуст.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\text{spes } \oplus \supseteq \{-1\}$ следует из (3.1'). Докажем обратное включение. Пусть $z \in \text{spes } \oplus$. Положим $T = (Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$. С одной стороны, $T \oplus T(z) = 0$ (так как $T(z) = 0$ и $z \in \text{spes } \oplus$). С другой стороны, $T \oplus T(z) = -(z + 1)^3$ (по лемме 3.3). Отсюда $z = -1$.

Пустоту $\text{ASpes } \oplus$ докажем от противного. Пусть $z \in \text{ASpes } \oplus$.

Существует $T \in \dot{\mathcal{L}}$ такое, что $T(z) \neq 0$ и $\check{T}(z) = 0$. Действительно, для этого достаточно взять $T = Z_1$, если $z = -1$. Если же $z \neq -1$, то в качестве T можно взять $Z_0 \ominus (Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$, отметив в нем вершину, унаследованную от графа Z_0 . В этом случае $\check{T} = (Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$. Поэтому $\check{T}(z) = 0$. По формуле (3.2) имеем: $T(z) = Z_0(z) \cdot \check{T}(z) - z \cdot \text{Emp}(z) \cdot Z_0(z) = -z(z + 1) \neq 0$.

С одной стороны, $T \oplus T(z) \neq 0$ (так как $z \in \text{ASpes } \oplus$). С другой стороны, $T \oplus T(z) = 0$ (по формуле (3.1)).

ЛЕММА 7.2. *Спектр операции $\ominus$, определенной на множестве $\dot{\mathcal{L}}$, пуст, а ее антиспектр равен $\{-1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем включение $\{-1\} \subseteq \text{ASpec } \ominus$. Пусть $T(-1) \neq 0$. По следствию леммы 3.2 число вершин в T четно; отсюда число вершин в $\tilde{T}$ нечетно. По следствию леммы 3.2 имеем $\tilde{T}(-1) = 0$. В таком случае формула (3.2') принимает вид $T \ominus F(-1) = T(-1)F(-1)$. Пусть $F(-1) \neq 0$. Тогда $T \ominus F(-1) \neq 0$.

Докажем включение $\text{ASpec } \ominus \subseteq \{-1\}$. Пусть $z \in \text{ASpec } \ominus$. Утверждение $z = -1$ докажем от противного. Рассмотрим деревья $T = (Z_1, 1 + z \bullet 1)$ и $F = (Z_1, 1 + z \bullet z^{-1})$. Для них имеем: $T(z) = z + 1 \neq 0$, $F(z) = z(z + 1) \neq 0$. Отсюда (так как $z \in \text{ASpec } \ominus$) $T \ominus F(z) \neq 0$. Но из леммы 3.3 следует, что $T \ominus F(z) = 0$. Получено противоречие.

Пустоту $\text{спес } \ominus$ докажем от противного. Пусть $z \in \text{спес } \ominus$.

Существует $T \in \dot{\mathcal{L}}$ такое, что $T(z) = 0$ и $\tilde{T}(z) \neq 0$. Действительно, для этого достаточно взять $T = (Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$, если $z \neq -1$. Если же $z = -1$, то в качестве T можно взять звезду Z_2 , отметив в ней вершину степени 1.

С одной стороны, $T \oplus T(z) = 0$ (так как $z \in \text{спес } \ominus$). С другой стороны, $T \oplus T(z) \neq 0$ (по лемме 3.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – спектрализованные множества, причем $\text{Спес } \mathcal{M} = \text{Спес } \mathcal{N}$. Рассмотрим бинарную операцию $\mathcal{U}$, определенную на $\mathcal{M}$, со значениями в $\mathcal{N}$. Эту операцию назовем *объединительной*, если для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\text{спес } \mathcal{U}(X, Y) = \text{спес } X \cup \text{спес } Y$.

ПРИМЕР 7.1. Операция $\uparrow$, определенная на множестве $\dot{\mathcal{L}}$, является объединительной (это следует из формулы (3.3)).

ЛЕММА 7.3. *Спектр и антиспектр объединительной операции, определенной на спектрализованном множестве $\mathcal{M}$, совпадают и равны $\text{Спес } \mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально. Докажем, например, что $\text{спес } \mathcal{U} = \text{Спес } \mathcal{M}$. Пусть $z \in \mathcal{M}$. Если $z \in \text{спес } \{M_1, M_2\}$, то

$$z \in \text{Спес } M_1 \cup \text{Спес } M_2 = \text{Спес } \mathcal{U}(M_1, M_2) = \text{спес } \mathcal{U}(M_1, M_2).$$

Это означает, что $z \in \text{спес } \mathcal{U}$.

ЛЕММА 7.4. *Спектр и антиспектр операции $\uparrow$, определенной на множестве $\dot{\mathcal{L}}$, совпадают и равны $\mathbb{C}^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно следует из примера 7.1 и леммы 7.3.

ЛЕММА 7.5. *Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ и $\mathcal{N}$ – спектрализованные множества, причем $\text{Спес } \mathcal{M} = \text{Спес } \mathcal{M}' = \text{Спес } \mathcal{N}$. Пусть, далее, на $\mathcal{M}$ определена бинарная операция $\mathcal{O}$ со значениями в $\mathcal{N}$. Пусть, наконец, $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ – такая сюръекция, что $\text{спес } f(M) = \text{спес } M$ для любого $M \in \mathcal{M}$. Тогда*

- 1) $\text{спес } f(\mathcal{O}) = \text{спес } \mathcal{O}$,
- 2) $\text{ASpec } f(\mathcal{O}) = \text{ASpec } \mathcal{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Докажем включение $\text{спес } f(\mathcal{O}) \supseteq \text{спес } \mathcal{O}$. Пусть $z \in \text{спес } \mathcal{O}$.

Пусть $z \in \text{спес } \{A, B\}$ для некоторых $A, B \in \mathcal{M}'$. Пусть $X \in f^{-1}(A)$, $Y \in f^{-1}(B)$. Тогда $z \in \text{спес } A \cap \text{спес } B = \text{спес } f(X) \cap \text{спес } f(Y) = \text{спес } X \cap \text{спес } Y$.

Отсюда $z \in \text{спес } \theta(X, Y) = \text{спес } f(\theta(X, Y))$. Поскольку это имеет место для любых $X \in f^{-1}(A), Y \in f^{-1}(B)$, то

$$z \in \text{спес}\{f(\theta(X, Y)) \mid X \in f^{-1}(A), Y \in f^{-1}(B)\} = \text{спес } f(\theta)(A, B).$$

Итак, мы доказали, что из принадлежности $z \in \text{спес}\{A, B\}$ следует принадлежность $\text{спес } f(\theta)(A, B)$. Это значит, что $z \in \text{спес } f(\theta)$.

Докажем включение $\text{спес } f(\theta) \subseteq \text{спес } \theta$. Пусть $z \in \text{спес } f(\theta)$.

Пусть $z \in \text{спес}\{P, Q\}$ для некоторых $P, Q \in \mathcal{M}$. Тогда $z \in \text{спес } P \cap \text{спес } Q = \text{спес } f(P) \cap \text{спес } f(Q)$. Отсюда

$$\begin{aligned} z \in \text{спес } f(\theta)(f(P), f(Q)) &= \text{спес}\{f(\theta(X, Y)) \mid X \in f^{-1}(f(P)), Y \in f^{-1}(f(Q))\} \\ &\subseteq \text{спес } f(\theta(P, Q)) = \text{спес } \theta(P, Q). \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что из принадлежности $z \in \text{спес}\{P, Q\}$ следует принадлежность $z \in \text{спес } \theta(P, Q)$. Это значит, что $z \in \text{спес } \theta$.

2) Это равенство можно доказать, переписав доказательство первого равенства, заменяя $\in$ на $\notin$, спес — на ASпес , $\cap$ — на $\cup$.

Некоторые читатели, однако, не захотят утруждать себя проверкой того, что при такой замене все получается корректно. Для них мы предложим набросок другого доказательства, которое, кстати, и объясняет, почему упомянутая корректность имеет место.

Спектрализованное множество, аккуратно говоря, это пара $(\mathcal{M}, \mu)$, где $\mu: M \mapsto \text{Спес } M$. Спектр и антиспектр операции θ аккуратно было бы записывать как $\text{спес}_\mu \theta$ и $\text{ASпес}_\mu \theta$.

Множество $\mathcal{M}$ можно спектрализовать разными способами. Например, так: $(\mathcal{M}, \bar{\mu})$, где $\bar{\mu}: M \mapsto ((\text{Спес } \mathcal{M}) \setminus (\text{Спес } M))$. Нетрудно доказать следующие утверждения двойственности: $\text{спес}_{\bar{\mu}} \theta = \text{ASпес}_\mu \theta$ и $\text{ASпес}_{\bar{\mu}} \theta = \text{спес}_\mu \theta$.

Первое равенство нашей леммы было доказано для произвольной спектрализации μ , поэтому его можно написать и для $\bar{\mu}$, а затем воспользоваться равенствами двойственности.

ЛЕММА 7.6. *Если в оснащённом дереве любые ненулевые координаты любых uv -оснасток заменить на любые ненулевые, то это не скажется на наличии или отсутствии минуса единицы в его спектре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_0 — фиксированная вершина графа G . **Элементарным преобразованием около u_0** назовем умножение всех чисел $f(u_0, x)$ на ненулевое число и умножение всех чисел $f(y, u_0)$ на (возможно, другое) ненулевое число.

Вот два важных свойства таких преобразований. 1) Им соответствует умножение на ненулевые числа строк и столбцов матрицы оснащения, поэтому они не меняют ее вырожденности или невырожденности. 2) Пусть u_0 и v_0 — фиксированные инцидентные вершины. Элементарным преобразованием около u_0 можно заменить ненулевые координаты $u_0 v_0$ -оснастки на любые ненулевые так, что сохранятся все uv -оснастки, исключая, быть может, оснастки ребер вида $\overline{u_0 v}$.

Последовательностью элементарных преобразований около различных вершин *дерева* все измененные (по условию теоремы) координаты можно вернуть к первоначальным. При этом вырожденность или невырожденность матрицы оснащения сохранится. И, значит (по следствию леммы 3.2), это не скажется на наличии или отсутствии минуса единицы в спектре дерева.

ЛЕММА 7.7. *Спектр и антиспектр операции $\odot$ совпадают и равны $\{-1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включения $\text{спес } \odot \supseteq \{-1\} \subseteq \text{ASпес } \odot$ следуют из леммы 7.6.

Пустоту $\text{спес } \odot \setminus \{-1\}$ докажем от противного. Пусть $z \in \text{спес } \odot \setminus \{-1\}$. Поскольку $z \in \{z, z^{-1}\} = \text{спес}(Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$ и $z \in \text{спес } \odot$, то

$$z \in \text{спес}(Z_1, 1 + w \bullet 1 + w^{-1}) = \{w; w^{-1}\}$$

для любого комплексного числа w , отличного от нуля и минус единицы. А это, конечно, не верно.

Пустоту $\text{ASпес } \odot \setminus \{-1\}$ докажем от противного. Пусть $z \in \text{ASпес } \odot \setminus \{-1\}$. Возьмем $w \notin \{z; z^{-1}; 0; -1\}$. Поскольку $z \notin \{w; w^{-1}\} = \text{Спес}(Z_1, 1 + w \bullet 1 + w^{-1})$ и $z \in \text{ASпес } \odot$, то

$$z \notin \text{Спес}(Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1}) = \{z, z^{-1}\}$$

—противоречие.

ЛЕММА 7.8. *Спектр операции $\downarrow$ равен $\{-1\}$, а ее антиспектр пуст.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом доказательстве $\ominus$ и $\uparrow$ означают операции на $\mathcal{L}$.

Докажем включение $\{-1\} \subseteq \text{спес } \downarrow$. Пусть $T = X \ominus Y$. Если $-1 \in \text{спес } T$, то $-1 \in \text{Спес}\{X, Y\}$ (предположив противное, мы заключили бы согласно лемме 7.2, что $-1 \notin \text{Спес } X \ominus Y = \text{спес } T$). Это означает, что $X(-1) = 0$ или $Y(-1) = 0$. Тогда по формуле (3.3') получили бы $X \uparrow Y(-1) = 0$, т.е. $-1 \in \text{спес } X \uparrow Y$. Так происходит со всеми решениями уравнения $T = X \ominus Y$. Поэтому $-1 \in \text{спес}\{X \uparrow Y \mid X \ominus Y = T\} = \text{спес } \downarrow(T)$.

Пустоту $\text{спес } \downarrow \setminus \{-1\}$ докажем от противного. Возьмем z из этого множества.

Рассмотрим пунктированные оснащенные деревья T и F , приведенные при доказательстве включения $\text{ASпес } \ominus \subseteq \{-1\}$ в лемме 7.2 (для них $T(z) \neq 0$, $F(z) \neq 0$, $T \ominus F(z) = 0$). Так как $z \in \text{спес } T \ominus F$, то

$$z \in \text{спес } \downarrow(T \ominus F) \subseteq \text{спес } T \uparrow F = \text{спес } T \cap \text{спес } F.$$

Отсюда $T(z) = 0$ —противоречие.

Пустоту $\text{ASпес } \downarrow$ докажем от противного. Пусть $z \in \text{ASпес } \downarrow$. Рассмотрим дерево T , приведенное при доказательстве пустоты $\text{ASпес } \oplus$ в лемме 7.1. Отменим в нем пунктирование.

Если $z = -1$, то имеем: $z \notin \text{Спес } T$, отсюда

$$z \notin \text{Спес } \downarrow(T) = \text{Спес } Z_0 \uparrow Z_0 = \{-1\}$$

—противоречие.

Если $z \neq -1$, то имеем: $z \notin \text{Спес } T$, отсюда $z \notin \text{Спес } \downarrow(T)$, в частности, $z \notin \text{Спес } Z_0 \uparrow (Z_0, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$, поэтому

$$z \notin \text{Спес}(Z_1, 1 + z \bullet 1 + z^{-1})$$

—противоречие.

§ 8. Доказательство теоремы 6.1

ЛЕММА 8.1. Если из двух деревьев T и F одно принадлежит $\mathcal{L}_+$, а другое принадлежит $\mathcal{L}_-$, то $T \ominus F$ и $T \uparrow F$ – подмножества $\mathcal{L}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе включение очевидно следует из формулы (3.3'). Докажем первое включение. Пусть $X \in \mathcal{L}_+$, $Y \in \mathcal{L}_-$. По следствию леммы 3.2 число вершин дерева X четно. Число вершин леса $\check{X}$ нечетно, поэтому по следствию леммы 3.2 имеем $\check{X}(-1) = 0$. Из формулы (3.2') следует $X \ominus Y(-1) = 0$.

ЛЕММА 8.2. Пусть $T \in \mathcal{L}$, $F \in \mathcal{L}_-$ и $\check{F}(-1) = 0$. Тогда $T \oplus F \in \mathcal{L}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно следует из формулы (3.1').

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вершина степени 1 называется *концевой*. *Предконцевой* вершиной назовем вершину, инцидентную хотя бы одной концевой и ровно одной не концевой.

ПРИМЕР 8.1. Дерево не имеет предконцевых вершин тогда и только тогда, когда это дерево – звезда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ребро $\overline{uv}$ оснащенного графа (G, f) назовем *сильным*, если $f(u, v)f(v, u) \neq 0$, и *слабым* в противном случае.

ЛЕММА 8.3. Пусть $H \in \mathcal{L}_+$.

- 1) Ребро, инцидентное концевой вершине дерева H , является сильным.
- 2) Предконцевые вершины (если таковые имеются) дерева H имеют степень 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В противном случае в матрице оснащения была бы нулевая строка или был бы нулевой столбец.

2) В противном случае имели бы $H = T \oplus (Z_2, f)$. По лемме 8.2 получаем $H \in \mathcal{L}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Обозначим $\langle \mathcal{L}_+ \mid \odot, \ominus, \uparrow \rangle$ через $\langle \mathcal{L}_+ \rangle$, а $\langle \mathcal{L}_- \mid \odot, \oplus, \uparrow, \downarrow \rangle$ – через $\langle \mathcal{L}_- \rangle$.

Включения $\mathcal{L}_+ \supseteq \langle \mathcal{L}_+ \rangle$ и $\mathcal{L}_- \supseteq \langle \mathcal{L}_- \rangle$ следуют из леммы 6.1.

Докажем обратные включения. Учитывая лемму 6.1 и наличие в конструкторах операции $\odot$, можно без ограничения общности считать, что рассматриваются только оснащения с условием $f(u, v) \in \{0; 1\} \forall u, v$.

Включение $\mathcal{L}_+ \subseteq \langle \mathcal{L}_+ \rangle$ докажем индукцией по числу вершин n дерева T из $\mathcal{L}_+$ (напомним, что по следствию леммы 3.2 число n четно).

При $n = 2$ – очевидно.

Пусть $n \geq 4$. Из примера 8.1 и п. 3) примера 2.3 следует, что в T имеется хотя бы одна предконцевая вершина, которая по лемме 8.3 имеет степень 2. Рассмотрим предконцевую вершину k и инцидентные ей концевую вершину i и неконцевую вершину j . Согласно п. 1) леммы 8.3 имеем $f(i, k) = f(k, i) = 1$. Поэтому $T \in T' \ominus Z_1$ (если ребро $\overline{jk}$ сильное), $T \in T' \uparrow Z_1$ (если ребро $\overline{jk}$ слабое). Из леммы 8.1 следует, что $T' \in \mathcal{L}_+$. Индуктивный шаг завершен.

Доказательство включения $\mathcal{L}_- \subseteq \langle \mathcal{X}_- \rangle$ разобьем на этапы.

Этап 1. Пусть $T \in \mathcal{L}_-$. Если число его вершин равно 1, то $T = Z_0$. Если число вершин равно 2, то $T = Z_0 \uparrow Z_0$.

Этап 2. Докажем следующее утверждение. Если $n \geq 2$, то $(Z_n, f) \in \langle \mathcal{X}_- \rangle$ для любого f (напомним, что мы рассматриваем только оснащения с условием $f(u, v) \in \{0; 1\}$). В самом деле, если оснащение естественное, то $Z_n \in \langle \mathcal{X}_- \mid \oplus \rangle$. В ином случае $(Z_n, f) \in \langle Z_n \mid \downarrow \rangle \subseteq \langle \mathcal{X}_- \mid \oplus, \downarrow \rangle$.

Этап 3. Докажем, что если дерево T имеет порядок 3 или 4 и $T \in \mathcal{L}_-$, то $T \in \langle \mathcal{X}_- \rangle$.

Если порядок – три, то T – звезда, далее см. этап 2.

Если порядок – четыре и T – звезда, то см. этап 2.

Пусть порядок равен 4 и T – не звезда. Тогда T – цепь. Ее ребра, инцидентные конечным вершинам, не могут оба быть сильными (в противном случае было бы $T = Z_1 \ominus Z_1$ либо $T = Z_1 \uparrow Z_1$, т.е. $T \in \mathcal{L}_+$). Поэтому $T \in \langle \{Z_0\} \cup \{(Z_2, f)\}_f \mid \uparrow \rangle$, далее см. этап 2.

Этап 4. Теперь индукцией по порядку m дерева докажем, что если $T \in \mathcal{L}_-$, то $T \in \langle \mathcal{X}_- \rangle$.

Если $m \leq 4$, то см. этапы 1, 3.

Пусть $m \geq 5$ и T – звезда. Тогда см. этап 2.

Пусть $m \geq 5$ и T – не звезда. В таком случае этот граф имеет предконцевую вершину. Удалим из него эту вершину и все концевые вершины, инцидентные ей. Полученное оснащенное дерево обозначим T_1 . Если же из T удалить только концевые вершины, инцидентные рассматриваемой предконцевой, то оставшееся дерево обозначим T_2 (его порядок на 1 больше, чем порядок T_1). Имеем: $T \in T_1 \oplus (Z_l, f)$ и $T \in T_2 \oplus (Z_{l-1}, g)$, здесь l – степень рассматриваемой предконцевой вершины.

Если $l \geq 3$, то согласно утверждению из этапа 2 рассматриваемые звезды – из $\langle \mathcal{X}_- \rangle$. Хотя бы одно из деревьев T_1, T_2 нечетного порядка и, значит, принадлежит $\mathcal{L}_-$. Все участвующие в суммах слагаемые имеют порядок меньший, чем порядок T . Совмещая это с предположением индукции, заключаем, что $T \in \langle \mathcal{X}_- \rangle$.

Рассмотрим случай $l = 2$. Если $T_1 \in \mathcal{L}_-$, то, совмещая предположение индукции и утверждение этапа 2, заключаем, что $T \in \langle \mathcal{X}_- \rangle$. Пусть $T_1 \in \mathcal{L}_+$ и, значит, $T_2 \in \mathcal{L}_-$. Ребро, соединяющее концевую и предконцевую вершины, слабое (иначе было бы $T \in T_1 \ominus Z_1$ либо $T \in \langle \{T_1; Z_1\} \mid \uparrow \rangle$, т.е. $T \in \mathcal{L}_+$). Поэтому $T \in \langle \{T_2; Z_0\} \mid \uparrow \rangle$. Совмещая это с предположением индукции, заключаем, что $T \in \langle \mathcal{X}_- \rangle$. Индуктивный шаг завершен.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.
2. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // УМН. 1973. Т. 28. №2. С. 19–33.
3. Колмыков В. А. Преобразование Кокстера и число “–1” // Матем. сб. 2000. Т. 191. №10. С. 51–56.
4. Колмыков В. А., Меньших В. В., Субботин В. Ф., Сумин М. В. Некоторые свойства ациклических графов и связанных с ними многочленов // Деп. в ВИНТИ 12.12.83, №6707-83 Деп. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1983.

5. *Субботин В. Ф., Сумин М. В.* Исследование многочленов, связанных с представлениями графов // Деп. в ВИНТИ 30.12.82, № 6480-82 Деп. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1982.
6. *Колмыков В. А., Субботин В. Ф.* Спектры графов и коспектральность // Деп. в ВИНТИ 12.12.83, № 6708-83 Деп. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1983.

Воронежский государственный университет
E-mail: kolmykov@vak.vsu.ru

Поступила в редакцию
13.12.2001