Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий, Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней, *Матем. сб.*, 2011, том 202, номер 8, 41–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:43:37

УДК 517.956.8+517.958:539.3(5)

С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий

Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней

Построена и обоснована асимптотика решения задачи теории упругости об изгибе тонкой пластины, усиленной несколькими периодическими семействами близко расположенных, но разъединенных стержней, причем результат осреднения существенно отличается от случая стержней, скрепленных в единую периодическую сетку. Предполагается, что материал стержней значительно более жесткий, чем материал пластины. Осредненный дифференциальный оператор четвертого порядка получается суммированием неэллиптических операторов, порожденных каждым из семейств стержней. Этот оператор оказывается эллиптическим в том и только том случае, когда стержни хотя бы из двух семейств не являются параллельными. В качестве упрощенного примера рассмотрена аналогичная стационарная задача теплопроводности.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: тонкая пластина, осреднение, асимптотика, композит.

§ 1. Постановка задачи и предварительные сведения

1.1. Предварительное описание полученных результатов. В работе изучается задача теории упругости в пластине, армированной мелкой периодической сеткой разъединенных стержней (см. рис. 1). Предполагается, что пластина имеет малую безразмерную толщину $h > 0$ (произведено масштабирование), а материалы самой пластины и пронизывающих стержней обладают контрастными свойствами: упругие постоянные у стержней на порядок (по h) больше, чем у пластины. Сетка состоит из нескольких семейств одинаковых параллельных стержней, расположенных внутри слоя, своего для каждого из семейств, на равном расстоянии один от другого. Так, изображенная на рис. 1 пластина имеет двухслойную сетку стержней. Между собой стержни не пересекаются, толщина каждого слоя и диаметры сечений стержней имеют порядок h .

Основной целью настоящей работы является вывод дифференциального уравнения прогиба армированной пластины из системы уравнений теории упругости – искомому результирующему скалярному уравнению удовлетворяет старший член асимптотики по малому параметру h решения исходной трехмерной задачи.

В скалярном случае (стационарная задача теплопроводности) алгоритм вычисления коэффициентов результирующего уравнения оказывается легко угадываемым и существенно менее интересным по сравнению с задачей об изгибе упругой пластины: коэффициенты уравнения для старшего члена асимптотики

Работа выполнена при поддержке Нидерландской организации по научным исследованиям (the Netherlands Organisation for Scientific Research, NWO, проект № 047.017.020) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-01-89000-НВО_а и № 09-01-00759-а).

Рис. 1. Армированная пластина

получаются суммированием операторов, содержащих только дифференцирование вдоль осей семейств стержней. Векторная система теории упругости приносит в построение результирующего уравнения задачи об изгибе эффекты, отсутствующие в случае скалярного уравнения. В результате коэффициенты дифференциального уравнения для старшего члена прогиба вычисляются по более сложному правилу. Каждое семейство стержней порождает дифференциальный оператор четвертого порядка, но при этом вносит вклад не только в дифференцирование вдоль осей стержней, но и в смешанную производную, содержащую также дифференцирование по направлению, перпендикулярному к осям стержней.

Поясним сказанное на простом конкретном примере. Рассмотрим задачу теплопроводности и задачу изгиба одной и той же армированной композитной пластины относительно простой геометрической структуры. Пусть ω – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющая гладкую границу $\partial\omega$ и компактное замыкание $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Пластина занимает объем

$$\Omega_h = \left\{ (y, z) : y = (y_1, y_2) \in \omega, z \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) \right\}, \quad (1.1)$$

и с ней связана декартова система координат $x = (y, z) = (y_1, y_2, z)$. Три системы круглых стержней $\{G_h^{j,k}\}$, $j = 1, 2, 3$, $k \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ определим формулами

$$G_h^{1,k} = \left\{ (y, z) : |(y_2 - hks_1)^2 + (z + ha)^2| < \frac{\sqrt{2}hR_1}{2} \right\}, \quad (1.2)$$

$$G_h^{2,k} = \left\{ (y, z) : |(y_1 - hks_2)^2 + z^2| < hR_2 \right\}, \quad (1.3)$$

$$G_h^{3,k} = \left\{ (y, z) : |(y_2 - hks_1)^2 + (z - ha)^2| < \frac{\sqrt{2}hR_1}{2} \right\}. \quad (1.4)$$

Введем обозначение $\omega(h) = \{y : \text{dist}(y, \omega) < h\}$ для h -окрестности компакта $\bar{\omega}$. Для каждого семейства $\{G_h^{j,k}\}$ определим объединение усеченных стержней

$$G^j(h) = \bigcup_k \{x \in G_h^{j,k} : y \in \omega(h)\}, \quad (1.5)$$

немного выступающих за край пластины (см. рис. 1). В формуле (1.5) и далее в п. 1.1 считаем, что индекс j принимает значения 1, 2, 3, а $k \in \mathbb{Z}$. Пусть

$$\Omega(h) = \Omega_h \setminus \bigcup_{j=1}^3 \overline{G^j(h)} \quad (1.6)$$

– область, занимаемая “наполнителем” композитной пластины (в механике она называется “матрицей”). Ячейка периодичности конструкции

$$\Xi_0(h) = \bigcup_j G^j(h) \cup \overline{\Omega(h)},$$

являющаяся параллелепипедом с размерами $s_1 \times s_2 \times 1/2$, изображена на рис. 2. Для того чтобы круглые стержни не пересекались и не “обрезались” основаниями пластины, геометрические параметры должны удовлетворять соотношению $\sqrt{2}R_1 + 2R_2 < 2a < 1 - \sqrt{2}R_1$.

Рис. 2. Ячейка периодичности пластины $\Xi_0(h)$

Приведем постановки стационарной задачи теплопроводности и задачи теории упругости об изгибе пластины $\Xi_0(h)$.

Предположим, что материал стержней $G_h^{j,k}$ имеет коэффициент теплопроводности κ_j , а материал матрицы $\Theta(h)$ – коэффициент теплопроводности $h\kappa_0$, причем κ_0 и κ_j имеют одинаковый порядок по h . Стационарное распределение температуры T в теле является решением следующей задачи:

$$-\kappa_j \Delta_x T^{j,k}(x) = 0, \quad x \in G_h^{j,k}, \quad -h\kappa_0 \Delta_x T^0(x) = 0, \quad x \in \Omega(h).$$

Здесь $T^{j,k}$ и T^0 – сужения функции T на множества $G_h^{j,k}$ и $\Omega(h)$ соответственно. Предположим, что на объединении $\Upsilon_D(h) = \bigcup_{j,k} \Upsilon^{j,k}$ торцов стержней

$$\Upsilon^{j,k}(h) = \{x \in G_h^{j,k} : y \in \partial\omega(h)\}$$

выполнено краевое условие Дирихле

$$T(x) = 0, \quad x \in \Upsilon(h),$$

на основаниях $\Sigma_{\pm} = \{(y, z) : y \in \omega, z = \pm h/2\}$ справедливы краевые условия Неймана

$$h\kappa \frac{\partial T}{\partial z}(x) = \pm h^{-1} \frac{q(y)}{2}, \quad x \in \Sigma_{\pm},$$

а на остальной части $\Upsilon_N(h) = \partial\Xi_0(h) \setminus (\overline{\Upsilon_D(h)} \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-)$ границы композитной пластины – однородные условия Неймана

$$\frac{\partial T}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \Upsilon_N(h).$$

Здесь n – внешняя нормаль к поверхности $\Upsilon_N(h)$, а q – величина теплового потока. На границах $\partial G^j(h) \cap \overline{\Omega(h)}$ стержней назначены условия идеального теплового контакта

$$T^{j,k}(x) = T^0(x), \quad \kappa_j \frac{\partial T^{j,k}}{\partial \nu}(x) = h\kappa \frac{\partial T^0}{\partial \nu}(x), \quad x \in \partial G^j(h) \cap \Omega(h),$$

где ν – внешняя нормаль к ∂G^j .

В задаче теории упругости вектор упругих смещений u (точнее, его сужения u^0 и $u^{j,k}$ на множества $\Omega(h)$ и $G^{j,k}(h)$) удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\begin{aligned} -\mu_j \Delta_x u^{j,k}(x) - (\lambda_j + \mu_j) \operatorname{grad} \operatorname{div} u^{j,k}(x) &= 0, & x \in G_h^{j,k}, \\ -h\mu_0 \Delta_x u^0(x) - h(\lambda_0 + \mu_0) \operatorname{grad} \operatorname{div} u^0(x) &= 0, & x \in \Omega(h). \end{aligned}$$

Торцы стержней жестко заземлены, т.е.

$$u(x) = 0, \quad x \in \Upsilon(h),$$

а к основаниям пластины приложены внешние усилия

$$\sigma_{i3}(u^0, y, \pm h) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_{33}(u^0, y, \pm h) = \pm hg(y), \quad x \in \Sigma_{\pm}.$$

При этом σ_{ij} – декартовы компоненты тензора напряжений,

$$\sigma_{ij}(u^0, x) = h\lambda_0 \delta_{i,j} (\varepsilon_{11}(u^0, x) + \varepsilon_{22}(u^0, x) + \varepsilon_{33}(u^0, x)) + 2h\mu_0 \varepsilon_{ij}(u^0, x),$$

и $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Остальная часть границы свободна от усилий, т.е.

$$\sigma^{(n)}(u, x) = 0, \quad x \in \partial\Xi_0 \setminus (\Upsilon(h) \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-),$$

причем

$$\sigma^{(n)}(u, x) = \sum_{i=1}^3 n_i(x) \sigma_{ij}(u, x)$$

– нормальное напряжение, $n = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Xi_0$.

На боковых поверхностях стержней, соприкасающихся с матрицей, назначим условия идеального контакта

$$u^0(x) = u^{j,k}(x), \quad \sigma^{(\nu_j)}(u^0, x) = \sigma^{(\nu_j)}(u^{j,k}, x), \quad x \in \partial G^j \cap \overline{\Omega(h)},$$

где $\sigma^{(\nu_j)}(u, x) = \nu_j(x) \sigma_{ij}(u, x)$, ν_j – вектор внешней нормали к ∂G^j .

В работе построена и обоснована асимптотика решения задачи об изгибе пластины

$$u(x) \sim h^{-2} w(y) e_{(3)} + O(h^{-1}), \quad (1.7)$$

где $e_{(3)}$ – орт оси z . Согласно [1] асимптотика решения задачи теплопроводности имеет следующий вид:

$$T(x) \sim h^{-2}V(y) + O(h^{-1}). \quad (1.8)$$

Старшие члены разложений решений задач (1.8) и (1.7) выглядят одинаково, являясь скалярными функциями двух переменных y_1 и y_2 . Однако вид уравнений, из которых определяются w и V , существенно различен. Старший член V асимптотики решения задачи теплопроводности находится из задачи

$$\begin{aligned} \pi s_2^{-1} R_1^2 \varkappa_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}(y) + \pi s_1^{-1} R_2^2 \varkappa_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}(y) &= q(y), \quad y \in \omega, \\ w(y) &= 0, \quad y \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Физические и геометрические характеристики систем стержней G^1 и G^3 определяют первый член уравнения (1.9), содержащий производные по y_1 , а физические и геометрические характеристики системы стержней G^2 – второй член, содержащий производные по y_2 . Результирующий оператор – сумма двух операторов, порожденных по отдельности двумя семействами (1.2), (1.3) и (1.4) параллельных стержней. Совершенно иначе обстоит дело в случае задачи об изгибе пластины, хотя старший асимптотический член w находится из скалярной краевой задачи

$$\begin{aligned} R_1^4 \mu_1 \frac{7\lambda_1 + 10\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4}(y) + (R_1^4 \mu_1 + R_2^4 \mu_2) \frac{\partial^4 w}{\partial y_1^2 \partial y_2^2}(y) \\ + R_2^4 \mu_2 \frac{7\lambda_2 + 10\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{\partial^4 w}{\partial y_2^4}(y) = 4s_1 s_2 \pi^{-1} g(y), \quad y \in \omega, \\ w(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) содержит смешанную производную $\partial^4 / \partial y_1^2 \partial y_2^2$; коэффициент при ней формируется при учете упругих характеристик всех систем стержней в пластине, причем это нововведение обусловлено именно векторной природой исходной трехмерной задачи. Иными словами, в отличие от скалярной задачи (см. осредненное уравнение в (1.9)) семейства (1.2), (1.3) и (1.4) упругих стержней взаимодействуют. Следовательно, модель рассматриваемой композитной пластины, принятая в современной инженерной практике и предписывающая суммирование дифференциальных операторов

$$R_1^4 \mu_1 \frac{3\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y_1^4}(y) + R_2^4 \mu_2 \frac{3\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{\partial^4 w}{\partial y_2^4}(y), \quad (1.11)$$

отвечающая стержням (1.2), (1.3) и (1.4) соответственно, оказывается просто неверной! На самом деле отличаются все коэффициенты дифференциальных операторов в (1.10) и (1.11).

Далее в статье рассматриваются армированные пластины с более общими геометрическими и физическими свойствами: число слоев арматуры произвольно, а материалы стержней и пластины анизотропны. Однако, как и ранее, исследуется только задача о “чистом изгибе”, т.е. соблюдаются определенные условия симметрии геометрических и физических свойств конструкции относительно срединной плоскости. В работе систематически используется матричная форма записи уравнений теории упругости, существенно упрощающая обозначения и выкладки при выводе асимптотических формул.

Как будет показано далее (см. общую формулу (2.67) и ее конкретизацию (1.42) для случая изотропных стержней), уравнение для старшего члена асимптотики задачи об изгибе композитной пластины в случае достаточно произвольных семейств стержней сохраняет два свойства, которыми обладает уравнение (1.10). Во-первых, в уравнении всегда присутствуют слагаемые, определяемые по характеристикам сразу нескольких систем стержней с непараллельными осями. Во-вторых, упругие постоянные материала матрицы $\Omega(h)$ в определении коэффициентов уравнения не фигурируют.

Укажем механическую интерпретацию обнаруженного в работе нового эффекта “асимптотического дальнего действия”: жесткость упругого материала матрицы недостаточна для того, чтобы принять участие в формировании осредненного оператора, однако вполне достаточна для того, чтобы обеспечить взаимодействие стержней в семействах и тем самым связать их деформации, вызванные изгибом и закручиванием.

1.2. Постановка задачи. Описание геометрических объектов. Наряду с пластиной, заданной соотношением (1.1), введем периодические семейства $\{G_h^{j,k}\}$ тонких стержней, расположенных в слое $\mathbb{R}^2 \times (-h/2, h/2)$, с которыми свяжем свои системы координат $x^j = (y^j, z^j)$; при этом $j = 1, \dots, J$, $k \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, оси z^j лежат в срединной плоскости $\{x : z = 0\}$ пластины (1.1), а оси y_1^j перпендикулярны этой плоскости.

Рис. 3. Ячейка периодичности с одним стержнем и ее плоское изображение

Опишем семейства $\{G_h^{j,k}\}$ более подробно. Введем ячейку периодичности $S_h(\alpha) = \{x : |y_i| < ha_i/2, i = 1, 2, |z| < h/2\}$ и ее сдвиги $S_h(\alpha) = \{x : (y_1 - \alpha_1 a_1, y_2 - \alpha_2 a_2, z) \in S_h\}$, где $a_i > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Декартову систему

координат $y = (y_1, y_2)$ можно зафиксировать на срединной плоскости пластины так, чтобы оси z^1 стержней из первого семейства $\{G_h^{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ были параллельны оси y_1 и соответственно в каждой из ячеек периодичности $S_h(\alpha)$ располагался фрагмент $G_h^{1,\alpha_2}(\alpha_1)$ одного из стержней (см. рис. 3, где приведен трехмерный объект и его плоское изображение, и рис. 4, содержащий ячейку периодичности пластины, изображенной на рис. 1).

Рис. 4. Ячейка периодичности двуслойной пластины

Кроме того,

$$\begin{aligned} G_h^{1,\alpha_2}(\alpha_1) &= \{x : (y_1 - \alpha_1 a_1, y_2 - \alpha_2 a_2, z) \in G_h^1\}, \\ G_h^1 &= \{x : h^{-1}x \in \mathbf{G}^1\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь $\mathbf{G}^1$ – подобласть стандартной ячейки $\mathbf{S} = \{x : |y_i| < a_i/2, i = 1, 2, |z| < 1/2\}$ (полужирным шрифтом обозначаем “растянутые” множества, имеющие единичные, не зависящие от малого геометрического параметра h , размеры). Разумеется, возникает дополнительное требование: множество, составленное из замыканий фрагментов $\overline{G_h^{j,k}(p)}$, $p \in \mathbb{Z}^2$, должно быть связным.

Обозначим через ϑ_j угол между осями стержней $G_h^{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, и осью y_1 . Ясно, что $\vartheta_1 = 0$. Будем считать, что хотя бы один из углов ϑ_j отличен от нуля. Например, в случае $\vartheta_2 = \pi/2$ стержни $G_h^{2,k}$ направлены вдоль оси y_2 и их определение вполне аналогично формуле (1.12) за тем исключением, что вместо $G_h^{1,\alpha_2}(\alpha_1)$ следует писать $G_h^{2,\alpha_1}(\alpha_2)$. В то же время угол $|\vartheta_j| \in (0, \pi/2)$ может быть острым, а открытое множество $\mathbf{G}^j$, фигурирующее в аналогичных (1.12) формулах

$$\begin{aligned} G_h^j(\alpha) &= S_h(\alpha) \cap \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} G_h^{j,k} = \{x : (y_1 - \alpha_1 a_1, y_2 - \alpha_2 a_2, z) \in G_h^j\}, \\ G_h^j &= \{x : h^{-1}x \in \mathbf{G}^j\}, \end{aligned}$$

имеет либо n_j , либо $1 + n_j$ компонент связности, т.е. $\mathbf{G}^j$ – заведомо не область при $n_j \geq 2$ (см. рис. 5 с плоским изображением, на котором $n_j = 1$).

Рис. 5. Ячейка периодичности с одним стержнем

Отметим, что ячейка S_h обслуживает одновременно все семейства $\{G_h^{j,k}\}$. Поэтому для конкретного семейства она может содержать дубликаты множеств $\{G_h^j\}$, растиражированные по периодичности. Например, два дубликата изображены на рис. 6 – они объединяются в разные семейства, т.е. среди углов $\vartheta_1, \dots, \vartheta_J$ могут быть одинаковые. Подчеркнем особо, что на рис. 5 множество $\mathbf{G}^j$ относится к одному “стержню” в ячейке – отдельные куски будут объединены условием периодичности, а на рис. 6 изображены множества, относящиеся к разным стержням.

Рис. 6. Ячейка периодичности с двумя стержнями

Для каждого семейства $\{G_h^{j,k}\}$ введем объединение усеченных стержней

$$G^j(h) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in G_h^{j,k} : y \in \omega(h)\}. \quad (1.13)$$

Разумеется, в правой части (1.13) имеется лишь конечное число непустых множеств. Через $\Upsilon^j(h)$ обозначим объединение торцов стержней в (1.13), а именно,

$$\Upsilon^j(h) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in G_h^{j,k} : y \in \partial\omega(h)\}.$$

Эти торцы выступают за пределы пластины (1.1), т.е. армированная пластина

$$\Xi(h) = \Omega(h) \cup \bigcup_{j=1}^J G^j(h) \quad (1.14)$$

имеет вид, изображенный на рис. 1. Здесь для пластины $\Xi(h)$ сохранено обозначение (1.6) для объема, заполненного упругим материалом “матрицы”, который считается более податливым в сравнении с материалом “арматуры”. Подобные композитные конструкции весьма часто встречаются в повседневной жизни.

Целью работы является асимптотический анализ статической задачи теории упругости о чистом изгибе описанной композитной пластины. Чистый изгиб помимо симметричности упругих свойств и внешних нагрузок (см. далее п. 1.2) подразумевает геометрическую симметрию конструкции, что выражено следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\Omega(h) &= \{(y, z) \in \Omega(h) : (y, -z) \in \Omega(h)\}, \\ G(h) &= \{(y, z) \in G(h) : (y, -z) \in G(h)\}.\end{aligned}\quad (1.15)$$

Здесь $G(h)$ – объединение множеств (1.13), $j = 1, \dots, J$. Подчеркнем, что отдельные стержни $G_h^{j,k}$ не обязаны быть симметричны относительно срединной плоскости пластины (ср. рис. 2 со стержнями, не симметричными относительно срединной плоскости, и гипотетический рис. 7, а также см. пояснения в п. 2.3).

Рис. 7. Оба стержня симметричны относительно срединной плоскости

1.3. Постановка краевой задачи. Для формулировки краевой задачи изгиба пластины используем матричную форму записи определяющих соотношений линейной теории упругости (см. [2] и, например, [3]). Пусть $D(\nabla_x)$ – (6×3) -матрица дифференциальных операторов первого порядка,

$$D(\nabla_x)^\top = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 & \partial_3 \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где $\top$ – знак транспонирования, $\nabla_x = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^\top$ – градиент и $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Вектор упругих смещений интерпретируем как столбец $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$, причем u_k – проекция вектора u на ось x_k системы координат, привязанной к пластине (1.1). Согласно определению декартовых компонент тензора деформации

$$\varepsilon_{mn}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \right), \quad m, n = 1, 2, 3,$$

получаем формулу

$$\varepsilon(u) = D(\nabla_x)u$$

для столбца деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{21}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{13}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{32}(u), \varepsilon_{33}(u))^{\top}. \quad (1.17)$$

Отметим, что множители $2^{1/2}$ и $2^{-1/2}$ введены в определения (1.16) и (1.17) для уравнивания естественных норм шестимерного столбца (1.17) и тензора второго ранга $\{\varepsilon_{jk}(u)\}_{j,k=1}^3$ (см. [4]). Благодаря этому ортогональное преобразование декартовой системы координат порождает ортогональное преобразование столбцов (1.17).

Матричная (дивергентная) форма уравнений равновесия в фиксированной системе декартовых координат $x = (x_1, x_2, x_3)^{\top}$ выглядит так:

$$L(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(-\nabla_x)^{\top} A(\gamma, x) D(\nabla_x)u(h, x) = f(h, x), \quad x \in \Omega(h). \quad (1.18)$$

В системе (1.18) $f = (f_1, f_2, f_3)^{\top}$ – объемные силы (уточнение зависимости f от h проводится по мере необходимости), A – матрица размера 6×6 , составленная из упругих модулей материалов. Предполагаем, что кусочно постоянная матрица A задана формулами

$$A(\gamma, x) = \begin{cases} \gamma A^0, & x \in \Omega(h), \\ A^j, & x \in G^j(h), \quad j = 1, \dots, J, \end{cases} \quad (1.19)$$

где $\gamma > 0$ – параметр, характеризующий относительную жесткость материала матрицы (1.6) композитной пластины (1.14) по сравнению с материалом арматуры (1.13), а A^0 и A^j – симметрические и положительно определенные числовые (вещественные) матрицы размера 6×6 .

На торцах стержней поставлены условия Дирихле (устойчивые по терминологии [5]):

$$u(x) = 0, \quad x \in \Upsilon_D(h) =: \bigcup_{j=1}^J \Upsilon^j(h), \quad (1.20)$$

а на остальной части $\Upsilon_N(h) = \partial\Xi(h) \setminus \overline{\Upsilon_D(h)}$ границы композитной пластины – краевые условия Неймана (естественные по терминологии [5]):

$$N(h, x, \nabla_x)u(h, x) := D(\nu(h, x))^{\top} A(\gamma, x) D(\nabla_x)u(h, x) = g(h, x), \quad x \in \Upsilon_N(h). \quad (1.21)$$

Здесь $g = (g_1, g_2, g_3)^{\top}$ – вектор поверхностных нагрузок (уточнение зависимости g от параметра h проводится по мере необходимости), а $\nu(h, x)$ – единичный вектор (столбец) внешней нормали к поверхности конструкции, причем $\nu(h, x) = \pm e_3$ на основаниях $\Sigma_h^{\pm} = \omega \times \{h/2\}$ пластины (1.1), и e_k – орт оси x_k .

Сохраним обозначения u^0 и u^j , введенные в п. 1.1 для сужения столбца смещений u на множества $\Omega(h)$ и $G^j(h)$ соответственно. На поверхности $\partial\Omega(h) \cap \partial G^j(h)$ назовем условия идеального контакта (сцепления), т.е.

$$D(\nu^j(h, x))^{\top} \gamma A^0 D(\nabla_x)u^0(h, x) = D(\nu^j(h, x))^{\top} A^j D(\nabla_x)u^j(h, x), \quad (1.22)$$

$$u^0(h, x) = u^j(h, x), \quad x \in \partial\Omega(h) \cap \partial G^j(h), \quad (1.23)$$

где $\nu^j(h, x)$ – единичный вектор (столбец) внешней нормали к $\partial G^j(h)$.

Поскольку матрица (1.19) симметрична и положительно определена, а дифференциальный оператор (1.16) алгебраически комплектен (см. [6]), справедливо неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Xi(h))\|^2 \leq c(h, \gamma, \Xi(h)) E(u; \Xi(h)), \quad u \in \dot{H}^1(\Xi(h), \Upsilon_D(h))^3. \quad (1.24)$$

Здесь $H^1(\Xi)$ – пространство Соболева, $\mathring{H}^1(\Xi, \Upsilon)$ – его подпространство, выделенное условием $v = 0$ на поверхности $\Upsilon \subset \partial\Xi$, а верхний индекс 3 указывает количество компонент вектор-функции. Кроме того, $E(u; \Xi(h)) = E(u, u; \Xi(h))$ – функционал упругой энергии,

$$E(u, u; \Xi(h)) = \frac{1}{2}(ADu, Dv)_{\Xi}, \quad (1.25)$$

а $(\cdot, \cdot)_{\Xi}$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Xi)^m$ (в обозначениях норм и скалярных произведений количество m компонент вектор-функции не указываем). Множитель $c(h, \gamma, \Xi(h))$ неизвестным образом зависит от физических и геометрических параметров композита – различные способы (см. [6]–[10] и др.) доказательства неравенства (1.24) не дают информации о константе Корна. Тем не менее, вариационная формулировка задачи (1.18), (1.20)–(1.23) вместе с неравенством (1.24) показывают, что при любых нагрузках $f \in L_2(\Xi(h))^3$ и $g \in L_2(\Upsilon_N(h))^3$ указанная задача линейной теории упругости имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Xi(h), \Upsilon_D(h))^3$, удовлетворяющее следующему интегральному тождеству:

$$2E(u, v; \Xi(h)) = (f, v)_{\Xi(h)} + (g, v)_{\Upsilon_N(h)}, \quad v \in \mathring{H}^1(\Xi(h); \Upsilon_D(h))^3$$

(см. [11], [12]). Как уже упоминалось в п. 1.1, рассматривается чистый изгиб композитной пластины, т.е. в дополнение к геометрическому условию (1.15) предполагается, что срединная плоскость $\{x : z = 0\}$ является плоскостью упругой симметрии композитного материала. Иными словами, верны равенства

$$\begin{aligned} A_{pq}(h, y, z) &= A_{pq}(h, y, -z), & p, q \in \{1, 2, 3, 6\} \quad \text{или} \quad p, q \in \{4, 5\}, \\ A_{pq}(h, y, z) &= -A_{pq}(h, y, -z), & p \in \{1, 2, 3, 6\}, \quad q \in \{4, 5\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Более того, нагрузки являются симметричными¹, т.е.

$$\begin{aligned} f_p(h, y, z) &= -f_p(h, y, -z), & g_p(h, y, z) &= -g_p(h, y, -z), & p &= 1, 2, \\ f_3(h, y, z) &= f_3(h, y, -z), & g_3(h, y, z) &= g_3(h, y, -z). \end{aligned} \quad (1.27)$$

В этом случае вектор-функция

$$(y, z) \mapsto (-u_1(h, y, -z), -u_2(h, y, -z), u_3(h, y, -z))$$

удовлетворяет тем же уравнениям и краевым условиям, что и сама вектор-функция u , а значит, ввиду единственности решения справедливы соотношения

$$u_p(h, y, z) = -u_p(h, y, -z), \quad p = 1, 2, \quad u_3(h, y, z) = u_3(h, y, -z). \quad (1.28)$$

Таким образом, решение задачи (1.18), (1.20)–(1.23) подчинено дополнительно условию на срединной плоскости, а именно,

$$u_1(h, y, 0) = u_2(h, y, 0) = 0, \quad y \in \omega, \quad (1.29)$$

которое несколько упрощает вывод неравенства Корна (см. далее п. 3.1).

¹Далее для простоты считаем, что $f_p = 0$ и $g_p = 0$ при $p = 1, 2$ (см. (2.47) и (2.48)).

1.4. Асимптотические анзацы для пластины и стержней и их согласование. Асимптотическая теория стержней, включающая процедуру понижения размерности, т.е. переход от тонких трехмерных тел к их одномерным изображениям, и вывод оценок погрешностей приближения, в целом построена (см., например, статьи [13]–[18] и книги [19]–[21]). Тем не менее, задача (1.18), (1.20)–(1.23) не обслуживается упомянутыми результатами прежде всего из-за того, что в формуле (1.19) присутствует малый параметр γ , который далее в статье считается пропорциональным безразмерному геометрическому параметру h . При этом эффективные изгибные жесткости пластины и индивидуальных стержней оказываются величинами одного порядка – эта понятная механическая интерпретация как раз и послужила причиной выбора связи (2.3) безразмерных параметров h и γ . Подчеркнем, что при $\gamma = O(h^0)$ или в случае соединения (спайки) семейств стержней осреднение композитной пластины проводится по известной схеме (см., например, [22]). Так, в железобетонных конструкциях арматура (жесткие стержни) обычно свариваются или, по крайней мере, связываются в зонах пересечения перед заливкой бетона (мягкий материал матрицы). Однако подобное соединение разнонаправленных волокон не всегда представляется возможным технологически или попросту игнорируется для удешевления процесса изготовления. Широкое использование композитных материалов в современной практике требует создания адекватной математической модели армированных пластин, в которых семейства жестких волокон взаимодействуют лишь опосредованно – через связывающий податливый наполнитель.

Отличительной чертой пластины, усиленной разъединенными семействами жестких стержней, является то, что, несмотря на отсутствие упругих характеристик A^0 материала матрицы $\Omega(h)$ в результирующем уравнении на области ω , даже слабые упругие свойства матрицы способствуют взаимодействию семейств стержней и собирают неэллиптические дифференциальные операторы для изолированных семейств $\{G_h^{j,k}\}$, $j = 1, \dots, J$, в единое эллиптическое уравнение четвертого порядка в частных производных

$$\mathbf{L}(\nabla_y)w(y) = \Phi(y), \quad y \in \omega, \quad (1.30)$$

для осредненного прогиба $w(y)$ композитной пластины. Вместе с краевыми условиями Дирихле

$$w(y) = 0, \quad \partial_{\nu^0} w(y) = 0, \quad y \in \partial\omega, \quad (1.31)$$

где ∂_{ν^0} – производная по нормали ν^0 к границе $\partial\omega$, уравнение (1.30) формирует так называемую *результатирующую задачу*.

Асимптотический анзац для поля смещений в однородной (без армирующих стержней) пластине имеет следующий вид (см., например, [4]):

$$h^{-2}w(y)e_3 + h^{-1} \sum_{i=1}^2 e_i \left(w_i(y) - \zeta \frac{\partial w}{\partial y_i}(y) \right) + h^0 U^{00}(y, \zeta) + \dots \quad (1.32)$$

Здесь e_i и e_3 – орты координатных осей y_i и z , $\zeta = h^{-1}z$ – быстрая переменная, w и w_i – подлежащие определению функции, порождающие главные члены асимптотики поперечного u_3 и продольных u_i смещений, а U^{00} – последующий асимптотический член. Ввиду сделанных предположений (1.26), (1.27) о симметрии, влекущих за собой соотношения (1.29), следует положить

$$w_1 = w_2 = 0.$$

При этом асимптотическая процедура нахождения младших членов анзаца (1.32) приводит к дифференциальному уравнению (1.30).

Аналогичный (1.32) анзац для поля смещений в изолированном стержне $G_h^{j,0}$ из семейства $\{G_h^{j,k}\}$ выглядит более громоздким, а именно,

$$\begin{aligned} h^{-2}(w_1^j(z^j)e_1^j + w_2^j(z^j)e_2^j) + h^{-1}\left(e_3^j\left(w_3^j(z^j) - \sum_{i=1}^2 \eta_i^j \frac{\partial w_i^j}{\partial z^j}(z^j)\right) \right. \\ \left. + (e_1^j \eta_2^j - e_2^j \eta_1^j)w_4^j(z^j)\right) + h^0 U^{0j}(\eta^j, z^j) + \dots, \end{aligned} \quad (1.33)$$

в частности, он включает четыре неизвестные функции w_i , w_3 и w_4 , отвечающие двум прогибам, продольному смещению и закручиванию стержня. В (1.33) e_i^j и e_3^j – орты осей декартовой системы координат (y^j, z^j) , привязанной к стержню $G_h^{j,0}$, $\eta_i^j = h^{-1}y_i^j$ – быстрые переменные, а U^{0j} – следующий асимптотический член. Напомним, что ось y_1^j перпендикулярна срединной плоскости пластины, а оси y_2^j и z^j лежат в ней. Таким образом, $e_1^j = e_3$ и соотношения (1.29) приводят к равенствам

$$w_2^j = w_3^j = 0, \quad (1.34)$$

однако оставляют функции w_1^j и w_4^j произвольными. Для изолированного стержня построение младших членов асимптотики (1.33) приводит (см., например, [17]) к дифференциальным уравнениям

$$a_{11}^j \partial_{z^j}^4 w_1^j(z^j) - a_{14}^j \partial_{z^j}^3 w_4^j(z^j) = \Phi_1^j(z^j), \quad (1.35)$$

$$a_{14}^j \partial_{z^j}^3 w_1^j(z^j) - a_{44}^j \partial_{z^j}^2 w_4^j(z^j) = \Phi_4^j(z^j), \quad (1.36)$$

причем постоянные коэффициенты удовлетворяют условиям $a_{11}^j > 0$, $a_{44}^j > 0$ и $a_{11}^j a_{44}^j - (a_{14}^j)^2 > 0$, обеспечивающие эллиптичность системы.

На первый взгляд, система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.35), (1.36) не имеет никакого отношения к скалярному уравнению (1.30). С другой стороны, некоторые дополнительные условия симметрии (см. [15]) обеспечивают равенство $a_{14}^j = 0$, т.е. система распадается на независимые уравнения. Таким образом, положив $w_4^j = 0$, получаем оператор $\mathbf{L}(\nabla_y)$ суммированием операторов из (1.35),

$$\mathbf{L}(\nabla_y) = \sum_{j=1}^J a_{11}^j \partial_{z^j}^4. \quad (1.37)$$

Понятно, что (1.30) – эллиптический оператор, если только среди семейств стержней $\{G_h^{j,k}\}$ нашлись такие, что $\vartheta_j \in (0, \pi)$. В инженерных расчетах обычно используется именно формула (1.37), причем “математическим обоснованием” служит однозначная разрешимость задачи Дирихле (1.30), (1.31) для эллиптического оператора четвертого порядка (1.37) в вариационной постановке.

Оказывается, что оба наблюдения, сделанные в предыдущем абзаце, ложны (разумеется, кроме эллиптичности оператора и разрешимости задачи). Это становится понятным при более детальном согласовании анзацев (1.32) и (1.33). Сравнивая в них множители при h^{-2} и учитывая (1.34), видим, что на всем семействе стержней $G_h^{j,k}$ следует положить

$$w_1^j(y_2^j, z^j) = w(y). \quad (1.38)$$

При этом первый аргумент левой части (1.38) должен меняться непрерывно, так как в пределе оси стержней из семейства $G_h^{j,k}$ заметают всю область ω . Таким образом, для стержня $G_h^{j,0}$ находим по формуле Тейлора, что

$$w_1^j(y_2^j, z^j) = w_1^j(0, z^j) + h\eta_2^j \partial_{y_2^j} w_1^j(0, z^j) + O(h^2). \quad (1.39)$$

Следовательно, при подстановке соотношений (1.38), (1.39) в асимптотический анзац (1.32) получаем (подробности см. далее в п. 2.2), что

$$h^{-2} w_1^j(0, z^j) e_1^j + h^{-1} (\eta_2^j \partial_{y_2^j} w_1^j(0, z^j) e_1^j - \eta_1^j \partial_{y_2^j} w_1^j(0, z^j) e_2^j - \eta_1^j \partial_{z^j} w_1^j(0, z^j) e_3^j) + \dots \quad (1.40)$$

Выражение (1.40) совпадает с первыми членами в (1.33), уточненными формулами (1.34), в том случае, если

$$w_4^j = \partial_{y_2^j} w_1^j.$$

Ввиду этой связи соотношение (1.35) перестает быть обыкновенным дифференциальным уравнением из-за наличия смешанной производной $-a_{14}^j \partial_{y_2^j} \partial_{z^j}^3 w_1^j$.

Формула Тейлора задействована и при определении младших асимптотических членов и, как показано в § 2, вклад семейства $G_h^{j,k}$ в дифференциальный оператор $\mathbf{L}(\nabla_y)$ из результирующего уравнения (1.30) равен

$$m_{11}^j \partial_{z^j}^4 + 2m_{12}^j \partial_{y_2^j} \partial_{z^j}^3 + m_{22}^j \partial_{y_2^j}^2 \partial_{z^j}^2, \quad (1.41)$$

где $m_{11}^j > 0$, $m_{22}^j > 0$ и $m_{11}^j m_{22}^j - (m_{12}^j)^2 > 0$. Сам по себе оператор (1.41), разумеется, не является эллиптическим, но сумма таких операторов по $j = 1, \dots, J$ при условии, что $\vartheta_k \in (0, \pi)$ при некотором k , все-таки становится эллиптическим оператором.

1.5. Явные формулы в случае изотропных материалов. Важным частным случаем является композитная пластина, в которой и материал стержней, и материал матрицы изотропный. Матрица жесткости A^j в этом случае выглядит так:

$$A^j = \begin{pmatrix} \lambda_j + 2\mu_j & \lambda_j & 0 & 0 & 0 & \lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_j + 2\mu_j & 0 & 0 & 0 & \lambda_j \\ 0 & 0 & 2\mu_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_j & 0 \\ \lambda_j & \lambda_j & 0 & 0 & 0 & \lambda_j + 2\mu_j \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda_j \geq 0$ и $\mu_j > 0$ – постоянные Ламе. Пусть еще сечение стержней из семейства $\{G_h^{j,k}\}$ – круг с радиусом R_j . Тогда согласно результатам § 2 и § 3 настоящей работы (см. далее общую формулу (2.67)) дифференциальный оператор $\mathbf{L}(\nabla_y)$ из результирующего уравнения (1.30) принимает следующий вид:

$$\mathbf{L}(\nabla_y) = \frac{\pi}{4} a_1^{-1} a_2^{-1} \sum_j \mu_j R_j^4 \left(\frac{\partial^4}{\partial (y_2^j)^2 \partial (z^j)^2} + \frac{7\lambda_j + 10\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \frac{\partial^4}{\partial (z^j)^4} \right). \quad (1.42)$$

Рис. 8. Схема армирования пластины и ячейка периодичности армированной пластины

В частности, если пластина армирована тремя парами семейств круглых стержней, имеющими одинаковые размеры, одинаковые упругие свойства и составляющими угол 60° одно с другим (схема армирования пластины представлена на рис. 8), причем расстояние между соседними однонаправленными стержнями равно s , то результирующий оператор $\mathbf{L}(\nabla_y)$ пропорционален бигармоническому оператору:

$$\mathbf{L}(\nabla_y) = \frac{3\sqrt{3}\pi R^4}{128s^2} \frac{\mu(22\lambda + 31\mu)}{\lambda + \mu} \Delta_y^2.$$

Другой частный случай применения формулы (1.42), прямоугольная решетка с ячейкой периодичности, изображенной на рис. 2, уже обсуждался в п. 1.1.

§ 2. Формальная асимптотика упругих полей

2.1. Преобразование координат и определяющие соотношения теории упругости. Координаты (y, z) и (y^j, z^j) , привязанные к пластине Ω_h и к стержням $G_h^{j,k}$ соответственно, связаны ортогональным преобразованием

$$x^j = \theta^j(x - x_0^{(j)}), \quad (2.1)$$

в котором фигурирует (3×3) -матрица

$$\theta^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin \vartheta^j & \cos \vartheta^j & 0 \\ \cos \vartheta^j & -\sin \vartheta^j & 0 \end{pmatrix},$$

а $x_0^{(j)}$ – точка на оси стержня $G_h^{j,k}$. При этом столбец v^j , компонентами которого служат проекции столбца смещений u^j на осях y_i^j и z^j , находится по формуле

$$v^j(h, y^j, z^j) = \theta^j u^j(h, x - x_0^{(j)}).$$

Введем ортогональную (6×6) -матрицу

$$\Theta^j = \begin{pmatrix} 0 & \sin^2 \vartheta^j & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\vartheta^j & \cos^2 \vartheta^j \\ 0 & \cos^2 \vartheta^j & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\vartheta^j & \sin^2 \vartheta^j \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\vartheta^j & 0 & 0 & \cos 2\vartheta^j & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\vartheta^j \\ 0 & 0 & \sin \vartheta^j & \cos \vartheta^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta^j & -\sin \vartheta^j & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями проверяется соотношение

$$D(\nabla_y, \partial_z) = \Theta^j D(\nabla_{y^j}, \partial_{z^j}) \theta^j.$$

Поэтому уравнения равновесия (1.18), суженные на $G^j(h)$, записываются в координатах x^j следующим образом:

$$D(-\nabla_{x^j})^\top \mathcal{A}^j D(\nabla_{x^j}) v^j(h, x^j) = f^j(h, x^j), \quad x \in G^j(h). \quad (2.2)$$

При выводе формул (2.2) учтены равенства $f^j = \theta^j f$ и $\theta^j (\theta^j)^\top = 1$. Матрица упругих модулей

$$\mathcal{A}^j = \Theta^j{}^\top A^j \Theta^j,$$

конечно же, сохраняет симметрию и положительную определенность.

Далее при построении асимптотического разложения решения задачи (1.18), (1.20)–(1.23) предполагаем, что в определении (1.19)

$$\gamma = h\gamma_0, \quad (2.3)$$

где γ_0 – положительное число, не зависящее от параметра h . Пояснения к этому требованию уже были сделаны в п. 1.4.

2.2. Построение старших членов асимптотики. Для старших членов асимптотики поля смещений в композитной пластине примем классический асимптотический анзац, используемый в теории тонких пластин (см. например, [4]), а именно,

$$h^{-2}U^{-2}(y) + h^{-1}U^{-1}(y, \zeta) = h^{-2}w(y)e_3 - h^{-1}\zeta \left\{ \frac{\partial w}{\partial y_1}(y)e_1 + \frac{\partial w}{\partial y_2}(y)e_2 \right\}. \quad (2.4)$$

Здесь $\zeta = h^{-1}z$ – “быстрая” переменная и функция w (скаляр) имеет смысл среднего по толщине прогиба пластины.

Пусть $w^j(y_2^j, z^j) = w(y)$ – прогиб, записанный при помощи системы координат x^j , соотнесенной со стержнями $G_h^{j,k}$. При этом асимптотический анзац (2.4) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} & h^{-2}U^{-2,j}(y_2^j, z^j) + h^{-1}U^{-1,j}(y_2^j, z^j, \eta_1^j) \\ &= h^{-2}w^j(y_2^j, z^j)e_1^j - h^{-1}\eta_1^j \left\{ \frac{\partial w^j}{\partial y_2^j}(y_2^j, z^j)e_2^j + \frac{\partial w^j}{\partial z^j}(y_2^j, z^j)e_3^j \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\eta_1^j = h^{-1}y_1^j$, а e_i^j и e_3^j – орты осей y_i^j и z^j .

Для нахождения функции w построим младшие члены анзаца (2.4). Введем “растянутые” координаты

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (h^{-1}y_1, h^{-1}y_2, h^{-1}z). \quad (2.6)$$

Ясно, что $\zeta = \xi_3$. Удлиним асимптотический анзац, добавив к выражению (2.4) сумму

$$h^0 U^0(y, \xi) + h^1 U^1(y, \xi) + h^2 U^2(y, \xi). \quad (2.7)$$

При замене координат $x \mapsto \xi$ ячейка периодичности $S_h(\alpha)$ становится параллелепипедом $\mathbf{S}$, имеющим не зависящие от параметра h размеры $a_1 \times a_2 \times 1$. Кроме того, в соответствии с формулой (1.12) пересечение $G^j(h) \cap S_h(\alpha)$ переводится в множество $\mathbf{G}^j$. Это множество состоит из нескольких областей, части границ которых расположены попарно симметрично на боковых сторонах параллелепипеда. Ввиду периодической структуры композитной пластины далее задачи на ячейках – “стержневой” $\mathbf{G}^j$ и “пластинчатой” $\mathbf{T} = \mathbf{S} \setminus \bigcup_{j=1}^J \overline{\mathbf{G}^j}$ – будут решаться в классах периодических вектор-функций. Именно, параллельные боковые стороны параллелепипеда $\mathbf{S}$ отождествляются и на отождествленных таким образом участках границ множеств $\mathbf{G}^j$ и $\mathbf{T}$ выставляются условия непрерывности смещений и всех их первых производных. Всюду под решением какой-либо задачи на той или иной ячейке подразумеваем именно периодическое решение, но сами условия периодичности не выписываем.

Наряду с координатами (1.12) введем “растянутые” координаты

$$\xi^j = (\eta^j, \zeta^j), \quad (\eta_1^j, \eta_2^j) = \eta^j = h^{-1}y^j, \quad \zeta^j = h^{-1}z^j,$$

относящиеся к стержням и связанные с координатами (2.6) соотношением $\xi^j = \theta^j \xi$ (ср. с формулой (2.1)).

Для сложной функции $x \mapsto U(x, h^{-1}x)$ выполнено равенство

$$D(\nabla_x)U(x, h^{-1}x) = \{h^{-1}D_\xi U(x, \xi) + D_x U(x, \xi)\}|_{\xi=h^{-1}x},$$

в котором $D_\xi = D(\nabla_\xi)$ и $D_x = D(\nabla_x)$. Если вектор U зависит только от переменной y , то оператор D_x заменяется оператором $D_y = D(\nabla_y, 0)$. Для сложной функции $x \mapsto U^j(x^j, h^{-1}x^j)$ имеет место аналогичное соотношение, а именно,

$$D(\nabla_{x^j})U^j(x^j, h^{-1}x^j) = \{h^{-1}D_{\xi^j}U^j(x^j, \xi^j) + D_{x^j}U^j(x^j, \xi^j)\}|_{\xi^j=h^{-1}x^j},$$

причем $D_{\xi^j} = D(\nabla_{\xi^j})$ и $D_{x^j} = D(\nabla_{x^j})$. Подчеркнем, что в случае $U = \theta^j U^j$ справедливо соотношение $D(\nabla_x)U = \theta^j D(\nabla_{x^j})U^j$ и, в частности, благодаря структуре матрицы θ^j выполняется равенство

$$D(\nabla_y, 0)U = \theta^j D(0, \partial_{y_2^j}, \partial_{z^j})U^j.$$

Коэффициент при h^0 в формуле (2.7) определяется при решении краевых задач на множествах $\mathbf{G}^j$ и на множестве $\mathbf{T}$. Выведем уравнения, которым удовлетворяет функция $h^0 U^{0,j}$ на $G^j(h)$. Для этого воспользуемся представлением (2.5) старших членов асимптотики. Выберем стержень $G_h^{j,k} \in G_h^j$ и зафиксируем медленную переменную $y_2^j = P^j$ на его оси. Применим формулу Тейлора по переменной y_2^j к функциям из правой части (2.5) в окрестности точки P^j и произведем в уравнениях (1.18) и условии сопряжения (1.22) замену координат

$x^j \mapsto \xi^j$ (см. замечание 2.2). Собирая члены порядков h^{-2} и h^{-1} соответственно в уравнениях и условиях сопряжения, получаем при помощи соотношения

$$\eta_2^j D_{\xi^j} \left(\frac{\partial U^{-1,j}}{\partial y_2^j} \right) + D_{z^j} \eta_2^j \frac{\partial U^{-2,j}}{\partial y_2^j} + D_{\xi^j} \left(\frac{(\eta_2^j)^2}{2} \right) \frac{\partial^2 U^{-2,j}}{\partial (y_2^j)^2} = 0 \quad (2.8)$$

следующие равенства:

$$\begin{aligned} D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j}(P^j, z^j, \xi^j) + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} U^{-1,j}(P^j, z^j, \xi^j) \\ + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} (\eta_2^j) \frac{\partial U^{-1,j}}{\partial y_2^j}(P^j, z^j, \xi^j) = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j}(P^j, z^j, \xi^j) + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} U^{-1,j}(P^j, z^j, \xi^j) \\ + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} (\eta_2^j) \frac{\partial U^{-1,j}}{\partial y_2^j}(P^j, z^j, \xi^j) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, вектор $U^{0,j}$ следует искать как периодическое решение задачи на стержневой ячейке периодичности

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j(\nabla_{\xi^j}) U^{0,j}(y_2^j, z^j, \xi^j) &:= -D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j}(y_2^j, z^j, \xi^j) \\ &= D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j}(y_2^j, z^j, \xi^j), \quad \xi^j \in \mathbf{G}^j; \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^j(\xi^j, \nabla_{\xi^j}) U^{0,j}(y_2^j, z^j, \xi^j) &:= D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j}(y_2^j, z^j, \xi^j) \\ &= -D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j}(y_2^j, z^j, \xi^j), \quad \xi^j \in \partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При этом $D^{(j)} = D(0, \partial/\partial y_2^j, \partial/\partial z^j)$ и $D_{\nu^j} = D(\nu^j)$.

Краевая задача

$$\mathcal{L}^j U^j = f^j \quad \text{в } \mathbf{G}^j, \quad \mathcal{N}^j U^j = g^j \quad \text{на } \partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}, \quad (2.13)$$

имеет решение в классе периодических функций при выполнении четырех условий разрешимости

$$\int_{\mathbf{G}^j} \mathbf{d}(\xi)^\top f^j(y, \xi) d\xi + \int_{\mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} \mathbf{d}(\xi)^\top g^j(y, \xi) ds_\xi = 0 \in \mathbb{R}^4 \times \{0\}^2, \quad (2.14)$$

в которых

$$\mathbf{d}(\xi^j)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\xi}_2^j & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\xi}_1^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Обращаем внимание на то, что четвертый столбец матрицы (2.15), описывающий поворот вокруг оси стержня, линейно зависит от переменных ξ_1 и ξ_2 лишь в том случае, когда ячейка $\mathbf{G}^j$ – связное множество (см. рис. 3), но для несвязной ячейки $\mathbf{G}^j$ (см. рис. 5) он лишь кусочно линеен. Через $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ обозначим значения переменных ξ_1 и ξ_2 на различных несвязных фрагментах множества $\mathbf{G}^j$, относящихся к одному “стержню” (см. рис. 5).

При выполнении условия (2.14) существует единственное периодическое решение U^j задачи (2.13), подчиненное условию ортогональности

$$\int_{\mathbf{G}^j} \mathbf{d}(\xi)^\top U^j(y, \xi) d\xi = 0 \in \mathbb{R}^4 \times \{0\}^2. \quad (2.16)$$

В силу формулы Остроградского–Гаусса правые части задачи (2.11), (2.12) автоматически удовлетворяют условиям разрешимости (2.14).

Равенство $D_\xi U^{-1} + D_y U^{-2} = 0$, вытекающее непосредственно из определений (1.16) и (2.4), показывает, что сужение $U_\bullet^0$ асимптотического члена $h^0 U^0$ на “матрицу” $\Omega(h)$ подчинено соотношениям

$$\mathcal{L}^0 U_\bullet^0 := -D_\xi^\top \gamma_0 A^0 D_\xi U_\bullet^0 = D_\xi^\top \gamma_0 A^0 D_y U^{-1}, \quad \xi \in \mathbf{T}, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{N}_\pm^0 U_\bullet^0 := D_\pm^\top \gamma_0 A^0 D_\xi U_\bullet^0 = -D_\pm^\top \gamma_0 A^0 D_y U^{-1}, \quad \xi \in \Upsilon_\pm, \quad (2.18)$$

где $D_\pm = D(0, 0, \pm 1)$ и $\Upsilon_\pm = \{(y, z) : y \in \omega, z = \pm 1\}$. Записываем слагаемые асимптотики в координатах x^j , раскладываем их в ряды Тейлора в окрестности точки P^j , как и при выводе равенств (2.9), (2.10), и производим замену координат $x^j \mapsto \xi^j$. В результате при учете связи (2.3) матриц жесткости получаем краевое условие Дирихле (см. замечание 2.1):

$$U_\bullet^0(y, \xi) = \theta^j{}^\top U^{0,j}(\theta^j y, \xi^j), \quad \xi \in \partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}, \quad (2.19)$$

которое вместе с условиями периодичности замыкает задачу (2.17)–(2.19) для вектор-функции $U_\bullet^0$. В отличие от задачи на стержнях, задача (2.17)–(2.19) с условиями периодичности на $\mathbf{T}$ всегда разрешима благодаря условиям (2.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Ввиду контрастной жесткости компонент композита, описываемой формулой (2.3), условия сопряжения (1.22) распадаются, причем первое из них порождает условие Неймана (естественное), которое передается стержню, более жесткому в сравнении с матрицей, а второе – условие Дирихле (устойчивое) – задаче на более мягкой “пластинчатой” ячейке.

2.3. Специальные решения краевых задач на ячейках. В п. 2.4 и п. 2.5 будут построены остальные слагаемые $h^1(U^1 + U^{1,j})$ и $h^2(U^2 + U^{2,j})$ асимптотического анзаца (2.7). Сужения $U_\bullet^1$ и $U_\bullet^2$ членов U^1 и U^2 на множество $\Omega(h)$, как и члена U^0 (ср. с задачами (2.17)–(2.19)), являются периодическими решениями задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0 U(x, \xi) &= F(x, \xi), \quad \xi \in \mathbf{T}, \quad \mathcal{N}_\pm^0 U(x, \xi) = G^\pm(x, \xi), \quad \xi \in \Upsilon_\pm, \\ U((\theta^j)^\top(0, P^j, z^j), \xi) &= H^j(z^j, \xi), \quad \xi \in \partial \mathbf{G}^j, \quad j = 1, \dots, J, \end{aligned} \quad (2.20)$$

с различными правыми частями F , $G^\pm$ и H^j . Справедлива формула Грина

$$\int_{\mathbf{T}} \mathcal{V}^\top F d\xi + \sum_{\pm} \int_{\Upsilon_\pm} \mathcal{V}^\top G^\pm ds_\xi + \sum_{j=1}^J \int_{\partial \mathbf{G}^j} \mathcal{V}^\top N^j(U) ds_\xi = 2\gamma_0 E_0(\mathcal{V}, U; \mathbf{T}), \quad (2.21)$$

где $\mathcal{V}$ – произвольная периодическая вектор-функция,

$$N^j(U) := \theta^j D(\nu^j)^\top \gamma_0 \mathcal{A}_0^j D(\nabla_\xi) \theta^j U, \quad \mathcal{A}_0^j = \theta^j{}^\top A^0 \theta^j,$$

а нормированный согласно предположениям (1.19) и (2.3) энергетический функционал (1.25) принимает следующий вид:

$$E_0(u, v; \Xi) = \frac{1}{2} (A^0 Du, Dv)_\Xi.$$

Для соблюдения условий разрешимости (2.14) задачи на стержневых ячейках понадобятся решения задачи (2.20) со специальными правыми частями. Опишем эти решения.

Добавим к $U^{0,j}$ жесткие смещения $\mathbf{d}(\xi^j) C^j$, где

$$C^j = (C^{1,j}, C^{2,j}, C^{3,j}, C^{4,j}, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^4 \times \{0\}^2, \quad j = 1, \dots, J. \quad (2.22)$$

Они являются решениями однородной задачи (2.11), (2.12), но не удовлетворяют условиям ортогональности (2.16), назначенным ранее для $U^{0,j}$. Отберем из (2.22) такие векторы C^j , что для $\mathbf{d}(\xi^j)C^j$ выполнены требования симметрии (1.28). В конструкции $\Xi(h)$ могут присутствовать не только стержни, симметричные относительно срединной плоскости $\{x : z = 0\}$ пластины (см. рис. 7), но и пары стержней, расположенные симметрично относительно срединной плоскости (см. рис. 2). Обозначим через $\mathcal{G}_0$ совокупность стержней, симметричных относительно срединной плоскости пластины, а через $\mathcal{G}_+$ – совокупность стержней, лежащих в полупространстве $z > 0$ и имеющих пару в полупространстве $z < 0$ (совокупность последних обозначим через $\mathcal{G}_-$).

Пусть $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_0$. Свойствам (1.28) удовлетворяют только жесткие смещения

$$\mathbf{v}^{j,1}(\xi) = e_1^j, \quad \mathbf{v}^{j,0}(\xi^j) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\xi}_2^j e_1^j + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\xi}_1^j e_2^j. \quad (2.23)$$

Предположим, что для какого-либо индекса j_+ семейство $\mathbf{G}^{j_+}$ принадлежит совокупности $\mathcal{G}_+$. Тогда найдется такой индекс j_- , что соответствующее семейство стержней $\mathbf{G}^{j_-}$ принадлежит совокупности $\mathcal{G}_-$. Свойствам (1.28) удовлетворяют только следующие четыре пары:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{j_\pm,1} = e_1^{j_\pm} \quad \text{на } \mathbf{G}^{j_\pm}, \quad \mathbf{v}^{j_\pm,2} = \pm e_2^{j_\pm} \quad \text{на } \mathbf{G}^{j_\pm}, \quad \mathbf{v}^{j_\pm,3} = \pm e_3^{j_\pm} \quad \text{на } \mathbf{G}^{j_\pm}, \\ \mathbf{v}^{j_\pm,0}(\xi^{j_\pm}) = \pm \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\xi}_2^{j_\pm} e_1^{j_\pm} + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\xi}_1^{j_\pm} e_2^{j_\pm} \right\} \quad \text{на } \mathbf{G}^{j_\pm}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для каждого из жестких смещений $\mathbf{v}^{j,k}$, определенных по формуле (2.23), введем периодическое решение $\mathbf{w}^{j,k}$ задачи (2.20), для которого $\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{G}^\pm = 0$, а правая часть $\mathbf{H}^j$ условия Дирихле совпадает с этим жестким смещением на поверхности соответствующих стержней и равна нулю на других стержнях. Например, для первого вектора (2.23), отвечающего стержню $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_0$, имеем $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{G}^\pm = 0$, $\mathbf{H}^k = \mathbf{v}^{j,1}$ на $\mathbf{G}^k \cap \mathbf{S}$ при $k = j$ и $\mathbf{H}^k = 0$ на $\mathbf{G}^k \cap \mathbf{S}$ при $k \neq j$. Аналогично для каждой пары жестких смещений $\mathbf{v}^{j_\pm,k}$ из (2.24) определим одно периодическое решение задачи (2.20), для которого $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{G}^\pm = 0$, а правая часть условия Дирихле равна $\mathbf{v}^{j_\pm,1}$ на границах стержней $\mathbf{G}^{j_\pm}$ и равна нулю на границах остальных стержней.

Из столбцов жестких смещений $\mathbf{v}^{\dots}$, заданных формулами (2.23), (2.24), и порожденных ими решений $\mathbf{w}^{\dots}$ указанных задач составим соответственно матрицы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ размерами $3 \times 2J$, согласовав порядки расположения элементов. Если $b = (b_1, \dots, b_{2J})^\top \in \mathbb{R}^{2J}$ – столбец высотой $2J$, то $\mathbf{V}b$ и $\mathbf{W}b$ – векторы смещений. При этом считаем, что матрица-функция $\mathbf{V}$ определена на любом из стержней, но ее компоненты отличаются от нуля лишь на тех стержнях, которые соответствуют жестким смещениям (2.23) и (2.24).

Добавление к асимптотическому члену $U^{0,j}$ на $\Omega(h)$ слагаемого

$$\mathbf{V}b \quad (2.25)$$

вызывает появление дополнительного слагаемого

$$\mathbf{W}b \quad (2.26)$$

в члене $U_\bullet^0$ асимптотического анзаца (2.7) (ср. с формулой (2.19)).

Невязка, образованная вектор-функцией (2.26) в условиях (1.23), согласно (2.3) попадает в правую часть краевых условий Неймана в задаче вида

(2.17)–(2.19) для $U^{1,j}$ и компенсируется слагаемыми $hU^{1,j}$, определяющими асимптотику на стержне $\mathbf{G}^j$. Таким образом, вектор-функция (2.26) привносит в условия разрешимости (2.14) задачи на стержне $\mathbf{G}^j$ слагаемые

$$(\mathbf{w}^{j,k\top}, N^j(\mathbf{W}b))_{\partial\mathbf{G}^j}. \quad (2.27)$$

При этом в случае $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_0$ эти слагаемые с индексами $k = 0, 1$ добавляются лишь к двум условиям разрешимости (2.14) задачи для $U^{1,j}$, включающим столбцы $(1, 0, 0)^\top$ и $(-\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\xi}_2^j, \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\xi}_1^j, 0)^\top$, а в случае $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_\pm$ слагаемые с индексами $k = 0, 1, 2, 3$ возникают во всех четырех условиях.

В силу равенства (2.21) с $\mathcal{V} = \mathbf{w}^{j,k}$ скалярные произведения (2.27) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{A}b := \left(\gamma_0 \int_{\mathbf{T}} (D(\nabla_\xi)\mathbf{W})^\top A^0 D(\nabla_\xi)\mathbf{W} d\xi \right) b. \quad (2.28)$$

Матрица $\mathbf{A}$ есть матрица Грама, построенная в пространстве $L_2(\mathbf{T})^6$ со скалярным произведением $(A \cdot, \cdot)_\mathbf{T}$ по столбцам $(6 \times 2J)$ -матрицы $D(\nabla_\xi)\mathbf{W}$.

В силу формулы (2.28) выражения (2.27) имеют вид $\mathbf{A}b$, а потому позволяют добиться выполнения условий разрешимости задач для определения $U^{1,j}$ и $U^{2,j}$. Напомним, что условия разрешимости (2.14) в задаче для $U^{0,j}$, формируемые из величин (2.4), оказываются выполненными автоматически. Напротив, левые части условий разрешимости (2.14) в задаче для $U^{1,j}$, построенные по столбцам (2.4) и $U^{0,j}$, $U^\bullet$ (без учета дополнительных слагаемых (2.25) и (2.26)) и левые части условий разрешимости задачи для $U^{2,j}$, вообще говоря, отличны от нуля и образуют некоторые зависящие от “медленной” переменной y вектор-функции $\mathbf{F}^0$ и $\mathbf{F}^1$, порядок расположения компонент в которых согласован с порядком расположения столбцов матрицы $\mathbf{W}$. Выполнение условий разрешимости задачи для вектор-функций $U^{1,j}$ (а также $U^{2,j}$ – см. далее п. 2.5) достигается путем выбора столбца b , удовлетворяющего системе алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}b = \mathbf{F}. \quad (2.29)$$

Поскольку $\mathbf{A}$ – матрица Грама, она симметрична. Для исследования разрешимости системы (2.29) протестируем столбцы матрицы $D(\nabla_\xi)\mathbf{W}$ на линейную независимость. Пусть для $a \in \mathbb{R}^{2J}$ при всех точках $\xi \in \mathbf{T}$ выполняется равенство

$$D\mathbf{W}a = 0. \quad (2.30)$$

Тогда согласно определению (1.28) матрицы D вектор $\mathbf{W}a$ является жестким смещением, т.е. линейной комбинацией векторов

$$e_k, e_m y_n - e_n y_m, \quad k, n, m = 1, 2, 3, \quad n \neq m. \quad (2.31)$$

Первые два столбца ($k = 1, 2$) из списка (2.31) не удовлетворяют условиям симметрии (1.16), а последние три не обеспечивают граничных условий $\mathbf{w}^{j,0} = \mathbf{v}^{j,0}$, предписанных столбцам $\mathbf{w}^{j,0}$. Таким образом, существует единственная линейная комбинация столбцов матрицы $\mathbf{W}a$, равная e^3 , для которой выполняется соотношение (2.30). Эта линейная комбинация реализуется для столбца $a = a^0 \in \mathbb{R}^{2J}$, у которого J компонент, отвечающих столбцам $\mathbf{w}^{(k,1)}$, равны единице, а остальные компоненты, отвечающие столбцам $\mathbf{w}^{(k,0)}$ (а также столбцам $\mathbf{w}^{(m,2)}$ и $\mathbf{w}^{(n,3)}$ для стержней из $\mathcal{G}_\pm$), равны нулю.

Итак, система (2.29) разрешима при условии

$$(\mathbf{F}, a^0) = 0. \quad (2.32)$$

Если условие (2.32) выполнено, то из системы (2.29) находим столбец b , по которому выстраиваем дополнительные члены (2.25) и (2.26), обеспечивающие условия разрешимости (2.14) задач (2.13) для $U^{1,j}$ и $U^{2,j}$. Само условие (2.32) породит осредненное уравнение (1.30).

2.4. Асимптотические члены порядка h^1 . Для нахождения слагаемых $h^1 U^{1,j}$ в асимптотике решения задачи (1.18), (1.20)–(1.23) на $G^j(h)$ поступаем аналогично тому, что было сделано при выводе соотношений (2.9) и (2.10). Собрав в уравнениях (1.18) на стержнях $G^{j,k}(h)$ слагаемые порядка h^{-1} , получим равенство

$$\begin{aligned} & D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{1,j} + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} U^{0,j} + D_{z^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + D_{z^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} U^{-1,j} \\ & + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} (\eta_2^j) \frac{\partial U^{0,j}}{\partial y_2^j} + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j \eta_2^j D_{\xi^j} \left(\frac{\partial U^{0,j}}{\partial y_2^j} \right) + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} \eta_2^j \frac{\partial U^{-1,j}}{\partial y_2^j} \\ & + D_{z^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} (\eta_2^j) \frac{\partial U^{-1,j}}{\partial y_2^j} + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} \left(\frac{(\eta_2^j)^2}{2} \right) \frac{\partial^2 U^{-1,j}}{\partial (y_2^j)^2} \\ & + D_{z^j}^\top \mathcal{A}^j \frac{(\eta_2^j)^2}{2} D_{\xi^j} \frac{\partial^2 U^{-2,j}}{\partial (y_2^j)^2} + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j \frac{(\eta_2^j)^3}{6} D_{\xi^j} \frac{\partial^3 U^{-2,j}}{\partial (y_2^j)^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

При формировании уравнений (2.33) учтено соотношение (2.8), а также формула

$$\begin{aligned} & D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j \frac{(\eta_2^j)^2}{2} D_{\xi^j} \left(\frac{\partial^2 U^{-1,j}}{\partial (y_2^j)^2} \right) + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} \frac{(\eta_2^j)^2}{2} \frac{\partial^2 U^{-2,j}}{\partial (y_2^j)^2} \\ & + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} \left(\frac{(\eta_2^j)^3}{6} \right) \frac{\partial^3 U^{-2,j}}{\partial (y_2^j)^3} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемые порядка h^0 в условиях сопряжения (1.22) и примем во внимание вытекающее из тождества (2.8) соотношение

$$D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \eta_2^j D_{\xi^j} \frac{\partial U^{-1}}{\partial y_2^j} + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \eta_2^j D_{z^j} \frac{\partial U^{-2}}{\partial y_2^j} + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D_{\xi^j} \left(\frac{(\eta_2^j)^2}{2} \right) \frac{\partial^2 U^{-2}}{\partial (y_2^j)^2} = 0,$$

где $\mathcal{A}_0^j = \Theta^j{}^\top A^0 \Theta^j$. Имеем

$$\begin{aligned} & - D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{1,j} - D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} U^{0,j} - D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} \left(\eta_2^j \frac{\partial U^{0,j}}{\partial y_2^j} \right) \\ & - D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} \eta_2^j \frac{\partial U^{-1,j}}{\partial y_2^j} - D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} \left(\frac{(\eta_2^j)^2}{2} \frac{\partial^2 U^{-1,j}}{\partial (y_2^j)^2} \right) \\ & - D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{z^j} \frac{(\eta_2^j)^2}{2} \frac{\partial^2 U^{-2,j}}{\partial (y_2^j)^2} - D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} \left(\frac{(\eta_2^j)^3}{6} \right) \frac{\partial^3 U^{-2,j}}{\partial (y_2^j)^3} \\ & + \gamma_0 \left\{ D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D_{\xi^j} \theta^j U^\bullet + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D_{z^j} \theta^j U^{-1} + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D_{\xi^j} (\eta_2^j) \theta^j \frac{\partial U^{-1}}{\partial y_2^j} \right. \\ & \left. + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \frac{(\eta_2^j)^2}{2} D_{\xi^j} \theta^j \left(\frac{\partial U^{-2}}{\partial y_2^j} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Формулы (2.33) и (2.34) доставляют следующую задачу для $U^{1,j}$:

$$\mathcal{L}^j U^{1,j} = D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{0,j} + D^{(j)}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + D^{(j)}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j} := f^{1,j} \quad \text{на } \mathbf{G}^j, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{N}^j U^{1,j} = -D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{0,j} + \gamma_0 \{ D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^0 + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D^{(j)} \theta^j U^{-1} \} := g^{1,j} \quad \text{на } \partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}. \quad (2.36)$$

При выводе соотношения (2.36) использовано равенство (2.12).

Выполним условия разрешимости задачи (2.35), (2.36), имеющие вид (2.14) при $f^j = f^{1,j}$ и $g^j = g^{1,j}$. В силу симметрии стержня относительно срединной плоскости пластины, симметрии (1.27) нагрузок, равенств (1.26) и соотношений (1.28), наследуемых асимптотическими членами $U^{-1,j}$ и $U^{0,j}$, автоматически выполнены следующие два условия на стержнях $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_0$:

$$\int_{\mathbf{G}^j} e_i^{j\top} f^{1,j}(y, \xi) d\xi + \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} e_i^{j\top} g^{1,j}(y, \xi) ds_\xi = 0, \quad i = 2, 3.$$

Для обеспечения двух других условий разрешимости на этих стержнях и четырех условий разрешимости на стержнях $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_\pm$ используем специальные решения, описанные в п. 2.3. Добавим к $U^{0,j}$ сумму

$$\mathbf{U}^{0,j} = \sum_k b_k^{0,j} \mathbf{v}^{j,k}, \quad (2.37)$$

где $k = 0, 1$ для $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_0$ и $k = 0, 1, 2, 3$ для $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_\pm$, $\mathbf{v}^{j,k}$ – столбцы из списков (2.23) и (2.24), а $b_k^{0,j}$ – коэффициенты, подлежащие определению. Присоединение жестких смещений (2.37) к $U^{0,j}$ в силу формул (2.19) приводит к появлению дополнительного слагаемого

$$\mathbf{U}_\bullet^0 = \sum_{j=1}^J \sum_k b_k^{0,j} \mathbf{w}^{j,k} \quad (2.38)$$

в члене $U_\bullet^0$ на матрице $\Omega(h)$. Как было показано в п. 2.3, столбцы (2.38), попадая в правые части задач (2.35), (2.36), образуют в условиях разрешимости слагаемое $\mathbf{A}b^0$. Структура матрицы $\mathbf{A}$ и столбца b^0 , составленного из зависящих от медленной переменной y функций $b_k^{0,j}$, описана в п. 2.3. В частности отметим, что если $\mathbf{G}^{j+}$ и $\mathbf{G}^{j-}$ – пара стержней, симметричных относительно срединной плоскости, то функции $b_k^{0,j+}$ и $b_k^{0,j-}$ медленных переменных y отождествляются, т.е. этой паре соответствуют не восемь, а четыре компоненты столбца b^0 .

Найдем столбец b^0 из системы

$$\mathbf{A}b^0 = \mathbf{F}^0. \quad (2.39)$$

Столбец $\mathbf{F}^0$ образован условиями разрешимости задач (2.35), (2.36) для $U^{1,j}$, а именно,

$$\int_{\mathbf{G}^j} \mathbf{v}^{j,k\top} f^{1,j}(y, \xi) d\xi + \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} \mathbf{v}^{j,k\top} g^{1,j}(y, \xi) ds_\xi = 0$$

при $k = 0, 1, 2, 3$ в случае $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_\pm$ и $k = 0, 1$ в случае $\mathbf{G}^j \in \mathcal{G}_0$.

Проверим выполнение условия ортогональности

$$(\mathbf{F}^0, a^0) = 0 \quad (2.40)$$

для правой части алгебраической системы (2.39). Поскольку отличными от нуля являются лишь компоненты вектора a^0 , соответствующие столбцам $\mathbf{v}^{j,1}$, условие (2.40) имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^J \int_{\mathbf{G}^j} e_1^{j\top} f^{1,j}(y, \xi) d\xi + \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} e_1^{j\top} g^{1,j}(y, \xi) ds_\xi = 0. \quad (2.41)$$

Преобразуем (2.41), используя формулу Остроградского–Гаусса. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \int_{\mathbf{G}^j} e_1^{j\top} \{D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j}\} d\xi \\ + \gamma_0 \int_{\mathbf{T}} e_3^\top \{D_\xi^\top A_0 D_{\xi^j} U^\bullet + D_\xi^\top A_0 D_y U^{-1}\} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Справедливо равенство

$$(e_1^j)^\top D^{(j)\top} = \left((e_2^j)^\top \frac{\partial}{\partial y_2^j} + (e_3^j)^\top \frac{\partial}{\partial z^j} \right) (D(\nabla_{\xi^j}) \xi_1^j)^\top, \quad (2.43)$$

проверяемое непосредственными вычислениями. При учете (2.17) и (2.43) запишем левую часть (2.42) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^J \int_{\mathbf{G}^j} \left((e_2^j)^\top \frac{\partial}{\partial y_2^j} + (e_3^j)^\top \frac{\partial}{\partial z^j} \right) (D(\nabla_{\xi^j}) \xi_1^j)^\top \{ \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j} \} d\xi^j.$$

Согласно (2.11) и (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{G}^j} (D(\nabla_{\xi^j}) \xi_1^j)^\top \{ \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j} \} d\xi \\ = - \int_{\mathbf{G}^j} \xi_1^j D_{\xi^j}^\top \{ \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j} \} d\xi^j \\ + \int_{\partial \mathbf{G}^j} \xi_1^j D_{\nu^j}^\top \{ \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j} \} ds_{\xi^j} = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Теперь из (2.44) выводим равенство (2.42) и, следовательно, равенство (2.40).

Условие разрешимости (2.40) алгебраической системы (2.39) позволяет определить коэффициенты $b^{0,j}$ линейных комбинаций (2.37), (2.38) и обеспечить условия разрешимости задачи (2.35), (2.36). Итак, существует единственное периодическое решение $U^{1,j}$ задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j U^{1,j} &= D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) + D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} \\ &\quad + D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j} := f^{1,j}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^j U^{1,j} &= -D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) \\ &\quad + \gamma_0 \{ D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D_{\xi^j} \theta^j (U^\bullet + \mathbf{U}^\bullet) + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D^{(j)} \theta^j U^{-1} \} := g^{1,j}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

подчиненное условию ортогональности (2.16).

Собирая в уравнениях (1.18), (1.21) и (1.23) на “пластинчатой” ячейке $\mathbf{T}$ члены порядков h^0 , h^1 и h^1 соответственно, получаем краевую задачу для нахождения сужения $U_\bullet^1$ на $\mathbf{T}$ члена U^1 анзаца (2.7). В ней присутствуют составляющие правой части g краевого условия (1.21).

Предположим, что объемные силы и поверхностные нагрузки (1.27) имеют следующий вид:

$$f(h, x) = e_3^\top f^0(y), \quad (2.47)$$

$$g(h, x) = e_3^\top h g^0(y), \quad (2.48)$$

причем носитель $\text{supp } g^0$ функции g^0 содержится в области ω , т.е. сама функция аннулируется вблизи границы $\partial\omega$. Предположим также, что $f^0 \in L_2(\omega(h))$ и $g^0 \in L_2(\omega)$.

Итак, сужение $U_\bullet^1$ асимптотического члена $h^1 U^1$ на “матрицу” $\Omega(h)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0 U_\bullet^1 &= D_\xi^\top \gamma_0 A^0 D_y (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + D_y^\top \gamma_0 A^0 D_\xi (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + D_y^\top \gamma_0 A^0 D_y U^{-1} + e_3 f^0, \\ &\quad \xi \in \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\mathcal{N}_\pm^0 U_\bullet^1 = -D_\pm^\top \gamma_0 A^0 D_y (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + e_3 g^0, \quad \xi \in \Upsilon_\pm. \quad (2.50)$$

Повторяя вывод равенства (2.19), получаем краевое условие Дирихле

$$U_\bullet^1 = (\theta^j)^\top \left(U^{1,j} + \eta_2^j \left(\frac{\partial U^{0,j}}{\partial y_2^j} + \frac{\partial \mathbf{U}^{0,j}}{\partial y_2^j} \right) \right) - \eta_2^j \left(\frac{\partial U_\bullet^0}{\partial y_2^j} + \frac{\partial \mathbf{U}_\bullet^0}{\partial y_2^j} \right), \quad \xi \in \partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}. \quad (2.51)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В формуле (2.51) и далее фигурируют векторные поля, записанные в разных системах координат. Переход от системы координат (y^j, z^j) к системе (y, z) осуществляется при помощи ортогональной матрицы $(\theta^j)^\top$, которая помещена в правую часть при первых трех слагаемых, причем аргументами этих вектор-функций служат P^j, z^j, ξ^j . Левая часть и последние два слагаемых имеют аргументы $(y, 0) = (\theta^j)^\top(0, P^j, z^j)$ и $\xi = (\theta^j)^\top \xi^j$.

2.5. Асимптотические члены порядка h^2 . Вывод задачи для нахождения членов $h^2 U^{2,j}$ по существу повторяет вывод уравнений (2.35), (2.36) для определения $h^1 U^{1,j}$. Опуская громоздкие выкладки, аналогичные тем, что привели ранее к формулам (2.33), (2.34) и (2.35), (2.36), укажем задачу для асимптотического члена $U^{2,j}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j U^{2,j} &= D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{1,j} + D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{1,j} \\ &\quad + D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) + e_1^j f^0 := f^{2,j}, \quad \xi^j \in \mathbf{G}^j, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^j U^{2,j} &= -D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{1,j} + \gamma_0 (D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^1 \\ &\quad + D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D^{(j)} \theta^j (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0)) := g^{2,j}, \quad \xi^j \in \partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Как и в случае системы (2.35), (2.36), выполнение условий разрешимости задачи (2.52), (2.53) достигается подбором специальных решений

$$U^{1,j} = \sum_k b_k^{1,j} \mathbf{v}^{j,k}, \quad \mathbf{U}_\bullet^1 = \sum_{j=1}^J \sum_k b_k^{1,j} \mathbf{w}^{j,k} \quad (2.54)$$

и решением следующей алгебраической системы для числового столбца $b^1 = (b_1, \dots, b_J)^\top$:

$$\mathbf{A}b^1 = \mathbf{F}^1. \quad (2.55)$$

Столбец $\mathbf{F}^1$ образован левыми частями условий разрешимости задач (2.52), (2.53) для $U^{2,j}$. Система (2.55) имеет решение тогда и только тогда, когда верно равенство

$$(\mathbf{F}^1, a^0) = 0. \quad (2.56)$$

В п. 2.4 было доказано, что аналогичное условие (2.40) для системы (2.39) выполнено автоматически. Однако в случае системы (2.56) такое утверждение неверно. Преобразуем левую часть (2.56), а именно,

$$\mathbb{I} := \sum_{j=1}^J \left\{ \int_{\mathbf{G}^j} e_1^{j\top} f^{2,j}(y, \xi) d\xi + \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} e_1^{j\top} g^{2,j}(y, \xi) ds_\xi \right\}.$$

В силу формулы Остроградского–Гаусса имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \sum_{j=1}^J \{ \mathbb{I}_0^j + \gamma_0 \mathbb{I}_1^j \} \\ &:= \sum_{j=1}^J \left\{ \int_{\mathbf{G}^j} e_1^{j\top} (D^{(j)})^\top \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} U^{1,j} + D^{(j)}(U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) \} + e_3 f^0 \right\} d\xi^j \\ &\quad + \gamma_0 \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} e_1^{j\top} \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^0 \{ D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^1 + D^{(j)} \theta^j (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) \} ds_{\xi^j} \}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Поверхностные интегралы $\mathbb{I}_1^j$ в правой части (2.57) преобразуем, учитывая периодичность членов $U_\bullet^0$ и $U_\bullet^1$, равенство $(e_1^j)^\top \theta^j = e_3^\top$, ортогональность матрицы θ^j и соотношения (2.49), (2.50). В результате находим, что

$$\begin{aligned} \gamma_0 \sum_{j=1}^J \mathbb{I}_1^j &= \gamma_0 \int_{\mathbf{T}} e_3^\top D_\xi^\top A^0 \{ D_\xi U_\bullet^1 + D_y(U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) \} d\xi + 2a_1 a_2 g^0 \\ &= -\gamma_0 \int_{\mathbf{T}} e_3^\top D_y^\top A^0 \{ D_\xi(U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + D_y U^{-1} + e_3^\top f^0 \} d\xi + 2a_1 a_2 g^0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Применяя тождество

$$e_3^\top D_y^\top = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} ((D_\xi \zeta) e_i)^\top,$$

преобразуем при помощи соотношения (2.17) правую часть (2.58) так:

$$\begin{aligned} \gamma_0 \sum_{j=1}^J \mathbb{I}_1^j &= -\gamma_0 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{\mathbf{T}} ((D_\xi \zeta) e_i)^\top A^0 \{ D_\xi(U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + f^0 + D_y U^{-1} \} d\xi \\ &\quad + 2a_1 a_2 g^0 \\ &= -\gamma_0 \sum_{j=1}^J \left\{ \frac{\partial}{\partial y_2^j} \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} \xi_1^j (e_2^j)^\top D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \{ D_{\xi^j} \theta^j (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + D^{(j)} \theta^j U^{-1} \} d\xi \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial z^j} \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} \xi_1^j (e_3^j)^\top D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \{ D_{\xi^j} \theta^j (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + D^{(j)} \theta^j U^{-1} \} ds_{\xi^j} \Big\} \\
& + 2a_1 a_2 g^0 + |\mathbf{T}| f^0.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что

$$\theta^j \left(e_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \right) = e_2^j \frac{\partial}{\partial y_2^j} + e_3^j \frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Используя равенство (2.43) и еще раз интегрируя по частям, находим

$$\mathbb{I}_0^j = \mathbb{I}_{00}^j + \mathbb{I}_{01}^j.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{00}^j &:= - \int_{\mathbf{G}^j} \xi_1^j \left\{ \frac{\partial}{\partial y_2^j} (e_2^j)^\top + \frac{\partial}{\partial z^j} (e_3^j)^\top \right\} \\
&\quad \times D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} U^{1,j} + D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) \} d\xi + |\mathbf{G}^j| f^0, \\
\mathbb{I}_{01}^j &:= \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} \xi_1^j \left\{ \frac{\partial}{\partial y_2^j} (e_2^j)^\top + \frac{\partial}{\partial z^j} (e_3^j)^\top \right\} \\
&\quad \times D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} U^{1,j} + D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) \} ds_{\xi}.
\end{aligned}$$

В силу соотношения (2.46) справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^J \mathbb{I}_1^j + \sum_{j=1}^J \mathbb{I}_{01}^j = 2a_1 a_2 g^0.$$

Таким образом, согласно (2.45) условие разрешимости (2.56) системы (2.55) принимает вид

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^J \int_{\mathbf{G}^j} \left(\frac{\partial}{\partial y_2^j} (e_2^j)^\top + \frac{\partial}{\partial z^j} (e_3^j)^\top \right) \xi_1^j (D^{(j)})^\top \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} U^{0,j} + D^{(j)} U^{-1,j} \} d\xi^j \\
& = |\mathbf{T}| f^0 + a_1 a_2 g^0 =: \Phi.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

В следующем разделе будет показано, что равенство (2.59) представляет собой дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции w из асимптотического анзаца (2.4). Если w удовлетворяет этому уравнению, то удастся определить вектор b^1 из системы (2.55) и подобрать специальные решения (2.54), обеспечивающие разрешимость задачи (2.52), (2.53) для $U^{2,j}$.

Сужение $U_\bullet^2$ асимптотического члена U^2 суммы (2.7) на множество $\Omega(h)$ находится как периодическое решение задачи

$$\mathcal{L}^0 U_\bullet^2 = D_\xi^\top \gamma_0 A^0 D_y (U_\bullet^1 + \mathbf{U}_\bullet^1) + D_y^\top \gamma_0 A^0 D_\xi (U_\bullet^1 + \mathbf{U}_\bullet^1) + D_y^\top \gamma_0 A^0 D_y (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0),$$

$$\xi \in \mathbf{T},$$

$$\mathcal{N}_\pm^0 U_\bullet^2 = -D_\pm^\top \gamma_0 A^0 D_y (U_\bullet^1 + \mathbf{U}_\bullet^1), \quad \xi \in \Upsilon_\pm;$$

$$\begin{aligned}
U_\bullet^2 &= \theta^j \left\{ U^{2,j} + \eta_2^j \frac{\partial U^{1,j}}{\partial y_2^j} + \frac{(\eta_2^j)^2}{2} \frac{\partial^2 U^{0,j}}{(\partial y_2^j)^2} \right\} - \eta_2^j \left\{ \frac{\partial U_\bullet^1}{\partial y_2^j} + \frac{\partial \mathbf{U}_\bullet^1}{\partial y_2^j} \right\} \\
&\quad - \frac{(\eta_2^j)^2}{2} \left\{ \frac{\partial U_\bullet^0}{\partial y_2^j} + \frac{\partial \mathbf{U}_\bullet^0}{\partial y_2^j} \right\}, \quad \xi \in \partial \mathbf{G}^j, \quad y_2^j = P^j,
\end{aligned}$$

где приняты обозначения из замечания 2.2.

2.6. Результирующая задача для функции w . Преобразуем соотношение (2.59). Запишем столбец $D^{(j)}U^{-1,j}$ в таком виде:

$$D^{(j)}U^{-1,j}(y_2^j, z^j, \xi^j) = \mathcal{Y}(\xi_1^j) \mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j}) w(y, z). \quad (2.60)$$

Здесь

$$\mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial(y_2^j)^2}, \sqrt{2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^j \partial z^j}, \frac{\partial^2}{\partial(z^j)^2} \right)^\top, \quad (2.61)$$

$$\mathcal{Y}(\xi_1^j) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\xi}_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\xi}_1^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\xi}_1^j \end{pmatrix}^\top. \quad (2.62)$$

В силу равенства (2.60) решение $U^{0,j}$ задачи (2.11), (2.12) принимает следующий вид:

$$U^{0,j}(y_2^j, z^j, \xi^j) = \mathcal{X}(\xi^j) \mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j}) w(y), \quad (2.63)$$

где (3×3) -матрица $\mathcal{X}$ – это периодическое решение задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j(\nabla_{\xi^j}) \mathcal{X}(\xi^j) &= D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j \mathcal{Y}(\xi_1^j), & \xi^j \in \mathbf{G}^j, \\ \mathcal{N}^j(\xi^j, \nabla_{\xi^j}) \mathcal{X}(\xi^j) &= -D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j \mathcal{Y}(\xi_1^j), & \xi^j \in \partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

подчиненное условию

$$\int_{\mathbf{G}^j} \mathbf{d}(\xi)^\top \mathcal{X}(\xi) d\xi = 0.$$

В силу (2.60) и (2.63) имеем

$$D_{\xi^j} U^{0,j} + D^{(j)} U^{-1,j} = (D_{\xi^j} \mathcal{X} + \mathcal{Y}) \mathcal{D} w. \quad (2.65)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\xi_1^j \left(\frac{\partial}{\partial y_2^j} (e_2^j)^\top + \frac{\partial}{\partial z^j} (e_3^j)^\top \right) D^{(j)\top} = \mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j})^\top \mathcal{Y}(\xi_1^j)^\top.$$

Теперь равенство (2.59) эквивалентно такому равенству:

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^J \mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j})^\top \int_{\mathbf{G}^j} \mathcal{Y}(\xi_1^j)^\top \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} \mathcal{X}(\xi^j) + \mathcal{Y}(\xi_1^j) \} d\xi^j \mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j}) \theta^j w(y) \\ & = \Phi(y). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Используя формулу

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{G}^j} (D_{\xi^j} \mathcal{X}(\xi^j))^\top \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} \mathcal{X}(\xi^j) + \mathcal{Y}(\xi_1^j) \} d\xi^j \\ & = \int_{\mathbf{G}^j} \mathcal{X}(\xi^j) D_{\xi^j} \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} \mathcal{X}(\xi^j) + \mathcal{Y}(\xi_1^j) \} d\xi^j \\ & \quad + \int_{\partial \mathbf{G}^j \cap \mathbf{S}} \mathcal{X}(\xi^j) D_{\nu^j} \mathcal{A}^j \{ D_{\xi^j} \mathcal{X}(\xi^j) + \mathcal{Y}(\xi_1^j) \} ds_\xi = 0, \end{aligned}$$

придаем уравнению (2.66) следующий вид:

$$-\sum_{j=1}^J \mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j})^\top \mathcal{M}^j \mathcal{D}(\partial_{y_2^j}, \partial_{z^j}) w(y) = \Phi(y). \quad (2.67)$$

При этом матрицы

$$\mathcal{M}^j = \int_{\mathbf{G}^j} \{D_{\xi^j} \mathcal{X}(\xi^j) + \mathcal{Y}(\xi_1^j)\}^\top \mathcal{A}^j \{D_{\xi^j} \mathcal{X}(\xi^j) + \mathcal{Y}(\xi_1^j)\} d\xi^j,$$

являются (3×3) -матрицами Грама, построенными по столбцам $\mathcal{X}^{1,j}$, $\mathcal{X}^{2,j}$, $\mathcal{X}^{3,j}$ матрицы $\mathcal{X}^j = D_{\xi^j} \mathcal{X} + \mathcal{Y}$ при помощи скалярного произведения $(\mathcal{A}^j \cdot, \cdot)_{\mathbf{G}^j}$ в пространстве $(L_2(\mathbf{G}^j))^6$.

ЛЕММА 2.1. Матрица $\mathcal{M} = \sum_{j=1}^J \mathcal{M}^j$ симметрична и положительно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность матрицы $\mathcal{M}$ очевидна. Непосредственной подстановкой в уравнения (2.64) нетрудно убедиться в том, что первый из трех столбцов $\mathcal{X}^1$, $\mathcal{X}^2$, $\mathcal{X}^3$ матрицы $\mathcal{X}$ равен $(\frac{1}{2}\xi_2^2, -\xi_1\xi_2, 0)^\top$. Следовательно, согласно определениям матриц $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{M}$ третья строка и столбец матриц $\mathcal{M}^j$ обращаются в нуль.

Докажем, что матрица

$$\mathbf{M}^j = \begin{pmatrix} m_{22}^j & m_{23}^j \\ m_{22}^j & m_{23}^j \end{pmatrix},$$

составленная из нетривиальных элементов m_{pq}^j матрицы $\mathcal{M}^j$, является положительно определенной. Предположим, что при некотором столбце $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ выполняется равенство

$$D(\nabla_{\xi^j}) \mathcal{X}(\xi^j) a + \mathcal{Y}(\xi_1^j) a = 0, \quad \xi \in \mathbf{G}^j, \quad (2.68)$$

и убедимся в том, что тогда $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$. Поскольку $\mathcal{Y}$ – линейная матрица-функция, для любого однородного скалярного оператора второго порядка $P(\nabla_\xi)$ имеем $P(\nabla_{\xi^j}) D(\nabla_{\xi^j}) \mathcal{X}(\xi^j) a = 0$. В силу алгебраической коммутативности матрицы D (см. [6]) любая вторая производная $\frac{\partial^2}{\partial \xi_n^j \partial \xi_m^j} P(\nabla_{\xi^j}) \mathcal{X}(\xi^j) a$ представима в виде $Q(\nabla_{\xi^j}) P(\nabla_{\xi^j}) D(\nabla_{\xi^j}) \mathcal{X}(\xi^j) a$, где $(Q_1, \dots, Q_6)$ – строка дифференциальных операторов. Таким образом, любая четвертая производная периодического 3-столбца $\mathcal{X}(\xi^j) a$ равна нулю. Следовательно, $\mathcal{X}(\xi^j) a$ – полином третьей степени, зависящий только от переменных ξ_1^j и ξ_2^j . Значит, в формуле (2.68) оператор $D(\nabla_{\xi^j})$ можно заменить оператором $D(\partial/\partial \xi_1^j, \partial/\partial \xi_2^j, 0)$. Поэтому согласно структуре матриц (1.16) и (2.62) шестая строка системы (2.68) влечет за собой равенство $a_3 = 0$. Теперь четвертая и пятая строки системы (2.68) принимают следующий вид:

$$a_2 \frac{\partial \mathcal{X}_3^2}{\partial \xi_1}(\xi) = 0, \quad a_2 \left(\xi_1 + \frac{\partial \mathcal{X}_3^2}{\partial \xi_2}(\xi) \right) = 0. \quad (2.69)$$

Здесь $\mathcal{X}_3^2$ – третья компонента столбца $\mathcal{X}^2$. Поскольку $\mathcal{X}_3^2$ – полином переменных ξ_1^j и ξ_2^j , из формул (2.69) следует равенство $a_2 = 0$. Таким образом,

матрица $\mathbf{M}^j$ положительно. Следовательно, для любого столбца $(\tau_1^j, \tau_2^j)^\top$ справедливо соотношение

$$\mathcal{D}(\tau_1^j, \tau_2^j)^\top \mathcal{M}^j \mathcal{D}(\tau_1^j, \tau_2^j) \geq c_j |\tau_2^j|^4, \quad c_j > 0. \quad (2.70)$$

Убедимся теперь в том, что равенство

$$\mathcal{D}(\tau_1, \tau_2)^\top \mathcal{M} \mathcal{D}(\tau_1, \tau_2) = 0$$

возможно только при $\tau = 0$. Пусть $\{G_h^{j,k}\}$ – такое семейство стержней, для которого угол ϑ_j между осями стержней этого семейства и осями стержней $G_h^{1,k}$ отличен от нуля. Представим столбец $\tau = (\tau_1, \tau_2)^\top$ в таком виде:

$$\tau = c_1 e_1 + c_0 e^{(j)},$$

где $e^{(j)}$ – единичный вектор, параллельный осям стержней $G_h^{j,k}$, а c_0 и c_1 – некоторые постоянные. Так как согласно неравенствам (2.70) выполнено соотношение

$$0 = \mathcal{D}(\tau)^\top \mathcal{M} \mathcal{D}(\tau) \geq c(|c_1|^4 |e_1|^4 + |c_0|^4 |e^{(j)}|^4) = c(|c_1|^4 + |c_0|^4),$$

то $c_1 = c_0 = 0$ и $\tau = 0$. Значит, матрица $\mathcal{M}$ положительно определена.

В соответствии с условием Дирихле (1.20) снабдим результирующую систему (2.67) для определения функции w краевыми условиями (1.31).

§ 3. Обоснование формальной асимптотики

3.1. Весовое неравенство Корна. Для обоснования формального асимптотического разложения, построенного в § 2, воспользуемся весовым анизотропным неравенством Корна, довольно громоздкая проверка которого, основанная на известных приемах и трюках (см. обзор [23]), представлена в другой публикации авторов (см. [24]). Опишем процедуру вывода этого неравенства и сформулируем результат.

Асимптотически точное неравенство Корна для уединенного стержня $G_h^{j,k}$ с защемленными торцами получено в работе [15]. Оно имеет следующий вид:

$$\langle |u; G_h^{j,k}| \rangle_j \leq c E(u; G_h^{j,k}),$$

причем в левой части фигурирует весовая норма в пространстве Соболева $H^1(G_h^{j,k})^3$,

$$\begin{aligned} \langle |u; G_h^{j,k}| \rangle_j := & \left(\sum_{k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} \int_{G_h^{j,k}} \left\{ \sum_{p=1}^2 \left| \frac{\partial u_p^j}{\partial y_p^j} \right|^2 + \left(\frac{h^2}{\rho_h^2} + h \right) \left(\left| \frac{\partial u_3^j}{\partial y_2^j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2^j}{\partial z^j} \right|^2 \right) \right. \right. \\ & + \frac{h^2}{\rho_h^2} \left(\left| \frac{\partial u_1^j}{\partial z^j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_1^j}{\partial y_2^j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2^j}{\partial y_1^j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3^j}{\partial y_1^j} \right|^2 \right) + \left| \frac{\partial u_3^j}{\partial z^j} \right|^2 + \frac{h^2}{\rho_h^4} |u_1^j|^2 \\ & \left. \left. + \left(\frac{h^2}{\rho_h^4} + \min\{\rho_h(y)^{-2}, h^{-1}\} \right) |u_2^j|^2 + \frac{1}{\rho_h^2} |u_3^j|^2 \right\} dy^j dz^j \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

однако вместо множителей $h^2 \rho_h^{-2} + h$ при втором члене подынтегрального выражения и $h^2 / \rho_h^4 + \min\{\rho_h(y)^{-2}, h^{-1}\}$ при предпоследнем члене подынтегрального выражения стоят только $h^2 \rho_h^{-2}$ и $h^2 \rho_h^{-4}$ соответственно. Весовой множитель

$$\rho_h(y) = \min\{1, h + \text{dist}(y, \omega)\} < 1$$

оказывается малым лишь в ch -окрестности концов стержней, т.е. при использовании неравенств Корна для одиночных стержней заведомо происходит потеря точности в средних частях стержней, где $h^2\rho_h^{-2} + h = O(h)$ и $h^2\rho_h^{-4} + \rho_h^{-2} = O(1)$, но $h^2\rho_h^{-2} = O(h^2)$ и $h^2\rho_h^{-4} = O(h^2)$. Для устранения этого недостатка применяется прием, предложенный в [15] (см. также [23]), который для рассматриваемого упругого тела объединяет неравенства для двух семейств неколлинеарных стержней и переносит их на пластину. В результате оказывается, что общая упругая энергия (1.25) мажорирует такую весовую соболевскую норму на $\Omega(h)$:

$$\begin{aligned} \langle |u; \Omega(h)| \rangle_{\bullet} &:= \left(\int_{\Omega(h)} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[h \left| \frac{\partial u_j}{\partial y_j} \right|^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \min\{\rho_h(y)^{-2}, h^{-1}\} \left(h^2 \left(\left| \frac{\partial u_j}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_j} \right|^2 \right) + |u_j|^2 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \left. + h \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + h \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h^2 \min\{\rho_h(y)^{-4}, h^{-3}\} |u_3|^2 \right\} dy dz \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тот же самый прием позволяет возвратить неравенство на стержни, “заработав” тем самым “лишние” слагаемые h и $\min\{\rho_h(y)^{-2}, h^{-1}\}$ в весовых множителях при втором и предпоследнем членах подынтегрального выражения в (3.1). Подчеркнем, что это усиление оценки вызвано исключительно взаимодействием семейств “жестких” стержней через “мягкую” матрицу. Именно, в [15] установлено, что распределение весовых множителей в неравенстве Корна для одиночного стержня оптимально, а в случае одинаковых жесткостей элементов конструкции (1.14) (в первой строке (1.19) отсутствует малый коэффициент γ) описанная процедура приводит к обычному неравенству Корна для пластины (см. также [23]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Справедливо неравенство*

$$\langle |u; \Xi(h)| \rangle^2 := \langle |u; \Omega(h)| \rangle_{\bullet}^2 + \sum_{j=1}^J \langle |u; G_h^{j,k}| \rangle_j^2 \leq CE(u; \Xi(h)), \quad (3.3)$$

в котором множитель c не зависит ни от параметра $h \in (0, 1]$, ни от поля смещений $u \in \dot{H}^1(\Xi(h); \Upsilon_D(h))^3$.

3.2. Асимптотическое приближение. Для того чтобы обеспечить выполнение краевых условий (1.20), введем такую срезающую функцию $X_h \in C_0^\infty(\omega)$, что $X_h(y) = 1$ при $\text{dist}(y, \partial\omega) > 2h/3$ и $X_h(y) = 0$ при $\text{dist}(y, \partial\omega) < h/3$,

$$|\nabla_y^k X_h(y)| \leq c_k h^{-k}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (3.4)$$

Асимптотическое приближение к решению трехмерной задачи ищем в виде

$$\mathcal{U}_X(h, x) = X_h(y) \mathcal{U}(h, y, \xi), \quad (3.5)$$

где $\mathcal{U}$ – сумма трех членов анзаца (2.4), (2.7), т.е.

$$\mathcal{U}(h, y, \xi) = h^{-2} U^{-2}(y) + h^{-1} U^{-1}(y, \xi) + h^0 U^0(y, \xi). \quad (3.6)$$

Слагаемые U^{-2} и U^{-1} введены формулой (2.5). Вектор-функция U^0 на стержнях $G_h^{j,k}$ есть периодическое решение $U^{0,j}$ задачи (2.11), (2.12), а на матрице $\Omega(h)$ – аналогичное решение $U_{\bullet}^0$ задачи (2.17)–(2.19).

Согласно следующей лемме для оценки остатка $u - \mathcal{U}$ асимптотического приближения достаточно обработать разность $\mathcal{R} = u - \mathcal{U}_X$ между решением u задачи (1.18), (1.20)–(1.23) и его промежуточным приближением $\mathcal{U}_X$.

ЛЕММА 3.1. Пусть

$$f^0 \in L_2(\omega), \quad g^0 \in H^1(\omega), \quad \mathbf{N} := \|f^0; L_2(\omega)\| + \|g^0; H^1(\omega)\|. \quad (3.7)$$

Тогда справедлива оценка

$$\langle |\mathcal{U} - \mathcal{U}_X; \Xi(h)| \rangle + \|\varepsilon(\mathcal{U}) - \varepsilon(\mathcal{U}_X); L_2(\Xi(h))\| \leq ch^0 \mathbf{N},$$

где c – постоянная, не зависящая от геометрического параметра h и функции w , порождающей члены U^k асимптотического приближения (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу общих результатов теории эллиптических уравнений (см., например, [5]) при выполнении включений (3.7) существует единственное решение $w \in H^4(\omega)$ задачи (1.30), (1.31) с правой частью Φ , определенной формулой (2.59) по функциям (3.7). Это решение удовлетворяет следующей оценке:

$$\|w; H^4(\omega)\| \leq c \|\Phi; L_2(\omega)\| \leq C \mathbf{N}. \quad (3.8)$$

Введем норму, зависящую от малого параметра h ,

$$|||u; \Lambda|||_h := h^{-2} \|u; L_2(\Lambda)\| + \|u; H^1(\Lambda)\|.$$

Пусть $T_h = \text{supp}(1 - X_h)$. На множестве $\mathfrak{T}_h := \text{supp}\{\mathcal{U} - \mathcal{U}_X\} = \{(y, z) : y \in T_h, z \in (-h/2, h/2)\}$ имеем $\rho_h \sim h$ (запись означает, что $ch \leq \rho_h(y) \leq Ch$ с некоторыми положительными постоянными c и C). Таким образом,

$$\langle |\cdot; \mathfrak{T}_h| \rangle \sim |||\cdot; \mathfrak{T}_h|||_h, \quad (3.9)$$

$$\langle |\mathcal{U} - \mathcal{U}_X; G_h^{j,k}| \rangle_j^2 \sim |||\mathcal{U} - \mathcal{U}_X; G_h^{j,k}|||_h^2, \quad \langle |u; \Omega_h| \rangle_\bullet^2 \sim h |||\mathcal{U} - \mathcal{U}_X; \Omega(h)|||_h^2. \quad (3.10)$$

Составляющие $U^{0,j}$, $U_\bullet^0$ и $U^{1,j}$, $U_\bullet^1$, $U^{0,j}$, $U_\bullet^0$ асимптотического решения $\mathcal{U}$ являются линейными функциями соответственно от вторых $\nabla_y^2 w$ и третьих $\nabla_y^3 w$ производных с коэффициентами, гладко зависящими от переменных ξ . Аналогично, U^{-2} и U^{-1} – линейные функции от w и $\nabla_y w$. Следовательно, согласно соотношению (3.10) приходим к оценке

$$\langle |\mathcal{U} - \mathcal{U}_X; \Xi(h)| \rangle \leq ch^{1/2} \left(\sum_{p=0}^4 h^{p-3} \|\nabla_y^p w; L_2(T_h)\| + \sum_{p=0}^1 h^{p-1} \|\nabla_y^{3+p} w; L_2(T_h)\| \right). \quad (3.11)$$

Множитель $h^{1/2}$ возник в правой части формулы (3.11) при интегрировании по поперечной переменной $z \in (-h/2, h/2)$. Утверждение леммы выводится из оценки (3.11) последовательным применением к слагаемым из ее правой части вариантов неравенства Харди

$$\|\mathcal{W}; L_2(T_h)\|^2 \leq ch \|\mathcal{W}; H^1(T_h)\|^2, \quad \|\mathcal{W}; L_2(T_h)\|^2 \leq ch^2 \|\mathcal{W}; \dot{H}^1(\Xi(h))\|^2.$$

Обозначим через $[A, B] = AB - BA$ коммутатор операторов A и B . Так как $\varepsilon(\mathcal{U}_X) = X_h \varepsilon(\mathcal{U}) + [D(\nabla), X_h] \mathcal{U}$, то согласно требованиям (3.4), предъявленным к срезающей функции X_h , правая часть (3.11) оценивает и норму $\|\varepsilon(\mathcal{U}) - \varepsilon(\mathcal{U}_X); L_2(\Xi(h))\|$.

3.3. Вычисление невязок. Подставим анзац (3.5) в уравнение (1.18). При учете соотношений (2.11), (2.35), (2.47), (2.17), (2.49) невязка асимптотического приближения (3.5) на стержнях $G_h^{j,k}$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f - L\mathcal{U}_X &= f - [L, X_h]\mathcal{U} - X_h L\mathcal{U} \\ &= -[L, X_h]\mathcal{U} + X_h \{ h^{-1} (D^{(j)})^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{0,j} + D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{0,j} \\ &\quad + D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{-1,j} \} + h^0 D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{0,j} \} + e_1^{j\top} f^0 \\ &= -[L, X_h]\mathcal{U} - h^{-1} X_h D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{1,j} \\ &\quad - h^{-1} X_h D_{\xi^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} \mathbf{U}^{0,j} + h^0 X_h D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{0,j} + e_1^{j\top} f^0, \end{aligned}$$

а на матрице $\Omega(h)$ – такой вид:

$$\begin{aligned} f - L\mathcal{U}_X &= -[L, X_h]\mathcal{U} + h^0 \gamma_0 X_h \{ D_y^\top A^0 D_\xi U_\bullet^0 + D_\xi^\top A^0 D_y U_\bullet^0 \\ &\quad + D_y^\top A^0 D_y U_\bullet^{-1} + h^1 \gamma_0 X_h D_y^\top A^0 D_y U_\bullet^0 \} + e_3^\top f^0 \\ &= -[L, X_h]\mathcal{U} - \gamma_0 D_\xi^\top A^0 D_\xi U_\bullet^1 + \gamma_0 X_h \{ h^1 D_y^\top A^0 D_y U_\bullet^0 \\ &\quad - D_y^\top A^0 D_\xi U_\bullet^0 - D_\xi^\top A^0 D_y U_\bullet^0 \} + e_3^\top f^0. \end{aligned}$$

Подставляя анзац (3.5) в краевое условие (1.21), в силу соотношений (2.18), (2.50) и (2.48) получаем, что

$$\begin{aligned} g - N\mathcal{U}_X &= -[N, X_h]\mathcal{U} - X_h h^1 D_\pm^\top \gamma_0 A^0 D_y U_\bullet^0 \\ &= -[N, X_h]\mathcal{U} + X_h h^1 D_\pm^\top \gamma_0 A^0 D_\xi \{ U_\bullet^1 + D_y U_\bullet^0 \}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аналогичную обработку допускают и условия сопряжения (1.22). В левой части (1.22) остается невязка

$$\begin{aligned} &h \gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j [D(\nabla_{x^j}), X_h] \theta^j \mathcal{U} \\ &+ X_h \{ \gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \theta^j (D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^0 + D^{(j)} \theta^j U^{-1}) + h^1 \gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j D^{(j)} \theta^j U_\bullet^0 \}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

а в правой части – невязка

$$D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j [D(\nabla_{x^j}), X_h] \mathcal{U} + X_h h^1 D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j D^{(j)} U^{0,j}. \quad (3.14)$$

Разность $\mathcal{R} = u - \mathcal{U}_X$ удовлетворяет системе уравнений

$$L\mathcal{R} = f - L\mathcal{U}_X. \quad (3.15)$$

Умножим эту систему скалярно на $\mathcal{R}$ и проинтегрируем по частям, принимая во внимание формулы (3.12)–(3.14) и производя необходимые алгебраические преобразования. В результате приходим к равенству

$$(AD(\nabla_x)\mathcal{R}, D(\nabla_x)\mathcal{R})_{\Xi(h)} = I_X + K^\bullet + I_0^\bullet + h I_1^\bullet + \sum_{j=1}^J (K^j + I^j + \mathbf{I}^j). \quad (3.16)$$

Поясним принятые в (3.16) обозначения. В интеграле I_X собраны члены, содержащие коммутаторы дифференциальных операторов и срезающей функции X_h :

$$\begin{aligned} I_X &= -([L, X_h]\mathcal{U}, \mathcal{R})_{\Xi(h)} - \sum_{\pm} ([N, X_h]\mathcal{U}, \mathcal{R})_{\Sigma_h^\pm} \\ &\quad - \sum_{j,k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} \{ h \gamma_0 (\theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j [D(\nabla_{x^j}), X_h] \theta^j U_\bullet^0, \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k}} \\ &\quad - (D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j [D(\nabla_{x^j}), X_h] U^{0,j}, \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k}} \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Интегралы K^j и $K^\bullet$ содержат результат интегрирования по частям на стержнях

$$K^j = \sum_{k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} (-\mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{1,j} - \mathcal{A}^j D^{(j)} \mathbf{U}^{0,j}, D(\nabla_x) X_h \mathcal{R})_{G_h^{j,k}}$$

и в матрице

$$K^\bullet = \gamma_0 (-h A^0 D_\xi U_\bullet^1 - A^0 D_y \mathbf{U}_\bullet^0, D(\nabla_x) X_h \mathcal{R})_{\Omega(h)}$$

соответственно. Слагаемые $I_0^\bullet$ и $I_1^\bullet$ представляют собой интегралы по матрице $\Omega(h)$, оставленные без изменений, а именно,

$$\begin{aligned} I_1^\bullet &= (\gamma_0 D_y^\top A^0 D_{\xi^j} U_\bullet^1 + \gamma_0 D_y^\top A^0 D_y (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) + e_1^{j^\top} f^0, X_h \mathcal{R})_{\Omega(h)}, \\ I_0^\bullet &= -(\gamma_0 D_y^\top A^0 D_{\xi^j} \mathbf{U}_\bullet^0, X_h \mathcal{R})_{\Omega(h)}. \end{aligned}$$

Слагаемые I^j – аналогичные интегралы на стержнях $G_h^{j,k}$,

$$I_0^j = \sum_{k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} (D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D_{\xi^j} U^{1,j} + D^{(j)\top} \mathcal{A}^j D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) + e_1^{j^\top} f^0, X_h \mathcal{R})_{G_h^{j,k}}.$$

Наконец, в выражении $\mathbf{I}^j$ собраны контурные интегралы,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^j &= \sum_{k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} ((\gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \{D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^0 + D^{(j)} \theta^j U^{-1}\}, X_h \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k} \cap \Omega(h)} \\ &\quad + h(\gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \{D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^1 + D^{(j)} \theta^j (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0)\}, X_h \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k} \cap \Omega(h)} \\ &\quad + (D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j \{D_{\xi^j} U^{1,j} + D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j})\}, X_h \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k} \cap \Omega(h)}). \end{aligned}$$

Учитывая краевое условие (2.46), представим последний интеграл так:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^j &= h \sum_{k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} (\gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \{D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^1 + D^{(j)} \theta^j (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0)\}, X_h \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k} \cap \Omega(h)} \\ &\quad - \sum_{k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} (\gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \theta^j \mathbf{U}_\bullet^0, X_h \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k} \cap \Omega(h)} =: h \mathbf{I}_1^j - \mathbf{I}_0^j. \end{aligned}$$

3.4. Оценка невязок. Воспользуемся оценкой (3.3). Рассмотрим слагаемое I_X из правой части (3.16). Поскольку $\rho_h(y) = O(h)$ на носителях коммутаторов, имеем

$$\begin{aligned} |([L, X_h] \mathcal{U}, \mathcal{R})_{\Xi(h)}| &\leq c \left(\sum \langle |\mathcal{R}; G_h^{j,k}| \rangle_j h \| [L, X_h] \mathcal{U}; L_2(G_h^{j,k}) \| \right. \\ &\quad \left. + \langle |u; \Omega(h)| \rangle_\bullet h^{1/2} \| [L, X_h] \mathcal{U}; L_2(\Omega(h)) \| \right) \\ &\leq c \left\{ \sum \langle |\mathcal{R}; G_h^{j,k}| \rangle_j h h^{-1} \| \mathcal{U}; G_h^{j,k} \cap \mathfrak{T}_h \|_h \right. \\ &\quad \left. + \langle |\mathcal{R}; \Omega(h)| \rangle_\bullet h^{1/2} \| \mathcal{U}; \Omega(h) \cap \mathfrak{T}_h \|_h \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Суммирование в формуле (3.18) и далее производится по тем, называемым *действующими*, индексам j и k , для которых $G_h^{j,k} \in \Xi(h)$. Повторив для

правой части неравенства (3.18) рассуждения из доказательства леммы 3.1, обнаруживаем, что

$$|([L, X_h], \mathcal{R})_{\Xi(h)}| \leq cN \langle |\mathcal{R}; \Xi(h)| \rangle. \quad (3.19)$$

Для аналогичных оценок остальных слагаемых правой части (3.17), являющихся поверхностными интегралами, применим следовые неравенства на $\partial G_h^{j,k}$. Приведем, например, оценку последнего поверхностного интеграла в (3.17). Пусть $Y_1, Y_2 \in C^\infty(\bar{G}_h^{j,k})$ – функции, совпадающие с компонентами ν_1, ν_2 нормали ν в координатах x^j . Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial G_h^{j,k}} u(y^j, z^j)^2 ds_{y^j} &= \int_{\partial G_h^{j,k}} u(y^j, z^j)^2 ds_{y^j} \nu(h^{-1}y^j)^\top Y(h^{-1}y^j) u(y^j, z^j)^2 ds_{y^j} \\ &= \int_{G_h^{j,k}} \nabla_{y^j}^\top (Y(h^{-1}y^j) u(y^j, z^j)^2) dy^j \\ &\leq h^{-1} \int_{G_h^{j,k}} (|u(y^j, z^j)|^2 + h^2 |\nabla u(y^j, z^j)|^2) dy^j. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для функций U , отличных от нуля лишь на $\mathfrak{T}_h$, в силу (3.20) и выполненного на $\mathfrak{T}_h$ соотношения $\rho_h \sim h$ выполняется соотношение

$$\|u; L_2(\partial G_h^{j,k} \cap \mathfrak{T}_h)\| \leq h^{1/2} \|u; G_h^{j,k} \cap \mathfrak{T}_h\|.$$

Используя это соотношение, оценим последний интеграл в (3.17):

$$\begin{aligned} |(D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j [D(\nabla_{x^j}), X_h] U^{0,j}, \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k}}| &\leq c \langle |\mathcal{R}; G_h^{j,k}| \rangle_j h^{1/2} h^{-1} \|U^{0,j}; L_2(\partial G_h^{j,k} \cap \mathfrak{T}_h)\| \\ &\leq c \langle |\mathcal{R}; G_h^{j,k}| \rangle_j \|U^{0,j}; G_h^{j,k} \cap \mathfrak{T}_h\|_h. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Суммируя неравенства (3.21) по задействованным индексам j и k , получаем в правой части (3.19) фрагмент правой части (3.18). Таким образом,

$$\sum |(D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}^j [D(\nabla_{x^j}), X_h] U^{0,j}, \mathcal{R})_{\partial G_h^{j,k}}| \leq cN \langle |\mathcal{R}; \Xi(h)| \rangle.$$

Аналогично оцениваются и остальные поверхностные интегралы из (3.17).

Рассмотрим интегралы K^j и $K^\bullet$ из суммы (3.16). Заметим, что выполняется равенство $D(\nabla_x) X_h \mathcal{R} = X_h D(\nabla_x) \mathcal{R} + [D(\nabla_x), X_h] \mathcal{R}$ и на носителе коммутатора справедливо соотношение (3.9). Следовательно, согласно неравенству (3.8) и определению (3.3) нормы $\langle |\cdot; \Xi(h)| \rangle$ верна оценка

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^J K^j + K^\bullet \right| &\leq c \left((X_h A(D_\xi U^1 + D_y U^0), D(\nabla_x) \mathcal{R}) \right. \\ &\quad \left. + \sum \| |\mathcal{R}; G_h^{j,k} \cap \mathfrak{T}_h| \|_h + h \| |\mathcal{R}; \Omega(h) \cap \mathfrak{T}_h| \|_h \right) \leq cN \langle |\mathcal{R}; \Xi(h)| \rangle, \end{aligned}$$

где $U^0 = U_\bullet^0$ на $\Omega(h)$ и $U^0 = U^{0,j}$ на $G_h^{j,k}$.

В силу неравенств (3.8) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} |I_1^\bullet| &\leq ch \|\gamma_0 D_y A^0 \{D_{\xi^j} U_\bullet^1 + D_y (U_\bullet^0 + U^{0,j})\} + e_1^{j^\top} f^0; L_2(\Omega(h))\| \| \mathcal{R}; L_2(\Omega(h)) \| \\ &\leq cN \langle |\mathcal{R}; (\Omega(h))| \rangle. \end{aligned}$$

Слагаемое $I_0^\bullet$ обрабатываем совместно с фрагментом $\mathbf{I}_0^j$ контурного интеграла $\mathbf{I}^j$. Поскольку согласно определению вектор-функций $\mathbf{U}_\bullet^0$ выполняется соотношение

$$D_\xi^\top A D_\xi \mathbf{U}_\bullet^0 = 0,$$

применим формулу интегрирования по частям и найдем, что

$$I_0^\bullet - \sum_{j=1}^J \mathbf{I}_0^j = -\gamma_0 (A^0 D_{\xi^j} \mathbf{U}_\bullet^0, D(\nabla_x) X_h \mathcal{R})_{\Omega(h)}.$$

Следовательно, аналогично предшествующим оценкам интегралов K^j и $K^\bullet$ имеем

$$\left| I_0^\bullet - \sum_{j=1}^J \mathbf{I}_0^j \right| \leq cN \langle |\mathcal{R}; \Xi(h)| \rangle.$$

Наконец, рассмотрим сумму $\mathfrak{I} := \sum_{j=1}^J (I_0^j + h \mathbf{I}_1^j)$. Запишем $\mathfrak{I}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \sum_{i=1}^3 \mathfrak{I}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^J \sum_{k: G_h^{j,k} \in \Xi(h)} \left(\int_{G_h^{j,k}} \mathfrak{F}_i(x^j) X_h(y^j) \mathcal{R}_i(x^j) dx^j \right. \\ &\quad \left. + h \int_{\partial G_h^{j,k}} \mathfrak{G}_i(x^j) X_h(y^j) \mathcal{R}_i(x^j) ds_{x^j} \right), \end{aligned}$$

где $\mathfrak{R}_i$ – компоненты вектор-функции $\mathfrak{R}_i$, записанной в координатах x^j , а $\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{G}_i$ – компоненты вектор-функций

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &:= D^{(j)} \mathcal{A}_0^j D_{\xi^j} U^{1,j} + D^{(j)} \mathcal{A}_0^j D^{(j)} (U^{0,j} + \mathbf{U}^{0,j}) + e_1^{j^\top} f^0, \\ \mathfrak{G} &:= \gamma_0 \theta^j D_{\nu^j}^\top \mathcal{A}_0^j \{ D_{\xi^j} \theta^j U_\bullet^1 + D^{(j)} \theta^j (U_\bullet^0 + \mathbf{U}_\bullet^0) \}. \end{aligned}$$

Прежде всего отметим, что, являясь решением уравнения (2.67), функция w обращает в нуль выражение (2.57). В самом деле, уравнение (2.67) получено в п. 2.5 из уравнения $\mathbb{I} = 0$ тождественными преобразованиями. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^J \left(\int_{G_h^{j,k}} \mathfrak{F}_1(x^j) dx^j + h \int_{\partial G_h^{j,k}} \mathfrak{G}_1(x^j) ds_{x^j} \right) = 0$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{I}_1 = \sum \left(\int_{G_h^{j,k}} \mathfrak{F}_1(x^j) (\mathcal{R}_1(x^j) - \overline{\mathcal{R}}_1) dx^j + h \int_{\partial G_h^{j,k}} \mathfrak{G}_1(x^j) (\mathcal{R}_1(x^j) - \overline{\mathcal{R}}_1) ds_{x^j} \right),$$

где $\overline{\mathcal{R}}_1$ – среднее значение функции $\mathcal{R}_1$ по сечениям стержня $G_h^{j,k}$. Поскольку на стержнях $G_h^{j,k}$ для $\mathcal{R}_1$ выполняется неравенство Пуанкаре

$$\|\mathcal{R}_1 - \overline{\mathcal{R}}_1; L_2(G_h^{j,k})\| \leq h \|\nabla_x \mathcal{R}_1; L_2(G_h^{j,k})\|, \quad (3.22)$$

примененное к $\mathcal{R}_1 - \overline{\mathcal{R}}_1$, следовое неравенство (3.20), а также оценки (3.8) и (3.22) доставляют соотношение

$$|\mathfrak{I}_1| \leq ch \sum \|\nabla \mathcal{R}_1; L_2(G_h^{j,k})\| \leq cN \langle |\mathcal{R}; \Xi(h)| \rangle.$$

Для компонент $|\mathcal{I}_q|$, $q = 2, 3$, справедлива оценка

$$|\mathcal{I}_q| \leq c \sum \| \mathcal{R}_1; L_2(G_h^{j,k}) \| h \| \nabla \mathcal{R}_1; L_2(G_h^{j,k}) \| \leq c \mathbf{N} \langle |\mathcal{R}; \Xi(h)| \rangle,$$

вытекающая из (3.8), следового неравенства (3.20) и определения (3.1) норм $\langle |u; G_h^{j,k}| \rangle_j$.

Собирая установленные формулы для слагаемых в правой части (3.16) и обращаясь к неравенству Корна (3.3), приходим, учитывая лемму 3.1, к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.1. *Решение и задачи (1.18), (1.20)–(1.23) и его асимптотическое приближение (3.6) связаны формулой*

$$\langle |u - \mathcal{U}; \Xi(h)| \rangle + \|\varepsilon(u - \mathcal{U}); L_2(\Xi(h))\| \leq ch^0 \mathbf{N}, \quad (3.23)$$

в которой множитель c не зависит от параметра $h \in (0, 1]$ и вектор-функций частей (2.47), (2.48), а $\mathbf{N}$ – сумма норм из (3.7).

Подчеркнем, что норма $\langle |\mathcal{U}; \Xi(h)| \rangle$ составляет $O(h^{-1/2})$ и превосходит по порядку мажоранту в оценке (3.23), т.е. теорема 3.1 действительно оправдывает асимптотику (3.6).

Учитывая формулу (3.8) для функции w , определение (2.63) членов $U^{0,j}$ и строение правых частей задачи (2.17)–(2.19) для $U_\bullet^0$, выводим неравенство

$$\|U^0; L_2(\Xi(h))\| \leq ch^{1/2} \|w; H^2(\omega)\| \leq Ch^{1/2} \mathbf{N}. \quad (3.24)$$

Как обычно, множитель $h^{1/2}$ появляется как результат интегрирования по переменной $z \in (-h/2, h/2)$. Поэтому, ограничившись рассмотрением L_2 -норм смещений, устраним U^0 из асимптотического приближения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\| \min\{\rho_h(y)^{-1}, h^{-1/2}\} \left(u_i - h^{-2} z \frac{\partial w}{\partial y_i} \right); L_2(\Omega(h)) \right\| \\ & + h^1 \left\| \min\{\rho_h(y)^{-2}, h^{-3/2}\} (u_3 - h^{-2} w); L_2(\Omega(h)) \right\| \\ & + \sum_{j,k} \left(h^1 \left\| \rho_h(y)^{-2} \left(u_2^j - h^{-2} y_1^j \frac{\partial w}{\partial y_2^j} \right); L_2(G_h^{j,k}) \right\| \right. \\ & \quad \left. + h^1 \left\| \rho_h(y)^{-2} \left(u_3^j - h^{-2} y_1^j \frac{\partial w}{\partial z^j} \right); L_2(G_h^{j,k}) \right\| \right. \\ & \quad \left. + \left\| \rho_h(y)^{-1} (u_1^j - h^{-2} w); L_2(G_h^{j,k}) \right\| \right) \leq Ch^0 \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где суммирование $\sum_{j,k}$ производится по всем задействованным индексам j и k , а остальные обозначения такие же, как и в (3.23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменим оценку (3.24) члена U^0 “весовой” оценкой, учитывающей присутствие в нормах (3.2), (3.1) множителя ρ_h . Для функции $v \in H^1(\omega)$ верно соотношение

$$h \int_{\omega} \rho_h^{-2} |v|^2 dy \leq c \int_{\omega} (|\nabla_y v| + |v|^2) dy, \quad (3.26)$$

которое представляет собой вариант неравенства Харди, проинтегрированного вдоль контура $\partial\omega$. Применив соотношение (3.26) к составляющей U^0 , видим, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left\| \min\{\rho_h(y)^{-1}, h^{-1/2}\} U_{\bullet i}^0; L_2(\Omega(h)) \right\| + h^1 \left\| \min\{\rho_h(y)^{-2}, h^{-3/2}\} U_{\bullet 3}^0; L_2(\Omega(h)) \right\| \\ & + \sum \left(h^1 \|\rho_h(y)^{-2} U_2^{0,j}; L_2(G_h^{j,k})\| + h^1 \|\rho_h(y)^{-2} U_3^{0,j}; L_2(G_h^{j,k})\| \right. \\ & \left. + \|\rho_h(y)^{-1} U_1^{0,j}; L_2(G_h^{j,k})\| \right) \leq c \|w; H^3(\omega)\| \leq CN. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Теперь формула (3.25) вытекает из формул (3.23) и (3.27).

При помощи оценки (3.23) получим асимптотику столбца напряжений

$$\sigma(u) = (\sigma_{11}(u), \sigma_{22}(u), \sqrt{2}\sigma_{21}(u), \sqrt{2}\sigma_{13}(u), \sqrt{2}\sigma_{32}(u), \sigma_{33}(u))^T,$$

связанного со столбцом деформаций (1.17) законом Гука

$$\sigma(u(h, x)) = A(\gamma, x) \varepsilon(u(h, x)). \quad (3.28)$$

Согласно определению старших асимптотических членов U^{-2} и U^{-1} на матрице $\Omega(h)$ выполнено равенство

$$\varepsilon(\mathcal{U}) = D(\nabla_x) \mathcal{U} = h^{-1} (D_\xi U_\bullet^0 + D_y U^{-1}) + D_y U_\bullet^0, \quad (3.29)$$

а на стержнях $G_h^{j,k}$ – равенство

$$\varepsilon(\mathcal{U}) = D(\nabla_x) \mathcal{U} = h^{-1} (D_{\xi j} U^{0,j} + D_y U^{-1}) + D_y U^{0,j}. \quad (3.30)$$

В силу формул (2.65), (3.28)–(3.30) и простых соотношений

$$\begin{aligned} \|A^j D_y U^{0,j}; L_2(G_h^{j,k})\| & \leq ch^{1/2} \mathbf{N}, & \|\gamma_0 h A^0 D_y U_\bullet^0; L_2(\Omega(h))\| & \leq ch^{3/2} \mathbf{N}, \\ \|\gamma_0 A^0 D_\xi U_\bullet^0 + D_y U^{-1}; L_2(\Omega(h))\| & \leq ch^{1/2} \mathbf{N} \end{aligned}$$

из теоремы 3.1 вытекает очередное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Справедливо неравенство*

$$\|\sigma(u); L_2(\Omega(h))\| + \sum_{j,k} \left\| \sigma(u) - h^{-1} ((D_{\xi j} \mathcal{X} + \mathcal{Y}) \mathcal{D}^{\theta j} w); L_2(G_h^{j,k}) \right\| \leq ch^0 \mathbf{N},$$

где суммирование $\sum_{j,k}$ производится по всем задействованным индексам j и k , множитель c не зависит от параметра $h \in (0, 1]$ и вектор-функций (2.47), (2.48), а $\mathbf{N}$ – сумма норм из (3.7).

Список литературы

- [1] С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий, “Задача теплопроводности для тонкой пластины с контрастными стержневыми включениями”, *Вестн. СПбГУ. Сер. матем., мех., астрон.*, 2009, №4, 44–54; англ. пер.: S. A. Nazarov, G. H. Sweers, A. S. Slutskii, “The heat conductivity problem in a thin plate with contrasting fiber inclusions”, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.*, **42**:4 (2009), 284–292.

- [2] С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, ГИТТЛ, М., 1950; англ. пер.: S. G. Lekhnitskiĭ, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day, San Francisco, 1963.
- [3] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [4] С. А. Назаров, “Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки)”, *Матем. сб.*, **191**:7 (2000), 129–159; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Asymptotic analysis of an arbitrary anisotropic plate of variable thickness (sloping shell)”, *Sb. Math.*, **191**:7 (2000), 1075–1106.
- [5] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [6] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [7] К. О. Фридрихс, “On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn’s inequality”, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 441–471.
- [8] П. П. Мосолов, В. П. Мясников, “Доказательство неравенства Корна”, *Докл. АН СССР*, **201**:1 (1971), 36–39; англ. пер.: P. P. Mosolov, V. P. Myasnikov, “A proof of Korn’s inequality”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1618–1622.
- [9] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980; пер. с фр.: G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [10] В. А. Кондратьев, О. А. Олейник, “Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна”, *УМН*, **43**:5 (1988), 55–98; англ. пер.: V. A. Kondrat’ev, O. A. Oleinik, “Boundary-value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn’s inequalities”, *Russian Math. Surveys*, **43**:5 (1988), 65–119.
- [11] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [12] Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: G. Fichera, *Existence theorems in elasticity*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [13] М. В. Козлова, Г. П. Панасенко, “Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородном стержне”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **31**:10 (1991), 1592–1596; англ. пер.: M. V. Kozlova, G. P. Panasenko, “Averaging of a three-dimensional problem of elasticity theory for an inhomogeneous rod”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **31**:10 (1991), 128–131.
- [14] H. Le Dret, “Convergence of displacements and stresses in linearly elastic slender rods as the thickness goes to zero”, *Asymptotic Anal.*, **10**:4 (1995), 367–402.
- [15] С. А. Назаров, “Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки”, *Проблемы матем. анализа*, **17**, Научн. книга, Новосибирск, 1997, 101–152; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Justification of the asymptotic theory of thin rods. Integral and pointwise estimates”, *J. Math. Sci. (New York)*, **97**:4 (1999), 4245–4279.
- [16] С. А. Назаров, “Минимальные требования гладкости данных, сохраняющие точность одномерной модели стержней”, *Проблемы матем. анализа*, **19**, Научн. книга, Новосибирск, 1999, 164–181; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Minimal conditions on the smoothness of data which preserve the accuracy of a one-dimensional model of rods”, *J. Math. Sci. (New York)*, **101**:2 (2000), 2975–2986.
- [17] С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, “Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование”, *Изв.*

- РАН. Сер. матем., **64**:3 (2000), 97–130; англ. пер.: S. A. Nazarov, A. S. Slutskii, “One-dimensional equations of deformation of thin slightly curved rods. Asymptotical analysis and justification”, *Izv. Math.*, **64**:3 (2000), 531–562.
- [18] A. Majd, “On the asymptotic analysis of a non-symmetric bar”, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, **34**:5 (2000), 1069–1085.
- [19] В. Л. Бердичевский, *Вариационные принципы механики сплошной среды*, Наука, М., 1983; англ. пер.: V. L. Berdichevsky, *Variational principles of continuum mechanics*, Interact. Mech. Math., Springer–Verlag, Berlin, 2009.
- [20] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenisation: Averaging processes in periodic media*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **36**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [21] J. Sanchez Hubert, E. Sánchez-Palencia, *Introduction aux Méthodes Asymptotiques et à l’Homogénéisation Application à la Mécanique des Milieux Continues*, Masson, Paris, 1992.
- [22] Е. А. Акимова, С. А. Назаров, Г. А. Чечкин, “Асимптотика решения задачи о деформации произвольной локально периодической пластины”, Тр. ММО, **65**, УРСС, М., 2004, 3–34; англ. пер.: E. A. Akimova, S. A. Nazarov, G. A. Chechkin, “Asymptotics of the solution of the problem of deformation of an arbitrary locally periodic thin plate”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 2004, 1–29.
- [23] С. А. Назаров, “Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней”, *УМН*, **63**:1 (2008), 37–110; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Korn inequalities for elastic junctions of massive bodies, thin plates, and rods”, *Russian Math. Surveys*, **63**:1 (2008), 35–107.
- [24] S. A. Nazarov, A. S. Slutskij, G. H. Sweers, “Korn’s inequalities for a reinforced plate”, *J. Elasticity*, **104**:2 (2011), 109–135.

С. А. Назаров (S. A. Nazarov)

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию

01.05.2008 и 21.04.2011

Г. Х. Свирс (G. H. Sweers)

Delft Institute of Applied Mathematics,
TU Delft, The Netherlands;

Mathematical Institute, University of Cologne, Köln, Germany

E-mail: gsweers@math.uni-koeln.de

А. С. Слуцкий (A. S. Slutskij)

Санкт-Петербургский государственный университет
сервиса и экономики;

Институт проблем машиноведения РАН,

г. Санкт-Петербург

E-mail: slutskij@gmail.com