Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов,
А. М. Райгородский, Оценка хроматических чисел ев-
клидова пространства методами выпуклой минимиза-
ции, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 6, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:23:27

УДК 514.177.2+517.272+519.157

Е. С. Горская, И. М. Митричева,
В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский

Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации

В работе изучаются хроматические числа евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с k запрещенными расстояниями (т.е. числа, равные минимальным количествам цветов, в которые можно раскрасить все точки $\mathbb{R}^n$ так, что никакие две точки одного цвета не находятся на запрещенном расстоянии друг от друга). Получены оценки показателей асимптотического роста хроматических чисел при $n \rightarrow \infty$. Для этой цели использован разработанный ранее так называемый линейно-алгебраический метод, позволяющий свести задачу оценки хроматических чисел к некоторой экстремальной задаче. Для решения последней задачи в работе применен принципиально новый подход, основанный на теории выпуклых экстремальных задач и выпуклого анализа, что позволило получить искомые оценки для любых k . При этом для $k \leq 20$ эти оценки найдены в явном виде и являются неулучшаемыми в рамках указанного выше метода.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: хроматическое число, дистанционный граф, выпуклая оптимизация.

§ 1. Введение

Пусть задан набор различных положительных чисел $a_1, \dots, a_k$. *Хроматическим числом евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с множеством запрещенных расстояний $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_k\}$ называется величина*

$$\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \forall x, y \in V_i \quad |x - y| \notin \mathcal{A}\}.$$

Иными словами, $\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ – это минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить все точки пространства так, чтобы точки одного цвета не находились бы друг от друга на расстоянии из множества $\mathcal{A}$.

Задача отыскания хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A})$ восходит к Э. Нелсону, Г. Хадвигеру и П. Эрдешу. Она была поставлена на рубеже 40-х и 50-х годов

Работа В. Ю. Протасова выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00208) и в рамках Программ поддержки молодых докторов наук РФ (грант № МД-2195.2008.1) и ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3233.2008.1), А. М. Райгородского – при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383) и Программ поддержки молодых докторов наук РФ (грант № МД-5414.2008.1) и ведущих научных школ РФ (грант № НШ-691.2008.1), а также фонда “Династия”, И. М. Митричевой – при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383).

XX века и сейчас является одной из классических проблем комбинаторной геометрии (см. [1]–[5]). При этом, как правило, следуя Эрдену, изучают величину

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) = \max_{\mathcal{A}: |\mathcal{A}|=k} \chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}).$$

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных значениях k . Известны следующие результаты в этой области. Для $k = 1$ имеем

$$(\zeta_1 + o(1))^n \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 1) \leq (3 + o(1))^n, \quad \zeta_1 = 1.239 \dots \quad (1)$$

В неравенствах (1) нижняя оценка получена А. М. Райгородским [6], а верхняя – Д. Ларманом и К. А. Роджерсом [7]. Для $k = 2, 3, 4$ справедливы следующие оценки:

$$(\zeta_2 + o(1))^n \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 2) \leq (9 + o(1))^n, \quad \zeta_2 = 1.465 \dots, \quad (2)$$

$$(\zeta_3 + o(1))^n \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 3) \leq (27 + o(1))^n, \quad \zeta_3 = 1.664 \dots, \quad (3)$$

$$(\zeta_4 + o(1))^n \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; 4) \leq (81 + o(1))^n, \quad \zeta_4 = 1.836 \dots \quad (4)$$

Нижние оценки в (2)–(4) получены И. М. Шитовой [8], [9], а верхние являются тривиальными следствиями из аналогичной оценки в (1). Наконец, для произвольного k имеем

$$(c_1 k)^{c_2 n} \leq \bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) \leq (3 + o(1))^{kn}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad (5)$$

что доказано Райгородским в [1] (см. также [2], [10]).

В настоящей работе получены нижние асимптотические оценки для хроматических чисел при $n \rightarrow \infty$, т.е. вычислены значения ζ_k при всех $k \in \mathbb{N}$. Для этого использована конструкция из [1], [8], [9], сводящая вычисление показателей ζ_k к решению некоторой экстремальной задачи. Однако для решения последней задачи в настоящей статье применен принципиально новый подход: она сведена к семейству выпуклых экстремальных задач специального вида (задач минимизации выпуклой функции на границе многогранника), для решения которых нами разработан эффективный метод (представляющий, возможно, и самостоятельный интерес). Это позволило:

1) вычислить константы ζ_k , $k = 1, \dots, 20$ (при этом найденные значения являются наилучшими для данного метода; в частности, уже при $k = 3, 4$ они позволяют улучшить предыдущие оценки (3) и (4));

2) получить аналитические выражения для оценок ζ_k при всех $k > 20$ и выдвинуть гипотезу о том, что эти оценки также оптимальны для данного метода.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 изложен метод получения оценок хроматических чисел, сводящий эту задачу к решению некоторой экстремальной задачи. В § 3 последняя задача преобразована в семейство выпуклых экстремальных задач и разработан метод их решения. Кроме того, в этом параграфе доказан ряд вспомогательных утверждений выпуклой геометрии и теории экстремумов функций. В § 4 представлен алгоритм для численной реализации предложенного метода. В § 5 основные численные результаты работы сведены

в таблицу, которая содержит значения оптимальных величин ζ_k и всех вспомогательных параметров при $k = 1, \dots, 20$. Наконец, в § 6 получены асимптотические оценки ζ_k для всех $k > 20$ и выдвинута гипотеза о неувлучшаемости этих величин в рамках данного метода.

§ 2. Метод получения оценок. Экстремальная задача

Прежде всего заметим, что задачу, поставленную в § 1, удобно переформулировать в терминах теории графов. Напомним, что *хроматическим числом графа* $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E называется минимальное количество цветов, которыми можно так раскрасить его вершины, что вершины одного цвета не соединены ребром.

Пусть граф G таков, что

$$V \subset \mathbb{R}^n, \quad |V| < \infty, \quad E = \{\{x, y\} : x, y \in V, |x - y| \in \mathcal{A}\},$$

где $\mathcal{A}$ – некоторое множество положительных вещественных чисел. Тогда, очевидно, $\chi(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}) \geq \chi(G)$. В действительности рассмотрение конечных графов (они называются (*конечными*) *дистанционными графами* или *графами расстояний*) не ведет ни к каким ограничениям. Из теоремы де Брёйна и Эрдеша [11] следует существование конечного графа расстояний, хроматическое число которого в точности равно соответствующему хроматическому числу пространства $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, для того чтобы отыскать наилучшую нижнюю оценку величины $\chi(\mathbb{R}^n; k)$, необходимо подобрать такое $V \subset \mathbb{R}^n$ и такие $a_1, \dots, a_k$, чтобы соответствующий граф $G = (V, E)$ имел бы максимальное хроматическое число $\chi(G)$.

В свою очередь, оценивать значение $\chi(G)$ снизу проще всего посредством элементарного неравенства $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, где

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \quad \{x, y\} \notin E\}$$

– число независимости графа G . Отметим, что при таком подходе мы заведомо не слишком много теряем: как известно, у “почти всякого” графа при $|V| \rightarrow \infty$ хроматическое число асимптотически равно $|V|/\alpha(G)$ (см. [12]).

Наиболее точные из известных верхних оценок числа независимости дистанционного графа основаны на применении так называемого линейно-алгебраического метода в комбинаторике [2]. Как показано в [9], последнее обстоятельство приводит к некоторому классу графов расстояний, который мы определим ниже.

Итак, пусть фиксированы n , k и натуральное число $d \geq 3$. Пусть, кроме того,

$$v_0, \dots, v_{d-1} \in (0, 1), \quad v_0 + \dots + v_{d-1} = 1.$$

Положим

$$w_0 = \lfloor v_0 n \rfloor, \quad w_1 = \lfloor v_1 n \rfloor, \quad \dots, \quad w_{d-1} = n - w_0 - w_1 - \dots,$$

где $[t]$ – целая часть числа t . Таким образом, $w_0 + \dots + w_{d-1} = n$ и с ростом размерности n имеют место асимптотики $w_0 \sim v_0 n$, ..., $w_{d-1} \sim v_{d-1} n$. Положим

$$V = V(\{0, \dots, d-1\}; w_0, \dots, w_{d-1}) \\ = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, \dots, d-1\} \forall i, |\{i : x_i = j\}| = w_j \forall j\}.$$

Рассмотрим величины

$$\bar{r} = \bar{r}(\{0, \dots, d-1\}; w_0, \dots, w_{d-1}) = \max_{x, y \in V} (x, y), \\ \underline{r} = \underline{r}(\{0, \dots, d-1\}; w_0, \dots, w_{d-1}) = \min_{x, y \in V} (x, y),$$

где (x, y) – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Эти величины асимптотически при $n \rightarrow \infty$ ведут себя как Mn и mn соответственно, где $M = M(v)$ и $m = m(v)$ – константы (т.е. не зависят от n), каждая из которых является функцией аргумента $v = (v_0, \dots, v_{d-1})$. Положим также $h(x) = M(x) - m(x)$.

Пусть p' – наименьшее простое число такое, что $\bar{r} - (k+1)p' < \underline{r}$. Тогда $p' \sim pn$, где $p = h(v)/(k+1)$ (ср. [13]). Положим

$$a_1 = \sqrt{2p'}, \quad a_2 = \sqrt{4p'}, \quad \dots, \quad a_k = \sqrt{2kp'}, \\ E = \{\{x, y\} : |x - y| \in \{a_1, \dots, a_k\}\}.$$

Таким образом, указанный выше класс графов состоит из всех возможных графов $G = (V, E)$, параметризованных величинами $v_0, \dots, v_{d-1} \in (0, 1)$ со свойством $v_0 + \dots + v_{d-1} = 1$. Иными словами, значения этих параметров образуют симплекс

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d : x \geq 0, (x, \mathbf{e}) = 1\},$$

где $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$, а неравенство $x \geq 0$ понимается покоординатно. Заметим, что симплекс Δ замкнут, хотя прежде мы упоминали лишь открытые интервалы. Однако это не является существенным. Далее, как установлено в [9], для каждого $v = (v_0, \dots, v_{d-1}) \in \Delta$ число независимости $\alpha(G)$ соответствующего графа G оценивается так:

$$\alpha(G) \leq \sum_{(q_0, \dots, q_{d-1}) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{q_0! \cdots q_{d-1}!}, \\ \mathcal{A} = \{q = (q_0, \dots, q_{d-1}) : q_i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \forall i, \\ q_0 + \dots + q_{d-1} = n, q_1 + 2q_2 + \dots + (d-1)q_{d-1} \leq p' - 1\}.$$

Отметим, что условие $q_1 + 2q_2 + \dots + (d-1)q_{d-1} \leq p' - 1$ можно кратко записать в следующем виде: $(q, \mathbf{b}) \leq p' - 1$, где $\mathbf{b} = (0, 1, \dots, d-1)$.

Следовательно, наилучшая оценка числа $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k)$, которую ввиду результатов [9] можно получить, исходя из описанного метода, такова:

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) \geq \max_{d \geq 3} \max_{v \in \Delta} \frac{|V|}{\alpha(G)} \geq \max_{d \geq 3} \max_{v \in \Delta} \frac{n!/(w_0! \cdots w_{d-1}!)}{\sum_{(q_0, \dots, q_{d-1}) \in \mathcal{A}} n!/(q_0! \cdots q_{d-1}!)} \quad (6)$$

Здесь зависимость от k правых частей в цепочке неравенств явно не указана, но от k зависят множества ребер графа и, как следствие, зависит область суммирования $\mathcal{A}$. Зависимость внутренних максимумов от d очевидна. Далее, пусть $f(x) = \sum_{i=1}^d x_i \ln x_i$ – функция энтропии. Она определена и непрерывна на множестве $\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq 0\}$; при этом предполагается, что $x_i \ln x_i = 0$, $x_i = 0$. В терминах функции энтропии правая часть (6) может быть выражена в следующем виде:

$$\max_{v \in \Delta} \frac{n!/(w_0! \cdots w_{d-1}!)}{\sum_{(q_0, \dots, q_{d-1}) \in \mathcal{A}} n!/(q_0! \cdots q_{d-1}!)} = (e^{S_{d,k}} + o(1))^n, \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$S_{d,k} = \max_{v \in \Delta} \left(\min_{s \in \Delta, (s, \mathbf{b}) \leq h(v)/(k+1)} f(s) - f(v) \right) \quad (7)$$

(см. [9]). В итоге оценка

$$\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k) \geq \left(\max_d e^{S_{d,k}} + o(1) \right)^n, \quad (8)$$

оптимальная в рамках данного метода, представляет собой решение экстремальной задачи поиска величины $S_{d,k}$ при каждом d и максимизацию полученного значения по d .

Таким образом, для того чтобы получить оценки на $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n; k)$, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{cases} F(v) = \left(\min_{s \in \Delta, (s, \mathbf{b}) \leq h(v)/(k+1)} f(s) - f(v) \right) \rightarrow \max, \\ v \in \Delta. \end{cases} \quad (9)$$

При $d = 3, 4, 5$ эта задача была численно решена в [9], что позволило получить оценки (2)–(4). Оценка (1) несколько проще и для нее достаточно рассмотреть случай $d = 3$. Тот факт, что при $d > 3$ нижняя оценка в (1) не может быть уточнена, свидетельствует об ограниченности рассматриваемого метода. Однако нам неизвестен другой метод, который был бы лучше предлагаемого здесь.

Заметим, что значение целевой функции в задаче (9) несложно вычисляется при любом $v \in \Delta$. В самом деле, минимум определяется у выпуклой функции $f(s)$ на многограннике (пересечении симплекса Δ с гиперплоскостью $\{s \in \mathbb{R}^d \mid (s, \mathbf{b}) \leq h(v)/(k+1)\}$). Поэтому минимум может быть вычислен явно методом множителей Лагранжа [14] (мы приведем соответствующее рассуждение в лемме 2). Если бы целевая функция была вогнутой по v , то ее максимум $S_{d,k}$ эффективно вычислялся бы по ее значениям [15]. Однако вогнутой она не является и, вообще говоря, может иметь много локальных максимумов. Для таких функций поиск глобального максимума всегда представляет значительные трудности. Все существующие алгоритмы имеют малую эффективность и фактически сводятся к разумному перебору значений функции по узлам некоторой сетки на симплексе Δ с периодическим уменьшением шага сетки. Этим методом были получены оценки (2)–(4) в [9]. Однако с ростом d время, требуемое на перебор, резко увеличивается (“проклятие размерности”),

что делает невозможным получение точных оценок уже при $k = 5$. Поэтому в настоящей работе мы предлагаем принципиально новый подход к решению этой проблемы. Он заключается в следующем. Задача (9) сводится к семейству выпуклых экстремальных задач специального вида (теорема 1), для которых мы разработали эффективный метод решения и получили аналитическое выражение для значений максимума (теорема 2). Это позволило решить исходную задачу и вычислить оптимальные (для данного метода) значения констант $S_{d,k}$ и ζ_k для всех $k \leq 20$, а для остальных k вывести оценки на ζ_k .

§ 3. Решение экстремальной задачи

Напомним, что мы используем следующие обозначения: $\mathbf{e} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{c} = (1/d)\mathbf{e} = (1/d, \dots, 1/d)$, $\mathbf{b} = (0, 1, \dots, d-1)$, $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$, $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq 0, (x, \mathbf{e}) = 1\}$ – единичный симплекс в $\mathbb{R}^d$. Для заданного $\lambda > 0$ положим

$$[\lambda] = \frac{1}{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j} (1, \lambda, \dots, \lambda^{d-1}) \in \mathbb{R}^d.$$

Если $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d)$ – вектор с целыми неотрицательными координатами, то

$$[\lambda]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^{a_j+1}} (\lambda^{a_1}, \dots, \lambda^{a_d}).$$

Таким образом, $[\lambda]_{\mathbf{a}} \in \Delta$ для любого $\mathbf{a}$. В частности, $[\lambda]_{\mathbf{b}} = [\lambda]$, $[1] = \mathbf{c}$. Далее, $f(x) = \sum_{i=1}^d x_i \ln x_i$ – функция энтропии; при этом полагаем, что $x_i \ln x_i = 0$, $x_i = 0$. Функция f строго выпукла, поэтому на любом выпуклом компакте она имеет единственную точку минимума. Минимум f на симплексе Δ достигается в точке $\mathbf{c}$. Обозначим также $h(x) = M(x) - m(x)$, где $x \in \Delta$, $M(x)$ и $m(x)$ – константы, определенные в § 2.

Начнем с простого вспомогательного факта о расположении точек минимума функции энтропии f .

ЛЕММА 1. *Если выпуклый компакт $G \subset \Delta$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку симплекса Δ , то точка минимума функции f на G также является внутренней точкой Δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $x \in G$ принадлежит внутренности Δ . Предположим, что минимум функции f на G достигается в некоторой точке $z \in \partial\Delta$. Не ограничивая общности, считаем, что $z_i = 0$, $i = 1, \dots, q$, и $z_i > 0$, $i = q+1, \dots, d$. Частные производные $f_{v_i} = \ln v_i + 1$, $i = 1, \dots, q$, обращаются в $-\infty$ в точке $v = z$. Производная функции f по направлению вектора $x - z$ равна $\sum_{j=1}^d (x_j - z_j) f_{v_j}$. Так как $x_i - z_i > 0$ при $i = 1, \dots, q$, то эта производная также обращается в $-\infty$ в точке z . Следовательно, в точках $v \in [z, x]$, достаточно близких к точке z , имеем $f(v) < f(z)$, что противоречит сделанному выше предположению.

Теперь найдем точку, в которой достигается внутренний минимум в задаче (9).

ЛЕММА 2. Для любого $p > (d-1)/2$ минимум функции f на множестве $\{s \in \Delta \mid (s, \mathbf{b}) \leq p\}$ достигается в точке $\mathbf{c}$, а для любого $p \in (0, (d-1)/2]$ – в точке $[\lambda]$, где λ – единственный положительный корень полинома $P_b(z) = \sum_{j=0}^{d-1} (j-p)z^j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = (d-1)/2$, то при $p > (d-1)/2$ точка $\mathbf{c}$ принадлежит упомянутому множеству, а значит, минимум f достигается в ней. При $p \leq (d-1)/2$ минимум должен достигаться на границе данного множества, причем в силу леммы 1 – не на границе симплекса Δ . Следовательно, точка минимума лежит в плоскости $(s, \mathbf{b}) = p$. В этой точке выполняется необходимое условие минимума: $\mathcal{L}_s = 0$, где $\mathcal{L} = f(s) + \lambda_1((s, \mathbf{b}) - p) + \lambda_2((s, \mathbf{e}) - 1)$ – лагранжиан. Таким образом, $\ln s_n + 1 + \lambda_1(n-1) + \lambda_2 = 0$, $n = 1, \dots, d$. Следовательно, $s_n = C\lambda^{n-1}$, $n = 1, \dots, d$, где λ и C – некоторые константы. Из условия $(s, \mathbf{e}) = 1$ получаем $C = (\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j)^{-1}$, откуда $s = [\lambda]$. Из условия $(s, \mathbf{b}) = p$ получаем, что λ – корень полинома $P_b(z)$. Этот полином не может иметь второго положительного корня $\tilde{\lambda}$, так как иначе точка $[\tilde{\lambda}]$ также будет решением уравнения $\mathcal{L}_s = 0$ и в силу теоремы Каруша–Куна–Таккера [14] также будет давать минимум функции f на множестве $s \in \Delta$, $(s, \mathbf{b}) = p$. Это невозможно в силу строгой выпуклости f .

Теперь рассмотрим задачу (9), решив которую найдем величины $S_{d,k}$ (7). Для каждого $v \in \Delta$ с помощью леммы 2 можно вычислить значение целевой функции. Основная сложность, как уже упоминалось, состоит в том, что эта функция, вообще говоря, не является вогнутой и может иметь много точек локального максимума. Поэтому нахождение ее максимума на симплексе Δ с точностью, например, 0.01 может оказаться на практике неразрешимой задачей уже при $d = 5$. Для выхода из этой ситуации используем некоторые специальные свойства рассматриваемой функции. Ключевым здесь является приведенное далее предложение 1, в силу которого задача (9) сводится к семейству выпуклых экстремальных задач, гладко зависящих от параметра p . Для формулировки результата нам необходима величина $r(d, k)$, равная наименьшему из чисел $(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ и $h(\mathbf{c})/(k-1)$. Заметим, что $(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = \sum_{j=0}^{d-1} j/d = (d-1)/2$. Далее, пользуясь известной формулой $1^2 + \dots + m^2 = m(m+1)(2m+1)/6$, получаем

$$h(\mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{d-1} \frac{j^2}{d} - \sum_{j=0}^{d-1} \frac{j(d-1-j)}{d} = \frac{d^2-1}{6}.$$

Таким образом,

$$r(d, k) = \min \left\{ \frac{d-1}{2}, \frac{d^2-1}{6(k+1)} \right\}. \quad (10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любых d и k имеем $S_{d,k} > 0$ и выполнено равенство

$$S_{d,k} = \max_{0 < p \leq r(d,k)} \left(\min_{s \in \Delta, (s, \mathbf{b})=p} f(s) - \min_{v \in \Delta, h(v)=(k+1)p} f(v) \right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что решение $S_{d,k}$ задачи (9) положительно при любых k и d . Для этого достаточно установить, что существует

точка $\tilde{v} \in \Delta$, для которой $F(\tilde{v}) > 0$, где

$$F(v) = \min_{s \in \Delta, (s, \mathbf{b}) \leq h(v)/(k+1)} f(s) - f(v)$$

(см. обозначения в задаче (9)). Положим $v_\lambda = [\lambda]$. При $\lambda \rightarrow +0$ имеем $(v_\lambda, \mathbf{b}) = \lambda + o(\lambda)$, $h(v_\lambda) = \lambda + o(\lambda)$. Так как $h(\mathbf{c}) > 0$, то при всех малых λ получаем, что

$$\frac{1}{k+1} h(v_\lambda) < (v_\lambda, \mathbf{b}) < \frac{1}{k+1} h(\mathbf{c}).$$

Из непрерывности функции h следует, что на отрезке $[v_\lambda, \mathbf{c}]$ найдется точка $\tilde{v}$, для которой $h(\tilde{v})/(k+1) = (v_\lambda, \mathbf{b})$. Очевидно, что $\tilde{v}$ не совпадает с точками v_λ и $\mathbf{c}$. Согласно лемме 2 при малых λ (когда $(v_\lambda, \mathbf{b}) \leq (d-1)/2$) функция f на множестве $\{s \in \Delta \mid (s, \mathbf{b}) \leq (v_\lambda, \mathbf{b})\}$ достигает минимума в точке v_λ . Следовательно,

$$\min_{s \in \Delta, (s, \mathbf{b}) \leq h(\tilde{v})/(k+1)} f(s) = f(\tilde{v}).$$

Таким образом, $F(\tilde{v}) = f(v_\lambda) - f(\tilde{v})$. Так как функция f строго выпукла, а ее минимум достигается в точке $\mathbf{c}$, то $f(\tilde{v}) < \max\{f(v_\lambda), f(\mathbf{c})\} = f(v_\lambda)$. Из этого следует, что $F(\tilde{v}) > 0$, откуда $S_{d,k} > 0$.

Теперь докажем, что значение максимума в задаче (9) не изменится, если в неравенстве $(s, \mathbf{b}) \leq h(v)/(k+1)$ перейти к равенству

$$S_{d,k} = \max_{v \in \Delta} \left(\min_{s \in \Delta, (s, \mathbf{b}) = h(v)/(k+1)} f(s) - f(v) \right). \quad (12)$$

Предположим обратное: внутренний минимум и внешний максимум в (7) достигаются в точках $\bar{s}, \bar{v} \in \Delta$, для которых $(\bar{s}, \mathbf{b}) < h(\bar{v})/(k+1)$. Это неравенство сохраняется в любой достаточно малой окрестности точек $\bar{s}$ и $\bar{v}$. В любой такой окрестности значения функции $f(\bar{s})$ не уменьшаются, иначе $\bar{s}$ не будет точкой минимума. Применив лемму 1 ко всему симплексу $G = \Delta$, получим, что $\bar{s} \in \text{int}\Delta$, и, следовательно, $\bar{s} = \mathbf{c}$. Аналогично, в любой достаточно малой окрестности точки $\bar{v}$ значения $f(\bar{v})$ не уменьшаются, так как иначе увеличится внешний максимум. Итак, $\bar{v} = \mathbf{c}$. Но в этом случае $S_{d,k} = 0$, что приводит к противоречию и завершает доказательство формулы (12). Остается положить в ней $p = (s, \mathbf{b})$ и доказать, что в точке минимума $\bar{s}$ имеем $(\bar{s}, \mathbf{b}) < r(d, k)$. Тогда в результате мы придем к формуле (11). Если $(\bar{s}, \mathbf{b}) > (d-1)/2$, то и $h(\bar{v})/(k+1) > (d-1)/2 = (\mathbf{c}, \mathbf{b})$, и, следовательно, внутренний минимум в выражении (7) равен $f(\mathbf{c})$. Итак, $S_{d,k} \leq 0$, что снова приводит к противоречию. Если же $(\bar{s}, \mathbf{b}) > (d^2 - 1)/(6(k+1)) = h(\mathbf{c})/(k+1)$, то, заменив в (7) точку максимума $\bar{v}$ на $\mathbf{c}$, мы уменьшаем $f(v)$ и не уменьшаем внутренний минимум (так как уменьшаем множество, по которому этот минимум берется). Следовательно, внешний максимум увеличится, что невозможно. Таким образом,

$$p = (\mathbf{c}, \mathbf{b}) \leq \min \left\{ \frac{d-1}{2}, \frac{d^2-1}{6(k+1)} \right\}.$$

Итак, для вычисления $S_{d,k}$ нужно найти максимум по всем $p \in [0, r(d, k)]$ от функции, стоящей в скобках в формуле (11). Эта функция представляет собой

разность минимумов строго выпуклой функции f на двух множествах. Первое множество – гиперплоскость и минимум на ней ищется с помощью леммы 2. Второе – поверхность, которая задается в $\mathbb{R}^d$ уравнением $h(v) = (k+1)p$. Как будет показано в предложении 2, функция $h(v)$ вогнута, кусочно линейна и, следовательно, она задает поверхность многогранника. Таким образом, мы приходим к следующей экстремальной задаче:

Задача 1. *Найти минимум выпуклой функции на границе многогранника в $\mathbb{R}^d$, заданного системой линейных неравенств.*

Стандартный подход к решению этой задачи – перечислить все $(d-1)$ -мерные грани, на каждой из них найти приближенно минимум функции, решив соответствующую выпуклую задачу с линейными ограничениями, затем сравнить минимальные значения по всем граням. Выпуклая задача с ограничениями может быть численно решена, например, с помощью метода внутренней точки [16], [17]. Однако этот подход в нашем случае неприемлем. Это связано не только с большими вычислительными затратами, но и с тем, что нам нужно не приближенное значение минимума при каждом p , а аналитическое выражение для минимума, которое можно дифференцировать по p для нахождения максимума функции (11). Отметим, что минимум может достигаться на грани меньшей размерности, а перебор граней всех размерностей приводит к огромным вычислительным затратам. Поэтому мы предлагаем другой подход, основанный на следующем простом факте.

ЛЕММА 3. *Пусть $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – выпуклая функция, а $G \subset \mathbb{R}^d$ – многогранник, ограниченный ¹ гиперплоскостями $\{\alpha_i\}$ и содержащий точку глобального минимума функции φ . Тогда минимум функции φ на границе G равен минимуму этой функции на объединении гиперплоскостей $\{\alpha_i\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует точка $a \in \alpha_i$ такая, что $\varphi(a) < \min_{x \in \partial G} \varphi(x)$. Тогда $a \notin G$. Поэтому отрезок, соединяющий точку a с точкой глобального минимума функции φ , пересечет границу G в некоторой точке b . Из выпуклости φ следует, что $\varphi(b) \leq \varphi(a)$. Получаем противоречие.

Таким образом, если точка минимума выпуклой функции лежит внутри многогранника, то для минимизации функции на его границе достаточно найти минимум на каждой из гиперплоскостей, ограничивающих многогранник (на каждой из гиперплоскостей это – задача без ограничений), после чего выбрать из полученных значений наименьшее. Итак, для решения сформулированной выше задачи остается доказать, что рассматриваемое нами множество – многогранник, и найти ограничивающие его плоскости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Функция $h(v)$ – вогнутая на Δ , а неравенство $h(v) \geq q$ при любом q равносильно системе, состоящей из не более чем 2^{d-1} линейных неравенств $(v, \mathbf{a}^i) \geq q$ с целыми неотрицательными векторами $\mathbf{a}^i$, не зависящими от q .*

¹При этом некоторые гиперплоскости α_i могут не иметь общих точек с многогранником.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\psi_j(t) = \begin{cases} 0, & t < v_0 + \dots + v_j, \\ 1, & t \geq v_0 + \dots + v_j, \end{cases}$$

и $\psi = \sum_{j=0}^{d-2} \psi_j$. Таким образом, $\psi(x) = \min\{j \geq 0 \mid x < \sum_{i=0}^j v_i\}$ – кусочно постоянная, неубывающая, непрерывная справа функция, принимающая целые значения от нуля до $d-1$. Тогда

$$M(v) = \int_0^1 \psi^2(t) dt, \quad m(v) = \int_0^1 \psi(t)\psi(1-t) dt.$$

Очевидно, что $M(v) = \sum_{j=1}^{d-1} j^2 v_j$. Таким образом, $M(v)$ – линейная функция. Покажем, что функция $m(v)$ – выпуклая. Для числа x положим $x_+ = \max\{x, 0\}$. Для любых i, j имеем

$$\int_0^1 \psi_i(t)\psi_j(1-t) dt = \left(\sum_{r \geq i+1} v_r + \sum_{s \geq j+1} v_s - 1 \right)_+ = \left(\sum_{r \geq i+1} v_r - \sum_{s \leq j} v_s \right)_+. \quad (13)$$

Заметим также, что

$$\int_0^1 \psi_i(t)\psi_j(1-t) dt = \int_0^1 \psi_j(t)\psi_i(1-t) dt,$$

поскольку второй интеграл получается из первого заменой t на $1-t$. Следовательно,

$$\begin{aligned} m(v) &= \int_0^1 \psi(t)\psi(1-t) dt = \sum_{i,j} \int_0^1 \psi_i(t)\psi_j(1-t) dt \\ &= \sum_i \int_0^1 \psi_i(t)\psi_i(1-t) dt + \sum_{i \neq j} \int_0^1 \psi_i(t)\psi_j(1-t) dt \\ &= \sum_i \int_0^1 \psi_i(t)\psi_i(1-t) dt + 2 \sum_{i > j} \int_0^1 \psi_i(t)\psi_j(1-t) dt. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (13), получаем

$$m(v) = \sum_i \left(\sum_{r \geq i+1} v_r - \sum_{s \leq i} v_s \right)_+ + 2 \sum_{i > j} \left(\sum_{r \geq i+1} v_r - \sum_{s \leq j} v_s \right)_+. \quad (14)$$

Левая часть равенства содержит $(d-1)^2$ слагаемых, каждое из которых – неотрицательная часть линейной функции. Следовательно, функция $m(v)$ выпукла, а функция $h(v) = M(v) - m(v)$ соответственно вогнута. Для любого $q > 0$ неравенство $h(v) \geq q$ равносильно системе, состоящей из $2^{(d-1)^2}$ линейных неравенств $(\mathbf{a}_i, v) \geq q$, соответствующих всевозможным способам раскрытия максимумов в $(d-1)^2$ слагаемых вида $x_+ = \max\{x, 0\}$ в сумме (14). Каждое из этих неравенств имеет целые коэффициенты (при переменных v_j), поскольку в каждом слагаемом коэффициенты равны ± 1 . Для любого j ровно в j^2 слагаемых

суммы (14) коэффициент при v_j равен $+1$. Следовательно, при любом раскрытии максимумов в (14) коэффициент при переменной v_j не превосходит j^2 . Так как коэффициент при той же переменной в функции $M(v)$ равен j^2 , то в любом из неравенств $(\mathbf{a}^i, v) \geq q$ коэффициент a_j^i (коэффициент при v_j) неотрицательный. Так же можно показать, что $a_j^i \leq (d-2)^2$. Таким образом, все коэффициенты в неравенствах $(\mathbf{a}^i, v) \geq q$ целые, неотрицательные и не превосходят $(d-2)^2$.

Остается показать, что количество значимых неравенств в системе не превосходит 2^{d-1} . Это означает, что существует не более 2^{d-1} способов раскрытия максимумов в сумме (14); все остальные случаи не реализуются. Для каждого $j \leq d-2$ положим $t_j = \sum_{s \leq j} v_s$. Раскрытие максимумов в сумме (14) определяется знаками чисел $(1-t_i) - t_j$ для всевозможных пар $i, j \in \{0, \dots, d-2\}$. Число различных вариантов равно количеству расстановок точек $(1-t_0), \dots, (1-t_{d-2})$ на отрезке $[0, 1]$ по отношению к точкам $t_0, \dots, t_{d-2}$. Если среди чисел $t_0, \dots, t_{d-2}$ ровно l не превосходит $1/2$, то нужно расставить $(d-l)$ точек на отрезке $[0, 1/2]$ среди данных l точек (при этом на отрезке $[1/2, 1]$ возникнет симметричная расстановка точек). Для этого существует $\binom{d-1}{l}$ способов. Тогда общее количество расстановок точек равно $\sum_{l=0}^{d-1} \binom{d-1}{l} = 2^{d-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция h определена только на симплексе Δ . Предложение 2 позволяет расширить множество решений неравенства $h(x) \geq q$, включив в него все точки $x \in \mathbb{R}^d$ следующим образом: данное неравенство задается системой из 2^{d-1} неравенств $(\mathbf{a}^i, x) \geq q$. Таким образом, при каждом $q > 0$ неравенство $h(x) \geq q$ задает в $\mathbb{R}^d$ многогранник, имеющий не более 2^{d-1} граней. В следующем параграфе будет представлен алгоритм перечисления всех 2^{d-1} векторов $\mathbf{a}^i$ и соответственно всех граней многогранника.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При любом $p \in (0, r(d, k)]$ выполнено равенство

$$\min_{v \in \Delta, h(v) = (k+1)p} f(v) = \min_{j=1, \dots, 2^{d-1}} \min_{v \in \Delta, (v, \mathbf{a}^j) = (k+1)p} f(v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\bar{f}(x) = f(x)$ при $x \in \Delta$ и $\bar{f} = +\infty$ при $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Delta$. Получим выпуклую функцию с минимумом в точке $\mathbf{c}$. Так как $p \leq r(d, k) \leq (d^2 - 1)/(6(k+1))$, то $(k+1)p \leq (d^2 - 1)/6 = h(\mathbf{c})$. Следовательно, многогранник $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid h(x) \geq (k+1)p\}$ содержит точку $\mathbf{c}$ – точку глобального минимума функции $\bar{f}$. Согласно лемме 3 минимум $\bar{f}$ на границе многогранника G равен минимуму $\bar{f}$ на объединении ограничивающих его плоскостей $(x, \mathbf{a}^i) = (k+1)p$.

Объединяя предложения 1 и 3, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Для любых d и k выполнено равенство

$$S_{d,k} = \max_{i=1, \dots, 2^{d-1}} \max_{0 < p \leq r(d,k)} \left(\min_{s \in \Delta, (s, \mathbf{b}) = p} f(s) - \min_{v \in \Delta, (v, \mathbf{a}^i) = (k+1)p} f(v) \right). \quad (15)$$

Для нахождения минимума функции f на каждой из 2^{d-1} гиперплоскостей $\{v \in \mathbb{R}^d \mid (v, \mathbf{a}^i) = (k+1)p\}$ мы используем следующее утверждение, которое доказывается так же, как лемма 2.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ – вектор с целыми неотрицательными координатами, а множество $\{v \in \Delta \mid (v, \mathbf{a}) = (k+1)p\}$ содержит хотя бы одну внутреннюю точку симплекса Δ . Тогда минимум функции f на этом множестве достигается в точке $[\mu]_a$, где μ – единственный положительный корень полинома

$$P_a(z) = \sum_{j=0}^{d-1} (a_{j+1} - (k+1)p) z^{a_{j+1}}.$$

Объединим полученные результаты в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Для любых d и k выполнено равенство

$$S_{dk} = \max_{i=1, \dots, 2^{d-1}} \max_{0 < p \leq r(d, k)} (f([\lambda]) - f([\mu]_{a^i})), \quad (16)$$

где λ – единственный положительный корень полинома

$$P_b(z) = \sum_{j=0}^{d-1} (j - p) z^j,$$

а μ – единственный положительный корень полинома

$$P_{a^i}(z) = \sum_{j=0}^{d-1} (a_{j+1}^i - (k+1)p) z^{a_{j+1}^i}$$

для каждого i и p .

Теорема 2 позволяет получить аналитическое выражение для величины $S_{d,k}$. Это будет сделано в § 4.

§ 4. Алгоритм для численной реализации метода

В этом параграфе мы опишем алгоритм для реализации разработанного метода. Согласно теореме 2 для нахождения $S_{d,k}$ нужно найти максимум правой части равенства (15) по всем $p \in (0, r(d, k)]$ и по всем плоскостям $\{v \in \Delta \mid (v, \mathbf{a}^i) = (k+1)p\}$ для $i = 1, \dots, 2^{d-1}$. Разобьем эту задачу на две части:

- 1) поиск внутреннего максимума в (16) по всем $p \in (0, r(d, k)]$ при каждом i ;
- 2) перечисление всех граней и соответствующих векторов $\mathbf{a}^i$, $i = 1, \dots, 2^d$.

Начнем с первой задачи. Дифференцируя равенства

$$\sum_{j=0}^{d-1} (j - p) \lambda^j = 0, \quad \sum_{j=0}^{d-1} (a_{j+1}^i - (k+1)p) \mu^{a_{j+1}^i} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{d-1} j(j-p) \lambda^{j-1} \right) d\lambda &= \left(\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j \right) dp, \\ \left(\sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1}^i (a_{j+1}^i - (k+1)p) \mu^{a_{j+1}^i - 1} \right) d\mu &= (k+1) \left(\sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i} \right) dp, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d\lambda}{dp} = \frac{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j}{\sum_{j=0}^{d-1} j(j-p)\lambda^{j-1}}, \quad \frac{d\mu}{dp} = \frac{(k+1) \sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i}}{\sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1}^i (a_{j+1}^i - (k+1)p) \mu^{a_{j+1}^i}}. \quad (17)$$

Для нахождения точки $\bar{p}$, в которой достигается максимум функции $f([\lambda]) - f([\mu]_{a^i})$, $i = 1, \dots, 2^{d-1}$, дифференцируем по p :

$$0 = \frac{d}{dp} (f([\lambda]) - f([\mu]_{a^i})) = \frac{\partial f([\lambda])}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dp} - \frac{\partial f([\mu]_{a^i})}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dp}.$$

Вычисляя производные функций $f([\lambda])$ и $f([\mu]_{a^i})$, а затем подставляя в последнее уравнение $\frac{d\lambda}{dp}$ и $\frac{d\mu}{dp}$ из (17), получим уравнение для нахождения $\bar{p}$.

Опишем эти преобразования более подробно. Так как

$$\begin{aligned} f([\lambda]) &= \sum_{j=0}^{d-1} \frac{\lambda^j}{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j} \ln \frac{\lambda^j}{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j} \sum_{j=0}^{d-1} \left(\lambda^j \ln \lambda^j - \lambda^j \ln \sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j \right) \\ &= \frac{\ln \lambda (\sum_{j=0}^{d-1} j \lambda^j)}{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j} - \ln \left(\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j \right), \end{aligned}$$

то

$$\frac{\partial f([\lambda])}{\partial \lambda} = \ln \lambda \frac{\sum_{j=1}^{d-1} j^2 \lambda^{j-1} \sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j - \lambda (\sum_{j=1}^{d-1} j \lambda^{j-1})^2}{(\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j)^2}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} f([\mu]) &= \frac{\ln \mu (\sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1}^i \mu^{a_{j+1}^i})}{\sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i}} - \ln \left(\sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i} \right), \\ \frac{\partial f([\mu])}{\partial \mu} &= \ln \mu \frac{\sum_{j=0}^{d-1} (a_{j+1}^i)^2 \mu^{a_{j+1}^i-1} \sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i} - \mu (\sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1}^i \mu^{a_{j+1}^i-1})^2}{(\sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i})^2}. \end{aligned}$$

Наконец, используя выражения для $\frac{d\lambda}{dp}$ и $\frac{d\mu}{dp}$ из (17), получим для каждого $i = 1, \dots, 2^{\alpha-1}$ следующую систему уравнений для нахождения p , λ и μ :

$$\left\{ \begin{aligned} &\ln \lambda \frac{\sum_{j=1}^{d-1} j^2 \lambda^{j-1} \sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j - \lambda (\sum_{j=1}^{d-1} j \lambda^{j-1})^2}{\sum_{j=0}^{d-1} \lambda^j \sum_{j=0}^{d-1} j(j-p)\lambda^{j-1}} \\ &= (k+1) \ln \mu \frac{\sum_{j=0}^{d-1} (a_{j+1}^i)^2 \mu^{a_{j+1}^i-1} \sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i} - \mu (\sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1}^i \mu^{a_{j+1}^i-1})^2}{\sum_{j=0}^{d-1} \mu^{a_{j+1}^i} \sum_{j=0}^{d-1} a_{j+1}^i (a_{j+1}^i - (k+1)p) \mu^{a_{j+1}^i}}, \\ &\sum_{j=0}^{d-1} (j-p)\lambda^j = 0, \\ &\sum_{j=0}^{d-1} (a_{j+1}^i - (k+1)p) \mu^{a_{j+1}^i} = 0. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Это – система из трех уравнений с тремя неизвестными. Решая ее численно с помощью компьютера, находим для каждого i оптимальные параметры p , λ и μ . Для решения задачи 1) нам нужно перебрать 2^{d-1} граней многогранника, для каждой грани найти соответствующее $\bar{p}$ и значение $f([\lambda]) - f([\mu]_a^i)$, а затем выбрать среди полученных значений наибольшее.

Теперь приступим к решению второй задачи: для заданного d получить уравнения всех 2^{d-1} граней многогранника. Для этого запишем $m(v)$ в следующем виде:

$$m(v) = \sum_{j=0}^{d-2} (1 - 2v_0 - \dots - 2v_j)_+ + 2[(1 - 2v_0 - v_1)_+ + (1 - 2v_0 - v_1 - v_2)_+ + \dots + (1 - 2v_0 - 2v_1 - v_2)_+ + (1 - 2v_0 - 2v_1 - v_2 - v_3)_+ + \dots + (1 - 2v_0 - \dots - 2v_{d-3} - v_{d-2})_+].$$

Уравнение каждой грани рассматриваемого многогранника получается при каждом реализуемом способе раскрытия скобок в выражении для m . Запишем слагаемые из этого выражения в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc} (1 - 2v_0)_+ & & & & & & \\ 2(1 - 2v_0 - v_1)_+ & & (1 - 2v_0 - 2v_1)_+ & & & & \\ 2(1 - 2v_0 - v_1 - v_2)_+ & & 2(1 - 2v_0 - 2v_1 - v_2)_+ & & (1 - 2v_0 - 2v_1 - 2v_2)_+ & & \\ \dots & & & & & & \end{array}$$

В n -ой строке этой таблицы записаны следующие слагаемые:

$$2(1 - 2v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_{n-1})_+, \quad 2(1 - 2v_0 - 2v_1 - v_2 - \dots - v_{n-1})_+, \quad \dots, \\ (1 - 2v_0 - 2v_1 - 2v_2 - \dots - 2v_{n-1})_+.$$

Если какое-либо слагаемое положительно, то в силу условия $v_i > 0$ положительны и слагаемые, записанные слева и сверху от него.

Теперь рассмотрим сетку размера N (см. рис. 1; на боковой стороне расположены N узлов), каждому узлу которой приписан нуль или единица. Назовем расстановку нулей и единиц “правильной”, если выполняется следующее условие: если в каком-то узле записана единица, то и во всех узлах, в которые можно из него попасть, двигаясь влево и вверх, также записана единица.

Заметим, что каждой “правильной” расстановке нулей и единиц в сетке размера $d - 1$ соответствует грань многогранника и наоборот. Таким образом, для заданного d достаточно перечислить все “правильные” расстановки нулей и единиц.

Предположим, что мы умеем решать эту задачу для всех $i = 1, \dots, N$. Покажем, как ее решить для $i = N + 1$. Рассмотрим сетку размера $N + 1$ и обозначим числа, стоящие в узлах нижней строки через $b_1, \dots, b_{N+1}$. Тогда искомое количество “правильных” расстановок равно $\sum_{j=0}^{N+1} A_j$, где A_j – количество “правильных” расстановок при условии, что $b_i = 1$, $i = 1, \dots, j$, и $b_i = 0$, $i = j + 1, \dots, N + 1$.

Заметим также, что если $b_i = 1$, $i = 1, \dots, j$, то во всех узлах над ними также записаны единицы, а в узлах, расположенных над b_i , $i = j + 1, \dots, N + 1$, может находиться любой “правильный” набор нулей и единиц меньшего размера, чем N , который мы уже умеем искать.

Таким образом, для того чтобы решить задачу для сетки размера $N + 1$, надо рассмотреть последовательно следующие случаи:

1) $b_i = 0$, $i = 1, \dots, N + 1$; здесь используем решение задачи для таблицы размера N ;

2) $b_1 = 1$, $b_i = 0$, $i = 2, \dots, N + 1$; тогда в первом столбце записаны только единицы, а для того чтобы найти количество “правильных” расстановок в оставшейся части таблицы, используем решение задачи для таблицы размера $N - 1$;

...

j) $b_i = 1$, $i = 1, \dots, j$, и $b_i = 0$, $i = j + 1, \dots, N + 1$; тогда в первых j столбцах записаны только единицы, а для того чтобы найти количество “правильных” расстановок в оставшейся части таблицы, используем решение задачи для таблицы размера $N - j$;

...

N) $b_i = 1$, $i = 1, \dots, N$, и $b_{N+1} = 0$;

N+1) $b_i = 1$, $i = 1, \dots, N + 1$, т.е. в таблице записаны одни единицы.

§ 5. Численные результаты. Оценки хроматических чисел

Вычисление констант $S_{d,k}$ для всех пар чисел d , k осуществляется по одной и той же схеме. Используя алгоритм, изложенный в § 4, перебираем 2^{d-1} векторов $\mathbf{a}^i$, для каждого вектора численно решаем систему уравнений (18), находим значения λ и μ , после чего находим $S_{d,k}$ как максимальное из чисел

$$f([\lambda]) - f([\mu]_{\mathbf{a}^i}), \quad i = 1, \dots, 2^{d-1}.$$

Этот алгоритм может быть реализован на компьютере при небольших значениях d (например, при $d \leq 20$).

Результаты вычислений сведем в следующую таблицу. Для каждого $k = 2, \dots, 20$ найдем $S_{d,k}$, $d = 2, \dots, 20$, и запишем в таблицу наибольшее из этих чисел. Однако, как показали вычисления, при каждом k функция $S_{d,k}$ возрастает по d и ее максимум достигается при $d = 20$. Соответственно, в таблицу занесены только значения $S_{20,k}$. С другой стороны, рост $S_{d,k}$ при d , близких к двадцати, незначителен и практически стабилизируется. Это позволяет предположить, что при данных k указанные значения $S_{20,k}$ и ζ_k близки к оптимальным. В таблице выписаны значения параметров $\bar{p}$, при которых достигается

Рис. 1

максимум в (16), а также соответствующие параметры точек минимумов λ и μ при данных $\bar{p}$.

k	$\bar{p}$	λ	μ	$S_{20,k}$	$\zeta_k = e^{S_{20,k}}$
2	0.298312	0.229769	0.612487	0.382448	1.465869
3	0.323872	0.244640	0.703286	0.511303	1.667462
4	0.338967	0.253156	0.759762	0.614183	1.848146
5	0.348944	0.258679	0.798228	0.699665	2.013078
6	0.356030	0.262553	0.826097	0.772739	2.165690
7	0.361325	0.265422	0.847212	0.836531	2.308346
8	0.365430	0.267630	0.863759	0.893129	2.442760
9	0.368701	0.269380	0.877075	0.943979	2.570189
10	0.371360	0.270797	0.888019	0.990147	2.691630
11	0.373540	0.271954	0.897170	1.032414	2.807836
12	0.375332	0.272903	0.904932	1.071391	2.919437
13	0.376778	0.273667	0.911594	1.107542	3.026908
14	0.377904	0.274260	0.917369	1.141252	3.130686
15	0.379727	0.275219	0.922529	1.172885	3.231303
16	0.380802	0.275783	0.927027	1.202605	3.328777
17	0.381754	0.276282	0.931031	1.230658	3.423482
18	0.382601	0.276726	0.934618	1.257222	3.515640
19	0.383356	0.277120	0.937850	1.282445	3.605445
20	0.384066	0.277491	0.940780	1.306459	3.693075

Последний столбец представляет искомые оценки ζ_k на показатели асимптотического роста хроматических чисел $\bar{\chi}(\mathbb{R}^n, k)$ при $n \rightarrow \infty$. Видно, что уже при $k = 3, 4$ они несколько улучшают оценки (3), (4), а при $k \geq 5$ являются новыми и неулучшаемыми для данного метода. В следующем параграфе мы укажем способ получения оценок ζ_k при любых $k \geq 21$ и выдвинем гипотезу, что они в рамках данного метода также неулучшаемы.

На основе полученных данных можно поставить много новых задач. Например, было бы интересно оценить рост величины ζ_k с ростом k . По данным таблицы можно предположить, что этот рост меньше линейного и замедляется с ростом k , т.е. функция ζ_k возрастает и вогнута по k .

§ 6. Гипотезы и обобщения

Данные, полученные в § 5, позволяют сделать некоторые предположения о функциях $S_{d,k}$ и ζ_k . Например, исходя из того факта, что при каждом $k = 2, \dots, 20$ функция $S_{d,k}$ возрастает по d при $d \leq 20$, можно выдвинуть следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. При каждом k функция $S_{d,k}$ возрастает по d .

Из этого, в частности, будет следовать (если предположить, что гипотеза 1 верна), что оценка $\zeta_k = e^{S_{\infty,k}}$, где $S_{\infty,k} = \lim_{d \rightarrow \infty} S_{d,k}$, является оптимальной. Однако получение такой оценки затруднена из-за перебора 2^{d-1} плоскостей, необходимого при каждом d для вычисления $S_{d,k}$. Решить эту проблему может помочь гипотеза 2. Она основана на следующем факте: при всех $d = 2, \dots, 20$ и $k = 2, \dots, 20$ максимум в задаче (16), как показывают вычисления, всегда достигается на одной и той же грани с направляющим вектором $\mathbf{a}$ с коэффициентами $a_j = (j-1)j/2$, $j = 1, \dots, d$.

ГИПОТЕЗА 2. При любых d и k искомый максимум достигается на грани, соответствующей вектору $\mathbf{a}$.

Справедливость этой гипотезы в частных случаях подтверждается вычислениями. Если гипотеза 2 верна, то нет необходимости для каждого d перебирать все 2^{d-1} плоскостей и можно находить величину $S_{\infty,k}$ непосредственно. Укажем способ вычисления этой величины. Отметим, что в любом случае мы получаем некоторую оценку хроматического числа. Смысл гипотез 1 и 2 состоит в том, что эта оценка будет наилучшей в рамках рассматриваемого метода.

Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $G(t) = \sum_{j=1}^d t^{\alpha_j}$. Пусть также при $d \rightarrow \infty$ функция $G_1(t)$ соответствует набору $(0, 1, \dots, d-1)$, а функция $G_2(t)$ соответствует набору $(a_1, \dots, a_{d-1})$, где $a_j = (j-1)j/2$.

Поскольку μ – корень уравнения

$$\sum_{j=1}^d \frac{(j-1)j}{2} t^{(j-1)j/2} = p(k+1) \sum_{j=1}^d t^{(j-1)j/2},$$

а λ – корень уравнения

$$\sum_{j=1}^d (j-1)t^{j-1} = p \sum_{j=1}^d t^{j-1},$$

то при $d \rightarrow \infty$ число μ – корень уравнения

$$tG'_2(t) = p(k+1)G_2(t), \quad (19)$$

а λ – корень уравнения

$$tG'_1(t) = pG_1(t). \quad (20)$$

При $d \rightarrow \infty$ имеем

$$G_2(z) = \sum_{j=1}^{\infty} t^{(j-1)j/2}, \quad G_1(t) = \frac{1}{1-t}, \quad tG'_1(t) = \frac{t}{(t-1)^2}.$$

Следовательно, $\lambda/(\lambda-1)^2 = p/(1-\lambda)$, откуда $\lambda = p/(p+1)$. Из уравнения (19) получаем, что $p = \mu G'_2(\mu)/((k+1)G_2(\mu))$. Тогда

$$\lambda = \frac{\mu G'_2(\mu)/((k+1)G_2(\mu))}{\mu G'_2(\mu)/((k+1)G_2(\mu)) + 1} = \frac{\mu G'_2(\mu)}{\mu G'_2(\mu) + (k+1)G_2(\mu)}.$$

Итак,

$$p = \frac{\mu G_2'(\mu)}{(k+1)G_2(\mu)}, \quad \lambda = \frac{\mu G_2'(\mu)}{\mu G_2'(\mu) + (k+1)G_2(\mu)}. \quad (21)$$

Далее, из (19) и (20) получаем

$$\frac{d\mu}{dp} = \frac{(k+1)(G_2(\mu))^2}{G_2(\mu)G_2'(\mu) + \mu G_2''(\mu)G_2(\mu) - \mu(G_2'(\mu))^2}, \quad \frac{d\lambda}{dp} = (1-\lambda)^2.$$

Далее, при $d \rightarrow \infty$ имеем

$$f([\lambda]) = \frac{\lambda \ln \lambda G_1'(\lambda)}{G_1(\lambda)} - \ln G_1(\lambda) = \frac{\lambda \ln \lambda}{1-\lambda} + \ln(1-\lambda).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f([\lambda])}{\partial \lambda} = \frac{\ln \lambda}{(1-\lambda)^2}, \quad \frac{\partial f([\lambda])}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dp} = \ln \lambda.$$

Кроме того, поскольку

$$f([\mu]) = \frac{\mu \ln \mu G_2'(\mu)}{G_2(\mu)} - \ln G_2(\mu),$$

то

$$\frac{\partial f([\mu])}{\partial \mu} = \ln \mu \frac{\mu G_2(\mu)G_2''(\mu) + G_2(\mu)G_2'(\mu) - \mu(G_2'(\mu))^2}{(G_2(\mu))^2},$$

откуда получаем

$$\frac{\partial f([\mu])}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dp} = (k+1) \ln \mu.$$

Следовательно, при $d \rightarrow \infty$ условие равенства производных $f([\lambda])$ и $f([\mu]_a)$ по параметру p запишется как $\ln \lambda = (k+1) \ln \mu$. Далее, используя выражение для $\lambda(\mu)$ из (21), получим уравнение для μ :

$$\ln \frac{\mu G_2'(\mu)}{\mu G_2'(\mu) + (k+1)G_2(\mu)} = (k+1) \ln \mu.$$

Таким образом, при данном k для нахождения величины $S_{\infty,k}$ и соответствующей оценки ζ_k мы сначала находим значение μ из приведенного выше уравнения, а затем находим p и λ из уравнений (21). Тогда согласно теореме 2 имеем $S_{\infty,k} = f([\lambda]) - f([\mu]_a)$, где $\mathbf{a}$ – вектор с координатами $a_j = (j-1)j/2$, $j = 1, \dots, d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция

$$G_2(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{(j-1)j/2}$$

является аналитической в круге $|z| < 1$. Несложно показать (используя, например, прием, аналогичный приведенному в [18; гл. 7, раздел 7.8]), что на границе круга сходимости существует всюду плотное множество особых точек, при приближении к каждой из которых вдоль радиуса круга функция $G_2(t)$ стремится

к бесконечности. Из этого следует, что для функции $G_2(t)$, по-видимому, не существует формулы, выражающей ее через элементарные функции (в отличие от функции G_1). Поэтому при вычислении параметров μ и λ мы вынуждены заменять функцию $G_2(t)$ частичной суммой соответствующего ряда.

Список литературы

- [1] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56:1** (2001), 103–139.
- [2] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2007.
- [3] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics. II* (Budapest, Hungary, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer-Verlag, Berlin; Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [4] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [5] А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, *Матем. просвещение*, 2004, № 8, 186–221.
- [6] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55:2** (2000), 147–148; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “On the chromatic number of a space”, *Russian Math. Surveys*, **55:2** (2000), 351–352.
- [7] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [8] И. М. Шитова, “О хроматических числах метрических пространств с двумя запрещенными расстояниями”, *Докл. РАН*, **413:2** (2007), 178–180; англ. пер.: I. M. Shitova, “On the chromatic number of a space with several forbidden distances”, *Dokl. Math.*, **75:2** (2007), 228–230.
- [9] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, “О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями”, *Матем. сб.*, **199:4** (2008), 107–142; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, I. M. Shitova, “Chromatic numbers of real and rational spaces with real or rational forbidden distances”, *Sb. Math.*, **199:4** (2008), 579–612.
- [10] Н. Г. Мощевитин, А. М. Райгородский, “О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями”, *Матем. заметки*, **81:5** (2007), 733–743; англ. пер.: N. G. Moshchevitin, A. M. Raigorodskii, “Colorings of the space $\mathbb{R}^n$ with several forbidden distances”, *Math. Notes*, **81:5–6** (2007), 656–664.
- [11] N. G. de Bruijn, P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, **54:5** (1951), 371–373.
- [12] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином: лаборатория знаний, М., 2007; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
- [13] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967; пер. с нем.: K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Grundlehren Math. Wiss., **91**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.
- [14] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, Эдиториал УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

- [15] В. Ю. Протасов, “К вопросу об алгоритмах приближенного вычисления минимума выпуклой функции по ее значениям”, *Матем. заметки*, **59**:1 (1996), 95–102; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Algorithms for approximate calculation of the minimum of a convex function from its values”, *Math. Notes*, **59**:1 (1996), 69–74.
- [16] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, SIAM Stud. Appl. Math., **13**, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [17] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [18] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: Е. С. Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1939.

Е. С. Горская (E. S. Gorskaya)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gorskaja@zmail.ru

Поступила в редакцию

05.05.2008 и 09.12.2008

И. М. Митричева (I. M. Mitricheva)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: irshitova@yandex.ru

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v-protassov@yandex.ru

А. М. Райгородский (A. M. Raigorodskii)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mraigor@yandex.ru