Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кочергин, Перемешивающий специальный поток над поворотом окружности с почти липшицевой функцией, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 3, 51–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:12:57

УДК 517.987.5+517.938

А. В. Кочергин

Перемешивающий специальный поток над поворотом окружности с почти липшицевой функцией

В настоящей работе показано, что для всякого в некотором смысле регулярного условия непрерывности, более слабого, чем условие Липшица, существует перемешивающий специальный поток, построенный по некоторому повороту окружности и функции, удовлетворяющей данному условию непрерывности.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение, формулировка результатов

Активное изучение спектральных и перемешивающих свойств потоков на двумерном торе и изоморфных им специальных потоков над поворотом окружности было стимулировано работой А. Н. Колмогорова [1] и его докладом на международном математическом конгрессе в 1954 г. [2]. Используя метод малых знаменателей, он показал, что поток класса C^∞ без неподвижных точек с диофантовым (т.е. достаточно плохо аппроксимируемым рациональными) числом вращения гладко сопряжен с линейным потоком. Другими словами, функция класса C^∞ гомотопична (или когомотопична, в более поздней терминологии) постоянной функции над поворотом окружности на диофантов угол, причем функция переноса (сопрягающая функция) тоже гладкая. Специальный поток, построенный по этим функции и углу, метрически изоморфен потоку над поворотом окружности с постоянной функцией. Таким образом, поток имеет дискретный спектр и не перемешивает.

А. Н. Колмогоров сформулировал ряд вопросов и гипотез относительно зависимости свойств потока от вида функции и угла вращения, определивших во многом направления исследований.

Сопряженность потока с линейным была позднее обобщена на случай C^2 -потоков с диофантовым числом вращения (см., например, [3], [4]). Вместе с тем были найдены потоки с иными свойствами.

Еще в 1932 г. Дж. фон Нейман [5] построил пример слабо перемешивающего специального потока под поворотом окружности с непрерывной функцией.

М. Д. Шкловер [6] (1967) восстановил пропущенные доказательства А. Н. Колмогорова и показал, используя иную технику, что для всякой положительной аналитической функции $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, отличной от тригонометрического многочлена, существует такой угол поворота, что специальный поток над этим поворотом с данной функцией имеет непрерывный спектр, т.е. слабо перемешивает.

Д. В. Аносов [7] снял некоторые лишние ограничения, наложенные Шкловером, и подробно разобрал вопросы разрешимости гомологического (или когомологического) уравнения в различных классах функций.

А. М. Степин [8], [9] показал для функции класса $C^{1.5+\varepsilon}$, отличной от тригонометрического многочлена, существование топологически массивного множества углов, для которых специальный поток над поворотом окружности с данной функцией не изоморфен линейному потоку на торе.

Для функций класса C^5 и достаточно хорошо аппроксимируемых углов А. Б. Катор [10] (1968), используя циклические аппроксимации, доказал отсутствие перемешивания, сингулярность и простоту спектра потока.

В работе автора [11] (1972) подведен итог поискам (сильно) перемешивающих специальных потоков над поворотом окружности с гладкими функциями. В ней показано, что специальный поток, построенный по повороту окружности и функции ограниченной вариации, не перемешивает. В этой же работе впервые была приведена идея построения перемешивающего потока над поворотом окружности. Эта идея реализована автором в работе [12] (1973), где доказано, что перемешивающий специальный поток с непрерывной “крышей” можно построить над любым эргодическим автоморфизмом (если мера борелевская и неатомарная), а в любом непрерывном потоке на компактном метрическом пространстве, эргодическом относительно неатомарной борелевской меры, можно добиться перемешивания непрерывной сколь угодно малой заменой времени.

В работе [13] (1975) нами показано существование гладких перемешивающих потоков с вырожденными неподвижными точками на торе и на других поверхностях. Этот факт следует из перемешивания в специальном потоке над эргодическим поворотом окружности или над перекладыванием отрезков с функцией, гладкой всюду, за исключением степенных особенностей. В гладком эргодическом потоке на $\mathbb{T}^2$ перемешивания можно добиться, поместив в поток вырожденную неподвижную точку. Перемешивание в таких потоках возникает за счет различного замедления движения точек в зависимости от расстояния, на котором они проходят мимо неподвижной точки. (Заметим, что замедления движения точек в окрестности невырожденного седла, вообще говоря, не хватает для перемешивания [14].)

Из этого результата тоже можно вывести существование на двумерном торе непрерывного перемешивающего потока без неподвижных точек, используя [15] (1976). В этой статье показано, что над автоморфизмом гладкого компактного многообразия, эргодическим относительно неатомарной борелевской меры, всякая функция из L_1 гомологична дифференцируемой, у которой производная непрерывна всюду, кроме одной точки. Отсюда следует изоморфизм любого специального эргодического потока потоку с почти гладкой функцией. (Позднее похожий результат опубликовали Д. Орнштейн и М. Смородинский [16] (1978).)

В настоящей работе область возможного перемешивания для специальных потоков над поворотом окружности подвинута ближе к липшицевым функциям, в нее включены, в частности, некоторые гёльдеровы.

В 2000 г. М. Леманчик [17] сформулировал достаточное условие отсутствия перемешивания в специальном потоке над поворотом окружности в терминах коэффициентов Фурье “крыши”, а именно он доказал, что если ее коэффициенты Фурье $\hat{f}_n = O(1/n)$, то специальный поток, построенный по повороту окружности и функции f , не перемешивает.

В терминах коэффициентов Фурье в настоящей работе получен соответствующий результат: *для всякого в некотором смысле регулярного условия убыва-*

ния коэффициентов Фурье, более слабого, чем $O(1/n)$, существует перемешивающий специальный поток, построенный по некоторому повороту окружности и функции, удовлетворяющей данному условию.

Приведем необходимые определения и точные формулировки.

Мы будем рассматривать поворот окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на иррациональный угол ρ : $T_\rho x = x + \rho \pmod{1}$.

Условие на непрерывность функции f , по которой строится поток, задается следующим образом.

Рассмотрим функцию $\Psi: (0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

$$\Psi > 0, \quad \Psi' > 0, \quad \Psi'' < 0, \quad \Psi(+0) = 0, \quad \Psi'(+0) = +\infty. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функция $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет модуль непрерывности типа Ψ , если существует такое C , что для любых различных достаточно близких $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C \Psi(|x_1 - x_2|).$$

(Под $|x_1 - x_2|$ мы понимаем длину кратчайшей из двух дуг, соединяющих эти точки.)

Для условия Липшица $\Psi(x) = x$ (при этом не выполнено условие $\Psi'(+0) = +\infty$); для условия Гёльдера с константой γ модуль непрерывности имеет тип $\Psi(x) = x^\gamma$.

Мы будем рассматривать функции, имеющие тип модуля непрерывности Ψ , удовлетворяющий (1.1). В частности, функции вида

$$\Psi(x) = -x \ln x, \quad x \ln |\ln x|, \quad \dots$$

задают условия непрерывности более слабые, чем Липшица, но более сильные, чем Гёльдера.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Для любого типа модуля непрерывности Ψ , удовлетворяющего (1.1), существуют такая функция $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ с модулем непрерывности типа Ψ и коэффициентами Фурье вида $\hat{f}_n = O(\Psi(|n|^{-1}))$ и такой поворот окружности $\mathbb{S}^1$ на некоторый угол ρ , что специальный поток, построенный по этому повороту и функции f , перемешивает.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как будет видно из дальнейшего изложения, для каждого Ψ существует всюду плотное множество углов поворота, а для каждого угла — всюду плотное подмножество в множестве строго положительных функций с модулем непрерывности типа Ψ и единичным интегралом, для которых специальный поток перемешивает (см. ниже).

В заключение параграфа отметим, что при построении указанных перемешивающих потоков возникают ограничения на скорость аппроксимации угла рациональными числами, и чем сильнее условие на непрерывность функции, тем большую, по крайней мере в данной конструкции, скорость аппроксимации должен допускать угол поворота. Таким образом, остается естественный вопрос: существует ли перемешивающий поток, построенный по повороту окружности на диофантов угол и функции с модулем непрерывности типа Ψ ?

§ 2. Функция, угол поворота и их свойства

Функцию $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ и связанный с ней угол поворота ρ будем строить временно. Функцию f построим как периодическую функцию на всей числовой прямой следующим образом.

Положим $u_0(x) = \min(\{x\}, \{1-x\}) - 1/4$, $\{x\}$ — дробная часть числа x ,

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{a_n}{q_n} u_0(q_n x), \\ f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

При этом последовательность $\{a_n\}$ и последовательность $\{q_n\}$ знаменателей подходящих к ρ дробей выберем так, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \searrow 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n-1}a_n}} \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$0 < \frac{a_n}{q_n} \leq \Psi(q_n^{-1}), \quad (2.4)$$

$$\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n} \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия (2.2)–(2.6) достаточно наложить на члены последовательностей $\{a_n\}$ и $\{q_n\}$ только начиная с некоторого номера n_0 . Поэтому множество тех ρ , для которых можно построить специальный поток с требуемыми свойствами, образует всюду плотное множество типа G_δ . Функцию f также можно выбрать из всюду плотного подмножества множества положительных функций на $\mathbb{S}^1$, имеющих модуль непрерывности типа Ψ . Например, формулу (2.1) можно заменить на

$$f = F + \sum_{n=N_0}^{\infty} u_n,$$

где $F: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ — положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица, или просто тригонометрический многочлен. При этом в дальнейшем изложении слова “кусочно линейная” нужно заменить на “липшицева”.

ЛЕММА 2.1. *Последовательность $\{a_n\}$ и угол поворота ρ , удовлетворяющие условиям (2.2)–(2.6), существуют.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства введем новую функцию $\psi: (0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \frac{\Psi(x)}{x}.$$

Несложно доказать, что функция ψ удовлетворяет условиям

$$\psi > 0, \quad \psi' < 0, \quad \psi(+0) = +\infty,$$

откуда, в частности, следует, что функция ψ — строго убывающая, а обратная функция ψ^{-1} определена и строго убывает в некотором интервале $(\delta', +\infty)$. Тогда неравенство (2.4) можно переписать в эквивалентном виде

$$0 < a_n \leq \psi(q_n^{-1}). \quad (2.7)$$

Теперь укажем алгоритм построения последовательностей. Число ρ , а вместе с ним и последовательность $\{q_n\}$ будем строить в соответствии с теорией цепных дробей [18]: если $\rho = [k_1, \dots, k_n, \dots]$ — разложение в цепную дробь, то числители и знаменатели подходящих к ρ дробей p_n/q_n определяются из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= k_{n+1}q_n + q_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad q_0 = 1, \quad q_{-1} = 0, \\ p_{n+1} &= k_{n+1}p_n + p_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad p_0 = 1, \quad p_{-1} = 1. \end{aligned}$$

Зададим положительную последовательность $\varepsilon_n \searrow 0$, $n \geq 1$. Числа $a_0 > 0$ и $a_1 > a_0$ выберем произвольно, k_1 , а вместе с ним и q_1 — так, чтобы выполнялось неравенство $q_1 > 1/\psi^{-1}(a_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, произвольно можно выбрать несколько первых членов и требовать выполнения (2.7) только начиная с некоторого номера N_0 .

Предположим, что уже построены $\{a_k\}$ и $\{q_k\}$ для всех $k \leq n$. Выберем a_{n+1} , удовлетворяющее неравенствам

$$a_{n+1} > \frac{a_n}{\varepsilon_n}, \quad a_{n+1} > \frac{a_n^2}{a_{n-1}}.$$

Затем выберем столь большое k_{n+1} , что для $q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}$ будут выполнены соотношения

$$q_{n+1} > \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_n a_{n-1}}} \frac{q_n}{\varepsilon_n}, \quad q_{n+1} > \frac{1}{\psi^{-1}(a_{n+1})}.$$

Легко проверить, что из последних двух неравенств следуют (2.3) и (2.7), а из двух предыдущих — (2.2).

Условия (2.5) и (2.6) следуют из (2.2) и (2.3). В самом деле,

$$\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n} = \left(\frac{q_n}{q_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{\sqrt{a_{n-1} a_n}} \right) \cdot \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_n}}.$$

В силу (2.2) и (2.3) это выражение стремится к нулю. Условие (2.5) доказано. Теперь

$$\frac{q_n}{q_{n+1}} = \left(\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n} \right) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

что стремится к нулю в силу (2.5) и (2.2).

Существование функции f следует из равномерной сходимости ряда (2.1), которая, в свою очередь, следует из (2.5). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2 (асимптотические свойства последовательностей $\{a_n\}$ и $\{q_n\}$).

1) Существует такой номер n_0 , что для любого номера $n \geq n_0$ выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq 2a_n, \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=1}^n q_k \leq 2q_n, \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{q_k} \leq \frac{2a_{n+1}}{q_{n+1}}. \quad (2.10)$$

2) Существует такое $\tilde{C}$, что для любого номера n выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \tilde{C}a_n. \quad (2.11)$$

Эти неравенства следуют из того, что слагаемые в суммах асимптотически меняются быстрее, чем любая геометрическая прогрессия.

Утверждения следующей леммы очевидны.

ЛЕММА 2.3 (свойства слагаемых $u_n(x)$).

1) Функция u_n имеет период $1/q_n$.

2) Функция u_n кусочно линейна (и непрерывна), имеет угловые коэффициенты на участках линейности $\pm a_n$ и, значит, удовлетворяет условию Липшица с константой a_n .

3) Для любого x $|u_n(x)| \leq a_n/(4q_n)$.

4) $\int_0^1 u_n(x) dx = 0$.

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 f(x) dx = 1.$$

ТЕОРЕМА 1. Построенная выше функция f имеет модуль непрерывности типа Ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем различные достаточно близкие точки $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$. Пусть n таково, что

$$q_{n+1}^{-1} \leq |\Delta x| = |x_1 - x_2| < q_n^{-1}.$$

Имеем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \sum_{k=1}^n |u_k(x_1) - u_k(x_2)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x_1) - u_k(x_2)|.$$

Оценим каждую из сумм отдельно. Из свойств функций u_n и неравенств (2.8) и (2.4) следуют оценки:

$$\sum_{k=1}^n |u_k(x_1) - u_k(x_2)| \leq \sum_{k=1}^n a_k |\Delta x| \leq 2a_n |\Delta x| \leq 2\psi(q_n^{-1}) |\Delta x|.$$

В силу неравенства $q_n^{-1} > |\Delta x|$ и убывания функции ψ получаем $\psi(q_n^{-1}) < \psi(|\Delta x|)$, откуда

$$\sum_{k=1}^n |u_k(x_1) - u_k(x_2)| \leq 2\Psi(|\Delta x|).$$

Для второй суммы имеем

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x_1) - u_k(x_2)| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \max_x |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{2q_k}.$$

В силу неравенств (2.10) и (2.4) последнее выражение не превосходит $\Psi(q_{n+1}^{-1})$. Учитывая неравенство $q_{n+1}^{-1} \leq |\Delta x|$ и возрастание функции Ψ , получаем и для второй суммы

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x_1) - u_k(x_2)| \leq \Psi(|\Delta x|).$$

Таким образом, для достаточно малых Δx мы получаем неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 3\Psi(|\Delta x|),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Функция f , построенная выше, имеет коэффициенты Фурье вида*

$$\widehat{f}_n = O(\Psi(|n|^{-1})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко показать, что коэффициенты Фурье функции u_0 имеют вид $\widehat{(u_0)}_n = O(n^{-2})$, т.е. существует такое C , что для всех $n \neq 0$

$$|\widehat{(u_0)}_n| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Отсюда, в частности, следует равномерная сходимость ряда Фурье для u_0 . Далее имеем

$$u_k(x) = \frac{a_k}{q_k} u_0(q_k x),$$

поэтому

$$u_k(x) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k}{q_k} \widehat{(u_0)}_s e^{2\pi i s q_k x},$$

откуда

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k}{q_k} \widehat{(u_0)}_s e^{2\pi i s q_k x}.$$

В силу равномерной абсолютной сходимости рядов слагаемые можно переставлять. Коэффициент $\widehat{f}_n$ равен сумме коэффициентов тех слагаемых, в которые входит $e^{2\pi i n x}$, т.е.

$$\widehat{f}_n = \sum_{(k,s): q_k s = n} \frac{a_k}{q_k} \widehat{(u_0)}_s,$$

следовательно,

$$|\widehat{f}_n| \leq \sum_{(k,s): q_k s = n} \frac{a_k}{q_k} \frac{C}{s^2}.$$

Рассмотрим все возможные комбинации (их конечное число), при которых

$$n = s_1 q_{k_1} = s_2 q_{k_2} = \dots = s_m q_{k_m}.$$

Для определенности будем считать, что $n > 0$,

$$n \geq q_{k_1} > q_{k_2} > \dots > q_{k_m} \quad \text{и} \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\widehat{f}_n| &\leq C \left(\frac{a_{k_1}}{q_{k_1}} \cdot \frac{1}{s_1^2} + \dots + \frac{a_{k_m}}{q_{k_m}} \cdot \frac{1}{s_m^2} \right) = C \left(\frac{a_{k_1}}{s_1} \cdot \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_{k_m}}{s_m} \cdot \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{C}{n} (a_{k_1} + \dots + a_{k_m}) \stackrel{(2.11)}{\leq} \widetilde{C} C \frac{a_{k_1}}{n}. \end{aligned}$$

По построению $a_{k_1} \leq \psi(q_{k_1}^{-1})$. Функция ψ убывающая, поэтому верна цепочка следствий

$$q_{k_1} \leq n \Rightarrow q_{k_1}^{-1} \geq n^{-1} \Rightarrow a_{k_1} \leq \psi(q_{k_1}^{-1}) \leq \psi(n^{-1}).$$

Таким образом,

$$|\widehat{f}_n| \leq \frac{\widetilde{C} C a_{k_1}}{n} \leq \widetilde{C} C n^{-1} \psi(n^{-1}) = \widetilde{C} C \Psi(n^{-1}),$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Перемешивание

3.1. Напомним некоторые понятия, которые в дальнейшем будут использоваться.

Пусть T_ρ – поворот окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на иррациональный угол ρ : $T_\rho x = x + \rho \pmod{1}$. Для краткости, если это не вызовет недоразумений, вместо T_ρ будем писать просто T .

Пусть $f \in L_1(\mathbb{S}^1)$, $f(x) \geq c > 0$ при всех $x \in \mathbb{S}^1$. Фазовым пространством специального потока служит множество

$$Y = \{(x, y) : x \in \mathbb{S}^1, 0 \leq y < f(x)\},$$

мера μ_2 на Y порождается прямым произведением мер $dx dy$, причем она нормируется так, что $\mu_2(Y) = 1$. Мы для определенности можем считать, что

$$\int_{\mathbb{S}^1} f(x) dx = 1.$$

Специальным потоком, построенным по T и функции f , называется однопараметрическая группа преобразований $\{S^t\}$ пространства Y , сохраняющая меру μ_2 и действующая при $t \geq 0$ по формуле

$$S^t(x, y) = \left(T^n x, y + t - \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \right), \quad (3.1)$$

где n однозначно находится из двойного неравенства

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \leq y + t < \sum_{k=0}^n f(T^k x). \quad (3.2)$$

При $t < 0$ действие определяется очевидным образом как обратное отображение.

Иногда для краткости говорят о специальном потоке *над поворотом окружности T с “крышей” $f(x)$* .

Геометрически можно представлять себе пространство Y как множество точек между осью абсцисс и графиком $y = f(x)$, а действие потока – как движение с единичной скоростью по вертикальной прямой с переходом из точки $(x, f(x))$ в точку $(Tx, 0)$.

Поток $\{S^t\}$ называется *перемешивающим*, если для любых двух измеримых множеств $F, G \subset Y$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_2(S^t F \cap G) = \mu_2(F) \cdot \mu_2(G).$$

Множество $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ будем называть основанием пространства Y и иногда для простоты, если это не вызовет недоразумений, отождествлять его с окружностью $\mathbb{S}^1$. В частности, в следующем определении вместо $I \times \{0\} \subset \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ мы пишем $I \subset \mathbb{S}^1$. В дальнейшем также вместо $S^t(x, 0)$ будем писать просто $S^t x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $I \subset \mathbb{S}^1$, I – интервал, $h \leq c$. Назовем *стандартным прямоугольником* высоты h с основанием I множество вида

$$Q_{I,h} = \bigcup_{0 \leq t \leq h} S^t I.$$

Для краткости иногда будем обозначать его просто Q . Совокупность всех стандартных прямоугольников $\{Q\}$ и их сдвигов $S^t Q$, $t \geq 0$, образует базу в Y , поэтому перемешивание достаточно доказать для стандартных прямоугольников достаточно малой высоты h .

Для измеримого множества $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ и прямоугольника $Q = Q_{I,h}$ обозначим

$$\mu^{(t)}(S^t \Delta \cap Q) = \mu(S^{-t} Q \cap \Delta).$$

Следующая лемма аналогична леммам из [12], [13], [19] и легко следует из теоремы Фубини.

ЛЕММА 3.1. Если для любого стандартного прямоугольника Q и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_0 > 0$, что для любого $t \geq t_0$ существует конечное разбиение η_t окружности $\mathbb{S}^1$ на непересекающиеся интервалы, причем длина максимального интервала стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и для любого $\Delta \in \eta_t$

$$\mu^{(t)}(S^t \Delta \cap Q) > \mu(\Delta) \cdot \mu_2(Q)(1 - \varepsilon),$$

то специальный поток S^t перемешивает.

Таким образом, мы будем доказывать, что каждый элемент достаточно мелкого разбиения “размешивается” по фазовому пространству Y .

3.2. Перемешивание в нашем потоке возникает за счет того, что изначально соседние точки, достигая “потолка” и “спрыгивая на пол” за различные промежутки времени, через некоторое время разбегаются достаточно далеко вдоль траекторий. В результате маленький горизонтальный отрезок оказывается почти равномерно распределенным по длинной и узкой полоске, идущей вдоль траекторий. Эта полоска равномерно как бы наматывается на фазовое пространство.

Основным инструментом изучения перемешивающих свойств нашего специального потока будут служить биркгофовы суммы: для $r \in \mathbb{N}$

$$f^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f(T^k x), \quad f^{-r}(x) = -f^r(T^{-r} x), \quad f^0(x) \equiv 0.$$

Действительно, для любого момента времени t и любого целого r

$$S^t x = S^{t-f^r(x)}(T^r x). \quad (3.3)$$

Это означает, что с помощью функции f^r можно описывать растяжение отрезков разбиения вдоль траекторий, причем почти равномерное размешивание отрезка

разбиения по фазовому пространству обеспечивается сильным и почти равномерным растяжением биркгофовых сумм.

Тождество (3.3) легко следует из определения специального потока (3.1), (3.2) и очевидного тождества

$$f^{r+s}(x) = f^r(x) + f^s(T^r x).$$

Отметим еще два очевидных свойства биркгофовых сумм:

- а) если $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$, то $f^r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^r(x)$;
- б) если $f \geq c > 0$, то $f^{r+1}(x) \geq f^r(x)$ при всех $x \in \mathbb{S}^1$.

3.3. Сформулируем определения и теоремы, с помощью которых мы докажем, что поток, построенный выше, перемешивает. Аналогичные, но формально отличающиеся определения и теоремы использованы в работах [12], [13] и [19].

Пусть $\Delta \subset \mathbb{S}^1$, $\varphi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi|_{\Delta}$ – ограничение φ на Δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Функцию $\varphi|_{\Delta}$ назовем ε -равномерно распределенной (ε -р.р.) в отрезке $[A, B]$, если для любого отрезка $[c, d] \subset [A, B]$ выполняется неравенство

$$\mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap \Delta) > \mu(\Delta) \frac{d - c}{B - A} (1 - \varepsilon). \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточное условие перемешивания). Пусть для некоторого $t_0 > 0$ и для любого $t > t_0$ заданы:

- конечное разбиение окружности $\mathbb{S}^1$ на интервалы,

$$\eta_t = \{\Delta_i^{(t)}\}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\Delta_i^{(t)} \in \eta_t} \mu(\Delta_i^{(t)}) = 0,$$

- положительные функции $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.

Пусть также для любого $t > t_0$ и любого $\Delta \in \eta_t$, а также для любого $r \in [t/2, 2t]$ выполнены условия:

- существует такая функция $\varphi_r: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, что для любого $x \in \Delta$

$$|f^r(x) - \varphi_r(x)| \leq \varepsilon(t);$$

- функция $\varphi_r|_{\Delta}$ является $\varepsilon(t)$ -р.р. в отрезке $[A_r, B_r]$, причем

$$B_r - A_r > H(t);$$

- для любых $r, s \in [t/2, 2t]$

$$\frac{r}{s}(1 - \varepsilon(t)) < \frac{B_r - A_r}{B_s - A_s} < \frac{r}{s}(1 + \varepsilon(t)). \quad (3.5)$$

Тогда специальный поток, построенный по повороту окружности T и функции f , перемешивает.

3.4. Ниже мы покажем, что построенные в § 2 функция f и поворот T_ρ удовлетворяют достаточному условию перемешивания.

Идея состоит в следующем. Напомним, что

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{и} \quad u_n = \frac{a_n}{q_n} u_0(q_n x).$$

“Растяжение” по вертикали биркгофовых сумм $f^r(x)$ достигается за счет того, что период слагаемого u_n равен $1/q_n$, где q_n – знаменатель подходящей к ρ дроби. Таким образом, сдвиг по окружности на угол ρ слагаемого $u_n(x)$ почти совпадает с $u_n(x)$. Тем самым, для $r \ll q_{n+1}$ биркгофовы суммы растут практически линейно вместе с r :

$$u_n^r(x) \approx r u_n(x),$$

что и дает растяжение по вертикали. Однако бесконечный рост u_n^r невозможен: ограниченная вариация! При дальнейших итерациях за счет накопления погрешности в сдвиге рост и ε -равномерная распределенность исчезают. Таким образом, каждое слагаемое обеспечивает растяжение биркгофовых сумм на определенном промежутке времени $[t_{n-1}/2, 2t_n]$. К моменту $t_n/2$ должно “вырасти на смену” следующее слагаемое u_{n+1}^r , поэтому необходимо его также учитывать при оценках. За счет быстрого изменения коэффициентов a_n и q_n остальными слагаемыми можно практически пренебречь: предыдущими – за счет относительно малых их угловых коэффициентов, а последующими – за счет их пока еще малой амплитуды.

Таким образом, нужно, чтобы функция $(u_n^r + u_{n+1}^r) | \Delta$ (Δ – элемент разбиения) была “растянутой” и почти равномерно распределенной при $r \in [t_{n-1}/2, 2t_n]$, что и потребовало наложить на последовательности $\{a_n\}$ и $\{q_n\}$ дополнительные ограничения при их построении.

ЗАМЕЧАНИЕ. Б. Файад [19] построил пример перемешивающего специального потока над иррациональным сдвигом двумерного тора с *аналитической* “крышей” так, чтобы два последующих слагаемых “не мешали” друг другу: одно слагаемое почти равномерно растягивается, если его рассматривать как функцию от x при каждом y , а второе, на следующем промежутке времени, наоборот – как функцию от y . В одномерном случае такая конструкция, как известно, принципиально невозможна.

§ 4. Свойства ε -равномерно распределенных функций

Напомним определение 3.2: функцию $\varphi | \Delta$ мы называем ε -равномерно распределенной (ε -р.р.) в отрезке $[A, B]$, если для любого отрезка $[c, d] \subset [A, B]$ выполняется неравенство (3.4)

$$\mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap \Delta) > \mu(\Delta) \frac{d - c}{B - A} (1 - \varepsilon).$$

ЛЕММА 4.1 (свойства ε -р.р. функций).

1. Если неравенство (3.4) выполнено для любого достаточно малого отрезка $[c, d] \subset [A, B]$, то оно выполнено и для любого отрезка $[c, d] \subset [A, B]$.

2. Если $\varphi|_{\Delta}$ является ε -р.р. в $[A, B]$, то $(k\varphi + c)|_{\Delta}$ является ε -р.р. в отрезке $[kA + c, kB + c]$ при $k > 0$ или $[kB + c, kA + c]$ при $k < 0$.

3. Если $\varphi|_{\Delta}$ является ε -р.р. в $[A, B]$, $[A', B'] \subset [A, B]$ и $B' - A' > (1 - \varepsilon') \times (B - A)$ для некоторого $\varepsilon' > 0$, то $\varphi|_{\Delta}$ является $(\varepsilon + \varepsilon')$ -р.р. в $[A', B']$.

4. Пусть $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta' \subset \Delta$ и $\mu(\Delta') > \mu(\Delta)(1 - \varepsilon')$ для некоторого $\varepsilon' > 0$. Пусть также $\varphi|_{\Delta'}$ является ε -р.р. в $[A, B]$. Тогда $\varphi|_{\Delta}$ является $(\varepsilon + \varepsilon')$ -р.р. в $[A, B]$.

5. Пусть $K > 0$, $\varepsilon > 0$ и $\Delta = [x_0 - l, x_0 + l]$. Если функция $\varphi|_{\Delta}$ монотонна, непрерывна, имеет кусочно непрерывную производную и почти для всех $x \in \Delta$

$$K(1 - \varepsilon) < |\varphi'(x)| < K(1 + \varepsilon),$$

то $\varphi|_{\Delta}$ является 4ε -р.р. в отрезке $[\varphi(x_0) - Kl(1 - \varepsilon), \varphi(x_0) + Kl(1 - \varepsilon)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1 и 2 очевидны.

3. Пусть $[c, d] \subset [A', B']$. Тогда

$$\mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap \Delta) > \mu(\Delta) \frac{d - c}{B' - A'} \cdot \frac{B' - A'}{B - A} (1 - \varepsilon),$$

или

$$\mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap \Delta) > \mu(\Delta) \frac{d - c}{B' - A'} (1 - \varepsilon - \varepsilon'),$$

что и требовалось доказать.

4. Пусть $[c, d] \subset [A, B]$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap \Delta) &> \mu(\varphi^{-1}([c, d]) \cap \Delta') > \mu(\Delta') \frac{d - c}{B - A} (1 - \varepsilon) \\ &> \mu(\Delta)(1 - \varepsilon') \frac{d - c}{B - A} (1 - \varepsilon) > \mu(\Delta) \frac{d - c}{B - A} (1 - \varepsilon - \varepsilon'), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5. Пусть для определенности $\varphi'(x) > 0$. Из условия (по теореме Лагранжа) следует, что $\varphi|_{\Delta}$ является 2ε -р.р. в отрезке $[\varphi(x_0 - l), \varphi(x_0 + l)]$. По той же теореме

$$[\varphi(x_0) - Kl(1 - \varepsilon), \varphi(x_0) + Kl(1 - \varepsilon)] \subset [\varphi(x_0 - l), \varphi(x_0 + l)],$$

а отношение длин этих отрезков больше чем $\frac{K(1 - \varepsilon)}{K(1 + \varepsilon)} > 1 - 2\varepsilon$. Теперь воспользуемся свойством 3. Свойство 5 доказано.

ЛЕММА 4.2 (об ε -равномерной распределенности суммы). Пусть $\Delta_i \subset \Delta$, $i = 1, 2, \dots, s$, — попарно не пересекающиеся (mod 0) подмножества, причем для любого i

$$\mu(\Delta_i) > \frac{1}{s} \mu(\Delta)(1 - \varepsilon'); \quad (4.1)$$

функция $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $\varphi|_{\Delta_i}$ является ε'' -р.р. в отрезке $[-H, H]$; h_i — такая возрастающая последовательность, что для любого $i < s$

$$h(1 - \varepsilon''') < h_{i+1} - h_i < h(1 + \varepsilon'''), \quad (4.2)$$

где h – некоторая постоянная,

$$h_s - h_1 > 2H, \quad h < \frac{H}{3}.$$

Пусть, кроме того, $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

$$\Phi|_{\Delta_i} = h_i + \varphi|_{\Delta_i}, \quad (4.3)$$

т.е. $\Phi|_{(\bigcup \Delta_i)}$ является суммой φ и кусочно постоянной функции. Тогда $\Phi|_{\Delta}$ является ε -р.р. в отрезке $[h_1 + H, h_s - H]$, причем

$$\varepsilon < \varepsilon' + \varepsilon'' + 3\varepsilon''' + \frac{h}{H} + \frac{3H}{hs}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отрезок $[y - \Delta y, y] \subset [h_1 + H, h_s - H]$. В силу первого свойства ε -р.р. функций можно считать, что $0 < \Delta y < h$. Имеем

$$\mu(\Phi^{-1}([y - \Delta y, y]) \cap \Delta) \geq \sum_{i=1}^s \mu(\Phi^{-1}([y - \Delta y, y]) \cap \Delta_i). \quad (4.4)$$

В силу определения (4.3) функции Φ

$$x \in \Phi^{-1}([y - \Delta y, y]) \cap \Delta_i \iff \begin{cases} x \in \Delta_i, \\ y - \Delta y - h_i \leq \varphi(x) \leq y - h_i. \end{cases}$$

Уменьшая, быть может, правую часть неравенства (4.4), включим в сумму только те слагаемые, для которых $[y - \Delta y - h_i, y - h_i] \subset [-H, H]$. Для каждого из таких слагаемых

$$\mu(\Phi^{-1}([y - \Delta y, y]) \cap \Delta_i) = \mu(\varphi^{-1}([y - \Delta y - h_i, y - h_i]) \cap \Delta_i) > \mu(\Delta_i) \frac{\Delta y}{2H} (1 - \varepsilon'')$$

(в силу ε'' -равномерной распределенности $\varphi|_{\Delta_i}$), а с учетом (4.1)

$$\mu(\Phi^{-1}([y - \Delta y, y]) \cap \Delta_i) > \frac{1}{s} \mu(\Delta) \frac{\Delta y}{2H} (1 - \varepsilon' - \varepsilon'').$$

Оценим теперь число таких слагаемых. Пусть

$$J = \{i : -H \leq y - \Delta y - h_i < y - h_i \leq H, 1 \leq i \leq s\}.$$

В силу неравенства $\Delta y \leq h$

$$J \supset \{i : -H \leq y - h - h_i < y - h_i \leq H, 1 \leq i \leq s\},$$

что эквивалентно

$$J \supset \{i : y - H \leq h_i \leq y + H - h, 1 \leq i \leq s\}.$$

В силу неравенств $h_1 + H < y \leq h_s - H$ отрезок $[y - H, y + H - h] \subset (h_1, h_s)$. Таким образом, на отрезок $[h_1, h_s]$, на котором, так сказать, ε''' -равномерно расположены точки h_i , мы накладываем отрезок длины $2H - h$, целиком попадающий в (h_1, h_s) . В силу условия $\Delta h_i < h(1 + \varepsilon''')$ получаем

$$\#J > \frac{2H - h}{h(1 + \varepsilon''')} - 1,$$

или

$$\#J > \frac{2H}{h} \left(1 - \frac{h}{H} - 2\varepsilon''' \right).$$

Итак, в сумму (4.4) входит не менее чем $\frac{2H}{h} \left(1 - \frac{h}{H} - 2\varepsilon''' \right)$ слагаемых, каждое из которых больше чем $\frac{1}{s} \mu(\Delta) \frac{\Delta y}{2H} (1 - \varepsilon' - \varepsilon'')$, откуда, учитывая, что $h_s - h_1 > h(s - 1)(1 - \varepsilon''')$ и $h < H/3$, получаем

$$\mu(\Phi^{-1}([y - \Delta y, y]) \cap \Delta) > \mu(\Delta) \frac{\Delta y}{h_s - h_1 - 2H} \left(1 - \frac{h}{H} - \frac{3H}{hs} - \varepsilon' - \varepsilon'' - 3\varepsilon''' \right),$$

т.е. функция $\Phi|_{\Delta}$ ε -равномерно распределена в отрезке $[h_1 + H, h_s - H]$, где

$$\varepsilon < \frac{h}{H} + \frac{3H}{hs} + \varepsilon' + \varepsilon'' + 3\varepsilon''',$$

что и требовалось доказать.

§ 5. ε -равномерная распределенность биркгофовых сумм

5.1. Напомним, что

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad f_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k, \quad u_n = \frac{a_n}{q_n} u_0(q_n x).$$

Свойства функций u_n описаны в лемме 2.3.

В этом параграфе n, k, r — целые неотрицательные и $n > n_0$, где n_0 выбрано так, что выполнены (2.8)–(2.10) (лемма 2.2), а также неравенства

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{1}{100}, \quad \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n} < \frac{1}{100}, \quad 0 \leq k \leq q_n - 1, \quad r < \frac{q_{n+1}}{100}.$$

Такие n, k, r мы будем называть *допустимыми*.

Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ — подходящая к ρ дробь. Тогда

$$\rho = \frac{p_n}{q_n} + \delta_n, \tag{5.1}$$

причем в соответствии с теорией цепных дробей [18]

$$|\delta_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \quad (5.2)$$

Для $k = 0, 1, \dots, q_n - 1$ обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_{n,k}^+ &= \left(\frac{k}{q_n}, \frac{k+1/2}{q_n} \right), & \Delta_{n,k}^- &= \left(\frac{k+1/2}{q_n}, \frac{k+1}{q_n} \right), \\ \Delta_{n,k,r}^\pm &= \Delta_{n,k}^\pm \cap (\Delta_{n,k}^\pm - (r-1)\delta_n). \end{aligned}$$

Обозначим через ξ_n разбиение окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на интервалы вида $\Delta_{n,k}^\pm$:

$$\xi_n = \{\Delta_{n,k}^+, \Delta_{n,k}^-, k = 0, 1, \dots, q_n - 1\}.$$

ЛЕММА 5.1 (свойства интервалов $\Delta_{n,k,r}^\pm$ и $\Delta_{n,k}^\pm$).

1) Для допустимых r , n и k

$$\mu(\Delta_{n,k}^\pm) = \frac{1}{2q_n}, \quad (5.3)$$

$$\mu(\Delta_{n,k,r}^\pm) = \frac{1}{2q_n} - (r-1)|\delta_n|, \quad (5.4)$$

$$\mu(\Delta_{n,k,r}^\pm) > \mu(\Delta_{n,k}^\pm) \left(1 - \frac{2r}{q_{n+1}} \right). \quad (5.5)$$

2) Если $x \in \Delta_{n,k,r}^+$, то $x + s\delta_n \in \Delta_{n,k}^+$ для $0 \leq s \leq r-1$. Аналогично, если $x \in \Delta_{n,k,r}^-$, то $x + s\delta_n \in \Delta_{n,k}^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства (5.3)–(5.5) следуют непосредственно из построения интервалов и неравенства (5.2).

Для доказательства второй части леммы рассмотрим сначала случай $\delta_n > 0$ и $x \in \Delta_{n,k,r}^+$. В этом случае

$$\frac{k}{q_n} < x < \frac{k+1/2}{q_n} - (r-1)\delta_n,$$

откуда

$$\frac{k_n}{q_n} < x + s\delta_n < \frac{k+1/2}{q_n} - (r-1-s)\delta_n < \frac{k+1/2}{q_n},$$

т.е. $x \in \Delta_{n,k}^+$. Остальные три случая ($\Delta_{n,k}^-$, а также $\delta_n < 0$) рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2 (свойства биркгофовых сумм u_n^r).

1) Для любых (допустимых) n и k

- функция $u_n | \Delta_{n,k}^+$ линейно возрастает с угловым коэффициентом a_n ;
- функция $u_n | \Delta_{n,k}^-$ линейно убывает с угловым коэффициентом $-a_n$;
- функция $u_n | \Delta_{n,k}^\pm$ обращается в нуль в середине $\Delta_{n,k}^\pm$, т.е. в точке вида

$$x_{n,k}^\pm = \frac{k + 1/2 \mp 1/4}{q_n};$$

- для любых $x \in \mathbb{S}^1$ и $s \in \mathbb{Z}$ справедливо

$$u_n(T^s x) = u_n(x + s\delta_n). \quad (5.6)$$

2) Для любых допустимых n , k и r справедливы утверждения:

- функция u_n^r кусочно линейна на $\mathbb{S}^1$ и для всех x , кроме точек излома,

$$|(u_n^r)'(x)| \leq ra_n; \quad (5.7)$$

- для любого $x \in \Delta_{n,k,r}^\pm$

$$u_n^r(x) = ru_n\left(x + \frac{r-1}{2}\delta_n\right); \quad (5.8)$$

- функция $u_n^r | \Delta_{n,k,r}^+$ линейно возрастает с угловым коэффициентом ra_n ;
- функция $u_n^r | \Delta_{n,k,r}^-$ линейно убывает с угловым коэффициентом $-ra_n$;
- функция $u_n^r | \Delta_{n,k,r}^\pm$ обращается в нуль в середине $\Delta_{n,k,r}^\pm$, т.е. в точке вида

$$x_{n,k,r}^\pm = \frac{k + 1/2 \mp 1/4}{q_n} - \frac{r-1}{2}\delta_n;$$

- нули функции u_n^r образуют арифметическую прогрессию с шагом $\frac{1}{2q_n}$.

3) Для любых n и r справедливо неравенство

$$|u_n^r| \leq \frac{ra_n}{4q_n}. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Все утверждения первого пункта, кроме (5.6), следуют непосредственно из построения u_0 и u_n . Докажем (5.6).

Имеем (см. (5.1)):

$$u_n(T^s x) = u_n\left(x + s\frac{p_n}{q_n} + s\delta_n\right).$$

Учитывая, что u_n периодична с периодом $1/q_n$, получаем (5.6).

2) Неравенство (5.7) получается непосредственно из п. 1). Докажем (5.8). Пусть для определенности $x \in \Delta_{n,k,r}^+$. Из (5.6) получаем

$$u_n^r(x) = \sum_{s=0}^{r-1} u_n(x + s\delta_n).$$

Согласно п. 2) леммы 5.1 если $0 \leq s \leq r-1$, то $x, x + s\delta_n \in \Delta_{n,k}^+$, а на интервале $\Delta_{n,k}^+$ функция u_n линейна и имеет угловой коэффициент a_n , поэтому

$$u_n(x + s\delta_n) = u_n(x) + a_n s\delta_n;$$

подставляя это равенство в сумму, суммируя и вынося за скобки r , находим

$$u_n^r(x) = r \left(u_n(x) + a_n \frac{r-1}{2} \delta_n \right).$$

Снова учитывая, что $x, x + \frac{1}{2}(r-1)\delta_n \in \Delta_{n,k}^+$, а также линейность u_n , получаем (5.8). Аналогично доказываем (5.8) для $\Delta_{n,k,r}^-$. Остальные утверждения п. 2) следуют из (5.8) и п. 1) настоящей леммы.

3) Неравенство (5.9) сразу следует из неравенства $|u_n(x)| \leq a_n/(4q_n)$.

Лемма доказана.

Напомним, что $f_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k$.

ЛЕММА 5.3 (свойства биркгофовых сумм f_n^r).

- 1) При всех n и r функция f_n^r непрерывна и кусочно линейна на $\mathbb{S}^1$.
- 2) При $n \geq n_0$ почти для любого $x \in \mathbb{S}^1$

$$|(f_n^r)'| < 2ra_n. \quad (5.10)$$

3) Функция $f_n^r|_{\Delta_{n,k,r}^+}$ — возрастающая, $f_n^r|_{\Delta_{n,k,r}^-}$ — убывающая, и почти для всех $x \in \Delta_{n,k,r}^\pm$ при $n > n_0$

$$ra_n \left(1 - \frac{2a_{n-1}}{a_n} \right) < |(f_n^r)'(x)| < ra_n \left(1 + \frac{2a_{n-1}}{a_n} \right). \quad (5.11)$$

- 4) При $n \geq n_0$ для любого $x \in \mathbb{S}^1$

$$|f^r(x) - f_{n+1}^r(x)| < \frac{ra_{n+2}}{2q_{n+2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Функция f_n^r непрерывна и кусочно линейна как сумма непрерывных и кусочно линейных функций.

2) Во всех точках, кроме точек излома,

$$|(f_n^r)'(x)| \leq \sum_{s=1}^n |(u_s^r)'(x)| \stackrel{(5.7)}{\leq} \sum_{s=1}^n r a_s \stackrel{(2.8)}{\leq} 2r a_n.$$

3) Так как $f_n^r(x) = f_{n-1}^r(x) + u_n^r(x)$, то для всех $x \in \Delta_{n,k,r}^+$, кроме точек излома f_{n-1}^r , в силу п. 2) леммы 5.2

$$(f_n^r)'(x) = (f_{n-1}^r)'(x) + r a_n.$$

Применив (5.10) к $(f_{n-1}^r)'$, получим

$$r a_n - 2r a_{n-1} < (f_n^r)'(x) < r a_n + 2r a_{n-1},$$

откуда и следует как возрастание $f_n^r | \Delta_{n,k,r}^+$, так и (5.11) почти для всех $x \in \Delta_{n,k,r}^+$. Аналогично рассматривается случай $x \in \Delta_{n,k,r}^-$.

4) Имеем

$$|f^r(x) - f_{n+1}^r(x)| \leq \sum_{k=n+2}^{\infty} |u_k^r(x)| \leq \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{r a_k}{4q_k}.$$

Учитывая (2.10), получаем требуемое неравенство.

ЛЕММА 5.4. При $n > n_0$ для любого $\Delta_{n,k}^{\pm} \in \xi_n$ и любого $r < q_{n+1}/100$ функция $f_{n+1}^r | \Delta_{n,k}^{\pm}$ ε -равномерно распределена в некотором отрезке $[A, B]$, причем A и B зависят от n, k, r и

$$\begin{aligned} \frac{r a_n}{2q_n}(1 - \varepsilon) &< B - A < \frac{r a_n}{2q_n}, \\ \varepsilon &< \frac{3r}{q_{n+1}} + \frac{17a_{n-1}}{a_n} + 2 \left(\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n} \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности рассмотрим $\Delta_{n,k}^+$. Для $\Delta_{n,k}^-$ доказательство аналогично. Применим к $f_{n+1}^r | \Delta_{n,k}^+$ лемму об ε -равномерной распределенности суммы.

Интервал $\Delta_{n,k}^+$ отождествим с Δ ,

$$\mu(\Delta) = \frac{1}{2q_n}.$$

В качестве подмножеств Δ_i рассмотрим те интервалы $\Delta_{n+1,m}^{\pm} \in \xi_{n+1}$, которые целиком попадают в $\Delta_{n,k,r}^+$, причем присвоим им нумерацию в порядке возрастания слева направо. Очевидно,

$$\mu(\Delta_i) = \frac{1}{2q_{n+1}}.$$

Так как (см. (5.5)) $\mu(\Delta_{n,k,r}^+) > \frac{1}{2q_n} \left(1 - \frac{2r}{q_{n+1}}\right)$, а два крайних интервала вида $\Delta_{n+1,m}^\pm$ могут не полностью попасть в $\Delta_{n,k,r}^+$ и их следует отбросить, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^s \Delta_i\right) > \frac{1}{2q_n} \left(1 - \frac{2r}{q_{n+1}}\right) - \frac{1}{q_{n+1}} = \frac{1}{2q_n} \left(1 - \frac{2r}{q_{n+1}} - \frac{2q_n}{q_{n+1}}\right),$$

или

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^s \Delta_i\right) > \mu(\Delta)(1 - \varepsilon'),$$

где

$$\varepsilon' = \frac{2r}{q_{n+1}} + \frac{2q_n}{q_{n+1}}. \quad (5.12)$$

Сравнивая $\mu(\Delta_i)$ и $\mu(\bigcup \Delta_i)$, получаем оценку для числа s интервалов Δ_i :

$$\frac{q_{n+1}}{q_n}(1 - \varepsilon') < s < \frac{q_{n+1}}{q_n}. \quad (5.13)$$

Определим теперь последовательность h_i . Пусть $c_i \in \Delta_i$ таково, что $u_{n+1}^r(c_i) = 0$. Такое c_i существует, это середина соответствующего интервала $\Delta_{n+1,m,r}^\pm$ (лемма 5.2). Положим

$$h_i = f_n^r(c_i),$$

$$h = \frac{ra_n}{2q_{n+1}}, \quad (5.14)$$

$$\varepsilon''' = \frac{2a_{n-1}}{a_n}. \quad (5.15)$$

Проверим выполнение (4.2). Точки c_i образуют арифметическую прогрессию с шагом $1/(2q_{n+1})$ (лемма 5.2), и, учитывая возрастание $f_n^r|_{\Delta_i}$ и (5.11) (п. 3) леммы 5.3), получаем

$$h(1 - \varepsilon''') < \Delta h_i < h(1 + \varepsilon''').$$

Функцию $f_{n+1}^r|_{\Delta}$ отождествим с $\Phi|_{\Delta}$ и для $x \in \Delta_i$ положим

$$\varphi(x) = u_{n+1}^r(x) + f_n^r(x) - f_n^r(c_i). \quad (5.16)$$

Соотношение $\Phi|_{\Delta_i} = h_i + \varphi|_{\Delta_i}$ получается немедленно. Положим

$$H = \frac{1}{2} \mu(\Delta_{n+1,m,r}^\pm) ra_{n+1} \left(1 - \frac{2a_n}{a_{n+1}}\right),$$

$$\varepsilon'' = \frac{8a_n}{a_{n+1}} + \frac{2r}{q_{n+2}}. \quad (5.17)$$

Легко видно, что

$$\frac{ra_{n+1}}{4q_{n+1}}(1 - \varepsilon'') < H < \frac{ra_{n+1}}{4q_{n+1}}. \quad (5.18)$$

Из свойства 5 ε -р.р. функций (лемма 4.1) следует, что для любого i функция $\varphi|_{\Delta_i}$ является ε'' -р.р. в отрезке $[-H, H]$. В самом деле, пусть для определенности интервал Δ_i совпадает с $\Delta_{n+1,m}^+$. Из (5.16) следует, что почти для всех $x \in \Delta_i$ $\varphi'(x) = (f_{n+1}^r)'(x)$, поэтому в силу (5.11) почти для любого $x \in \Delta_{n+1,m,r}^+$

$$ra_{n+1} \left(1 - \frac{2a_n}{a_{n+1}}\right) < \varphi'(x) < ra_{n+1} \left(1 + \frac{2a_n}{a_{n+1}}\right).$$

Кроме того, $\varphi(c_i) = 0$, а c_i — середина отрезка $\Delta_{n+1,m,r}^+$. Значит, согласно свойству 5 ε -р.р. функций $\varphi|_{\Delta_{n+1,m,r}^+}$ является $\frac{8a_n}{a_{n+1}}$ -р.р. в отрезке $[-H, H]$, а в силу неравенства (5.5)

$$\mu(\Delta_{n+1,m,r}^+) > \mu(\Delta_i) \left(1 - \frac{2r}{q_{n+2}}\right),$$

поэтому согласно п. 4 леммы 4.1 функция $\varphi|_{\Delta_i}$ также является ε -р.р. в $[-H, H]$.

Неравенства $h_s - h_1 > 2H$ и $h < H/3$ получены ниже, см. (5.19).

Согласно лемме о сумме ε -р.р. функций (лемма 4.2) мы получаем, что $f_{n+1}^r|_{\Delta_{n,k}^+}$ является ε -р.р. в отрезке $[h_1 + H, h_s - H]$, который мы и берем в качестве $[A, B]$, где

$$\varepsilon < \varepsilon' + \varepsilon'' + 3\varepsilon''' + \frac{h}{H} + \frac{3H}{hs}.$$

Оценим ε . Учитывая (5.13), (5.14) и (5.18), получаем

$$\frac{h}{H} < \frac{3a_n}{a_{n+1}}, \quad (5.19)$$

$$\frac{3H}{sh} < \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n}. \quad (5.20)$$

Так как $n > n_0$, имеем

$$\frac{2q_n}{q_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n}.$$

Поскольку $\frac{r}{q_{n+2}} < \frac{1}{4} \frac{r}{q_{n+1}}$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{a_{n-1}}{a_n}$, то, учитывая (5.12), (5.15), (5.17), получаем требуемую оценку

$$\varepsilon < \frac{3r}{q_{n+1}} + \frac{17a_{n-1}}{a_n} + 2 \left(\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n} \right).$$

Для оценки длины отрезка $[h_1 + H, h_s - H]$ используем неравенства (4.2) и (5.13).

Имеем

$$h(s-1)(1-\varepsilon''') - 2H < h_s - h_1 - 2H < hs,$$

т.е.

$$hs \left(1 - \varepsilon''' - \frac{3H}{sh}\right) < h_s - h_1 - 2H < hs,$$

и, учитывая (5.13), (5.14) и (5.20), получаем

$$\frac{ra_n}{2q_n}(1-\varepsilon) < h_s - h_1 - 2H < \frac{ra_n}{2q_n}.$$

Лемма доказана.

5.2. Проверка достаточного условия. Докажем теперь, что построенный выше специальный поток $\{S^t\}$ удовлетворяет достаточному условию перемешивания (теорема 3, §3).

Положим

$$t_n = \frac{q_{n+1}}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}.$$

Из (2.2) и (2.5) следует, что $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$.

Для $t \in (t_{n-1}, t_n]$ зададим разбиение η_t :

$$\eta_t = \xi_n, \quad \xi_n = \{\Delta_{n,k}^+, \Delta_{n,k}^-, k = 0, 1, \dots, q_n - 1\}.$$

Длина максимального отрезка разбиения, очевидно, стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Пусть также для $t \in (t_{n-1}, t_n]$

$$\varepsilon(t) = \max\left(\frac{t_n a_{n+2}}{q_{n+2}}, \frac{12t_n}{q_{n+1}} + \frac{34a_{n-1}}{a_n} + 4\left(\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n}\right)\right),$$

$$H(t) = \frac{t_{n-1}}{8} \cdot \frac{a_n}{q_n}.$$

Учитывая (2.2)–(2.6), легко проверить, что $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $H(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Пусть теперь $n > n_0$, $t \in (t_{n-1}, t_n]$, $r, s \in (t_{n-1}/2, 2t_n]$, $\Delta \in \xi_n (= \eta_t)$.

В качестве функции φ_r возьмем f_{n+1}^r . Согласно лемме 5.4 при $n > n_0$ для любого $r < q_{n+1}/100$ функция $f_{n+1}^r \mid \Delta$ является ε -р.р. в некотором отрезке $[A_r, B_r]$, причем

$$\varepsilon < \frac{3r}{q_{n+1}} + \frac{17a_{n-1}}{ra_n} + 2\left(\frac{a_{n+1}}{q_{n+1}} : \frac{a_n}{q_n}\right),$$

$$\frac{ra_n}{2q_n}(1 - \varepsilon) < B_r - A_r < \frac{ra_n}{2q_n}. \quad (5.21)$$

Так как $r \leq 2t_n$, то

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon(t)}{2}.$$

Аналогично из определения $H(t)$ и неравенства $r > t_{n-1}/2$ получаем неравенство

$$B_r - A_r > H(t),$$

а из (5.21)

$$\frac{r}{s}(1 - \varepsilon) < \frac{B_r - A_r}{B_s - A_s} < \frac{r}{s} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon},$$

откуда

$$\frac{r}{s}(1 - \varepsilon(t)) < \frac{B_r - A_r}{B_s - A_s} < \frac{r}{s}(1 + \varepsilon(t)).$$

Наконец, в силу п. 4) леммы 5.3 для любого $x \in \mathbb{S}^1$

$$|f^r(x) - f_{n+1}^r(x)| \leq \frac{ra_{n+2}}{2q_{n+2}},$$

или, учитывая неравенство $r \leq 2t_n$ и определение $\varepsilon(t)$, получаем

$$|f^r(x) - f_{n+1}^r(x)| \leq \frac{t_n a_{n+2}}{q_{n+2}} \leq \varepsilon(t).$$

Выполнение достаточного условия перемешивания потока проверено.

§ 6. Доказательство достаточного условия перемешивания

В этом параграфе мы докажем, что из выполнения условий теоремы 3 следует выполнение условий леммы 3.1. Пусть для любого $x \in \mathbb{S}^1$

$$0 < c \leq f(x) \leq C, \quad 0 < c < 1 < C.$$

Отсюда сразу следует неравенство

$$cr \leq f^r(x) \leq Cr. \quad (6.1)$$

Зададим стандартный прямоугольник $Q = Q_{I,h}$ с основанием $I = (\alpha, \beta)$ высоты h ($0 < h \leq c$). Фиксируем ε :

$$0 < \varepsilon < \frac{c}{100}.$$

Построим такое t_0 , что для любого $t > t_0$ и любого $\Delta \in \eta_t$

$$\mu^{(t)}(S^t \Delta \cap Q) = \mu(\Delta \cap S^{-t} Q) > \mu(\Delta) \cdot \mu_2(Q)(1 - 19\varepsilon). \quad (6.2)$$

6.1. Если $S^t x \in Q$ для $x \in \Delta$, то существует такой номер r , что

$$T^r x \in I, \quad f^r(x) \leq t \leq f^r(x) + h,$$

поэтому

$$\mu(\Delta \cap S^{-t} Q) = \sum_r \mu((f^r)^{-1}([t-h, t]) \cap \Delta \cap T^{-r} I).$$

Уменьшая, быть может, правую часть, мы будем рассматривать только те r , для которых $T^r \Delta \subset I$:

$$\mu(\Delta \cap S^{-t} Q) > \sum_{r: T^r \Delta \subset I} \mu((f^r)^{-1}([t-h, t]) \cap \Delta).$$

Если $r \in [t/2, 2t]$ и $|f^r(x) - \varphi_r(x)| \leq \varepsilon h$ для любого x , то

$$(f^r)^{-1}([t-h, h]) \cap \Delta \supset \varphi_r^{-1}([t-h+\varepsilon h, t-\varepsilon h]) \cap \Delta.$$

Напомним, что функция $\varphi_r|_{\Delta}$ является $\varepsilon(t)$ -равномерно распределенной в отрезке $[A_r, B_r]$, поэтому, быть может, ухудшив оценку, будем рассматривать только те слагаемые, для которых $[t-h+\varepsilon h, t-\varepsilon h] \subset [A_r, B_r]$. В этом случае

$$\mu(\varphi_r^{-1}([t-h+\varepsilon h, t-\varepsilon h]) \cap \Delta) > \mu(\Delta) \frac{h(1-2\varepsilon)}{B_r - A_r} (1 - \varepsilon(t)),$$

откуда получаем

$$\mu(\Delta \cap S^{-t} Q) > \sum_{r \in R} \mu(\Delta) \frac{h(1-2\varepsilon)}{B_r - A_r} (1 - \varepsilon(t)), \quad (6.3)$$

где

$$R = \{r : T^r \Delta \subset I, [t-h(1-\varepsilon), t-\varepsilon h] \subset [A_r, B_r]\}. \quad (6.4)$$

Осталось оценить число слагаемых и показать, что для этих слагаемых r , а стало быть, $B_r - A_r$ относительно мало меняются.

6.2. Для краткости обозначим

$$H_r := B_r - A_r, \quad \delta := \varepsilon h.$$

Выберем такое $k_0 > n_0$ (см. начало § 5), что $1/k_0 < \varepsilon/2$ и при $r > k_0$ для любого $x \in \mathbb{S}^1$

$$\left| \frac{f^r(x)}{r} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6.5)$$

$$\left| \frac{\chi_{I(\varepsilon)}^r(x)}{r} - \mu(I(\varepsilon)) \right| < \varepsilon \mu(I(\varepsilon)), \quad (6.6)$$

где $\chi_{I(\varepsilon)}$ — характеристическая функция интервала $I(\varepsilon) = (\alpha + \varepsilon \mu(I), \beta - \varepsilon \mu(I))$, т. е. основания прямоугольника Q , суженного на $\varepsilon \mu(I)$ с каждой стороны. Это возможно в силу строгой эргодичности поворота T . Теперь выберем t_0 , удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \quad t_0 > \max\left(\frac{k_0}{c}, 2k_0, 2Ck_0, \frac{2}{\varepsilon}\right), \quad (6.7)$$

$$2) \quad \text{при } t > t_0 \quad \varepsilon(t) < \min\left(\varepsilon h, \varepsilon \mu(I), \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (\text{очевидно, что при этом } \varepsilon(t) < \varepsilon),$$

$$H(t) > \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{2k_0}{c}, 4k_0\right); \quad (6.8)$$

$$3) \quad \text{при } t > t_0 \text{ длина максимального элемента разбиения } \eta_t \text{ меньше чем } \varepsilon \mu(I).$$

Возьмем $t > t_0$ и зафиксируем элемент разбиения $\Delta \in \eta_t$.

Выделим отрезок $[r_1, r_2]$ идущих подряд номеров, для которых выполняется включение $[t - h(1 - \varepsilon), t - \varepsilon h] \subset [A_r, B_r]$ из (6.4), причем так, чтобы в $[r_1, r_2]$ входил основной массив номеров, для которых верно включение. Трудность состоит в том, что последовательности A_r и B_r не обязаны быть монотонными, поэтому придется сделать некоторые вспомогательные оценки.

6.3. Поскольку $|f^r(x) - \varphi_r(x)| \leq \delta$ для каждого $r \in [t/2, 2t]$ и каждого x , то с учетом неравенства $f^r(x) + c \leq f^{r+1}(x)$ сразу получаем соотношение: если $t/2 \leq r < s \leq 2t$, то

$$\varphi_r(x) < \varphi_s(x). \quad (6.9)$$

Далее мы всюду предполагаем, что $r, s \in [t/2, 2t]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Множество

$$E_r = \varphi^{-1}([A_r, B_r]) \cap \Delta$$

назовем *существенным* множеством функции $\varphi_r \mid \Delta$.

ЛЕММА 6.1 (свойства существенных множеств).

- 1) $A_r = \inf \varphi_r(E_r)$, $B_r = \sup \varphi_r(E_r)$;
- 2) $\mu(E_r) > \mu(\Delta)(1 - \varepsilon)$;
- 3) $E_r \setminus E_s \subset \Delta \setminus E_s$, $\mu(E_r \setminus E_s) < \varepsilon \mu(\Delta)$;
- 4) $\mu(E_r \cap E_s) > \mu(\Delta)(1 - 2\varepsilon)$;
- 5) справедливы неравенства:

$$\sup \varphi_r(E_r \cap E_s) > B_r - 2\varepsilon H_r; \quad \inf \varphi_r(E_r \cap E_s) < A_r + 2\varepsilon H_r. \quad (6.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В проверке нуждается только (6.10).

Обозначим $z = \sup \varphi_r(E_r \cap E_s)$. Тогда в силу ε -равномерной распределенности

$$\mu(\varphi_r^{-1}([z, B_r]) \cap \Delta) > \mu(\Delta) \frac{B_r - z}{B_r - A_r} (1 - \varepsilon).$$

Учитывая, что $\varphi_r^{-1}([z, B_r]) \cap \Delta \subset E_r \setminus E_s$, получаем оценку

$$\mu(\Delta) \frac{B_r - z}{B_r - A_r} (1 - \varepsilon) < \varepsilon \mu(\Delta).$$

После несложных преобразований получаем $z > B_r - 2\varepsilon H_r$. Аналогично доказываем оценку для нижней грани. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2 (об ε -монотонности последовательностей $\{A_r\}$ и $\{B_r\}$). Если $r < s$, то

$$A_r < A_s + 2\varepsilon H_s, \quad B_r - 2\varepsilon H_r < B_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (6.10) и (6.9)

$$A_r = \inf \varphi_r(E_r) \leq \inf \varphi_r(E_r \cap E_s) < \inf \varphi_s(E_r \cap E_s) < A_s + 2\varepsilon H_s.$$

Аналогично

$$B_s = \sup \varphi_s(E_s) \geq \sup \varphi_s(E_r \cap E_s) > \sup \varphi_r(E_r \cap E_s) > B_r - 2\varepsilon H_r.$$

Лемма доказана.

6.4. Пусть $t/2 \leq r \leq 2t$. Обозначим

$$r_1 = \min\{r : B_r - 2\varepsilon H_r \geq t - \delta\}, \quad r_2 = \max\{r : A_r + 2\varepsilon H_r \leq t - h + \delta\}. \quad (6.11)$$

ЛЕММА 6.3 (свойства множества номеров $[r_1, r_2]$).

- 1) $\emptyset \neq [r_1, r_2] \subset [t(1 - 2\varepsilon), t(1 + 2\varepsilon)] \subset [t/2, 2t]$;
- 2) справедливо неравенство

$$H_{r_1-1}(1 - 10\varepsilon) \leq r_2 - r_1; \quad (6.12)$$

- 3) если $r \in [r_1, r_2]$, то

$$[t - h(1 - \varepsilon), t - \varepsilon h] \subset [A_r, B_r].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Покажем, что r_1 и r_2 определены корректно и лежат на отрезке $[t(1-2\varepsilon), t(1+2\varepsilon)]$. В самом деле, пусть $r \leq t(1-2\varepsilon)$. Тогда в силу (6.5) и определения φ_r для любого $x \in \Delta$

$$\varphi_r(x) \leq f^r(x) + \delta < r \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \delta < t(1-\varepsilon),$$

откуда в силу (6.7) и леммы 6.1 легко получить

$$A_r + 2\varepsilon H_r < B_r - 2\varepsilon H_r < B_r < t(1-\varepsilon) < t-h+\delta < t-\delta.$$

Следовательно, множество $\{r : B_r - 2\varepsilon H_r \geq t-\delta\}$, если оно непусто, ограничено снизу константой $t(1-2\varepsilon)$, а множество $\{r : A_r + 2\varepsilon H_r \leq t-h+\delta\}$ непусто. Теперь пусть $r > t(1+2\varepsilon)$. Тогда в силу (6.5) для любого $x \in \Delta$

$$\varphi_r(x) \geq f^r(x) - \delta > r \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta > t(1+\varepsilon),$$

откуда следуют неравенства

$$t-h+\delta < t-\delta < t(1+\varepsilon) < A_r < A_r + 2\varepsilon H_r < B_r - 2\varepsilon H_r.$$

Тем самым, множество $\{r : B_r - 2\varepsilon H_r \geq t-\delta\}$ непусто, а множество $\{r : A_r + 2\varepsilon H_r \leq t-h+\delta\}$ ограничено сверху константой $t(1+2\varepsilon)$. Значит, r_1 и r_2 определены корректно и

$$r_1, r_2 \in [t(1-2\varepsilon), t(1+2\varepsilon)].$$

2) Следующее рассуждение не зависит от того, как соотносятся r_1 и r_2 . Из него мы получим, в частности, неравенство $r_1 \leq r_2$, т.е. непустоту отрезка $[r_1, r_2]$.

В силу определения номеров r_1 и r_2

$$B_{r_1-1} - 2\varepsilon H_{r_1-1} < t-\delta, \quad A_{r_2+1} + 2\varepsilon H_{r_2+1} > t-h+\delta.$$

Так как $\inf \varphi_{r_1-1}(E_{r_1-1} \cap E_{r_2+1}) < A_{r_1-1} + 2\varepsilon H_{r_1-1} = B_{r_1-1} - H_{r_1-1}(1-2\varepsilon)$, то существует точка $x_0 \in E_{r_1-1} \cap E_{r_2+1}$, для которой

$$\varphi_{r_1-1}(x_0) < t-\delta - H_{r_1-1}(1-4\varepsilon),$$

откуда в силу определения φ_r

$$f^{r_1-1}(x_0) < t - H_{r_1-1}(1-4\varepsilon).$$

С другой стороны, поскольку $x_0 \in E_{r_2+1}$, то

$$\varphi_{r_2+1}(x_0) \geq A_{r_2+1} > t-h+\delta - 2\varepsilon H_{r_2+1},$$

значит,

$$f^{r_2+1}(x_0) > t-h-2\varepsilon H_{r_2+1}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$f^{r_2-r_1+2}(T^{r_1-1}x_0) = f^{r_2+1}(x_0) - f^{r_1-1}(x_0) > H_{r_1-1}(1-4\varepsilon) - 2\varepsilon H_{r_2+1} - h.$$

Учитывая (6.8), получаем окончательно

$$f^{r_2-r_1+2}(T^{r_1-1}x_0) > H_{r_1-1}(1-4\varepsilon) - 3\varepsilon H_{r_2+1}.$$

Из условия (3.5) и неравенства $\frac{r_2+1}{r_1-1} < 1+5\varepsilon$ (см. п. 1) настоящей леммы) следует, что $H_{r_2+1} < (1+10\varepsilon)H_{r_1-1}$, откуда получаем

$$f^{r_2-r_1+2}(T^{r_1-1}x_0) > H_{r_1-1}(1-8\varepsilon).$$

Учитывая, что $r_1 - 1 > t/2$ и, следовательно, $H_{r_1-1} > H(t) > 2Ck_0$, получаем согласно (6.1) неравенство $r_2 - r_1 + 2 > k_0$. Значит, можно применить оценку (6.5) и получить (6.12). Отсюда, в частности, получаем, что $r_2 - r_1 > 0$, поэтому $[r_1, r_2] \neq \emptyset$.

3) Пусть $r \in [r_1, r_2]$. Из неравенства $r_1 \leq r$ по свойству ε -монотонности получаем $B_r > B_{r_1} - 2\varepsilon H_{r_1}$ и, учитывая определение r_1 , имеем $B_r > t - \delta$. Аналогично из неравенства $r \leq r_2$ получаем, что $A_r < t - h + \delta$. Из двух последних неравенств следует включение

$$[t - h + \delta, t - \delta] \subset [A_r, B_r].$$

Лемма доказана.

Еще раз ухудшим оценку для $\mu(\Delta \cap S^{-t}Q)$, заменив в (6.3) множество номеров R на $R \cap [r_1, r_2]$:

$$\mu(\Delta \cap S^{-t}Q) > \sum_{r \in R \cap [r_1, r_2]} \mu(\Delta) \frac{h(1-2\varepsilon)}{H_r} (1 - \varepsilon(t)). \quad (6.13)$$

Число слагаемых в правой части равно числу включений $T^r \Delta \subset I$ при $r_1 \leq r \leq r_2$. Учитывая, что $\mu(\Delta) < \varepsilon \mu(I)$, оценим число включений значением $\chi_{I(\varepsilon)}^{r_2-r_1+1}(T^{r_1}x)$ для некоторого $x \in \Delta$, где $I(\varepsilon) = (\alpha + \varepsilon \mu(I), \beta - \varepsilon \mu(I))$. Как следует из сказанного выше, $r_2 - r_1 > k_0$, поэтому в силу (6.6)

$$\chi_{I(\varepsilon)}^{r_2-r_1+1}(T^{r_1}x) > (r_2 - r_1) \mu(I(\varepsilon)) (1 - \varepsilon),$$

значит, число слагаемых в сумме (6.13) больше чем $H_{r_1-1} \mu(I) (1 - 13\varepsilon)$. Учитывая (3.5) и п. 1) леммы 6.3, получаем

$$\frac{H_{r_1-1}}{H_r} > \frac{r_1-1}{r_2} (1 - \varepsilon) > 1 - 6\varepsilon.$$

Окончательно получаем

$$\mu(\Delta \cap S^{-t}Q) > \mu(\Delta) \mu(I) h (1 - 19\varepsilon),$$

т.е. неравенство (6.2). Достаточное условие перемешивания доказано.

В заключение автор выражает искреннюю признательность Лидии Ивановне и Дмитрию Викторовичу Аносовым, а также Анатолию Борисовичу Катку, благодаря усилиям и помощи которых он снова вернулся к занятиям математикой спустя много лет.

Список литературы

1. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. С. 763–766.
2. Kolmogoroff A. N. Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Amsterdam, 1954. V. 1, 1957. P. 315–333.
3. Parry W. Cocycles and velocity changes // J. London Math. Soc. (2). 1972. V. 5. №3. P. 511–516.
4. Herman M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations // Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 1979. V. 49. P. 5–233.
5. von Neumann J. Zur Operatorermethode in der klassischen Mechanik // Ann. of Math. (2). 1932. V. 33. P. 587–642.
6. Шкловер М. Д. О классических динамических системах на торе с непрерывным спектром // Изв. вузов. Сер. матем. 1967. Т. 10. С. 113–124.
7. Аносов Д. В. Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. С. 1259–1274.
8. Степин А. М. О гомологическом уравнении теории динамических систем // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Изд-во Ярославского ун-та, 1982. С. 106–117.
9. Каток А. Б., Синай Я. Г., Степин А. М. Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой // Итоги науки и техн. Матем. анализ. Т. 13. М.: ВИНТИ, 1975. С. 129–262.
10. Каток А. Б. Спектральные свойства динамических систем с интегральным инвариантом на торе // Функци. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. С. 45–56.
11. Кочергин А. В. Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и у потоков на двумерном торе // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. С. 515–518.
12. Кочергин А. В. Замена времени в потоках и перемешивание // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. С. 1275–1298.
13. Кочергин А. В. О перемешивании в специальных потоках над перекладыванием отрезков и в гладких потоках на поверхностях // Матем. сб. 1975. Т. 96 (138). №3. С. 471–502.
14. Кочергин А. В. Невырожденные седла и отсутствие перемешивания // Матем. заметки. 1976. Т. 19. №3. С. 453–468.
15. Кочергин А. В. О гомологичности функций над динамическими системами // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. С. 795–798.
16. Ornstein D., Smorodinsky M. Continuous speed changes for flows // Israel J. Math. 1978. V. 31. P. 161–168.
17. Lemańczyk M. Sur l'absence de mélange pour des flots spéciaux au dessus d'une rotation irrationnelle // Colloq. Math. 2000. V. 84/85. P. 29–41.
18. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Физматгиз, 1961.
19. Fayad B. R. Reparamétrage de flots irrationnels sur le tore // PhD Thèse. Paris: L'École Polytechnique, 2000.