Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Адуков, Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 8, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6360>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 11:42:24

УДК 517.544.8

В. М. Адуков

Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций

Пусть D^+ – многосвязная область, ограниченная контуром Γ , D^- – дополнение $D^+ \cup \Gamma$ в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Пусть $a(t)$ – непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция, допускающая мероморфное продолжение в открытое несвязное множество D^- (кусочно мероморфная матрица-функция). В работе получено явное решение задачи факторизации Винера–Хопфа для $a(t)$ и явно вычислены частные факторизационные индексы $a(t)$. Под явным решением факторизационной задачи здесь подразумевается ее сведение к исследованию конечного числа систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых выражаются в замкнутой форме (т.е. в квадратурах).

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: факторизация Винера–Хопфа матриц-функций, краевая задача Римана, частные индексы.

Введение

Пусть Γ – система замкнутых гладких жордановых попарно непересекающихся контуров $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$, причем $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ лежат внутри Γ_0 . Контур Γ считается ориентированным в положительном направлении, т.е. Γ_0 обходится против часовой стрелки, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – по часовой. Пусть D^+ – ограниченная $(n+1)$ -связная область с границей Γ , D^- – открытое несвязное множество, являющееся дополнением $D^+ \cup \Gamma$ в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Считаем, что $0 \in D^+$. Внешнюю по отношению к контуру Γ_0 область обозначим через D_0^- , а область, лежащую внутри контура Γ_k , обозначим через D_k^- , $k = 1, \dots, n$. Открытое множество D^- имеет $n+1$ связную компоненту $D_0^-, \dots, D_n^-$. Аналитические (мероморфные) в D^- функции поэтому будем называть кусочно аналитическими (кусочно мероморфными) функциями.

Пусть $a(t)$ – непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция порядка p . *Правой факторизацией Винера–Хопфа* матрицы-функции $a(t)$ называется ее представление в виде

$$a(t) = r_-(t)d_r(t)r_+(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

Здесь $r_{\pm}(t)$ – непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжаемые в $D^{\pm}$ и обратимые там, а $d_r(t) = \text{diag}[t^{\rho_1}, \dots, t^{\rho_p}]$, где $\rho_1, \dots, \rho_p$ – целые числа, называемые *правыми частными индексами* $a(t)$. Их можно считать упорядоченными по возрастанию, т.е. $\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p$. Если все индексы равны нулю, то факторизация называется *канонической*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-96010).

Аналогично определяется левая факторизация Винера–Хопфа матрицы-функции $a(t)$:

$$a(t) = l_+(t)d_l(t)l_-(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2)$$

$d_l(t) = \text{diag}[t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_p}]$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_p$, – левые частные индексы $a(t)$. Предлагаемый в работе метод требует одновременного рассмотрения правой и левой факторизаций. Частные индексы (правые и левые) матрицы-функции $a(t)$ определяются ею однозначно, но факторизационные множители $r_{\pm}(t)$, $l_{\pm}(t)$ находятся неединственным образом. Впрочем, если известна какая-то факторизация $a(t)$, то общий вид факторизационных множителей можно указать (см., например, [1; гл. VIII, теорема 1.2]).

Легко видеть, что $\sum_{j=1}^p \rho_j = \sum_{j=1}^p \lambda_j = \varkappa$, где

$$\varkappa = \text{ind}_{\Gamma} \det a(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n [\arg \det a(t)]_{\Gamma_k}$$

– индекс Коши скалярной функции $\det a(t)$. Здесь $[\arg \det a(t)]_{\Gamma_k}$ означает приращение $\arg \det a(t)$ при однократном обходе кривой Γ_k в положительном направлении.

Задача левой факторизации Винера–Хопфа равносильна краевой задаче Римана, так как пара матриц-функций $(l_+(t), l_-^{-1}(t)d_l^{-1}(t))$ является канонической матрицей-функцией краевой задачи Римана с матричным коэффициентом $a(t)$ и, наоборот, по любой канонической матрице-функции легко восстановить левую факторизацию Винера–Хопфа коэффициента $a(t)$.

Известно, что факторизации Винера–Хопфа существуют для матриц-функций с гёльдеровскими коэффициентами [2], [3]. Для мероморфных в области D^+ или для кусочно мероморфных в D^- матриц-функций для существования факторизации достаточно потребовать непрерывности их граничных значений.

Задача факторизации Винера–Хопфа (краевая задача Римана) – одна из важнейших задач анализа. Она находит многочисленные приложения в различных разделах математики, механики и математической физики. Широко известна определяющая роль, которую играет эта задача при решении систем уравнений Винера–Хопфа [1] и систем сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши [2]. Она является одним из существенных этапов при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния [4] и составляет основу для решения обратной задачи рассеяния для матричного дифференциального оператора. В топологии голоморфные векторные расслоения на сфере Римана классифицируются с помощью инвариантов краевой задачи Римана – частных индексов [5]. Уже традиционным является приложение краевой задачи Римана к проблемам механики сплошной среды [2], [6]. В последнее время краевая задача Римана на римановых поверхностях стала использоваться при исследовании асимптотики ортогональных многочленов и знаменателей диагональных аппроксимаций Паде [7].

Применение задачи факторизации Винера–Хопфа в матричном случае затруднено из-за отсутствия явных формул для факторизационных множителей и для важных целочисленных инвариантов задачи – частных индексов. Поэтому главной нерешенной проблемой в теории факторизации является отыскание случаев, когда задача решается эффективно или явно. Принято говорить, что

задача решается *эффективно*, если существует алгоритм ее решения за конечное число шагов (заранее не известное, а определяемое в процессе вычислений). Наиболее важные случаи эффективного решения задачи факторизации можно найти в работах [2; гл. I, § 6], [8] и [9; гл. 6, § 18].

Под решением *в замкнутой форме* или *в квадратурах* понимается решение в виде формулы типа формулы Гахова в скалярном случае. Впрочем, термин “решение в замкнутой форме” часто используется как синоним явного в каком-нибудь смысле решения. В настоящей работе мы считаем, что задача факторизации решена явно, если она сведена к решению конечного числа конечных систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых записываются в замкнутой форме (в квадратурах). Число таких систем также должно быть определено заранее.

Впервые задача факторизации относительно простого контура была решена явно в этом смысле для матричных многочленов [10]. В статьях [11], [12] явное решение задачи факторизации получено для мероморфных в односвязной области матриц-функций.

Нетрудно проверить, что матрица-функция $a(t)$ допускает правую (левую) факторизацию Винера–Хопфа, для которой множитель $r_-(t)$ ($l_-(t)$) является рациональной матрицей-функцией тогда и только тогда, когда $a(t)$ мероморфно продолжается в многосвязную область D^+ . Аналогично, для того чтобы фактор $r_+(t)$ или $l_+(t)$ был рациональной матрицей-функцией, необходимо и достаточно, чтобы $a(t)$ мероморфно продолжалась в открытое несвязное множество D^- , т.е. являлась кусочно мероморфной матрицей-функцией. Явное построение факторизации таких матриц-функций представляет большой интерес, поскольку они достаточно часто встречаются в приложениях в механике.

Таким образом, для матриц-функций из указанных классов один из факторизационных множителей определяется конечным числом параметров и поэтому для них задачу факторизации можно решать средствами линейной алгебры. Для односвязных областей это было сделано в [12]. Метод и результаты работы [12] легко переносятся на случай мероморфных в многосвязной области D^+ матриц-функций [13].

В настоящей работе рассматривается более сложный случай, когда $a(t)$ мероморфно продолжается в открытое несвязное множество D^- , т.е. является кусочно мероморфной матрицей-функцией. Ранее алгоритм явного решения был известен только для кусочно полиномиальных матриц-функций [14].

В § 1 описан линейно-алгебраический аппарат, необходимый для решения поставленной задачи. В § 2 рассмотрен кусочно аналитический случай. Основным результатом здесь – теорема 2.2. Явное решение задачи факторизации для кусочно мероморфных матриц-функций дано в § 3 (теорема 3.1). Это решение проиллюстрировано числовым примером, все вычисления в котором выполнены в системе “Maple”. Здесь же приведен критерий существования канонической факторизации для данного класса матриц-функций.

§ 1. Индексы и существенные многочлены конечной последовательности матриц

В этом параграфе мы приведем алгебраические основы предлагаемого метода явного решения задачи факторизации. Подробное изложение и доказательства можно найти в [15] (см. также [12]).

Обозначим через $\mathbb{C}^{n \times m}$ множество всех комплексных матриц размера $n \times m$. Единицу матрицы порядка n обозначим через I_n . Для матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ обозначим через $[A]^j$ ($[A]_j$) ее j -й столбец (j -ю строку); $\ker_R A$ – это ее правое ядро, $\ker_L A$ – левое ядро, т.е.

$$\ker_R A = \{x \in \mathbb{C}^{m \times 1} \mid Ax = 0\}, \quad \ker_L A = \{y \in \mathbb{C}^{1 \times n} \mid yA = 0\}.$$

Для блочной матрицы A блочных размеров $(n+1) \times (m+1)$ с блоками из $\mathbb{C}^{p \times p}$ разобьем строку $L \in \ker_L A$ на $n+1$ блок (размер блоков – $1 \times p$), т.е

$$L = (l_0 \ l_1 \ \dots \ l_n),$$

и определим производящий векторный многочлен от z^{-1} вектора L так:

$$L(z) = l_0 + l_1 z^{-1} + \dots + l_n z^{-n}.$$

Производящий векторный многочлен от z столбца $R \in \ker_R A$ определяется аналогично.

Пусть $a_M, a_{M+1}, \dots, a_N$ ($M < N$) – произвольная конечная последовательность комплексных квадратных матриц порядка p . Эту последовательность обозначим через a_M^N , а ее производящую матричную функцию $\sum_{j=M}^N a_j z^j$ – через $a_M^N(z)$.

Из элементов последовательности $a_M, a_{M+1}, \dots, a_N$ образуем семейство блочных теплицевых матриц всех возможных размеров:

$$T_k(a_M^N) = \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} & \dots & a_M \\ a_{k+1} & a_k & \dots & a_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_N & a_{N-1} & \dots & a_{N+M-k} \end{pmatrix}, \quad k = M, M+1, \dots, N.$$

Для краткости, когда это не вызывает недоразумений, будем использовать обозначение T_k вместо $T_k(a_M^N)$.

Наша ближайшая задача – описать структуру правых и левых ядер матриц из данного семейства. Именно при решении этой задачи возникают важные понятия индексов и существенных многочленов последовательности.

Далее будет удобнее использовать вместо пространств $\ker_{R,L} T_k$ изоморфные пространства производящих многочленов векторов из $\ker_{R,L} T_k$. Чтобы сделать это, введем линейные отображения σ_R и σ_L . При $p = 1$ отображение $\sigma_R = \sigma_L$ является функционалом Стилтеса, используемым в теории ортогональных многочленов.

Определим с помощью последовательности a_M^N на пространстве рациональных матричных функций вида $R(z) = \sum_{j=-N}^{-M} r_j z^j$, $r_j \in \mathbb{C}^{p \times 1}$, линейное преобразование σ_R в пространство $\mathbb{C}^{p \times 1}$ по формуле

$$\sigma_R\{R(z)\} = \sum_{j=-N}^{-M} a_{-j} r_j. \quad (3)$$

Аналогично определяется “левое” линейное преобразование σ_L .

Обозначим через $\mathcal{N}_k^R$, $M \leq k \leq N$, пространство векторных многочленов вида $R(z) = \sum_{j=0}^{k-M} r_j z^j$, $r_j \in \mathbb{C}^{p \times 1}$, удовлетворяющих условиям ортогональности:

$$\sigma_R\{z^{-i} R(z)\} = 0, \quad i = k, k+1, \dots, N. \quad (4)$$

Очевидно, что $\mathcal{N}_k^R$ есть пространство производящих многочленов векторов из $\ker_R T_k$. Подобным образом можно определить пространства $\mathcal{N}_k^L$ производящих многочленов векторов-строк из $\ker_L T_k$.

Для удобства положим $\mathcal{N}_{M-1}^R = 0$ и обозначим $(N-M+2)p$ -мерное пространство всех векторных (столбцовых) многочленов от z степени не выше $N-M+1$ через $\mathcal{N}_{N+1}^R$.

Так как $\sigma_R\{z^{-i}R(z)\}$ есть коэффициент при z^i в разложении векторной функции $a_M^N(z)R(z)$ по степеням z , то $R(z) \in \mathcal{N}_{k+1}^R$ ($k \in [M, N]$) тогда и только тогда, когда в степенном ряде для $a_M^N(z)R(z)$ имеется лакуна. Другими словами, должно быть справедливо разложение

$$a_M^N(z)R(z) = z^k R_-(z) - z^{N+1} R_+(z), \quad (5)$$

где $R_{\pm}(z)$ – векторный многочлен от $z^{\pm 1}$ формальной степени $k-M$.

Далее нам придется иметь дело только с последовательностями a_M^N , для которых выполняется условие $\dim \mathcal{N}_M^R = \dim \mathcal{N}_N^L = 0$. Такие последовательности будем называть *регулярными*.

Обозначим через d_k^R размерность пространства $\mathcal{N}_k^R$ и положим $\Delta_k^R = d_k^R - d_{k-1}^R$, $M \leq k \leq N+1$.

Из определения (4) следует, что $\mathcal{N}_k^R$ и $z\mathcal{N}_k^R$ являются подпространствами $\mathcal{N}_{k+1}^R$ ($M-1 \leq k \leq N$) и, таким образом, мы имеем цепочку вложенных пространств: $\{0\} = \mathcal{N}_M^R \subseteq \mathcal{N}_{M+1}^R \subseteq \dots \subseteq \mathcal{N}_{N+1}^R$. Далее, используя формулу Грасмана, можно показать, что последовательность Δ_k^R является монотонной, т.е.

$$0 = \Delta_M^R \leq \Delta_{M+1}^R \leq \dots \leq \Delta_N^R \leq \Delta_{N+1}^R = 2p.$$

Этот факт является определяющим для всего дальнейшего изложения. Из него следует, что существует $2p$ целых чисел $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{2p}$ таких, что

$$\begin{aligned} \Delta_M^R &= \dots = \Delta_{\mu_1}^R = 0, \\ \Delta_{\mu_i+1}^R &= \dots = \Delta_{\mu_{i+1}}^R = i, \\ \Delta_{\mu_{2p}+1}^R &= \dots = \Delta_{N+1}^R = 2p. \end{aligned} \quad (6)$$

Если i -я строка в этих соотношениях отсутствует, то мы считаем, что $\mu_i = \mu_{i+1}$. Нетрудно убедиться, что $\sum_{j=1}^{2p} \mu_j = (N+M)p$.

Числа $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$, определяемые таблицей (6), будем называть *индексами* последовательности a_M^N .

Перейдем к описанию структуры пространств $\mathcal{N}_k^R$. Оказывается, что размерность h_{k+1}^R дополнения $\mathcal{H}_{k+1}^R$ подпространства $\mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R$ до всего пространства $\mathcal{N}_{k+1}^R$ равна $\Delta_{k+1}^R - \Delta_k^R$. Поэтому из соотношений (6) следует, что $h_{k+1}^R \neq 0$ только, если $k = \mu_j$ ($j = 1, \dots, 2p$). В этом случае h_{k+1}^R совпадает с кратностью κ_j индекса μ_j . Следовательно, для $k \neq \mu_j$ имеем

$$\mathcal{N}_{k+1}^R = \mathcal{N}_k^R + z\mathcal{N}_k^R$$

и, кроме того,

$$\mathcal{N}_{\mu_j+1}^R = (\mathcal{N}_{\mu_j}^R + z\mathcal{N}_{\mu_j}^R) \dot{+} \mathcal{H}_{\mu_j+1}^R.$$

Любые векторные многочлены $R_j(z), \dots, R_{j+\kappa_j-1}(z)$, образующие базис дополнения $\mathcal{H}_{\mu_j+1}^R$, будем называть *правыми существенными многочленами* последовательности, соответствующими индексу μ_j , $1 \leq j \leq 2p$.

Аналогичным образом мы можем описать структуру пространств $\mathcal{N}_k^L$. Они также образуют цепочку вложений $\mathcal{N}_{M-1}^L \supseteq \dots \supseteq \mathcal{N}_{N-1}^L \supseteq \mathcal{N}_N^L = \{0\}$ и для $k \neq \mu_j$ имеем

$$\mathcal{N}_{k-1}^L = \mathcal{N}_k^L + z^{-1} \mathcal{N}_k^L.$$

Кроме того,

$$\mathcal{N}_{\mu_j-1}^L = (\mathcal{N}_{\mu_j}^L + z^{-1} \mathcal{N}_{\mu_j}^L) \dot{+} \mathcal{H}_{\mu_j-1}^L,$$

причем размерность $\mathcal{H}_{\mu_j-1}^L$ совпадает с кратностью κ_j индекса μ_j , для $j = 1, \dots, 2p$.

Любые векторные многочлены $L_j(z), \dots, L_{j-\kappa_j+1}(z)$, образующие базис дополнения $\mathcal{H}_{\mu_j-1}^L$, назовем *левыми существенными многочленами* последовательности, соответствующими индексу μ_j , $1 \leq j \leq 2p$.

Итак, для произвольной регулярной последовательности a_M^N квадратных матриц порядка p мы определили $2p$ индексов $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$, а также $2p$ правых $R_1(z), \dots, R_{2p}(z)$ и $2p$ левых $L_1(z), \dots, L_{2p}(z)$ существенных многочленов этой последовательности. Ясно, что нахождение индексов и существенных многочленов сводится к вычислению рангов матриц из семейства $\{T_k\}_{k=M}^N$ и исследованию конечного числа систем линейных однородных алгебраических уравнений.

Матрицу $\mathcal{R}(z) = (R_1(z) \dots R_{2p}(z))$, составленную из правых векторных (столбцовых) существенных многочленов, назовем *матрицей правых существенных многочленов*. Мы будем также использовать матрицы

$$\mathcal{R}_1(z) = (R_1(z) \dots R_p(z)), \quad \mathcal{R}_2(z) = (R_{p+1}(z) \dots R_{2p}(z)).$$

Аналогичный смысл имеют матрицы $\mathcal{L}(z)$, $\mathcal{L}_1(z)$, $\mathcal{L}_2(z)$, составленные из левых векторных (строчных) существенных многочленов.

Теперь мы можем описать структуру пространств $\mathcal{N}_k^{R,L}$ в терминах индексов и существенных многочленов.

ТЕОРЕМА 1.1 (см. [15; теорема 3.1]). Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$ – индексы, а $R_1(z), \dots, R_{2p}(z)$, $L_1(z), \dots, L_{2p}(z)$ – существенные многочлены регулярной последовательности a_M^N .

Тогда $\mathcal{N}_k^R = \{0\}$ для $k \in [M, \mu_1]$, а для $k \in (\mu_i, \mu_{i+1}]$, $1 \leq i \leq 2p$, пространство $\mathcal{N}_k^R$ состоит из векторных многочленов вида $\sum_{j=1}^i q_j(z) R_j(z)$, где $q_j(z)$ – произвольные скалярные многочлены от z степени не выше $k - \mu_j - 1$. Здесь для удобства мы считаем, что $\mu_{2p+1} = N$.

Аналогично, $\mathcal{N}_k^L = \{0\}$ для $k \in [\mu_{2p}, N]$ и любой векторный многочлен из $\mathcal{N}_k^L$, $k \in [\mu_{i-1}, \mu_i]$, $1 \leq i \leq 2p$, имеет вид $\sum_{j=i}^{2p} q_j(z) L_j(z)$. Здесь $q_j(z)$ – произвольные скалярные многочлены от z^{-1} степени не выше $\mu_j - k - 1$ и считается, что $\mu_0 = M$.

В дальнейшем важную роль будет играть критерий существенности, который позволяет проверить, что заданные числа являются индексами, а заданные векторные многочлены – существенными многочленами заданной последовательности a_M^N . В этом критерии нам понадобится продолжение последовательности a_M^N вправо или влево произвольной матрицей $\tilde{a}_{M-1}$ или $\tilde{a}_{N+1}$.

ТЕОРЕМА 1.2 (см. [15; теорема 4.1]). Пусть a_M^N – любая регулярная последовательность квадратных матриц порядка p .

Предположим, что заданы целые числа $\kappa_1, \dots, \kappa_{2p}$, удовлетворяющие условиям $M \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_{2p} \leq N$, $\sum_{j=1}^{2p} \kappa_j = (N + M)p$, и векторные (столбцовые) многочлены $U_1(z), \dots, U_{2p}(z)$, $U_j(z) \in \mathcal{N}_{\kappa_j+1}^R$, формальных степеней $\kappa_1 - M + 1, \dots, \kappa_{2p} - M + 1$, соответственно.

Целые числа $\kappa_1, \dots, \kappa_{2p}$ являются индексами, а многочлены $U_1(z), \dots, U_{2p}(z)$ – правыми существенными многочленами последовательности тогда и только тогда, когда квадратная матрица

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_R\{z^{-\kappa_1}U_1(z)\} & \dots & \tilde{\sigma}_R\{z^{-\kappa_{2p}}U_{2p}(z)\} \\ U_{1, \kappa_1-M+1} & \dots & U_{2p, \kappa_{2p}-M+1} \end{pmatrix}$$

обратима. Здесь $\tilde{\sigma}_R$ – линейное преобразование Стильтеса для продолженной последовательности $\tilde{a}_{M-1}, a_M, \dots, a_N$, где $\tilde{a}_{M-1}$ – произвольная матрица; U_{j, κ_j-M+1} – формальный старший коэффициент векторного многочлена $U_j(z)$.

Аналогичным образом с использованием тестовой матрицы

$$\Lambda_L = \begin{pmatrix} V_{1,0} & \tilde{\sigma}_L\{z^{-M+1}V_1(z)\} \\ \vdots & \vdots \\ V_{2p,0} & \tilde{\sigma}_L\{z^{-M+1}V_{2p}(z)\} \end{pmatrix}$$

можно проверить, являются ли векторные (строчные) многочлены $V_1(z), \dots, V_{2p}(z)$, $V_j(z) \in \mathcal{N}_{\kappa_j-1}$, левыми существенными многочленами данной последовательности.

Нам также понадобится еще одно понятие – понятие согласованности правых и левых существенных многочленов [15; § 5].

Запишем разложения (5) для правых и левых существенных многочленов в следующей матричной форме:

$$\begin{aligned} a_M^R(z)\mathcal{R}_j(z) &= \alpha_j^-(z)d_j(z) - z^{N+1}\beta_j^+(z), \\ \mathcal{L}_j(z)a_M^R(z) &= d_j(z)\alpha_j^+(z) - z^{M-1}\beta_j^-(z), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

где матричные многочлены $\alpha_j^\pm(z)$, $\beta_j^\pm(z)$ от $z^{\pm 1}$ единственным образом определяются этими разложениями и

$$d_1(z) = \text{diag}[z^{\mu_1}, \dots, z^{\mu_p}], \quad d_2(z) = \text{diag}[z^{\mu_{p+1}}, \dots, z^{\mu_{2p}}]$$

– диагональные матрицы порядка p .

Правые и левые существенные многочлены назовем *согласованными*, если выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^-(z) & \mathcal{R}_2^-(z) \\ \alpha_1^-(z) & \alpha_2^-(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^-(z) & \mathcal{L}_1(z) \\ \beta_2^-(z) & \mathcal{L}_2(z) \end{pmatrix} = I_{2p}. \quad (8)$$

Здесь мы обозначили $\mathcal{R}_j^-(z) = z^{M-1}\mathcal{R}_j(z)d_j^{-1}(z)$.

В работе [15] показано, что согласованные существенные многочлены всегда существуют. Использование согласованных существенных многочленов позволяет ограничиться построением только правых (левых) существенных многочленов. Тогда левые (правые) согласованные многочлены могут быть найдены из условия согласования (8).

Приведенных выше сведений из теории существенных многочленов нам достаточно для явного решения задачи факторизации.

§ 2. Факторизация Винера–Хопфа кусочно аналитических матриц-функций

Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфной матрицы-функции легко сводится к факторизации кусочно аналитической (см. следующий параграф). Поэтому мы начнем с получения явного решения задачи факторизации Винера–Хопфа кусочно аналитических матриц-функций. Предлагаемый здесь метод дает возможность находить частные индексы и полиномиальные факторы $r_+(t)$, $l_+(t)$. В условиях точных вычислений этого достаточно, чтобы полностью восстановить факторизации Винера–Хопфа матрицы-функции. Кроме того, для аналитических множителей $r_-(t)$, $l_-(t)$ мы можем точно вычислить нужное число $\nu + 1$ первых коэффициентов Лорана в окрестности бесконечности. В условиях приближенных вычислений это позволит найти с необходимой точностью факторы $r_-(t)$, $l_-(t)$ в области D_0^- .

Нам понадобится следующая лемма, которая доказывается стандартными методами, изложенными, например, в [1; гл. VIII, § 1].

ЛЕММА 2.1. Пусть $a(t)$ – кусочно аналитическая в D^- и непрерывная на $D^- \cup \Gamma$ матрица-функция, обратимая на контуре Γ .

Тогда индекс Коши κ определителя $\det a(t)$, левые $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ и правые $\rho_1, \dots, \rho_p$ частные индексы матрицы-функции $a(t)$ неположительны, а для множителей $r_+(t)$, $l_+(t)$ из факторизаций (1), (2) справедливо следующее:

- 1) строка $[r_+(t)]_j$ есть векторный многочлен от t степени не выше $|\lambda_j|$;
- 2) столбец $[l_+(t)]^j$ есть векторный многочлен от t степени не выше $|\rho_j|$.

В силу леммы можно считать, что матричные многочлены $r_+(t)$, $l_+(t)$ имеют формальную степень $|\kappa|$.

Мы будем строить факторизацию Винера–Хопфа $a(t)$ в терминах индексов и существенных многочленов последовательности $c_{-\nu}, \dots, c_{-\kappa}, \dots, c_{\nu-2\kappa}$, составленной из степенных моментов

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-j-1} a^{-1}(t) dt, \quad t \in \mathbb{Z},$$

матрицы-функции $a^{-1}(t)$ относительно контура Γ . Обозначим эту последовательность через $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$. Число $\nu \geq 0$ задаем, исходя из количества необходимых нам лорановских коэффициентов факторов $r_-(t)$, $l_-(t)$. В условиях точных вычислений можно ограничиться последовательностью минимальной длины, положив $\nu = 0$.

Легко видеть, что теперь определение (3) линейного преобразования Стильтеса σ_R , порожденного данной последовательностью, можно записать в следующей интегральной форме:

$$\sigma_R\{R(t)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-1} a^{-1}(t) R(t) dt. \quad (9)$$

Аналогичная формула имеется и для σ_L .

Прежде всего убедимся в регулярности последовательности $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$.

ЛЕММА 2.2. Для любого $\nu \geq 0$ последовательность $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$ регулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться в регулярности подпоследовательности $c_0, c_1, \dots, c_{|\kappa|}$. Из леммы 2.1 следует, что $l_+(t)d_l(t)$ – матричный

многочлен от t^{-1} степени не выше $|\varkappa|$: $l_+(t)d_l(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t^{-1} + \dots + \alpha_{|\varkappa|} t^{-|\varkappa|}$. Поэтому

$$\sigma_R\{l_+(t)d_l(t)\} = c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \dots + c_{|\varkappa|}\alpha_{|\varkappa|}.$$

С другой стороны, воспользовавшись левой факторизацией $a(t)$ и интегральным представлением σ_R , получаем

$$\sigma_R\{l_+(t)d_l(t)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} t^{-1} l_-^{-1}(t) dt + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} t^{-1} l_-^{-1}(t) t dt.$$

Здесь первый интеграл равен $l_-^{-1}(\infty)$ в силу интегральной формулы Коши для неограниченной области D_0^- , а интегралы по контурам Γ_j равны нулю, поскольку подынтегральная матрица-функция аналитична в областях D_j^- , $j = 1, \dots, n$.

Таким образом,

$$l_-^{-1}(\infty) = c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \dots + c_{|\varkappa|}\alpha_{|\varkappa|}. \quad (10)$$

Возьмем любой вектор $x \in \ker_L T_{|\varkappa|}$: $xc_0 = xc_1 = \dots = xc_{|\varkappa|} = 0$. Умножив слева уравнение (10) на x , получаем $xl_-^{-1}(\infty) = 0$, т.е. $x = 0$. Следовательно, $\ker_L T_{|\varkappa|} = \{0\}$.

Аналогично, используя правую факторизацию $a(t)$, можно убедиться в том, что $\ker_R T_0 = \{0\}$. Это и означает регулярность последовательности $c_0^{|\varkappa|}$.

Найдем теперь индексы и существенные многочлены последовательности $c_{-\nu}^{\nu-2\varkappa}$ в терминах факторизации Винера–Хопфа. Будем действовать следующим образом: подберем кандидатов на роль индексов и существенных многочленов и применим критерий существенности.

Прежде всего докажем, что коэффициенты векторных многочленов $[l_+(t)]^j$, $[r_+(t)]_j$ удовлетворяют некоторым системам линейных однородных уравнений с блочными теплицевыми матрицами. Удобно сделать это в терминах производящих функций.

ЛЕММА 2.3. *Для любого $\nu \geq 0$ столбец $[l_+(t)]^j$ матричного многочлена $l_+(t)$ принадлежит пространству $\mathcal{N}_{-\lambda_j+1}^R$, причем дополнительно выполняются условия*

$$\sigma_R\{t^{\lambda_j+k}[l_+(t)]^j\} = ([l_-^{-1}(t)]^j)_{-k}, \quad k = 0, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, p, \quad (11)$$

где $([l_-^{-1}(t)]^j)_{-k}$ – лорановский коэффициент векторной аналитической функции $[l_-^{-1}(t)]^j$ в бесконечно удаленной точке.

Аналогично, $t^{-\nu+\rho_j-1}[r_+(t)]_j \in \mathcal{N}_{\rho_j-2\varkappa-1}^L$ и, кроме того,

$$\sigma_R\{t^{\rho_j+k}[r_+(t)]_j\} = ([r_-^{-1}(t)]_j)_{-k}, \quad k = 0, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многочлены из пространства $\mathcal{N}_{-\lambda_j+1}^R$ имеют формальную степень $\nu - \lambda_j + 1$. Степень векторного многочлена $[l_+(t)]^j$ по лемме 2.1 не превышает $|\lambda_j| < \nu - \lambda_j + 1$. Итак, коэффициенты при степенях $t^{-\lambda_j+1}, \dots, t^{\nu-\lambda_j+1}$ в многочлене $[l_+(t)]^j$ равны нулю и поэтому для $\sigma_R\{t^{-\ell}[l_+(t)]^j\}$ можно применять интегральную формулу (9) не только для $\ell = -\lambda_j + 1, -\lambda_j + 2, \dots, \nu - 2\varkappa$, но и для $\ell = -\lambda_j - \nu, -\lambda_j - \nu + 1, \dots, -\lambda_j$.

Найдем

$$\sigma_R\{t^{-\ell}[l_+(t)]^j\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [l_+(t)]^j a^{-1}(t) dt$$

для этих значений ℓ . Воспользовавшись левой факторизацией Винера–Хопфа, имеем

$$\sigma_R\{t^{-\ell}[l_+(t)]^j\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} t^{-\ell-\lambda_j-1} [l_-^{-1}(t)]^j dt + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} t^{-\ell-\lambda_j-1} [l_-^{-1}(t)]^j dt.$$

Так как точка $z = 0$ принадлежит области D^+ , то интегралы по контурам Γ_j , $j = 1, \dots, n$, равны нулю по интегральной теореме Коши. Интеграл по контуру Γ_0 совпадает с лорановским коэффициентом $([l_-^{-1}(t)]^j)_{\ell+\lambda_j}$ векторной аналитической функции $[l_-^{-1}(t)]^j$ в бесконечно удаленной точке. Поэтому

$$\sigma_R\{t^{-\ell}[l_+(t)]^j\} = 0, \quad \ell = -\lambda_j + 1, -\lambda_j + 2, \dots, \nu - 2\kappa,$$

т.е. в соответствии с определением (4) имеем $[l_+(t)]^j \in \mathcal{N}_{-\lambda_j+1}^R$. Дополнительные условия (11) также очевидным образом выполняются.

Вторая часть леммы доказывается подобным образом.

Дополнительные условия (11) нам потребуются для применения критерия существенности (они также будут использованы в предложении 2.1).

Числа $\kappa_1 = -\lambda_1, \dots, \kappa_p = -\lambda_p, \kappa_{p+1} = \rho_1 - 2\kappa, \dots, \kappa_{2p} = \rho_p - 2\kappa$ удовлетворяют необходимым для индексов последовательности $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$ условиям упорядоченности $-\nu \leq \kappa_j \leq \kappa_{j+1} \leq \nu - 2\kappa$ и условию на сумму индексов $\sum_{j=1}^{2p} \kappa_j = -2\kappa p$. Поэтому мы можем рассматривать их как претендентов на роль индексов данной последовательности. Кроме того, в силу леммы 2.3 у нас есть и кандидаты на роль первых p правых и последних p левых существенных многочленов. Определим недостающие многочлены. Для этого, по аналогии с работой [12], будем использовать подходящим образом исправленные частичные суммы рядов Лорана в бесконечно удаленной точке для аналитических векторных функций $[r_-(t)]^j, [l_-(t)]^j$. Исправление производится способом, несколько отличным от случая односвязной области [12].

Разложим в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки аналитическую в D_0^- векторную функцию $[r_-(t)]^j$, $j = 1, \dots, p$, и представим ее в виде

$$[r_-(t)]^j = [r_0^{\rho_j-2\kappa+\nu+1}(t)]^j + t^{-(\rho_j-2\kappa+\nu+2)} [\varphi_0^-(t)]^j.$$

Здесь $[r_0^{\rho_j-2\kappa+\nu+1}(t)]^j = r_0^j + r_1^j t^{-1} + \dots + r_{\rho_j-2\kappa+\nu+1}^j t^{-(\rho_j-2\kappa+\nu+1)}$ – частичная сумма ряда Лорана для $[r_-(t)]^j$, а $[\varphi_0^-(t)]^j$ – векторная функция, аналитическая в D_0^- и непрерывная на $D_0^- \cup \Gamma_0$. Определим также для $k = 1, \dots, n$ на контурах Γ_k векторные функции

$$[\varphi_k^-(t)]^j = t^{\rho_j-2\kappa+\nu+2} ([r_-(t)]^j - [r_0^{\rho_j-2\kappa+\nu+1}(t)]^j), \quad (12)$$

которые, очевидно, аналитически продолжаются с контура Γ_k в область D_k^- . Обозначим через $[\varphi_-(t)]^j$ векторную кусочно аналитическую в D^- функцию,

которая на контуре Γ_k совпадает с $[\varphi_k^-(t)]^j$, $k = 0, \dots, n$. Определим теперь векторную функцию

$$\Phi^j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-(\rho_j - 2\kappa + \nu + 1)} \frac{l_+(\tau) - l_+(t)}{\tau(t - \tau)} l_+^{-1}(\tau) [\varphi_-(\tau)]^j d\tau.$$

Так как $l_+(t)$ – матричный многочлен от t степени не выше $|\kappa|$, то легко видеть, что на самом деле $\Phi^j(t)$ является векторным многочленом от t^{-1} формальной степени $\rho_j - 2\kappa + \nu + 1$, у которого отличны от нуля разве лишь последние $|\kappa|$ коэффициентов. Многочлен $\Phi^j(t)$ мы и используем для исправления последних $|\kappa|$ коэффициентов частичной суммы $[r_0^{\rho_j - 2\kappa + \nu + 1}(t)]^j$, определив векторный многочлен $[\bar{r}_-(t)]^j$ от t^{-1} :

$$[\bar{r}_-(t)]^j = [r_0^{\rho_j - 2\kappa + \nu + 1}(t)]^j + \Phi^j(t), \quad j = 1, \dots, p.$$

Аналогичные построения проведем и для строки $[l_-(t)]_j$, $j = 1, \dots, p$. Представим ее в виде

$$[l_-(t)]_j = [l_-^{\lambda_j - 2\kappa + \nu + 1}(t)]_j + t^{-(\lambda_j - 2\kappa + \nu + 2)} [\psi_0^-(t)]_j,$$

где $[l_-^{\lambda_j - 2\kappa + \nu + 1}(t)]_j$ – частичная сумма ряда Лорана векторной функции $[l_-(t)]_j$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Определим также аналитические в D_k^- и непрерывные на $D_k^- \cup \Gamma_k$ векторные функции

$$[\psi_k^-(t)]_j = t^{\lambda_j - 2\kappa + \nu + 2} ([l_-(t)]_j - [l_0^{\lambda_j - 2\kappa + \nu + 1}(t)]_j), \quad k = 1, \dots, n.$$

Введем векторный многочлен от t^{-1} формальной степени $\lambda_j - 2\kappa + \nu + 1$:

$$\Psi_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-(\lambda_j - 2\kappa + \nu + 1)} [\psi_-(\tau)]_j r_+^{-1}(\tau) \frac{r_+(\tau) - r_+(t)}{\tau(t - \tau)} d\tau.$$

Здесь $[\psi_-(\tau)]_j$ – векторная кусочно аналитическая в D^- функция, составленная из $[\psi_k^-(\tau)]_j$, $k = 0, \dots, n$.

У многочлена $\Psi_j(t)$ также отличны от нуля разве лишь последние $|\kappa|$ коэффициентов. Исправим с его помощью последние $|\kappa|$ коэффициентов частичной суммы $[l_0^{\lambda_j - 2\kappa + \nu + 1}(t)]_j$, определив векторный многочлен

$$[\bar{l}_-(t)]_j = [l_0^{\lambda_j - 2\kappa + \nu + 1}(t)]_j + \Psi_j(t), \quad j = 1, \dots, p.$$

Подчеркнем, что способ исправления частичных сумм рядов Лорана еще раз указывает на необходимость одновременного рассмотрения правой и левой факторизаций Винера–Хопфа.

ЛЕММА 2.4. *Для любого $\nu \geq 0$ векторный многочлен $t^{\rho_j - 2\kappa + \nu + 1} [\bar{r}_-(t)]^j$ от t принадлежит пространству $\mathcal{N}_{\rho_j - 2\kappa + 1}^R$, причем дополнительно выполняется условие*

$$\sigma_R\{t^{\nu+1} [\bar{r}_-(t)]^j\} = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Аналогично, $[\bar{l}_-(t)]_j \in \mathcal{N}_{\lambda_j - 1}^L$ и

$$\sigma_L\{t^{\nu+1} [\bar{l}_-(t)]_j\} = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $t^{\rho_j-2\kappa+\nu+1}[\bar{r}_-(t)]^j \in \mathcal{N}_{\rho_j-2\kappa+1}^R$ вместе с дополнительным равенством $\sigma_R\{t^{-\nu-1}[\bar{r}_-(t)]^j\} = 0$ равносильно выполнению условий ортогональности $\sigma_R\{t^{-\ell}[\bar{r}_-(t)]^j\} = 0$ для $\ell = -\nu - 1, -\nu, \dots, -\rho_j - 1$.

Для этих значений ℓ найдем

$$\begin{aligned}\sigma_R\{t^{-\ell}[\bar{r}_-(t)]^j\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [\bar{r}_-(t)]^j dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [r_0^{\rho_j-2\kappa+\nu+1}(t)]^j dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) \Phi^j(t) dt.\end{aligned}$$

Преобразуем последний интеграл. Из определения векторного многочлена $\Phi^j(t)$ получаем после изменения порядка интегрирования

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) \Phi^j(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \tau^{-1} R_{\ell j}(\tau) [\varphi_-(\tau)]^j d\tau.$$

Здесь мы обозначили

$$R_{\ell j}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell+2\kappa-\rho_j-\nu-2} a^{-1}(t) \frac{l_+(\tau) - l_+(t)}{t - \tau} l_+^{-1}(\tau) dt. \quad (13)$$

Легко видеть, что матрица-функция $R_{\ell j}(\tau)$ является аналитической в области D^+ и непрерывной в $D^+ \cup \Gamma$. Разобьем интеграл (13) на два интеграла. Учитывая левую факторизацию (2), интегральную теорему Коши для областей D_k^- , $k = 1, \dots, n$, и интегральную формулу Коши для области D_0^- , получим, что для любого $\tau \in D^+$ второй интеграл совпадает с нулевой матрицей. Следовательно,

$$R_{\ell j}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell+2\kappa-\rho_j-\nu-2} \frac{a^{-1}(t)}{t - \tau} dt, \quad \tau \in D^+. \quad (14)$$

Таким образом, $R_{\ell j}(\tau)$ является интегралом типа Коши, который может быть непрерывно продолжен на контур Γ из области D^+ . Тогда, как известно (см., например, [3; § 17]), $R_{\ell j}(\tau)$ непрерывно продолжается на контур Γ и из D^- . Поэтому для непрерывной на Γ матрицы-функции $t^{-\ell+2\kappa-\rho_j-\nu-2} a^{-1}(t)$ справедлива формула Сохоцкого:

$$t^{-\ell+2\kappa-\rho_j-\nu-2} a^{-1}(t) = c_+(t) - c_-(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $c_{\pm}(t)$ – предельные значения на контуре Γ интеграла типа Коши (14) при приближении к контуру из $D^{\pm}$. Ясно, что $c_+(t) = R_{\ell j}(t)$. Таким образом, $R_{\ell j}(t) - t^{-\ell+2\kappa-\rho_j-\nu-2} a^{-1}(t) = c_-(t)$ является непрерывной на контуре Γ матрицей-функцией, аналитически продолжаемой в открытое множество D^- и совпадающей с нулевой матрицей в бесконечно удаленной точке. Тогда для аналитической в D^- векторной функции $[\varphi_-(\tau)]^j$, в силу интегральной теоремы Коши для областей D_k^- , $k = 1, \dots, n$, и интегральной формулы Коши для области D_0^- имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \tau^{-1} R_{\ell j}(\tau) [\varphi_-(\tau)]^j d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \tau^{-\ell+2\kappa-\rho_j-\nu-3} a^{-1}(\tau) [\varphi_-(\tau)]^j d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \tau^{-1} c_-(\tau) [\varphi_-(\tau)]^j d\tau = 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) \Phi^j(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell+2\kappa-\rho_j-\nu-3} a^{-1}(t) [\varphi_{-}(t)]^j dt.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [\bar{r}_{-}(t)]^j dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [r_0^{\rho_j-2\kappa+\nu+1}(t)]^j + t^{2\kappa-\rho_j-\nu-2} [\varphi_{-}(t)]^j dt. \end{aligned}$$

Учитывая определение (12) функций $[\varphi_{-}(t)]^j$, окончательно получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [\bar{r}_{-}(t)]^j dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [r_{-}(t)]^j dt.$$

Утверждение леммы теперь легко следует из правой факторизации матрицы-функции $a(t)$. В самом деле, так как

$$a^{-1}(t) [r_{-}(t)]^j = t^{-\rho_j} [r_{+}^{-1}(t)]^j,$$

то при $\ell = -\nu - 1, -\nu, \dots, -\rho_j - 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-1} a^{-1}(t) [\bar{r}_{-}(t)]^j dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} t^{-\ell-\rho_j-1} [r_{+}^{-1}(t)]^j dt = 0$$

в силу аналитичности $[r_{+}^{-1}(t)]^j$ в области D^{+} .

Аналогично доказывается вторая часть леммы.

Теперь мы можем установить связь между индексами и существенными членами последовательности $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$ и факторизациями Винера–Хопфа $a(t)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $a(t)$ – матрица-функция, являющаяся кусочно аналитической в D^{-} , непрерывной в $D^{-} \cup \Gamma$ и обратимой на контуре Γ . Составим из моментов $a^{-1}(t)$ относительно контура Γ последовательность $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$, где $\kappa = \text{ind}_{\Gamma} \det a(t)$, $\nu \geq 0$ – любое целое число. Пусть

$$a(t) = r_{-}(t) d_r(t) r_{+}(t), \quad a(t) = l_{+}(t) d_l(t) l_{-}(t)$$

– соответственно правая и левая факторизации Винера–Хопфа $a(t)$.

Тогда последовательность $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$ регулярна, ее индексы совпадают с числами $-\lambda_1, \dots, -\lambda_p, \rho_1 - 2\kappa, \dots, \rho_p - 2\kappa$, а векторные многочлены

$$\begin{aligned} & [l_{+}(t)]^1, \dots, [l_{+}(t)]^p, \quad t^{\rho_1-2\kappa+\nu+1} [\bar{r}_{-}(t)]^1, \dots, t^{\rho_p-2\kappa+\nu+1} [\bar{r}_{-}(t)]^p, \\ & [\bar{l}_{-}(t)]_1, \dots, [\bar{l}_{-}(t)]_p, \quad t^{-\nu+\rho_1-1} [r_{+}(t)]_1, \dots, t^{-\nu+\rho_p-1} [r_{+}(t)]_p \end{aligned}$$

являются соответственно правыми и левыми существенными многочленами данной последовательности.

Здесь $[\bar{r}_{-}(t)]^j, [\bar{l}_{-}(t)]_j$ – векторные многочлены от t^{-1} из леммы 2.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярность последовательности уже доказана в лемме 2.2. Определим числа

$$\varkappa_1 = -\lambda_1, \quad \dots, \quad \varkappa_p = -\lambda_p, \quad \varkappa_{p+1} = \rho_1 - 2\varkappa, \quad \dots, \quad \varkappa_{2p} = \rho_p - 2\varkappa.$$

В силу выбранного порядка среди правых и левых частных индексов числа $\varkappa_j$ упорядочены по возрастанию и $\sum_{j=1}^{2p} \varkappa_j = -2\varkappa p$, т.е. эти числа удовлетворяют условиям, необходимым для индексов последовательности.

Положим

$$\begin{aligned} U_1(t) &= [l_+(t)]^1, \quad \dots, \quad U_p(t) = [l_+(t)]^p, \\ U_{p+1}(t) &= t^{\rho_1 - 2\varkappa + \nu + 1} [\bar{r}_-(t)]^1, \quad \dots, \quad U_{2p}(t) = t^{\rho_p - 2\varkappa + \nu + 1} [\bar{r}_-(t)]^p. \end{aligned}$$

По леммам 2.3, 2.4 имеем $U_j(t) \in \mathcal{N}_{\varkappa_j+1}^R$, $j = 1, \dots, 2p$.

Применим теперь критерий существенности (теорема 1.2). Составим тестовую матрицу

$$\Lambda_R = \begin{pmatrix} \sigma_R\{t^{-\varkappa_1} U_1(t)\} & \dots & \sigma_R\{t^{-\varkappa_{2p}} U_{2p}(t)\} \\ U_{1, \varkappa_1 + \nu + 1} & \dots & U_{2p, \varkappa_{2p} + \nu + 1} \end{pmatrix}$$

и докажем ее обратимость. В силу леммы 2.3 имеем

$$\sigma_R\{t^{-\varkappa_j} U_j(t)\} = \sigma_R\{t^{\lambda_j} [l_+(t)]^j\} = [l_-(\infty)]^j, \quad j = 1, \dots, p,$$

а из леммы 2.4 следует, что

$$\sigma_R\{t^{-\varkappa_{p+j}} U_{p+j}(t)\} = \sigma_R\{t^{\nu+1} [\bar{r}_-(t)]^j\} = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Найдем теперь формальные старшие коэффициенты векторных многочленов $U_j(t)$. Вектор $U_{j, \varkappa_j + \nu + 1}$ для $j = 1, \dots, p$ совпадает с коэффициентом при $t^{\nu - \lambda_j + 1}$ в векторном многочлене $[l_+(t)]^j$. По лемме 2.1 степень столбца $[l_+(t)]^j$ не превышает $|\lambda_j|$. Так как $\nu \geq 0$, то $U_{j, \varkappa_j + \nu + 1} = 0$. Кроме того, $U_{p+j, \varkappa_j + \nu + 1} = [\bar{r}_-(\infty)]^j$, $j = 1, \dots, p$. Но способ построения векторных многочленов $[\bar{r}_-(t)]^j$ показывает, что $[\bar{r}_-(\infty)]^j = [r_-(\infty)]^j$.

Итак, Λ_R имеет следующую блочную структуру:

$$\begin{pmatrix} l_-^{-1}(\infty) & 0 \\ 0 & r_-(\infty) \end{pmatrix}$$

и, таким образом, является обратной матрицей. Согласно критерию существенности это означает, что числа $\varkappa_1, \dots, \varkappa_{2p}$ являются индексами, а многочлены $U_1(t), \dots, U_{2p}(t)$ – правыми существенными многочленами последовательности. Аналогичным образом, используя тестовую матрицу Λ_L , можно доказать вторую часть теоремы.

Таким образом, по доказанной теореме мы теперь можем явно вычислить правые и левые частные индексы кусочно аналитической матрицы-функции $a(t)$ в терминах индексов последовательности. Осталось восстановить полиномиальные факторизационные множители $a(t)$. Для этого нам потребуются существенные многочлены последовательности, имеющие дополнительные свойства. Ими по построению обладают существенные многочлены, фигурирующие в доказанной выше теореме.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем *факторизационными существенными многочленами* любые существенные многочлены $R_1(t), \dots, R_{2p}(t), L_1(t), \dots, L_{2p}(t)$ последовательности $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$, для которых

- 1) формальные старшие коэффициенты первых p правых существенных многочленов $R_1(t), \dots, R_p(t)$ равны нулю;
- 2) свободные члены последних p левых существенных многочленов $L_{p+1}(t), \dots, L_{2p}(t)$ равны нулю.

Нетрудно показать, что для согласованных существенных многочленов из выполнимости одного из условий 1), 2) автоматически следует выполнимость второго условия.

С помощью произвольных факторизационных многочленов мы найдем теперь полиномиальные факторизационные множители $r_+(t), l_+(t)$, зная которые, сможем в условиях точных вычислений явно построить факторизации Винера–Хопфа $a(t)$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $a(t)$ – матрица-функция, являющаяся кусочно аналитической в D^- , непрерывной в $D^- \cup \Gamma$ и обратимой на контуре Γ . Составим из моментов $a^{-1}(t)$ относительно контура Γ последовательность $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}$, где $\kappa = \text{ind}_{\Gamma} \det a(t)$, $\nu \geq 0$ – любое целое число.

Тогда эта последовательность регулярна и обладает факторизационными существенными многочленами.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$ – ее индексы, а $R_1(t), \dots, R_{2p}(t), L_1(t), \dots, L_{2p}(t)$ – любые факторизационные существенные многочлены.

Тогда правые $\rho_1, \dots, \rho_p$ и левые $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ частные индексы и полиномиальные факторизационные множители $l_+(t), r_+(t)$ кусочно аналитической матрицы-функции $a(t)$ находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= -\mu_j, \quad \rho_j = \mu_{p+j} + 2\kappa, \quad j = 1, \dots, p, \\ l_+(t) &= \mathcal{R}_1(t), \quad r_+(t) = t^{\nu+1} d_r^{-1}(t) \mathcal{L}_2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\mathcal{R}_1(t) = (R_1(t) \ \dots \ R_p(t)), \quad \mathcal{L}_2(t) = \begin{pmatrix} L_{p+1}(t) \\ \vdots \\ L_{2p}(t) \end{pmatrix}$$

– матрицы, составленные из существенных многочленов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярность последовательности уже доказана в лемме 2.2, а существование факторизационных существенных многочленов – в теореме 2.1. Осталось убедиться в том, что для построения факторизации Винера–Хопфа можно использовать любые факторизационные многочлены.

Прежде всего покажем, что если $R_1(t), \dots, R_p(t)$ – какие-либо факторизационные существенные многочлены и $\hat{R}_1(t), \dots, \hat{R}_p(t)$ – любые другие факторизационные существенные многочлены, то

$$\hat{R}_j(t) = \sum_{i=1}^p q_{ij}(t) R_i(t), \quad j = 1, \dots, p. \quad (16)$$

Здесь $q_{ij}(t)$ – скалярный многочлен от t степени не выше $\mu_j - \mu_i = \lambda_i - \lambda_j$, если $\mu_j - \mu_i \geq 0$, и $q_{ij}(t) \equiv 0$ для $\mu_j - \mu_i < 0$. Если $\mu_j \leq \mu_p < \mu_{p+1}$ или $\mu_p = \mu_{p+1}$,

но $\mu_j < \mu_p$, то это сразу же следует из структуры ядра блочной теплицевой матрицы T_{μ_j+1} (теорема 1.1).

Рассмотрим оставшийся случай, когда $j = p$ и $\mu_p = \mu_{p+1}$. Легко видеть, что $\mu_p = \mu_{p+1}$, только если $\mu_1 = \dots = \mu_{p-1} = 0$, $\mu_p = \mu_{p+1} = -\varkappa$ и $\mu_{p+2} = \mu_{2p} = -2\varkappa$. Поэтому по теореме 1.1 имеем

$$\widehat{R}_p(t) = \sum_{i=1}^{p-1} q_{ip}(t)R_i(t) + q_{p,p}R_p(t) + q_{p+1,p}R_{p+1}(t), \quad (17)$$

где $q_{ip}(t)$ – скалярные многочлены степени не выше $|\varkappa|$ и $q_{p,p}$, $q_{p+1,p}$ – константы.

Так как по условию $\widehat{R}_p(t)$ и $R_1(t), \dots, R_p(t)$ – факторизационные существенные многочлены, то степень $R_1(t), \dots, R_{p-1}(t)$ не превосходит ν , а степени $R_p(t)$, $\widehat{R}_p(t)$ не выше $\nu + |\varkappa|$. Если $q_{p+1,p} \neq 0$, то из равенства (17) следует, что и $R_{p+1}(t)$ имеет степень, не превосходящую $\nu + |\varkappa|$. Но тогда из структуры пространства $\mathcal{N}_{\mu_{p+1}}^R$ следует, что все многочлены из этого пространства имеют степень не выше $\nu + |\varkappa|$. Однако, как показано в лемме 2.4, $\mathcal{N}_{\mu_{p+1}}^R$ содержит многочлен $t^{\rho_1-2\varkappa+\nu+1}[\bar{r}_-(t)]^1$, который имеет ненулевой коэффициент при $t^{\rho_1-2\varkappa+\nu+1}$, так как этот коэффициент совпадает со строкой $[r_-(\infty)]_1$ обратной матрицы. Полученное противоречие показывает, что $q_{p+1,p} = 0$, т.е. представление (16) справедливо и в случае $j = p$, $\mu_p = \mu_{p+1}$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы. По доказанному в теореме 2.1 мы можем взять в качестве существенных многочленов $R_1(t) = [l_+(t)]^1, \dots, R_p(t) = [l_+(t)]^p$. Тогда $\mathcal{R}_1(t) = l_+(t)$. Возьмем теперь произвольные факторизационные существенные многочлены $\widehat{R}_1(t), \dots, \widehat{R}_p(t)$ и составим из них матрицу-функцию $\widehat{\mathcal{R}}_1(t)$. Соотношения (16) для $j = 1, \dots, p$ можно переписать в матричной форме

$$\widehat{\mathcal{R}}_1(t) = \mathcal{R}_1(t)\mathcal{Q}(t),$$

где $\mathcal{Q}(t) = \|q_{ij}(t)\|_{i,j=1}^p$ и матрица $\mathcal{Q}(t)$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1s} \\ 0 & Q_{22} & \dots & Q_{2s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Q_{ss} \end{pmatrix}.$$

Здесь $Q_{11}, \dots, Q_{ss}$ – постоянные матрицы, порядки которых совпадают с кратностями правых факторизационных индексов, а элемент $q_{ij}(t)$ матрицы $\mathcal{Q}(t)$ при $j > i$ есть многочлен степени не выше $\rho_j - \rho_i$.

Так как в соответствии с (16) мы можем разложить и многочлены $R_1(t), \dots, R_p(t)$ по системе $\widehat{R}_1(t), \dots, \widehat{R}_p(t)$, то $\mathcal{R}_1(t) = \widehat{\mathcal{R}}_1(t)\widehat{\mathcal{Q}}(t)$, где $\widehat{\mathcal{Q}}(t)$ имеет ту же структуру, что и $\mathcal{Q}(t)$. Отсюда, учитывая, что $\mathcal{R}_1(t) = l_+(t)$ – обратимая в D^+ матрица-функция, получаем, что $\mathcal{Q}\widehat{\mathcal{Q}}(t) = I_p$, что равносильно обратимости матриц $Q_{11}, \dots, Q_{ss}$.

Таким образом, множитель $\mathcal{Q}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы об общем виде левой факторизации (см., например, [1]). Поэтому $\widehat{\mathcal{R}}_1(t)$ также является факторизационным множителем $\widehat{l}_+(t)$ в некоторой левой факторизации Винера–Хопфа $a(t)$. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Если мы находимся в условиях точных вычислений, то, зная частные индексы и полиномиальные множители $l_+(t)$, $r_+(t)$, мы можем определить на контуре Γ и факторизационные множители

$$l_-(t) = d_l^{-1}(t)l_+^{-1}(t)a(t), \quad r_-(t) = a(t)r_+^{-1}(t)d_r^{-1}(t).$$

Так как $a(t)$ – кусочно аналитическая в D^- матрица-функция, то ясно, что этими формулами $l_-(t)$, $r_-(t)$ определяются и на D^- . Таким образом, факторизации Винера–Хопфа в этом случае строятся явно.

В условиях приближенных вычислений определенные нами матрицы-функции $d_l^{-1}(t)l_+^{-1}(t)a(t)$, $a(t)r_+^{-1}(t)d_r^{-1}(t)$ могут оказаться неаналитическими на D^- или необратимыми в классе аналитических на D^- матриц-функций, и возникает задача приближенного нахождения неполиномиальных факторов $l_-(t)$, $r_-(t)$. В случае, когда $a(t)$ – аналитическая в многосвязной области D^+ матрица-функция, неполиномиальными факторами являются $l_+(t)$, $r_+(t)$, и их можно вычислить приближенно, так как предложенный метод позволяет находить любое число тейлоровских коэффициентов этих множителей [13].

Оказывается, что для кусочно аналитических в D^- матриц-функций мы также можем найти любое число лорановских коэффициентов $l_-(t)$, $r_-(t)$ в бесконечно удаленной точке и, следовательно, восстановить приближенно эти множители в односвязной области D_0^- .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $R_1(t), \dots, R_{2p}(t)$, $L_1(t), \dots, L_{2p}(t)$ – любые факторизационные существенные многочлены и полиномиальные факторизационные множители $l_+(t)$, $r_+(t)$ строятся в соответствии с теоремой 2.2 по формулам (15).

Тогда для соответствующих множителей $l_-(t)$, $r_-(t)$ имеем

$$l_-^{-1}(t) = \alpha_1^-(t) + \mathcal{O}(t^{-\nu-1}), \quad r_-^{-1}(t) = -\beta_2^-(t) + \mathcal{O}(t^{-\nu-1}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь матричные многочлены $\alpha_1^-(t)$, $\beta_2^-(t)$ от t^{-1} определяются из разложений (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем первые $\nu + 1$ лорановских коэффициентов аналитической в бесконечно удаленной точке матрицы-функции $\alpha_1^-(t)$.

Для этого воспользуемся разложением (7), учитывая, что по теореме 2.2 имеем $\mathcal{R}_1(t) = l_+(t)$, $d_1(t) = d_l^{-1}(t)$. Для $\ell = 0, \dots, \nu$ коэффициент при $t^{-\ell}$ в $[\alpha_1^-(t)]^j$, $j = 1, \dots, p$, совпадает с коэффициентом при $t^{-\ell-\lambda_j}$ в $c_{-\nu}^{\nu-2\kappa}(t)[l_+(t)]^j$, т.е. с $\sigma_R\{t^{\ell+\lambda_j}[l_+(t)]^j\}$. В силу условий (11) из леммы 2.3 эти векторы суть лорановские коэффициенты $([l_-^{-1}(t)]^j)_{-\ell}$. Это и означает, что первые $\nu + 1$ лорановских коэффициентов совпадают с соответствующими лорановскими коэффициентами матрицы-функции $l_-^{-1}(t)$.

Вторая часть предложения доказывается аналогично.

Использование согласованных существенных многочленов позволяет найти первые $\nu + 1$ лорановских коэффициентов $l_-(t)$, $r_-(t)$ в терминах существенных многочленов.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $R_1(t), \dots, R_{2p}(t)$, $L_1(t), \dots, L_{2p}(t)$ – любые согласованные факторизационные существенные многочлены и полиномиальные факторизационные множители $l_+(t)$, $r_+(t)$ строятся в соответствии с теоремой 2.2 по формулам (15).

Тогда для соответствующих множителей $l_-(t)$, $r_-(t)$ имеем

$$l_-(t) = \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{O}(t^{-\nu-1}), \quad r_-(t) = -\mathcal{R}_2(t) + \mathcal{O}(t^{-\nu-1}), \quad t \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия согласования (8) и теоремы 2.2 имеем

$$I_p - \alpha_1^-(t)\mathcal{L}_1(t) = \alpha_2^-(t)\mathcal{L}_2(t) = t^{-\nu-1}\alpha_2^-(t)r_-^{-1}(t)a(t).$$

Это означает, что $I_p - \alpha_1^-(t)\mathcal{L}_1(t) = \mathcal{O}(t^{-\nu-1})$, $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, из предложения 2.1 следует, что $I_p - \alpha_1^-(t)l_-(t) = \mathcal{O}(t^{-\nu-1})$. Тогда $\alpha_1^-(t)(l_-(t) - \mathcal{L}_1(t)) = \mathcal{O}(t^{-\nu-1})$. Кроме того, в предложении 2.1, в частности, показано, что $\alpha_1^-(\infty) = l_-^{-1}(\infty)$. Следовательно, матрица-функция $\alpha_1^-(t)$ обратима, а обратная к ней аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки. Поэтому $l_-(t) - \mathcal{L}_1(t) = \mathcal{O}(t^{-\nu-1})$.

Так же может быть доказана и вторая часть теоремы.

Знание первых $\nu + 1$ лорановских коэффициентов матриц-функций $l_-(t)$, $r_-(t)$ может быть использовано для аппроксимации этих матриц-функций в D_0^- . В работе [13] в аналогичной ситуации были применены диагональные аппроксимации Паде элементов матриц. Это позволило, несмотря на неустойчивость задачи, получить ее приближенное решение с хорошей точностью.

§ 3. Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций

Пусть непрерывная и обратимая на контуре Γ матрица-функция $a(t)$ мероморфно продолжается в D^- . Мы говорим, что точка $z_0 \in D^-$ – полюс кратности κ матрицы-функции $a(t)$, если хотя бы один элемент $a(t)$ имеет в этой точке полюс кратности κ и ни один из элементов не имеет в ней полюс большей кратности. Ясно, что у $a(t)$ в D^- может быть лишь конечное число полюсов.

Пусть t_{ij} – конечные различные полюсы $a(t)$ кратностей $\kappa_{ij} > 0$ в областях D_j^- , $j = 0, \dots, n$, $i = 1, \dots, m_j$, а бесконечно удаленная точка является полюсом $a(t)$ кратности $\kappa_\infty \geq 0$. Обозначим $N_0 = \sum_{i=1}^{m_0} \kappa_{i0} + \kappa_\infty$, $N_j = \sum_{i=1}^{m_j} \kappa_{ij}$ – число полюсов (с учетом их кратностей) $a(t)$ в области D_j^- , $j = 0, \dots, n$, $N = \sum_{j=0}^n N_j$ – общее число полюсов $a(t)$ в D^- . Введем многочлены $\omega_j = \prod_{i=1}^{m_j} (t - t_{ij})^{\kappa_{ij}}$, $j = 1, \dots, n$, и $\omega_0 = t^{-N_0} \prod_{i=1}^{m_0} (t - t_{i0})^{\kappa_{i0}}$. На контуре Γ определим кусочно рациональную функцию $\omega(t) = \omega_j(t)$, $t \in \Gamma_j$, $j = 0, \dots, n$.

Тогда матрица-функция $\bar{a}(t) = \omega(t)a(t)$ непрерывна и обратима на контуре Γ и аналитически продолжается с контура Γ_j в область D_j^- , $j = 0, \dots, n$. Обозначим $\varkappa = \text{ind}_\Gamma \det \bar{a}(t) = \varkappa - Np$, где $\varkappa = \text{ind}_\Gamma \det a(t)$.

Построим факторизацию Винера–Хопфа относительно контура Γ скалярной кусочно рациональной функции $\omega(t)$. Индекс этой функции относительно Γ есть $\text{ind}_\Gamma \omega(t) = -N$. Определим многочлен $\omega_+(t) = t^{N_0} \prod_{j=0}^n \omega_j(t)$ и кусочно рациональную функцию $\omega_-(t) = t^N \omega(t) / \omega_+(t)$. Легко видеть, что $\omega_+(t) \neq 0$ в замкнутой области $D^+ \cup \Gamma$ и $\omega_-(t)$ – аналитическая в D^- , непрерывная на $D^- \cup \Gamma$ функция, отличная там от нуля. Таким образом, $\omega(t) = \omega_+(t)t^{-N}\omega_-(t)$ – факторизация Винера–Хопфа $\omega(t)$.

Если $\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_p, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p$ – соответственно правые и левые частные индексы $\bar{a}(t)$, а $\bar{l}_\pm(t), \bar{r}_\pm(t)$ – факторизационные множители этой матрицы-функции,

то очевидно, что индексы и факторизационные множители $a(t)$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} \rho_j &= \bar{\rho}_j + N, \quad \lambda_j = \bar{\lambda}_j + N, \quad j = 1, \dots, p, \\ l_{\pm}(t) &= \frac{1}{\omega_{\pm}(t)} \bar{l}_{\pm}(t), \quad r_{\pm}(t) = \frac{1}{\omega_{\pm}(t)} \bar{r}_{\pm}(t). \end{aligned}$$

Для получения факторизации $a(t)$ далее осталось применить теорему 2.2 (ограничимся случаем $\nu = 0$).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $a(t)$ – матрица-функция, непрерывная и обратимая на контуре Γ и мероморфно продолжающаяся в D_- . Составим из моментов $a^{-1}(t)/\omega(t)$ относительно контура Γ последовательность $c_0^{-2\mathfrak{X}}$, где $\mathfrak{X} = \text{ind}_{\Gamma} \det a(t) - Np$ и N – число полюсов $a(t)$ в D^- .

Тогда эта последовательность регулярна и обладает факторизационными существенными многочленами.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$ – ее индексы, а $R_1(t), \dots, R_{2p}(t), L_1(t), \dots, L_{2p}(t)$ – любые факторизационные существенные многочлены.

Тогда правые $\rho_1, \dots, \rho_p$ и левые $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ частные индексы и рациональные факторизационные множители $l_+(t), r_+(t)$ кусочно мероморфной матрицы-функции $a(t)$ находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= N - \mu_j, \quad \rho_j = N + \mu_{p+j} + 2\mathfrak{X}, \quad j = 1, \dots, p, \\ l_+(t) &= \frac{1}{\omega_+(t)} \mathcal{R}_1(t), \quad r_+(t) = \frac{t^{N+1}}{\omega_+(t)} d_r^{-1}(t) \mathcal{L}_2(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\mathcal{R}_1(t) = (R_1(t) \ \dots \ R_p(t)), \quad \mathcal{L}_2(t) = \begin{pmatrix} L_{p+1}(t) \\ \vdots \\ L_{2p}(t) \end{pmatrix}$$

– матрицы, составленные из существенных многочленов.

Как и для кусочно аналитических матриц-функций, в условиях точных вычислений мы можем восстановить и множители $l_-(t), r_-(t)$.

В качестве следствия получим критерий существования левой канонической факторизации кусочно мероморфных матриц-функций.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Кусочно мероморфная матрица-функция $a(t)$ допускает левую каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $\text{ind}_{\Gamma} \det a(t) = 0$,
- 2) $\text{rank } T_N = (N + 1)p$.

Если эти условия выполнены, то левая каноническая факторизация строится по формулам

$$l_+(t) = \frac{1}{\omega_+(t)} (R_1(t) \ \dots \ R_p(t)), \quad l_-(t) = l_+^{-1}(t) a(t).$$

Здесь $R_1(t), \dots, R_p(t)$ – столбцовые многочлены, являющиеся производящими многочленами для произвольного базиса $R_1, \dots, R_p$ p -мерного пространства $\ker_R T_{N+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, то $\text{ind}_\Gamma \det a(t) = 0$ и индексы $\mu_1, \dots, \mu_p$ последовательности c_0^{2Np} совпадают с N . Следовательно, по определению индекса μ_1 ядро $\ker_R T_{\mu_1}$ тривиально и матрица T_{μ_1} имеет полный ранг, т.е. $\text{rank } T_N = (N+1)p$.

Наоборот, если выполнены условия 1), 2), то $\ker_R T_N = \{0\}$ и поэтому $\mu_1 \geq N$. Из формулы для частных индексов λ_j получаем $\lambda_j \leq 0$ для $j = 1, \dots, p$. В силу условия 1) это возможно только при $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Докажем формулу для множителя $l_+(t)$ левой канонической факторизации. Проверим, что $\dim \ker_R T_{N+1} = p$. Это условие равносильно неравенству $\mu_{p+1} > \mu_p$. Оценим $\mu_{p+1} = \rho_1 - N - 2\bar{\kappa} = (2p-1)N + \rho_1$. Из формулы для ρ_1 следует, что $\rho_1 \geq \kappa - (N-1)p = -(N-1)p$. Поэтому $\mu_{p+1} \geq Np > N = \mu_p$.

Равенство $\dim \ker_R T_{N+1} = p$ означает, что производящие многочлены векторов произвольного базиса $\ker_R T_{N+1}$ совпадают с первыми p правыми существенными многочленами. Кроме того, при $\mu_p < \mu_{p+1}$ любой набор существенных многочленов $R_1(t), \dots, R_p(t)$ является факторизационным. Осталось применить формулу (18). Следствие доказано.

Аналогично можно получить эффективный критерий существования правой канонической факторизации для кусочно мероморфных матриц-функций.

Предложенный в работе алгоритм нетрудно реализовать программно. Если матричные моменты c_j имеют элементы из поля $\mathbb{Q}$, то факторизацию можно построить точно с помощью любой системы компьютерной математики. Приведем пример такого построения с использованием системы "Maple".

ПРИМЕР. Возьмем $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где Γ_0 – окружность $|z-2| = 3$, а Γ_1 – окружность $|z-2| = 1$. Пусть

$$a(t) = \begin{cases} a_0(t), & t \in \Gamma_0, \\ a_1(t), & t \in \Gamma_1, \end{cases}$$

где

$$a_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{t-1}{t-6} & \frac{t^2+t-2}{t^2(t-6)} \\ 1-t & -\frac{34+t}{t^2} \end{pmatrix}, \quad a_1(t) = \begin{pmatrix} 2t - \frac{4}{t} & t-2 \\ -\frac{32+t^2}{t} & -\frac{36(t-2)}{t^2} \end{pmatrix}.$$

Рациональная матрица-функция $a_0(t)$ мероморфно продолжается в область D_0^- , где имеет простые полюсы в точках $t = 6$, $t = \infty$; $N_0 = 2$, $\omega_0 = (t-6)/t^2$, $\det a_0(t) = (t+6)(t-1)/t^2$, $\kappa_0 = -1$.

Рациональная матрица-функция $a_1(t)$ аналитически продолжается в область D_1^- ; $N_1 = 0$, $\omega_1 = 1$, $\det a_1(t) = (t-2)^2(t+2)(t-6)(t+6)(t-1)/t^3$, $\kappa_1 = -2$.

Таким образом,

$$N = 2, \quad \kappa = -3, \quad \bar{\kappa} = -7, \quad \omega(t) = \begin{cases} \frac{t-6}{t^2}, & t \in \Gamma_0, \\ 1, & t \in \Gamma_1. \end{cases}$$

Факторизация Винера–Хопфа $\omega(t)$ имеет следующий вид:

$$\omega(t) = \omega_+(t)t^{-2}\omega_-(t),$$

где

$$\omega_+(t) = t - 6, \quad \omega_-(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Gamma_0, \\ \frac{t^2}{t-6}, & t \in \Gamma_1. \end{cases}$$

Для построения факторизации $a(t)$ используем последовательность c_0^{14} , составленную из моментов

$$c_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} t^{-j-1} \frac{a_0^{-1}(t)}{t-6} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} t^{-j-1} a_1^{-1}(t) dt, \quad j = 0, \dots, 14.$$

Вычисления с использованием “Maple” дают следующие результаты (ввиду громоздкости приведем их частично).

Числа $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$, $\mu_3 = 10$, $\mu_4 = 11$ – индексы данной последовательности. Матрица правых существенных многочленов имеет вид:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -(t-2)^2 & \frac{19136}{589} - 36t - \frac{492}{589}t^2 - t^3 & \dots \\ (t-6)(t-2)^2 & \frac{771888}{589} - \frac{255872}{589}t + t^4 & \dots \end{pmatrix}.$$

Согласование существенных многочленов приводит к следующей матрице левых существенных многочленов:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \frac{1}{t} - \frac{111}{16t^2} - \frac{21}{8t^3} + \frac{12591}{68t^4} - \frac{9099}{34t^5} & \frac{1}{t^3} + \frac{380}{17t^4} - \frac{828}{17t^5} \\ -\frac{17}{16t^2} + \frac{9}{2t^3} - \frac{27}{4t^4} & -\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t^4} \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись формулами (18) из теоремы 3.1, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \rho_1 = -2, \quad \rho_2 = -1; \\ l_+(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{(t-2)^2}{t-6} & -\frac{589t^3 + 492t^2 + 21204t - 19136}{589(t-6)} \\ (t-2)^2 & t^3 + 6t^2 + 36t - \frac{128648}{589} \end{pmatrix}, \\ r_+ &= \begin{pmatrix} \frac{272t^4 - 1887t^3 - 714t^2 + 50364t - 72792}{272(t-6)} & \frac{(17t + 414)(t-2)}{17(t-6)} \\ -\frac{17t^2 - 72t + 108}{16(t-6)} & -\frac{t-2}{t-6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Видно, что эти матрицы-функции аналитичны в D_+ . Кроме того, в этой области $\det l_+(t) = -(589/3042)(t+6)(t-2)^2$ и $\det r_+(t) = -(t+6)(t-2)^2$ отличны от нуля.

Определим $l_-(t) = d_l^{-1}(t)l_+^{-1}(t)a(t)$ и $r_-(t) = a(t)r_+^{-1}(t)d_r^{-1}(t)$ (явные выражения для этих матриц-функций мы не приводим ввиду их громоздкости). Нетрудно убедиться, что $l_-(t)$, $r_-(t)$ аналитичны и обратимы в D_- . Таким образом, факторизации $a(t)$ построены.

Список литературы

- [1] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения*, Наука, М., 1971; англ. пер.: I. C. Gohberg, I. A. Fel'dman, *Convolution equations and projection methods for their solution*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
- [2] Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений*, 2-е изд., Наука, М., 1970; англ. пер. 1-го изд.: N. P. Vekua, *Systems of singular integral equations*, Noordhoff, Groningen, 1967.
- [3] Н. И. Мусхелешвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, 3-е изд., Наука, М., 1968; англ. пер. 2-го изд.: N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1967.
- [4] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, “Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II”, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:3 (1979), 13–22; англ. пер.: V. E. Zakharov, A. B. Shabat, “Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II”, *Funct. Anal. Appl.*, **13**:3 (1979), 166–174.
- [5] Ю. Лайтерер, “Голоморфные векторные расслоения и принцип Ока–Грауэрта”, *Комплексный анализ – многие переменные – 4*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **10**, ВИНТИ, М., 1986, 75–121; англ. пер.: J. Leiterer, “Holomorphic vector bundles and the Oka–Grauert principle”, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **10** (1990), 63–103.
- [6] Л. А. Толоконников, В. Б. Пеньков, *Метод граничных представлений в двумерных задачах механики*, Изд-во ТВАИУ, Тула, 1997.
- [7] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142; англ. пер.: S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russian Math. Surveys*, **57**:1 (2002), 43–141.
- [8] К. М. Расулов, “Об одном методе решения векторной задачи Римана”, *Докл. АН Беларуси*, **38**:2 (1994), 23–26.
- [9] К. М. Расулов, *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения*, Изд-во СГПУ, Смоленск, 1998.
- [10] I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, “Factorization indices for matrix polynomials”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1978), 275–277.
- [11] V. M. Adukov, “On Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions”, *Integral Equations Operator Theory*, **14**:6 (1991), 767–774.
- [12] В. М. Адуков, “Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций”, *Алгебра и анализ*, **4**:1 (1992), 54–74; англ. пер.: V. M. Adukov, “Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix-valued functions”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:1 (1993), 51–69.
- [13] В. М. Адуков, “О точном и приближенном решении задачи факторизация Винера–Хопфа для мероморфных матриц-функций”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем., физ., хим.*, **10**:7 (2008), 3–12.
- [14] I. Gohberg, L. Lerer, L. Rodman, “Wiener–Hopf factorization of piecewise matrix polynomials”, *Linear Algebra Appl.*, **52–53** (1983), 315–350.
- [15] V. M. Adukov, “Generalized inversion of block Toeplitz matrices”, *Linear Algebra Appl.*, **274**:1–3 (1998), 85–124.

В. М. Адуков (V. M. Adukov)

Южно-Уральский государственный университет,
г. Челябинск

E-mail: avm@susu.ac.ru

Поступила в редакцию

13.05.2008