Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, Восстановление операторов Штурма–Лиувилля по спектрам на графе с циклом, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 9, 147–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:44:10

УДК 517.984

В. А. Юрко

Восстановление операторов Штурма–Лиувилля по спектрам на графе с циклом

Исследуется обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе с циклом и с обобщенными условиями склейки во внутренней вершине. Доказаны теоремы единственности восстановления операторов по системе спектров и получено конструктивное решение для этого класса обратных задач.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: обратные задачи, задачи с циклами.

§ 1. Введение

1.1. В статье исследуются обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на графе с циклом и с обобщенными условиями склейки во внутренней вершине. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Основные результаты по обратным спектральным задачам на интервале представлены в монографиях [1]–[9]. Дифференциальные операторы на графах (пространственных сетях, деревьях) часто возникают в естествознании и технике (см. [10]–[12]). Большинство работ в этом направлении посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций операторов на графе. Обратные спектральные задачи в силу их нелинейности являются более трудными, и в настоящее время есть только несколько работ по этой тематике. В частности, обратные спектральные задачи восстановления коэффициентов дифференциальных операторов (потенциалов) на произвольного вида деревьях (т.е. на графах без циклов) по системе спектров, по функциям Вейля и по спектральным данным исследовались в [13]–[17] и других работах. Однако нет аналогичных общих результатов в теории обратных коэффициентных задач для графов с циклами.

В настоящей работе получено решение обратных спектральных задач восстановления потенциалов операторов Штурма–Лиувилля на графе с циклом по системе спектров. Рассматриваются обобщенные условия склейки во внутренней вершине и вводится понятие регулярности склейки. Исследуются свойства спектров, характеристических функций и функций Вейля краевых задач на

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00003) и Национального научного совета Тайваня (грант № 07-01-92000-ННС-а).

графе. Доказаны теоремы единственности решения обратных задач по системе спектров и получено конструктивное решение этого класса обратных задач.

Отметим, что наличие цикла вносит качественные изменения в задачу, связанные со спецификой поведения решений на графе. При решении обратной задачи на графе с циклом важную роль играют полученные явные формулы для характеристических функций, структура которых позволяет указать свойства спектральных характеристик и дает возможность получить алгоритм решения обратной задачи. Отметим также, что результаты и методы теории обратных спектральных задач могут быть полезны и при исследовании обратных задач для уравнений с частными производными (см. [4]). По поводу обратных задач для уравнений с частными производными см. монографии [18]–[23] и литературу в них.

1.2. Рассмотрим граф T в $\mathbb{R}^m$ с вершинами $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и ребрами $\mathcal{E} = \{e_0, \dots, e_r\}$, где $v_1, \dots, v_r$ – граничные вершины, v_0 – внутренняя вершина, $e_j = [v_j, v_0]$, $j = \overline{1, r}$, $e_0 \cap e_1 \cap \dots \cap e_r = \{v_0\}$ и e_0 – цикл. Пусть T_j , $j = \overline{0, r}$, – длина ребра e_j . Каждое ребро $e_j \in \mathcal{E}$ параметризуется параметром $x_j \in [0, T_j]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: при $j = \overline{1, r}$ вершина v_j соответствует $x_j = 0$, а вершина v_0 соответствует $x_j = T_j$; при $j = 0$ оба конца интервала $x_0 = +0$ и $x_0 = T_0 - 0$ соответствуют v_0 .

Функция Y на T имеет вид $Y = \{y_j\}_{j=\overline{0, r}}$, где функция $y_j(x_j)$, $x_j \in [0, T_j]$, определена на ребре e_j . Пусть $q = \{q_j\}_{j=\overline{0, r}}$ – интегрируемая вещественнозначная функция на T ; q называется потенциалом. Пусть $h = [h_j]_{j=\overline{0, r}}$ – вещественный вектор. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T :

$$-y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad j = \overline{0, r}, \quad (1)$$

где λ – спектральный параметр, а функции y_j , y_j' , $j = \overline{0, r}$, абсолютно непрерывны на $[0, T_j]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине v_0 :

$$y_0(0) = \alpha_j y_j(T_j), \quad j = \overline{0, r}, \quad y_0'(0) - h_0 y_0(0) = \sum_{j=0}^r \beta_j y_j'(T_j), \quad (2)$$

где α_j , β_j – вещественные числа и $\alpha_j \beta_j \neq 0$. Обозначим

$$z_r := (\alpha_0 + \beta_0) \prod_{j=1}^r \alpha_j + \alpha_0 \sum_{i=1}^r \beta_i \prod_{j=1, j \neq i}^r \alpha_j. \quad (3)$$

Отметим, что числа z_r могут быть также вычислены по рекуррентной формуле

$$z_0 = \alpha_0 + \beta_0, \quad z_{k+1} = \alpha_{k+1} z_k + \beta_{k+1} \prod_{j=1}^k \alpha_j.$$

Предположим, что

$$z_r \neq 0. \quad (4)$$

Условие (4) называется условием регулярности склейки. Дифференциальные операторы, которые не удовлетворяют этому условию, имеют качественно отличные свойства при постановке и исследовании обратной задачи и в этой работе не рассматриваются; они требуют отдельного исследования. Отметим, что если $\alpha_j = \beta_j = 1$, $h_0 = 0$, то условия (2) называются стандартными условиями склейки (см. [10], [14]). Для стандартной склейки $z_r = r + 2$, и условие (4), очевидно, выполняется.

1.3. Рассмотрим краевую задачу B_0 на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями в граничных вершинах $v_1, \dots, v_r$

$$U_j(Y) = 0, \quad j = \overline{1, r}, \quad (5)$$

где $U_j(Y) := y'_j(0) - h_j y_j(0)$. Кроме того, рассмотрим краевые задачи B_k , $k = \overline{1, r}$, на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями

$$y_k(0) = 0, \quad U_j(Y) = 0, \quad j = \overline{1, r} \setminus k.$$

Обозначим через $\Lambda_k := \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 0}$ собственные значения (с учетом кратностей) задач B_k , $k = \overline{0, r}$. В отличие от задач на деревьях (см. [14]) здесь задание спектров Λ_k , $k = \overline{0, r}$, не определяет однозначно потенциал, и мы нуждаемся в дополнительной информации. Пусть $\Lambda_{-1} := \{\lambda_{-1,n}\}_{n \geq 0}$ – собственные значения краевой задачи B_{-1} для уравнения (1) с краевыми условиями (5) и с условиями склейки вида (2), но с коэффициентом α_{-1} вместо α_0 . Рассмотрим следующую обратную задачу.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 1. По заданным спектрам Λ_k , $k = \overline{-1, r}$, построить потенциал q на T и вектор h .

Отметим, что коэффициенты α_j , β_j из условий склейки (2) предполагаются известными априори и фиксированными. Пусть $\Lambda_{r+1} := \{\lambda_{r+1,n}\}_{n \geq 0}$ – собственные значения краевой задачи B_{r+1} для уравнения (1) с краевыми условиями (5) и с условиями склейки вида (2), но с коэффициентом β_{-1} вместо β_0 .

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 2. По заданным спектрам Λ_k , $k = \overline{0, r+1}$, построить потенциал q на T и вектор h .

Сформулируем теоремы единственности решения обратных задач 1 и 2. Для этого наряду с парой (q, h) рассмотрим пару $(\tilde{q}, \tilde{h})$. Везде в дальнейшем, если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к (q, h) , через $\tilde{\alpha}$ будем обозначать аналогичный объект, относящийся к $(\tilde{q}, \tilde{h})$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{-1, r}$, то $q = \tilde{q}$, $h = \tilde{h}$. Таким образом, задание спектров Λ_k , $k = \overline{-1, r}$, однозначно определяет потенциал q на T и вектор h .

ТЕОРЕМА 2. Если $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r+1}$, то $q = \tilde{q}$, $h = \tilde{h}$. Таким образом, задание спектров Λ_k , $k = \overline{0, r+1}$, однозначно определяет потенциал q на T и вектор h .

Эти теоремы будут доказаны в § 3. Кроме того, мы дадим конструктивное решение обратных задач 1 и 2. В § 2 исследуются свойства спектров, характеристических функций и функций Вейля краевых задач на графе.

§ 2. Свойства спектра

2.1. Пусть $\varphi_j(x_j, \lambda)$, $S_j(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0, r}$, – решения уравнения (1) на ребре e_j при начальных условиях

$$S_j(0, \lambda) = 0, \quad S'_j(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_j(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'_j(0, \lambda) = h_j.$$

При каждом фиксированном $x_j \in [0, T_j]$ функции $\varphi_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda)$, $j = \overline{0, r}$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по λ порядка $1/2$. Функции $\varphi_j(x_j, \lambda)$, $S_j(x_j, \lambda)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) на ребре e_j , причем

$$\langle \varphi_j(x_j, \lambda), S_j(x_j, \lambda) \rangle \equiv 1,$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$ – вронскиан функций y и z .

Фиксируем $k = \overline{1, r}$. Пусть $\Phi_k = \{\Phi_{kj}\}_{j=\overline{0, r}}$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее (2) и краевым условиям

$$U_j(\Phi_k) = \delta_{jk}, \quad j = \overline{1, r}, \quad (6)$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Положим $M_k(\lambda) := \Phi_{kk}(0, \lambda)$, $k = \overline{1, r}$. Функция $M_k(\lambda)$ называется *функцией Вейля* относительно граничной вершины v_k . Ясно, что

$$\Phi_{kk}(x_k, \lambda) = S_k(x_k, \lambda) + M_k(\lambda)\varphi_k(x_k, \lambda), \quad x_k \in [0, T_k], \quad k = \overline{1, r}, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\langle \varphi_k(x_k, \lambda), \Phi_{kk}(x_k, \lambda) \rangle \equiv 1.$$

Используя фундаментальную систему решений $\varphi_j(x_j, \lambda)$, $S_j(x_j, \lambda)$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{kj}(x_j, \lambda) &= M_{kj}^1(\lambda)S_j(x_j, \lambda) + M_{kj}^0(\lambda)\varphi_j(x_j, \lambda), \\ x_j &\in [0, T_j], \quad j = \overline{0, r}, \quad k = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (8)$$

В частности, $M_{kk}^1(\lambda) = 1$, $M_{kk}^0(\lambda) = M_k(\lambda)$. Подставляя (8) в (2) и (6), получаем линейную алгебраическую систему s_k относительно $M_{kj}^\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{0, r}$. Определитель $\Delta_0(\lambda)$ системы s_k не зависит от k и имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = d(\lambda) \prod_{j=1}^r \alpha_j \varphi_j(T_j, \lambda) + \alpha_0 S_0(T_0, \lambda) D(\lambda), \quad (9)$$

где

$$d(\lambda) = \alpha_0 \varphi_0(T_0, \lambda) + \beta_0 S'_0(T_0, \lambda) - (\alpha_0 \beta_0 + 1), \quad (10)$$

$$D(\lambda) = \sum_{i=1}^r \beta_i \varphi'_i(T_i, \lambda) \prod_{j=1, j \neq i}^r \alpha_j \varphi_j(T_j, \lambda). \quad (11)$$

Функция $\Delta_0(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B_0 . Решая алгебраическую систему s_k , получаем по формулам Крамера $M_{kj}^s(\lambda) = \Delta_{kj}^s(\lambda)/\Delta_0(\lambda)$, $s = 0, 1$, $j = \overline{0, r}$, где определитель $\Delta_{kj}^s(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой столбца, соответствующего $M_{kj}^s(\lambda)$, на столбец свободных членов. В частности,

$$M_k(\lambda) = -\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}, \quad k = \overline{1, r}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_k(\lambda) &= d(\lambda)\alpha_k S_k(T_k, \lambda) \prod_{j=1, j \neq k}^r \alpha_j \varphi_j(T_j, \lambda) + \alpha_0 S_0(T_0, \lambda) D_k(\lambda), \\ D_k(\lambda) &= \beta_k S'_k(T_k, \lambda) \prod_{j=1, j \neq k}^r \alpha_j \varphi_j(T_j, \lambda) \\ &\quad + \alpha_k S_k(T_k, \lambda) \sum_{i=1, i \neq k}^r \beta_i \varphi'_i(T_i, \lambda) \prod_{j=1, j \neq i, k}^r \alpha_j \varphi_j(T_j, \lambda). \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что $\Delta_k(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой $\varphi_k^{(\nu)}(T_k, \lambda)$, $\nu = 0, 1$, на $S_k^{(\nu)}(T_k, \lambda)$. Функция $\Delta_k(\lambda)$ является целой λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B_k . Функции $\Delta_k(\lambda)$ называются характеристическими функциями задач B_k . Из (9)–(11) вытекает, что характеристические функции краевых задач B_{-1} и B_{r+1} имеют вид

$$\Delta_{-1}(\lambda) = d_{-1}(\lambda) \prod_{j=1}^r \alpha_j \varphi_j(T_j, \lambda) + \alpha_{-1} S_0(T_0, \lambda) D(\lambda), \quad (14)$$

$$\Delta_{r+1}(\lambda) = d_1(\lambda) \prod_{j=1}^r \alpha_j \varphi_j(T_j, \lambda) + \alpha_0 S_0(T_0, \lambda) D(\lambda), \quad (15)$$

где $D(\lambda)$ определено в (11), и

$$d_{-1}(\lambda) = \alpha_{-1} \varphi_0(T_0, \lambda) + \beta_0 S'_0(T_0, \lambda) - (\alpha_{-1} \beta_0 + 1), \quad (16)$$

$$d_1(\lambda) = \alpha_0 \varphi_0(T_0, \lambda) + \beta_{-1} S'_0(T_0, \lambda) - (\alpha_0 \beta_{-1} + 1). \quad (17)$$

2.2. В этом пункте мы изучаем асимптотическое поведение решений уравнения (1). Пусть $\lambda = \rho^2$, $\text{Im } \rho \geq 0$. Обозначим

$$\Lambda := \{\rho : \text{Im } \rho \geq 0\}, \quad \Lambda^\delta := \{\rho : \arg \rho \in [\delta, \pi - \delta]\}.$$

Известно (см. [24]), что при каждом фиксированном $j = \overline{0, r}$ на ребре e_j существует фундаментальная система решений уравнения (1) $\{e_{j1}(x_j, \rho), e_{j2}(x_j, \rho)\}$, $x_j \in [0, T_j]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geq \rho^*$, со следующими свойствами:

- 1) функции $e_{js}^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $\nu = 0, 1$, непрерывны при $x_j \in [0, T_j]$, $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \geq \rho^*$;
- 2) для каждого $x_j \in [0, T_j]$ функции $e_{js}^{(\nu)}(x_j, \rho)$, $\nu = 0, 1$, являются аналитическими при $\text{Im } \rho > 0$, $|\rho| > \rho^*$;

3) равномерно по $x_j \in [0, T_j]$ имеют место асимптотические формулы

$$e_{j1}^{(\nu)}(x_j, \rho) = (i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1], \quad e_{j2}^{(\nu)}(x_j, \rho) = (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1], \quad (18)$$

$$\rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$.

Используя фундаментальную систему решений $\{e_{j1}(x_j, \rho), e_{j2}(x_j, \rho)\}$, получаем

$$\Phi_{kj}(x_j, \lambda) = A_{kj}^1(\rho)e_{j1}(x_j, \rho) + A_{kj}^0(\rho)e_{j2}(x_j, \rho), \quad x_j \in [0, T_j]. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (2) и (6), получаем линейную алгебраическую систему s_k^0 относительно $A_{kj}^\nu(\lambda)$, $\nu = 0, 1$, $j = \overline{0, r}$. Определитель $\delta_0(\rho)$ системы s_k^0 не зависит от k и имеет вид

$$\delta_0(\rho) = 2^{r+1}\Delta_0(\lambda), \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| > \rho^*.$$

Кроме того,

$$\delta_0(\rho) = z_r \exp\left(-i\rho \sum_{j=0}^r T_j\right)[1], \quad \rho \in \Lambda^\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

где z_r определены в (3). Решая алгебраическую систему s_k^0 по формулам Крамера и используя (18), получаем

$$A_{kk}^1(\rho) = \frac{[1]}{i\rho}, \quad A_{kk}^0(\rho) = \frac{a_k}{i\rho} \exp(2i\rho T_k)[1], \quad \rho \in \Lambda^\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty,$$

где a_k – константа. Вместе с (18) и (19) это дает для каждого фиксированного $x_k \in [0, T_k]$

$$\Phi_{kk}^{(\nu)}(x_k, \lambda) = (i\rho)^{\nu-1} \exp(i\rho x_k)[1], \quad \rho \in \Lambda^\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (20)$$

В частности, $M_k(\lambda) = (i\rho)^{-1}[1]$, $\rho \in \Lambda^\delta$, $|\rho| \rightarrow \infty$. Кроме того, равномерно по $x_j \in [0, T_j]$ имеем

$$S_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2i\rho} ((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] - (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]), \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$\varphi_j^{(\nu)}(x_j, \lambda) = \frac{1}{2} ((i\rho)^\nu \exp(i\rho x_j)[1] + (-i\rho)^\nu \exp(-i\rho x_j)[1]), \quad \rho \in \Lambda, \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (22)$$

2.3. В этом пункте мы изучаем свойства спектров и характеристических функций задач B_k . Пусть $\lambda_{kn}^0 = (\rho_{nk}^0)^2$, $k = \overline{-1, r+1}$, – собственные значения краевых задач B_k с нулевым потенциалом $q = 0$ и $h = 0$. Пусть $\Delta_k^0(\lambda)$ – соответствующие характеристические функции. Согласно (9), (13)–(15) имеем

$$\Delta_0^0(\lambda) = ((\alpha_0 + \beta_0) \cos \rho T_0 - (\alpha_0 \beta_0 + 1)) \prod_{j=1}^r \alpha_j \cos \rho T_j$$

$$- \alpha_0 \sin \rho T_0 \sum_{i=1}^r \beta_i \sin \rho T_i \prod_{j=1, j \neq i}^r \alpha_j \cos \rho T_j, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{-1}^0(\lambda) = & ((\alpha_{-1} + \beta_0) \cos \rho T_0 - (\alpha_{-1} \beta_0 + 1)) \prod_{j=1}^r \alpha_j \cos \rho T_j \\ & - \alpha_{-1} \sin \rho T_0 \sum_{i=1}^r \beta_i \sin \rho T_i \prod_{j=1, j \neq i}^r \alpha_j \cos \rho T_j, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{r+1}^0(\lambda) = & ((\alpha_0 + \beta_{-1}) \cos \rho T_0 - (\alpha_0 \beta_{-1} + 1)) \prod_{j=1}^r \alpha_j \cos \rho T_j \\ & - \alpha_0 \sin \rho T_0 \sum_{i=1}^r \beta_i \sin \rho T_i \prod_{j=1, j \neq i}^r \alpha_j \cos \rho T_j, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta_k^0(\lambda) = & ((\alpha_0 + \beta_0) \cos \rho T_0 - (\alpha_0 \beta_0 + 1)) \alpha_k \frac{\sin \rho T_k}{\rho} \prod_{j=1, j \neq k}^r \alpha_j \cos \rho T_j \\ & + \alpha_0 \frac{\sin \rho T_0}{\rho} \left(\beta_k \cos \rho T_k \prod_{j=1, j \neq k}^r \alpha_j \cos \rho T_j \right. \\ & \left. - \alpha_k \sin \rho T_k \sum_{i=1, i \neq k}^r \beta_i \sin \rho T_i \prod_{j=1, j \neq i, k}^r \alpha_j \cos \rho T_j \right) \end{aligned} \quad (26)$$

при $k = \overline{1, r}$. Обозначим $\tau := \operatorname{Im} \rho$, $\varepsilon_k = -1$ для $k = \overline{1, r}$ и $\varepsilon_k = 0$ для $k = -1, 0, r+1$. Из (9), (13)–(15), (21) и (22) следует, что при $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\Delta_k(\lambda) = \Delta_k^0(\lambda) + O\left(|\rho|^{\varepsilon_k - 1} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right)\right), \quad k = \overline{-1, r+1}. \quad (27)$$

Используя (23)–(27), известным методом (см., например, [25]) можно получить следующие свойства характеристических функций $\Delta_k(\lambda)$ и собственных значений Λ_k краевых задач B_k , $k = \overline{-1, r+1}$.

1) При $\rho \in \Lambda$, $|\rho| \rightarrow \infty$

$$\Delta_k(\lambda) = O\left(|\rho|^{\varepsilon_k} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right)\right), \quad k = \overline{-1, r+1}.$$

2) Существуют $h > 0$ и $C_h > 0$ такие, что

$$|\Delta_k(\lambda)| \geq C_h |\rho|^{\varepsilon_k} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right), \quad k = \overline{-1, r+1},$$

при $|\tau| \geq h$. Следовательно, собственные значения $\lambda_{kn} = \rho_{nk}^2$ лежат в полосе $|\operatorname{Im} \rho| < h$.

3) Число $N_{\xi k}$ нулей функции $\Delta_k(\lambda)$ в прямоугольнике $\Pi_{\xi} = \{\rho : |\operatorname{Im} \rho| \leq h, \operatorname{Re} \rho \in [\xi, \xi + 1]\}$ ограничено по ξ .

4) Если обозначить $G_{\delta, k} = \{\rho : |\rho - \rho_{kn}| \geq \delta \ \forall n \geq 0\}$, $\delta > 0$, то

$$|\Delta_k(\lambda)| \geq C_{\delta} |\rho|^{\varepsilon_k} \exp\left(|\tau| \sum_{j=0}^r T_j\right), \quad \rho \in G_{\delta, k}.$$

- 5) Существуют числа $r_N \rightarrow \infty$ такие, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ лежат в G_δ при всех N и k .
- 6) При $n \rightarrow \infty$

$$\rho_{nk} = \rho_{nk}^0 + O\left(\frac{1}{\rho_{nk}^0}\right).$$

2.4. В этом пункте исследуем восстановление характеристических функций по их нулям. Обозначим

$$\lambda_{kn}^{01} = \begin{cases} \lambda_{kn}^0 & \text{при } \lambda_{kn}^0 \neq 0, \\ 1 & \text{при } \lambda_{kn}^0 = 0. \end{cases} \quad (28)$$

По теореме Адамара (см. [26; с. 289])

$$\Delta_k^0(\lambda) = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn}^0 - \lambda}{\lambda_{kn}^{01}}, \quad (29)$$

где

$$A_k^0 = \frac{(-1)^{s_k}}{s_k!} \left(\frac{\partial^{s_k}}{\partial \lambda^{s_k}} \Delta_k^0(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (30)$$

и $s_k \geq 0$ – кратность нулевого собственного значения.

Покажем, что

$$\Delta_k(\lambda) = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda_{kn}^{01}}. \quad (31)$$

В самом деле, по теореме Адамара

$$\Delta_k(\lambda) = A_k \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} - \lambda}{\lambda_{kn}^1}, \quad (32)$$

где $A_k \neq 0$ – константа, $\lambda_{kn}^1 = \lambda_{kn}$, если $\lambda_{kn} \neq 0$, и $\lambda_{kn}^1 = 1$, если $\lambda_{kn} = 0$. Из (29) и (32) вытекает, что

$$\frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_k^0(\lambda)} = \frac{A_k}{A_k^0} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn}^{01}}{\lambda_{kn}^1} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{kn} - \lambda_{kn}^0}{\lambda_{kn}^0 - \lambda} \right).$$

Используя свойства характеристических функций и собственных значений задач B_k , получаем для больших отрицательных λ

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{\Delta_k(\lambda)}{\Delta_k^0(\lambda)} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda_{kn} - \lambda_{kn}^0}{\lambda_{kn}^0 - \lambda} \right) = 1;$$

следовательно,

$$A_k = A_k^0 \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{kn}^1}{\lambda_{kn}^{01}}.$$

Подставляя это соотношение в (32), приходим к (31).

Таким образом, задание спектра $\Lambda_k = \{\lambda_{kn}\}_{n \geq 0}$ однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta_k(\lambda)$ по формуле (31), где A_k^0 и $\{\lambda_{kn}^{01}\}$ определены согласно (28), (30), (23)–(26).

§ 3. Решение обратной задачи

В этом параграфе мы приводим алгоритмы решения обратных задач 1 и 2 и доказываем единственность решения. Сначала рассмотрим вспомогательные обратные задачи.

3.1. Зафиксируем $k = \overline{1, r}$ и рассмотрим следующую вспомогательную обратную задачу на ребре e_k , которую назовем $\text{IP}(k)$.

$\text{IP}(k)$. По заданной $M_k(\lambda)$ построить $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$ и h_k .

В обратной задаче $\text{IP}(k)$ мы строим потенциал только на ребре e_k . Однако функция Вейля $M_k(\lambda)$ несет глобальную информацию со всего графа. Другими словами, $\text{IP}(k)$ не является локальной обратной задачей, относящейся только к ребру e_k . Докажем теорему единственности решения задачи $\text{IP}(k)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $M_k(\lambda) = \widetilde{M}_k(\lambda)$, то $q_k(x_k) = \widetilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$ и $h_k = \widetilde{h}_k$. Таким образом, задание функции Вейля M_k однозначно определяет потенциал q_k на ребре e_k и число h_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$$P_{1s}^k(x_k, \lambda) = (-1)^{s-1} (\varphi_k(x_k, \lambda) \widetilde{\Phi}_{kk}^{(2-s)}(x_k, \lambda) - \widetilde{\varphi}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda) \Phi_{kk}(x_k, \lambda)), \quad s = 1, 2. \quad (33)$$

Так как $\langle \varphi_k(x_k, \lambda), \Phi_{kk}(x_k, \lambda) \rangle \equiv 1$, то имеем

$$\varphi_k(x_k, \lambda) = P_{11}^k(x_k, \lambda) \widetilde{\varphi}_k(x_k, \lambda) + P_{12}^k(x_k, \lambda) \widetilde{\varphi}_k'(x_k, \lambda). \quad (34)$$

Из (20), (22) и (33) вытекает, что

$$P_{1s}^k(x_k, \lambda) = \delta_{1s} + O(\rho^{-1}), \quad \rho \in \Lambda^\delta, \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad x_k \in (0, T_k]. \quad (35)$$

Согласно (7) и (33)

$$\begin{aligned} P_{1s}^k(x_k, \lambda) = & (-1)^{s-1} ((\varphi_k(x_k, \lambda) \widetilde{S}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda) - \widetilde{\varphi}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda) S_k(x_k, \lambda)) \\ & + (M_k(\lambda) - \widetilde{M}_k(\lambda)) \varphi_k(x_k, \lambda) \widetilde{\varphi}_k^{(2-s)}(x_k, \lambda)). \end{aligned}$$

Так как $M_k(\lambda) = \widetilde{M}_k(\lambda)$, то при каждом фиксированном x_k функции $P_{1s}^k(x_k, \lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/2$. Вместе с (35) это дает $P_{11}^k(x_k, \lambda) \equiv 1$, $P_{12}^k(x_k, \lambda) \equiv 0$. Подставляя эти соотношения в (34), получаем $\varphi_k(x_k, \lambda) \equiv \widetilde{\varphi}_k(x_k, \lambda)$ для всех x_k и λ ; таким образом, $q_k(x_k) = \widetilde{q}_k(x_k)$ п.в. на $[0, T_k]$ и $h_k = \widetilde{h}_k$.

Используя метод спектральных отображений [8] для оператора Штурма–Лиувилля на ребре e_k , можно построить конструктивную процедуру решения обратной задачи $\text{IP}(k)$. Здесь мы дадим краткие пояснения (подробнее см. [8]). Возьмем $\widetilde{q} = 0$, $\widetilde{h} = 0$. Тогда $\widetilde{\varphi}_k(x_k, \lambda) = \cos \rho x_k$. Положим $\lambda' = \min_{l \geq 0} (\lambda_{0l}, \lambda_{0l})$ и возьмем фиксированное $\delta > 0$. В λ -плоскости рассмотрим контур γ (с обходом против часовой стрелки) вида

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- \cup \gamma',$$

где

$$\gamma^\pm = \{\lambda : \pm \operatorname{Im} \lambda = \delta; \operatorname{Re} \lambda \geq \lambda'\},$$

$$\gamma' = \left\{ \lambda : \lambda - \lambda' = \delta \exp(i\alpha), \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right\}.$$

При каждом фиксированном $x_k \in [0, T_k]$ функция $\varphi_k(x_k, \lambda)$ является единственным решением линейного интегрального уравнения

$$\varphi_k(x_k, \lambda) = \tilde{\varphi}_k(x_k, \lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{D}_k(x_k, \lambda, \mu) \varphi_k(x_k, \mu) d\mu, \quad (36)$$

где

$$\tilde{D}_k(x, \lambda, \mu) = \int_0^x \tilde{\varphi}_k(t, \lambda) \tilde{\varphi}_k(t, \mu) \widehat{M}_k(\mu) dt, \quad \widehat{M}_k(\mu) := M_k(\mu) - \widetilde{M}_k(\mu).$$

Потенциал q_k на ребре e_k может быть построен из решения интегрального уравнения (36) по формуле

$$q_k(x_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\varphi_k(x_k, \lambda) \tilde{\varphi}_k(x_k, \lambda))' \widehat{M}_k(\lambda) d\lambda$$

или по формуле

$$q_k(x_k) = \lambda + \frac{\varphi_k''(x_k, \lambda)}{\varphi_k(x_k, \lambda)}.$$

Кроме того, $h_k = \varphi_k'(0, \lambda)$. Также возможно построить потенциал по дискретным спектральным данным. Для этого нужно вычислить контурный интеграл в (36) по теореме о вычетах и привести интегральное уравнение (36) к уравнению в пространстве последовательностей (подробнее см. [8]).

3.2. Перейдем теперь к решению обратной задачи 1. Сначала дадим доказательство теоремы 1. Предположим, что $\Lambda_k = \widetilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{-1, r}$. Тогда согласно результатам п. 2.4 имеем

$$\Delta_k(\lambda) \equiv \widetilde{\Delta}_k(\lambda), \quad k = \overline{-1, r}.$$

В силу (12) это, в частности, дает

$$M_k(\lambda) \equiv \widetilde{M}_k(\lambda), \quad k = \overline{1, r}.$$

Применяя теорему 3 при каждом фиксированном $k = \overline{1, r}$, получаем

$$q_k(x_k) = \widetilde{q}_k(x_k) \text{ п.в. на } [0, T_k], \quad h_k = \widetilde{h}_k, \quad k = \overline{1, r}; \quad (37)$$

следовательно,

$$\varphi_k(x_k, \lambda) \equiv \tilde{\varphi}_k(x_k, \lambda), \quad S_k(x_k, \lambda) \equiv \widetilde{S}_k(x_k, \lambda), \quad k = \overline{1, r}, \quad x_k \in [0, T_k]. \quad (38)$$

Обозначим

$$\mu_0(\lambda) := \varphi_0(T_0, \lambda), \quad \mu_1(\lambda) := S_0(T_0, \lambda).$$

Учитывая (9), (13), (14) и (38), выводим

$$\mu_1(\lambda) \equiv \tilde{\mu}_1(\lambda), \quad (39)$$

$$d(\lambda) \equiv \tilde{d}(\lambda), \quad d_{-1}(\lambda) \equiv \tilde{d}_{-1}(\lambda). \quad (40)$$

Из (10), (16) и (40) вытекает, что

$$\mu_0(\lambda) \equiv \tilde{\mu}_0(\lambda). \quad (41)$$

Нули $\{\xi_{nj}\}_{n \geq 0}$, $j = 0, 1$, функций $\mu_j(\lambda)$ совпадают со спектрами краевых задач L_j для уравнения

$$-y_0'' + q_0(x_0)y_0 = \lambda y_0, \quad x_0 \in [0, T_0],$$

с краевыми условиями

$$y_0(0) = y_0(T_0) = 0 \quad \text{для } L_1, \quad y_0'(0) - h_0 y_0(0) = y_0(T_0) = 0 \quad \text{для } L_0.$$

По теореме Борга (см. [1]–[4]) задание двух спектров $\{\xi_{nj}\}_{n \geq 0}$, $j = 0, 1$, однозначно определяет q_0 и h_0 . Это означает, что (39) и (41) дают

$$q_0(x_0) = \tilde{q}_0(x_0) \quad \text{п.в. на } [0, T_0], \quad h_0 = \tilde{h}_0. \quad (42)$$

Теорема 1 доказана.

Решение обратной задачи 1 может быть построено по следующему алгоритму.

АЛГОРИТМ 1. Заданы Λ_k , $k = \overline{-1, r}$.

- 1) Построим $\Delta_k(\lambda)$, $k = \overline{-1, r}$, по формуле (31), где A_k^0 и $\{\lambda_{kn}^{01}\}$ определены в (28), (30), (23)–(26).
- 2) Находим $M_k(\lambda)$, $k = \overline{1, r}$, по формуле (12).
- 3) При каждом $k = \overline{1, r}$ решаем задачу $\text{IP}(k)$ и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$, на ребре e_k и h_k .
- 4) При каждом $k = \overline{1, r}$ строим $\varphi_k(x_k, \lambda)$, $S_k(x_k, \lambda)$, $x_k \in [0, T_k]$.
- 5) Находим $d(\lambda)$, $d_{-1}(\lambda)$ и $\mu_1(\lambda)$, используя (9), (13) и (14).
- 6) Вычисляем $\mu_0(\lambda)$ по формуле $\mu_0(\lambda) = (\alpha_0 - \alpha_{-1})^{-1}(d(\lambda) - d_{-1}(\lambda)) + \beta_0$.
- 7) Строим $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, T_0]$, и h_0 по $\mu_1(\lambda)$, $\mu_0(\lambda)$, решая классическую обратную задачу по двум спектрам на интервале $(0, T_0)$ (см. [1]–[4]).

3.3. Обратная задача 2 исследуется аналогичным образом. Дадим доказательство теоремы 2. Предположим, что $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$, $k = \overline{0, r+1}$. Повторяя рассуждения из п. 3.2, получаем

$$\Delta_k(\lambda) \equiv \tilde{\Delta}_k(\lambda), \quad k = \overline{1, r+1}, \quad M_k(\lambda) \equiv \tilde{M}_k(\lambda), \quad k = \overline{1, r};$$

следовательно, имеют место (37) и (38). Учитывая (9), (13), (15) и (38), выводим

$$\begin{aligned}\mu_1(\lambda) &\equiv \tilde{\mu}_1(\lambda), \\ d(\lambda) &\equiv \tilde{d}(\lambda), \quad d_1(\lambda) \equiv \tilde{d}_1(\lambda).\end{aligned}\quad (43)$$

Обозначим $\mu_2(\lambda) := S'_0(T_0, \lambda)$. Из (10), (17) и (43) вытекает, что

$$\mu_2(\lambda) \equiv \tilde{\mu}_2(\lambda). \quad (44)$$

Нули $\{\xi_{n2}\}_{n \geq 0}$ функции $\mu_2(\lambda)$ совпадают со спектром краевой задачи L_2 вида

$$-y''_0 + q_0(x_0)y_0 = \lambda y_0, \quad y_0(0) = y'_0(T_0) = 0.$$

По теореме Борга задание двух спектров $\{\xi_{nj}\}_{n \geq 0}$, $j = 1, 2$, однозначно определяет q_0 и h_0 . Это означает, что (39) и (44) дают (42).

Теорема 2 доказана.

Решение обратной задачи 2 может быть построено по следующему алгоритму.

АЛГОРИТМ 2. Заданы Λ_k , $k = \overline{0, r+1}$.

- 1) Построим $\Delta_k(\lambda)$, $k = \overline{0, r+1}$, по формуле (31), где A_k^0 и $\{\lambda_{kn}^{01}\}$ определены в (28), (30), (23)–(26).
- 2) Находим $M_k(\lambda)$, $k = \overline{1, r}$, по формуле (12).
- 3) При каждом $k = \overline{1, r}$ решаем задачу $IP(k)$ и находим $q_k(x_k)$, $x_k \in [0, T_k]$, на ребре e_k и h_k .
- 4) При каждом $k = \overline{1, r}$ строим $\varphi_k(x_k, \lambda)$, $S_k(x_k, \lambda)$, $x_k \in [0, T_k]$.
- 5) Находим $d(\lambda)$, $d_1(\lambda)$ и $\mu_1(\lambda)$, используя (9), (13) и (15).
- 6) Вычисляем $\mu_2(\lambda)$ по формуле $\mu_2(\lambda) = (\beta_0 - \beta_{-1})^{-1}(d(\lambda) - d_1(\lambda)) + \alpha_0$.
- 7) Строим $q_0(x_0)$, $x_0 \in [0, T_0]$, и h_0 по $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$, решая классическую обратную задачу по двум спектрам на интервале $(0, T_0)$ (см. [1]–[4]).

Список литературы

- [1] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984; англ. пер.: B. M. Levitan, *Inverse Sturm–Liouville problems*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [3] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse spectral theory*, Pure Appl. Math., **130**, Academic Press, Boston, MA, 1987.
- [4] G. Freiling, V. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville problems and their applications*, Nova Science Publ., Huntington, NY, 2001.
- [5] Kh. Chadani, D. Colton, L. Päiväranta, W. Rundell, *An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems*, SIAM Monogr. Math. Model. Comput., **2**, SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

- [6] R. Beals, P. Deift, C. Tomei, *Direct and inverse scattering on the line*, Math. Surveys Monogr., **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [7] V. A. Yurko, *Inverse spectral problems for differential operators and their applications*, Anal. Methods Spec. Funct., **2**, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.
- [8] V. Yurko, *Method of spectral mappings in the inverse problem theory*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2002.
- [9] В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, М., 2007.
- [10] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шапоров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2004.
- [11] Yu. V. Pokornyi, A. V. Borovskikh, “Differential equations on networks (geometric graphs)”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **119**:6 (2004), 691–718.
- [12] Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, “Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети”, *УМН*, **59**:3 (2004), 115–150; англ. пер.: Yu. V. Pokornyi, V. L. Pryadiev, “Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network”, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 515–552.
- [13] M. I. Belishev, “Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method”, *Inverse Problems*, **20**:3 (2004), 647–672.
- [14] V. Yurko, “Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs”, *Inverse Problems*, **21**:3 (2005), 1075–1086.
- [15] B. M. Brown, R. Weikard, “A Borg–Levinson theorem for trees”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **461**:2062 (2005), 3231–3243.
- [16] G. Freiling, V. Yurko, “Inverse problems for Sturm–Liouville operators on noncompact trees”, *Results Math.*, **50**:3–4 (2007), 195–212.
- [17] В. А. Юрко, “Обратные задачи для дифференциальных операторов произвольных порядков на деревьях”, *Матем. заметки*, **83**:1 (2008), 139–152; англ. пер.: V. A. Yurko, “Inverse problems for differential operators of any order on trees”, *Math. Notes*, **83**:1–2 (2008), 125–137.
- [18] А. Л. Бухгейм, *Введение в теорию обратных задач*, Наука, Новосибирск, 1988; англ. пер.: A. L. Bukhgeim, *Introduction to the theory of inverse problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2000.
- [19] A. M. Denisov, *Elements of the theory of inverse problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 1999.
- [20] S. I. Kabanikhin, A. D. Satybaev, M. A. Shishlenin, *Direct methods of solving multi-dimensional inverse hyperbolic problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2005.
- [21] M. M. Lavrentiev, A. V. Avdeev, M. M. Lavrentiev, jr., V. I. Priimenko, *Inverse problems of mathematical physics*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2003.
- [22] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **231**, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [23] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984; англ. пер.: V. G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, VNU Science Press, Utrecht, 1987.
- [24] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., Наука, М., 1969; нем. пер. 1-го изд.: M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
- [25] Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: R. Bellman, K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York–London, 1963.

- [26] J. B. Conway, *Functions of one complex variable. II*, Grad. Texts in Math., **159**, Springer-Verlag, New York, 1995.

В. А. Юрко (V. A. Yurko)

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступила в редакцию

15.05.2008 и 17.04.2009