Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Блохин, Д. Л. Ткачёв, Устойчивость сверхзвукового обтекания клина со слабой ударной волной, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 2, 3–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:15:29

УДК 517.956.3

А. М. Блохин, Д. Л. Ткачёв

Устойчивость сверхзвукового обтекания клина со слабой ударной волной

Как известно, задача об обтекании бесконечного плоского клина (угол при вершине которого достаточно мал) стационарным сверхзвуковым потоком невязкого нетеплопроводного газа теоретически имеет два решения: решение с сильной ударной волной (скорость за фронтом ударной волны меньше скорости звука) и решение со слабой ударной волной (скорость за фронтом ударной волны, вообще говоря, больше скорости звука). В настоящей работе для этой задачи в случае линейного приближения доказано, что решение со слабой ударной волной асимптотически устойчиво по Ляпунову. Более того, показано, что при финитных начальных данных решение линейной смешанной задачи за конечное время выходит на нулевое решение. В случае линейного приближения эти факты завершают обоснование известной гипотезы Куранта–Фридрихса о том, что решение с сильной ударной волной неустойчиво, а решение со слабой ударной волной, наоборот, асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: слабая ударная волна, асимптотическая устойчивость (по Ляпунову).

Введение

Известно, что классическая задача об обтекании бесконечного плоского клина сверхзвуковым стационарным потоком невязкого нетеплопроводного газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, теоретически имеет два решения [1]–[3]. Одно из них соответствует случаю слабой ударной волны, когда течение за ней, вообще говоря, сверхзвуковое, т.е. $u_0^2 + v_0^2 > c_0^2$, а второе соответствует случаю сильной ударной волны, когда течение за ней дозвуковое, т.е. $u_0^2 + v_0^2 < c_0^2$ (u_0, v_0 – компоненты вектора скорости ударной волны, c_0 – скорость звука). На рис. 1 изображен один из двух возможных случаев расположения ударной волны – прямая $y = x \operatorname{tg} \theta_s$, где U_∞ – скорость стационарного потока газа перед ударной волной, θ – угловая координата, σ – угол плоского клина, θ_s – угловая координата фронта ударной волны.

Парадоксально, но на практике, если жестко не управлять процессом [4]–[6], то в физических и вычислительных экспериментах реализуется решение со слабой ударной волной. До настоящего времени, несмотря на многочисленные

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 06-08-00384, 07-01-00585-а) и в рамках Аналитической ведомственной целевой программы Федерального агентства по образованию и Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/2591; 2009–2010 гг.).

Рис. 1

исследования, проведенные, в основном, на качественном уровне (см., например, [7]–[10]), это явление не было объяснено математически строго. Следует отметить, что до тех пор, пока не предложен корректный анализ этой задачи, совершенно не ясно, какое из двух возможных решений будет получено в каждом конкретном случае; более того, как отмечается в работе [10], в ходе проведения вычислений возможно появление гибридных “решений”.

Р. Курант и К. О. Фридрихс [1] предложили при выборе решения использовать их дополнительные свойства: устойчивость по Ляпунову (асимптотическую устойчивость) или неустойчивость по Ляпунову. Ведь на самом деле в процессе вычислительного эксперимента (обычно для этого используется метод установления) или физического эксперимента (при правильном его проведении “плохие” решения отбрасываются) эти свойства играют существенную роль. Курант и Фридрихс предположили, что решение, отвечающее сильной ударной волне, неустойчиво по Ляпунову, а решение со слабой ударной волной, наоборот, асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$ по отношению к произвольным малым возмущениям этих стационарных режимов. Таким образом, фактически речь идет об устойчивости или неустойчивости решений соответствующей линейной задачи (при различных значениях параметров).

В случае, когда малые возмущения зависят от одной “пространственной” переменной (угловой координаты), гипотеза Куранта–Фридрихса получила полное подтверждение. Однако, при произвольных значениях числа M_∞ набегающего потока ($M_\infty > 1$) и угловой координаты ввиду сложности коэффициентов полученной линейной задачи это удалось сделать только на основе проведенных расчетов [11]–[13].

В существенно более сложном общем двумерном случае сейчас достигнут определенный прогресс в ситуации, когда основное решение соответствует сильной ударной волне. Во-первых, в работе [14] доказана корректность линейной смешанной задачи по крайней мере для случая малых углов при вершине клина. Во-вторых, в работах [15]–[17] для финитных начальных данных и при выполнении дополнительного интегрального условия в вершине клина найдено

точное обобщенное решение задачи (угол при вершине клина вновь достаточно мал).

Впервые удалось выяснить, как особенность границы в данном случае влияет на характер формирования решения. Оказывается, что даже при финитных начальных данных в вершине клина формируется волна, которая со временем разрушает решение. Ее возникновение можно предотвратить, накладывая дополнительное интегральное условие на начальные данные, которое носит явный теоретический характер. На практике оно позволяет дискретным образом приблизиться к выбранному стационарному решению. Заметим, что при получении сформулированных выше результатов использована методика, разработанная в статье [18] и описанная в монографии [19].

Исследование случая слабой ударной волны требует существенно иного подхода. Дело в том, что после применения преобразования Лапласа по времени возникает гиперболическая задача и это требует изменения методики исследования. Отметим, что в работе [20] при условии, что

$$M_1(\theta) = \frac{u_0 \cos \theta + v_0 \sin \theta}{c_0} > 1, \quad \sigma \leq \theta \leq \theta_s,$$

где σ – угол при вершине клина, θ_s – угловая координата присоединенной слабой ударной волны, при довольно жестких предположениях относительно класса обобщенного решения методом интегралов энергии получена оценка, гарантирующая экспоненциальное по времени убывание решения линейной смешанной задачи к стационарному решению со слабой ударной волной. В работе [21], идея и результаты которой существенно используются в нашей статье, при дополнительном предположении относительно класса решения установлен факт отсутствия специальных частных решений, экспоненциально растущих по времени.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В § 1 даны формулировки исходной линейной задачи для системы уравнений акустики и эквивалентной ей линейной смешанной задачи для давления. Сформулированы два основных утверждения – теоремы 1, 2. В § 2 доказана теорема 1, причем в процессе ее доказательства использованы представления граничных значений решения на ударной волне и на клине, а также значения нормальной производной на ударной волне. В § 3 доказана теорема 2. При этом указанные выше граничные значения независимо определены в § 3 в ходе доказательства этой теоремы.

§ 1. Постановка основной и вспомогательной задач. Формулировка основных результатов

Линейная задача об обтекании сверхзвуковым стационарным потоком газа бесконечного плоского клина формулируется следующим образом [20]: в области $t > 0$, $x > 0$, $y > x \operatorname{tg} \sigma$ требуется найти решение системы уравнений акустики

$$AU_t + BU_x + C_\sigma U_y = 0, \quad (1.1)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям на ударной волне ($x = 0$) и на поверхности клина ($y = x \operatorname{tg} \sigma$):

$$u_1 + du_3 = 0, \quad u_3 + u_4 = 0, \quad u_2 = \frac{\lambda}{\mu} F_y, \quad F_t + F_y \operatorname{tg} \sigma = \mu u_3, \quad (1.2)$$

$$u_2 = u_1 \operatorname{tg} \sigma, \quad (1.3)$$

а также начальным данным при $t = 0$:

$$U(0, x, y) = U_0(x, y), \quad F(0, y) = F_0(y). \quad (1.4)$$

Здесь $U(t, x, y) = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, u_1, u_2, u_3, u_4 – малые возмущения компонент скорости, давления и энтропии соответственно, $x = F(t, y)$ – малое смещение фронта разрыва, причем

$$F(t, 0) = F_0(0) = 0, \quad (1.5)$$

компоненты вектора начальных данных $U_0(x, y)$ – финитные функции, т.е.

$$\operatorname{supp} u_{0i} \subset R_+^2 = \{(x, y) \mid x, y > 0\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Матрицы A, B, C, C_σ таковы:

$$A = \operatorname{diag}(M^2, M^2, 1, 1), \quad B = \begin{pmatrix} M^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_\sigma = C + \operatorname{tg} \sigma \cdot A;$$

$M = u_0/c_0$, $M < 1$ – число Маха за фронтом ударной волны (u_0, v_0 – компоненты вектора скорости стационарного решения, c_0 – скорость звука в покоящейся среде), а физические постоянные d, λ, μ подробно описаны в [20].

Если решение смешанной задачи (1.1)–(1.4) непрерывно вплоть до границы $x = 0$, $y = x \operatorname{tg} \sigma$, то из граничных условий (1.2), (1.3) с учетом (1.5) следует, что в точках ребра $t \geq 0$, $x = y = 0$ должно выполняться условие согласования

$$(\lambda + d \operatorname{tg}^2 \sigma) u_3(t, 0, 0) = 0, \quad t \geq 0,$$

т.е. если $D_1 = \lambda + d \operatorname{tg}^2 \sigma \neq 0$, то

$$U(t, 0, 0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Смешанная задача (1.1)–(1.4) сформулирована для случая, когда в качестве основного решения берется течение газа около клина с ударной волной, направленной вдоль оси Oy (рис. 2).

В работе рассматривается случай слабой ударной волны, т.е. когда выполнено соотношение

$$M_0 = \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{c_0^2}} = \frac{M}{\cos \sigma} > 1. \quad (1.7)$$

Рис. 2

Используя известные соотношения на косом скачке уплотнения [22], неравенство (1.7) можно переписать следующим образом:

$$\left(\operatorname{tg}^2 \delta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M_N^4 - \frac{3 - \gamma}{1 + \gamma} M_N^2 + \frac{2}{\gamma + 1} > 0. \quad (1.8)$$

Здесь $M_N = M_\infty \cos \delta$, $M_\infty = U_\infty / c_\infty$ – число Маха набегающего потока, $\gamma > 1$ – показатель адиабаты. В то же время с учетом выражения коэффициентов d , λ для политропного газа [20] условие $D_1 \neq 0$ примет вид

$$\left(\operatorname{tg}^2 \delta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) M_N^4 + \left(\operatorname{tg}^2 \delta - \frac{3 - \gamma}{1 + \gamma} \right) M_N^2 + \frac{2}{\gamma + 1} \neq 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, при $M_0 > 1$ в силу (1.8) условие $D_1 \neq 0$ для политропного газа выполняется автоматически.

Предположим, что решение смешанной задачи (1.1)–(1.4) не только непрерывно, но и имеет вторые производные, непрерывные вплоть до границы области. Используя перекрестное дифференцирование, задачу (1.1)–(1.4) при выполнении условия (1.6) можно свести к следующей смешанной задаче для компоненты u_3 : в области $t > 0$, $x > 0$, $y > x \operatorname{tg} \sigma$ нужно найти гладкое решение волнового уравнения

$$\{M^2 L_1^2 - L_2^2 - (\partial_y)^2\} u_3 = 0, \quad (1.10)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям на ударной волне ($x = 0$) и на поверхности клина ($y = x \operatorname{tg} \sigma$):

$$\left\{ m L_1^2 + n L_2^2 - \frac{\beta}{M^2} L_1 L_2 \right\} u_3 = 0, \quad (1.11)$$

$$\{ \cos \sigma \cdot \partial_y - \sin \sigma \cdot \partial_x \} u_3 = 0, \quad (1.12)$$

$$u_3(t, 0, 0) = 0, \quad (1.13)$$

а также начальным данным при $t = 0$:

$$u_3|_{t=0} = u_0(x, y), \quad (u_3)_t|_{t=0} = u_1(x, y) \quad (1.14)$$

(заметим, что значение производной $(u_3)_t|_{t=0}$ находится из третьего уравнения системы (1.1)).

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\beta} l_1, & l_1 &= \partial_t + \operatorname{tg} \sigma \cdot \partial_y, & L_2 &= \beta \partial_x - \frac{M^2}{\beta} l_1, \\ \beta^2 &= 1 - M^2, & n &= -\frac{\lambda}{\beta}, & m &= \beta d + \frac{\lambda M^2}{\beta}. \end{aligned}$$

Верно и обратное. Каждому гладкому решению u_3 задачи (1.10)–(1.14) можно однозначным образом сопоставить гладкое решение $U(t, x, y)$, $F(t, y)$ задачи (1.1)–(1.5), (1.6) (см. [20]). Таким образом, эти две задачи эквивалентны.

Будем считать, что на границе $x = 0$ для задачи (1.10)–(1.14) выполнено равномерное условие Лопатинского (см. [23]), т.е. $m > 0$, $n < 0$ (см. [20]), или справедливы неравенства

$$\lambda < 0, \quad d > -\frac{\lambda M^2}{\beta^2}. \quad (1.15)$$

На рис. 3 соответствующая область значений параметров λ , d заштрихована.

Рис. 3

Заметим, что на границе $y = x \operatorname{tg} \sigma$ также выполнено равномерное условие Лопатинского.

Сделаем удобное преобразование координат, полагая

$$x' = x, \quad y' = y - x \operatorname{tg} \sigma$$

и опуская в дальнейшем штрихи у новых переменных. Задача (1.10)–(1.14) теперь имеет следующий вид:

$$\left\{ M^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right\} u = 0, \quad t, x, y > 0, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + d \left(\frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{M^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right\} u = 0, \quad x = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \sin \sigma \cos \sigma \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \quad y = 0, \quad (1.18)$$

$$u(t, 0, 0) = 0, \quad (1.19)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x, y) \quad (1.20)$$

(индекс у неизвестной функции u_3 также опущен).

В силу установленной эквивалентности задач (1.10)–(1.14) и (1.16)–(1.20) основные результаты достаточно сформулировать для решения $u(t, x, y)$ задачи (1.16)–(1.20). Кроме существования у решения задачи (1.16)–(1.20) вторых непрерывных производных вплоть до границы потребуем дополнительно, чтобы выполнялось следующее свойство, характеризующее поведение решения при $t, x \rightarrow +\infty$: существуют параметры s_0 и p_0 такие, что функция $e^{-s_0 t} e^{-p_0 x} u(t, x, y)$ ограничена при $t, x \rightarrow +\infty$ для каждого фиксированного $y > 0$, т.е.

$$u(t, x, y) = O(e^{s_0 t + p_0 x}), \quad t, x \rightarrow +\infty, \quad y > 0 - \text{фиксировано}. \quad (1.21)$$

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. *Если начальные данные финитны, то классическое решение задачи (1.16)–(1.20), удовлетворяющее условию роста (1.21), существует, единственно и определяется по формуле (2.38).*

ТЕОРЕМА 2. *Краевое значение решения задачи (1.16)–(1.20), определяемое как $f(t, y) = u(t, x, y)|_{x=0}$, на ударной волне является результатом суперпозиции конечного числа цилиндрических волн, а именно, для него справедливо представление (3.22). Если точка y принадлежит некоторому компакту Y , лежащему на вещественной неотрицательной полуоси, то при $t \geq t_*$, где t_* зависит от $\text{supp } u_0, \text{supp } u_1$ и Y , выполняется тождество*

$$f(t, y) \equiv 0, \quad y \in Y.$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Применим к задаче (1.16)–(1.20) преобразование Лапласа по переменной t . Тогда получим следующую задачу с параметром s :

$$\begin{aligned} &\left\{ (M^2 - 1) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + 2 \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\cos^2 \sigma} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - 2M^2 s \frac{\partial}{\partial x} - s^2 M^2 \right\} \tilde{u} \\ &= M^2 s u_0 + M^2 u_1 + 2M^2 u_{0x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(D_1 + \frac{1}{M^2} \operatorname{tg}^2 \sigma \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \frac{1 - M^2}{M^2} \operatorname{tg} \sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \left(1 + 2d + \frac{1}{M^2} \right) \operatorname{tg} \sigma \cdot s \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - M^2}{M^2} s \frac{\partial}{\partial x} + s^2 (1 + d) \right\} \tilde{u} = 0, \quad x = 0; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} - \sin \sigma \cos \sigma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \tilde{u} = 0, \quad y = 0; \quad (2.3)$$

$$\tilde{u}(s, 0, 0) = 0, \quad (2.4)$$

где обозначено

$$\tilde{u}(s, x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(t, x, y) dt, \quad \operatorname{Re} s > s_0.$$

Задачу (2.1)–(2.4) можно упростить, переходя к каноническим переменным

$$x'' = 2 \left(y + x \frac{\operatorname{tg} \sigma}{1 - M^2} \right), \quad y'' = 2 \frac{\sqrt{M_0^2 - 1}}{1 - M^2} x$$

и вводя новую неизвестную функцию $v(x'', y'')$ с помощью формулы

$$\tilde{u} = \exp \left\{ \frac{M^2}{2(M_0^2 - 1)} \left(\sqrt{M_0^2 - 1} y'' - x'' \operatorname{tg} \sigma \right) s \right\} v(x'', y'').$$

В итоге для функции $v(x, y)$ (штрихи у новых переменных опущены) получаем следующую задачу:

$$v_{xx} - v_{yy} - \Omega^2 v = m(x, y), \quad x > 0, \quad 0 < y < B_0 x, \quad (2.5)$$

$$D_1 v_{xx} - D_2 v_{xy} + D_3 v_x + D_4 v_y + D_5 v = 0, \quad y = 0, \quad (2.6)$$

$$v_y + B_0 v_x = 0, \quad y = B_0 x, \quad (2.7)$$

$$v(0, 0) = 0, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{M\beta}{2\Delta} s, & \Delta &= M_0^2 - 1, & D_2 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{M^2} \operatorname{tg} \sigma, & D_3 &= -2 \frac{m\Omega}{M} \operatorname{tg} \sigma, \\ D_4 &= \frac{\beta\sqrt{\Delta}}{M^3} \Omega, & D_5 &= \left(d \frac{\beta^2}{M^2} + \lambda \frac{M^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{\beta^2} \right) \Omega^2, & B_0 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\operatorname{tg} \sigma} \quad (B_0 < 1), \end{aligned}$$

а функция $m(x, y)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} m(x, y) &= \frac{\beta^2 M^2}{4\Delta} \left(s u_0 + u_1 + 4 \left(\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2} u_{0x} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^2} u_{0y} \right) \right) \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{M^2}{2\Delta} \left(\sqrt{\Delta} y - x \operatorname{tg} \sigma \right) s \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При получении граничных условий (2.5), (2.6) использовались условия согласования и финитность начальных данных $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$.

Применяя метод Римана [24]–[26], найдем значение функции $v(x_0, y_0)$ в любой внутренней точке $M_0(x_0, y_0)$ угла $x > 0, 0 < y < B_0 x$ (рис. 4).

$$\begin{aligned} 2v(M_0) &= v(P) + v(Q) + \int_P^0 v[R_y + B_0 R_x] dx + \int_0^Q [R_y v - R v_y] dx \\ &\quad + \int_{\square O Q M_0 P} R(x, y) m(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В представлении (2.10) отрезки $M_0 P$ и $M_0 Q$ – части характеристик $y + x = y_0 + x_0$ и $y - x = y_0 - x_0$ соответственно, $R = J_0(i\Omega K_0)$ – функция Римана,

Рис. 4

$K_0 = \sqrt{(x_0 - x)^2 - (y_0 - y)^2}$, $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка [27], в записи интеграла по границе PO использовано граничное соотношение (2.7); направление обхода границы указано на рис. 4.

Заметим, что справедливо соотношение

$$R_y + B_0 R_x = i\Omega(y_0 - y - B_0(x_0 - x)) \frac{J'_0(i\Omega K_0)}{K_0}. \quad (2.11)$$

Продолжая функцию $m(x, y)$ тождественно нулем в область $x > 0$, $y > B_0 x$ и совмещая сначала точки M_0 и Q , а затем точки M_0 и P , получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} f(x_0) = g(x_0) + \int_0^{x_0} \left\{ \frac{i\Omega B_0 x_0}{1 + B_0} \frac{J'_0(i\Omega K)}{K} g(x) - J_0(i\Omega(x - x_0)) l(x) \right\} dx \\ + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Theta(x_0 - x) \Theta(x_0 - x - y) J_0\left(i\Omega \sqrt{(x_0 - x)^2 - y^2}\right) m(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} g(x_0) = f(Lx_0) + L \int_0^{x_0} \left\{ \frac{i\Omega B_0 x_0}{1 + B_0} \frac{J'_0(i\Omega \sqrt{L} K)}{\sqrt{L} K} f(Lx) - J_0(i\Omega \sqrt{L} K) l(Lx) \right\} dx \\ + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Theta(x_0 - x - y) \Theta\left(x_0 - \frac{1 + B_0}{1 - B_0}(x - y)\right) \\ \times J_0\left(i\Omega \sqrt{\left(\frac{x_0}{1 + B_0} - x\right)^2 - \left(\frac{B_0 x_0}{1 + B_0} - y\right)^2}\right) m(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В формулах (2.12), (2.13) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f(x_0) = v(x_0, 0), \quad g(x_0) = v\left(\frac{x_0}{1 + B_0}, \frac{B_0 x_0}{1 + B_0}\right), \\ l(x_0) = v_y(x_0, 0), \quad K = \sqrt{(x_0 - x)(x_0 - Lx)}, \quad L = \frac{1 - B_0}{1 + B_0}, \end{aligned}$$

а $\Theta(x_0)$ – функция Хевисайда. К выражениям (2.12), (2.13) добавим граничное условие при $y = 0$ (фактически условие (2.6)):

$$D_1 f''(x_0) - D_2 l'(x_0) + D_3 f'(x_0) + D_4 l(x_0) + D_5 f(x_0) = 0. \quad (2.14)$$

Для решения системы уравнений (2.12)–(2.14) используем преобразование Лапласа по переменной x_0 . Обозначим

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px_0} f(x_0) dx_0, \quad L(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px_0} l(x_0) dx_0, \\ G(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px_0} g(x_0) dx_0,$$

причем в силу ограничения (1.21) на рост функции $u(t, x, y)$ по переменной x выполнено условие $\operatorname{Re} p > p_0$. Применяя известные формулы [27]

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad L_{x \rightarrow p} \left\{ \frac{J_1(a\sqrt{x^2 - \tau^2})}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \Theta(x - \tau) \right\} = \frac{e^{-\tau p} - e^{-\tau\sqrt{p^2 + a^2}}}{a\tau}$$

($L_{x \rightarrow p}$ – символ преобразования Лапласа по переменной x ; a, τ – некоторые параметры), свойства преобразования Лапласа и теорему Бореля [25], систему (2.12)–(2.14) можно свести к следующей функциональной системе:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{q_0(p)} G(q(p)) - \frac{1}{q_0(p)} L(p) + \frac{1}{q_0(p)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-px - yq_0(p)} m(x, y, s) dx dy, \quad (2.15)$$

$$G(p) = \frac{I_1(p)}{\widehat{q}_0(p)} F\left(\frac{\widehat{q}(p)}{L}\right) - \frac{1}{\widehat{q}_0(p)} L\left(\frac{\widehat{q}(p)}{L}\right) \\ + \frac{1}{\widehat{q}_0(p)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x - B_0 y}{1 - B_0} p - \frac{B_0 x - y}{1 - B_0} \widehat{q}_0(p)\right\} m(x, y, s) dx dy, \quad (2.16)$$

$$D_2 r_0(p) L(p) = L_1(p) F(p) + L_2. \quad (2.17)$$

В формулах (2.15)–(2.17) приняты такие обозначения: $q_0(p) = \sqrt{p^2 - \Omega^2}$, причем $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \Omega = \frac{M\beta}{2\Delta} s_0$, а ветвь функции выбрана так, что $\operatorname{Re}(\sqrt{p^2 - \Omega^2}) > 0$;

$$F_1(p) = \frac{q_0(p) + B_0 p}{1 + B_0}, \quad q(p) = \frac{p + B_0 q_0(p)}{1 + B_0}, \quad \widehat{q}_0(p) = \sqrt{p^2 - L\Omega^2}, \\ I_1(p) = \frac{\widehat{q}_0(p) + B_0 p}{1 - B_0}, \quad \widehat{q}(p) = \frac{p + B_0 \widehat{q}_0(p)}{1 + B_0}, \quad r_0(p) = p - \kappa_0 \Omega, \\ r_1(p) = p - \frac{\Omega}{\kappa_0}, \quad \kappa_0 = \frac{\beta}{M \operatorname{tg} \sigma} \quad (\kappa_0 < 1), \quad L_1(p) = r_0^2 d \operatorname{tg}^2 \sigma + r_1^2 \lambda, \\ L_2 = D_2 l(0) - D_1 f'(0).$$

Заметим, что при получении последнего соотношения (2.17) использовано условие на ребре (2.8).

Предположим дополнительно, что решение $v(x, y)$ задачи (2.5)–(2.8) является достаточно гладкой вплоть до границы функцией. В этом случае в угловой точке выполняется соотношение

$$l(0) = -B_0 f'(0),$$

и тогда значение L_2 можно записать в виде

$$L_2 = -(D_2 B_0 + D_1) f'(0). \quad (2.18)$$

Будем считать в дальнейшем, что соотношение (2.18) определяет величину L_2 .

Преобразуем систему (2.15)–(2.17). Имеем

$$L(p) = \frac{L_1(p)}{D_2 r_0(p)} F(p) + \frac{L_2}{D_2 r_0(p)}, \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} G(p) = I_2(p) F\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right) - \frac{L_2}{D_2 \hat{q}_0(p) r_0\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right)} \\ + \frac{1}{\hat{q}_0(p)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x - B_0 y}{1 - B_0} p - \frac{B_0 x - y}{1 - B_0} \hat{q}_0(p)\right\} m(x, y, s) dx dy, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$F(p) = F_2(p) F\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right) + L_2 M_1(p) + H(p), \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \frac{D_2 r_0\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right) I_1(p) - L_1\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right)}{D_2 r_0\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right) \hat{q}_0(p)}, \\ F_2(p) &= \frac{D_2 r_0(p) F_1(p)}{D_2 r_0(p) q_0(p) + L_1(p)} I_2(q(p)), \\ M_1(p) &= -\frac{\hat{q}_0(q(p)) r_0\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right) + F_1(p) r_0(p)}{\hat{q}_0(q(p)) r_0\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right) (D_2 q_0(p) r_0(p) + L_1(p))}, \\ m_1(p, s) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-px - yq_0(p)} m(x, y, s) dx dy, \\ m_2(p, s) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x - B_0 y}{1 - B_0} q(p) - \frac{B_0 x - y}{1 - B_0} \hat{q}_0(q(p))\right\} m(x, y, s) dx dy, \\ H(p) &= \frac{D_2 r_0(p)}{D_2 r_0(p) q_0(p) + L_1(p)} m_1(p, s) + \frac{F_1(p)}{\hat{q}_0(q(p))} \frac{D_2 r_0(p)}{D_2 r_0(p) q_0(p) + L_1(p)} m_2(p, s). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Анализируя систему уравнений (2.19)–(2.22), заключаем, что основной момент ее решения – нахождение функции $F(p)$, т.е. решения уравнения (2.21). После этого легко определяются функции $G(p)$, $L(p)$, а затем с помощью обратного преобразования Лапласа – и граничные функции $f(x_0)$, $l(x_0)$, $g(x_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Далее будет показано, что основной сомножитель $\hat{L}(p) = D_2 r_0(p) q_0(p) + L_1(p)$, стоящий в знаменателях функций $F_2(p)$, $M_1(p)$ и $H(p)$, не обращается в нуль при $\operatorname{Re} p \geq \frac{M\beta}{2\Delta} s_0$, $s = s_0 + i s_2$, если на границе выполнено равномерное условие Лопатинского (1.15).

Возвращаясь к уравнению (2.21), можно выписать все его формальные решения в следующем рекуррентном виде:

$$\begin{aligned}
 F(p) = & \left\{ F_2(p) F_2 \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) F_2 \left(\frac{\widehat{q} \left(q \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) \right)}{L} \right) \dots \right\} F(\infty) \\
 & + \left\{ M_1(p) + F_2(p) M_1 \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) \right. \\
 & \quad \left. + F_2(p) F_2 \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) M_1 \left(\frac{\widehat{q} \left(q \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) \right)}{L} \right) + \dots \right\} L_2 \\
 & + \left\{ H(p) + F_2(p) H \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) \right. \\
 & \quad \left. + F_2(p) F_2 \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) H \left(\frac{\widehat{q} \left(q \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) \right)}{L} \right) + \dots \right\}. \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.21) можно записать и в другом виде, полученном из представления (2.23) путем следующей замены основной переменной p :

$$p = \frac{\Omega}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \quad (2.24)$$

При этом при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \Omega$ несложно преобразовать основные величины $q_0(p)$, $q(p)$, $\widehat{q}_0(q(p))$, $F_1(p)$, $\widehat{q}(q(p))/L$, $I_1(q(p))$, $F_2(p)$, участвующие в записи формального решения (2.23), а именно

$$q_0(p) = \frac{\Omega}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad q(p) = \frac{\Omega}{2} \left(\zeta + L \frac{1}{\zeta} \right), \quad \widehat{q}_0(q(p)) = \frac{\Omega}{2} \left(\zeta - L \frac{1}{\zeta} \right), \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
 F_1(p) &= \frac{\Omega}{2} \left(\zeta - L \frac{1}{\zeta} \right), \quad \frac{\widehat{q}(q(p))}{L} = \frac{\Omega}{2} \left(\zeta' + \frac{1}{\zeta'} \right), \quad \zeta' = \frac{\zeta}{L}, \\
 I_1(q(p)) &= \frac{\Omega}{2} \left(\frac{\zeta}{L} - \frac{L}{\zeta} \right), \quad F_2(p) = L \frac{T(\zeta) R_2(\zeta')}{T(\zeta') R_1(\zeta)}.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 T(\zeta) &= \zeta^2 + 1 - 2\kappa_0 \zeta, \quad T_0(\zeta) = \zeta^2 + 1 - \frac{2\zeta}{\kappa_0}, \\
 R_1(\zeta) &= D_2 T(\zeta)(\zeta^2 - 1) + T^2(\zeta) d \operatorname{tg}^2 \sigma + \lambda T_0^2(\zeta), \\
 R_2(\zeta) &= D_2 T(\zeta)(\zeta^2 - 1) - T^2(\zeta) d \operatorname{tg}^2 \sigma - \lambda T_0^2(\zeta).
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

С учетом формул (2.25) и (2.26) представление (2.23) можно переписать в таком виде:

$$\begin{aligned}
 F(\zeta) = & \left\{ L \frac{T(\zeta) R_2(\frac{\zeta}{L})}{T(\frac{\zeta}{L}) R_1(\zeta)} L \frac{T(\frac{\zeta}{L}) R_2(\frac{\zeta}{L^2})}{T(\frac{\zeta}{L^2}) R_1(\frac{\zeta}{L})} L \frac{T(\frac{\zeta}{L^2}) R_2(\frac{\zeta}{L^3})}{T(\frac{\zeta}{L^3}) R_1(\frac{\zeta}{L^2})} \dots \right\} F(\infty) \\
 & + \left\{ K(\zeta) + L \frac{T(\zeta) R_2(\frac{\zeta}{L})}{T(\frac{\zeta}{L}) R_1(\zeta)} K \left(\frac{\zeta}{L} \right) \right. \\
 & \quad \left. + L \frac{T(\zeta) R_2(\frac{\zeta}{L})}{T(\frac{\zeta}{L}) R_1(\zeta)} L \frac{T(\frac{\zeta}{L}) R_2(\frac{\zeta}{L^2})}{T(\frac{\zeta}{L^2}) R_1(\frac{\zeta}{L})} K \left(\frac{\zeta}{L^2} \right) + \dots \right\} L_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ H(\zeta) + L \frac{T(\zeta)R_2(\frac{\zeta}{L})}{T(\frac{\zeta}{L})R_1(\zeta)} H\left(\frac{\zeta}{L}\right) \right. \\
& \quad \left. + L \frac{T(\zeta)R_2(\frac{\zeta}{L})}{T(\frac{\zeta}{L})R_1(\zeta)} L \frac{T(\frac{\zeta}{L})R_2(\frac{\zeta}{L^2})}{T(\frac{\zeta}{L^2})R_1(\frac{\zeta}{L})} H\left(\frac{\zeta}{L^2}\right) + \dots \right\}, \quad (2.27)
\end{aligned}$$

где

$$K(\zeta) = -\frac{4}{\Omega^2} \frac{\zeta^2 \left(\frac{2}{1+B_0} \left(\frac{\zeta}{L} \right)^2 - 4\kappa_0 \left(\frac{\zeta}{L} \right) + \frac{2}{1-B_0} \right)}{T\left(\frac{\zeta}{L}\right)R_1(\zeta)}. \quad (2.28)$$

В соотношении (2.27) первое слагаемое понимается в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
& \left\{ L \frac{T(\zeta)R_2(\frac{\zeta}{L})}{T(\frac{\zeta}{L})R_1(\zeta)} L \frac{T(\frac{\zeta}{L})R_2(\frac{\zeta}{L^2})}{T(\frac{\zeta}{L^2})R_1(\frac{\zeta}{L})} L \frac{T(\frac{\zeta}{L^2})R_2(\frac{\zeta}{L^3})}{T(\frac{\zeta}{L^3})R_1(\frac{\zeta}{L^2})} \dots \right\} F(\infty) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=0}^n \left\{ L \frac{T(\frac{\zeta}{L^k})R_2(\frac{\zeta}{L^{k+1}})}{T(\frac{\zeta}{L^{k+1}})R_1(\frac{\zeta}{L^k})} \right\} \right) F(\infty) = P(\zeta). \quad (2.29)
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Как известно, для режима, соответствующего слабой ударной волне, выполнено неравенство $D_1 > 0$ (см. [13]; для политропного газа это следует, например, из неравенств (1.8) и (1.9)).

В работе [21] с помощью простых рассуждений доказано, что функция $P(\zeta)$ тождественно равна нулю. Основной момент этого доказательства – использование неравенства

$$\left| \frac{D_2 - D_1}{D_2 + D_1} \right| < 1, \quad (2.30)$$

которое справедливо в силу замечания 2.2. Таким образом, первое слагаемое в формуле (2.23) обращается в нуль. Перейдем к изучению второго слагаемого.

Отметим прежде всего, что в силу неравенства (2.29) второе и третье слагаемое в представлении (2.23) – аналитические функции в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \frac{M\beta}{2\Delta} s_0$. Более того, для них справедливо следующее ограничение их роста: для любого $\sigma_0 > \frac{M\beta}{2\Delta} s_0$ существуют числа $c(\sigma_0) \geq 0$ и $M = M(\sigma_0) \geq 0$ такие, что

$$|F(p)| \leq c(\sigma_0)(1 + |p|^M), \quad \sigma > \sigma_0.$$

Следовательно, каждая из этих функций является преобразованием Лапласа некоторой обобщенной функции из алгебры $D'_+(\frac{M\beta}{2\Delta} s_0)$ (см. [25], [28]). $(D'_+(a) -$ совокупность обобщенных функций с носителем, сосредоточенным на полуоси $[0, +\infty)$, таких, что $f(x)e^{-\sigma x} \in S'$, $\sigma > a$, где S' – пространство Шварца обобщенных функций медленного роста [29]).

Несложно получить следующее асимптотическое разложение функции $F(p)$, если $\operatorname{Re} p > \frac{M\beta}{2\Delta} s_0$:

$$F(p) = \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{\gamma}{p^3} + \dots \right\} f'(0) + o\left(\frac{1}{p^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.31)$$

γ – некоторое комплексное число, зависящее от Ω и остальных параметров задачи. Здесь через $o(1/p^n)$ обозначено асимптотическое представление третьего слагаемого разложения $F(p)$. В дальнейшем будет показано, что первый член суммы (2.31) можно продолжить как аналитическую функцию и в область $\operatorname{Re} p \leq \frac{M\beta}{2\Delta} s_0$, однако исключая некоторое множество разрывов. Из представления (2.29) и предельных теорем для преобразования Лапласа [30] следует, что поведение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = 0$ полностью определяется вторым слагаемым суммы (2.27) и не зависит от начальных данных. Этот момент, кажущийся на первый взгляд парадоксальным, объясняется наличием особенности на границе – в данном случае угловой точки $x = 0, y = 0$. Ряд подобных примеров приведен в работе [31].

Возвращаясь к анализу второго слагаемого в представлении (2.27), отметим, что функции вида

$$L \frac{T\left(\frac{\zeta}{L^k}\right) R_2\left(\frac{\zeta}{L^{k+1}}\right)}{T\left(\frac{\zeta}{L^{k+1}}\right) R_1\left(\frac{\zeta}{L^k}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

определяющие как бесконечное произведение (2.29), так и коэффициенты при функциях $K(\zeta/L^{k+1})$, при больших значениях k ведут себя следующим образом:

$$L \frac{T\left(\frac{\zeta}{L^k}\right) R_2\left(\frac{\zeta}{L^{k+1}}\right)}{T\left(\frac{\zeta}{L^{k+1}}\right) R_1\left(\frac{\zeta}{L^k}\right)} = \frac{D_2 - D_1 + \delta_k}{D_2 + D_1 - \delta_k}, \quad (2.32)$$

где $\delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, в силу оценки (2.30) слагаемое

$$K(p) = \left\{ M_1(p) + F_2(p) M_1\left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L}\right) + F_2(p) F_2\left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L}\right) M_1\left(\frac{\widehat{q}(q(\frac{\widehat{q}(q(p)))}{L})}{L}\right) + \dots \right\} L_2$$

в сумме (2.23) можно почленно проинтегрировать, возвращаясь с помощью обратного преобразования Лапласа к переменной x , т.е.

$$L_{p \rightarrow x}^{-1} K(p) = L_{p \rightarrow x}^{-1} \{ M_1(p) L_2 \} + L_{p \rightarrow x}^{-1} \left\{ F_2(p) M_1\left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L}\right) L_2 \right\} + L_{p \rightarrow x}^{-1} \left\{ F_2\left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L}\right) M_1\left(\frac{\widehat{q}(q(\frac{\widehat{q}(q(p)))}{L})}{L}\right) L_2 \right\} + \dots \quad (2.33)$$

Здесь $L_{p \rightarrow x}^{-1}$ – символ обратного преобразования Лапласа.

Рассмотрим сначала первое слагаемое суммы (2.33):

$$S(x) = L_{p \rightarrow x}^{-1} \{ M_1(p) L_2 \} = L_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{M\beta s_0/(2\Delta) - i\infty}^{M\beta s_0/(2\Delta) + i\infty} e^{px} M_1(p) dp \quad (2.34)$$

и продолжим аналитически подынтегральную функцию влево от линии интегрирования.

Полученная функция имеет особенности: две точки ветвления $p = \pm \Omega$ (чтобы получить однозначную аналитическую функцию, достаточно соединить эти

точки отрезком прямой) и, возможно, изолированные особые точки (полюсы) – точки, соответствующие в силу замены переменной (2.24) нулям знаменателя дробно-рациональной функции (2.28). Поэтому найдем нули полиномов $T(\zeta/L)$ и $R_1(\zeta)$. Формально нули первого полинома таковы:

$$\zeta_{1,2} = L \left(\kappa_0 \pm i \sqrt{1 - \kappa_0^2} \right), \quad |\zeta_{1,2}| = L < 1, \quad (2.35)$$

Однако ввиду того, что

$$\zeta = \frac{p}{\Omega} + \sqrt{\frac{p^2}{\Omega^2} - 1}$$

и, следовательно, $|\zeta| \geq 1$, полином $T(\zeta/L)$ не имеет нулей при $|\zeta| \geq 1$.

Анализируя нули полинома $R_1(\zeta)$, можно заключить, что их появление при $|\zeta| \geq 1$, исключая случай $\zeta \in [1, +\infty)$, приводит к возможности построения примеров некорректности типа примера Адамара [23], [32], [33]. Когда $\zeta \in [1, +\infty)$, то мы попадаем в область значений параметров граничного условия (2.2), которая называется областью “нейтральной устойчивости” [26], [34]. Эту область можно охарактеризовать следующим образом: значения параметров таковы, что существует плоская волна, которая вблизи границы распространяется со скоростью, большей скорости звука (обезразмеренной) $1/M$ (см. [35]). (Речь здесь идет о смешанной задаче с граничным условием на ударной волне, причем ударная волна – прямая линия $x = 0$.) Однако в нашем случае на границе $x = 0$ требуется выполнение равномерного условия Лопатинского (1.15). Таким образом, $R_1(\zeta) \neq 0$ при $|\zeta| \geq 1$.

Продолжая обращать функцию $L_2 M_1(p)$ (формула (2.34)), а вместе с ней и второе слагаемое суммы (2.23), заметим, что для исключения возможности экспоненциального роста решения необходимо положить величину L_2 (или в силу (2.17) величину $f'(0)$) равной нулю.

Таким образом, формулу (2.23) можно переписать, значительно ее упростив:

$$F(p) = H(p) + F_2(p)H\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right) + F_2(p)F_2\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right)H\left(\frac{\hat{q}(q(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}))}{L}\right) + \dots \quad (2.36)$$

Далее по формулам (2.18) и (2.19) найдем функции $L(p)$ и $G(p)$. Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} f(x_0) &= L_{p \rightarrow x}^{-1} \left\{ H(p) + F_2(p)H\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right) \right. \\ &\quad \left. + F_2(p)F_2\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right)H\left(\frac{\hat{q}(q(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}))}{L}\right) + \dots \right\}, \\ l(x_0) &= L_{p \rightarrow x}^{-1} \left\{ \frac{L_1(p)}{D_2 r_0(p)} \left[H(p) + F_2(p)H\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F_2(p)F_2\left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}\right)H\left(\frac{\hat{q}(q(\frac{\hat{q}(q(p))}{L}))}{L}\right) + \dots \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$g(x_0) = L_{p \rightarrow x}^{-1} \left\{ I_2(p) F \left(\frac{\widehat{q}(p)}{L} \right) + \frac{1}{\widehat{q}_0(p)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{x - B_0 y}{1 - B_0} p - \frac{B_0 x - y}{1 - B_0} \widehat{q}_0(p) \right\} m(x, y, s) dx dy \right\}.$$

Ясно, что функции $f(x_0)$, $l(x_0)$, $g(x_0)$ бесконечно дифференцируемы на промежутке $[0, +\infty)$. Подставляя найденные функции в представление (2.10), получаем, как в случае задачи Коши [25], сначала гладкое решение задачи (2.5)–(2.8), а затем, возвращаясь к исходным переменным x , y , и гладкое решение задачи (2.1)–(2.4). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} u(t, x, y) = & \left(\frac{\partial}{\partial y''} + B_0 \frac{\partial}{\partial x''} \right) \int_0^{((x''+y'')/2, (B_0(x''+y''))/2)} \bar{g}(t, \xi) \\ & *_t E \left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\sqrt{\Delta}(y'' - B\xi) - (x'' - \xi) \operatorname{tg} \sigma), x'' - \xi, y'' - B\xi \right) d\xi \\ & - \int_0^{(x''-y'', 0)} \bar{l}(t, \xi) *_t E \left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\sqrt{\Delta}y'' - (x'' - \xi) \operatorname{tg} \sigma), x'' - \xi, y'' \right) d\xi \\ & + \left(\frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y''} \right) \int_0^{(x''-y'', 0)} \bar{f}(t, \xi) \\ & *_t E \left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\sqrt{\Delta}y'' - (x'' - \xi) \operatorname{tg} \sigma), x'' - \xi, y'' \right) d\xi \\ & + \frac{M^2}{\Delta} \int_{\square OQ M_0 P} (\operatorname{tg} \sigma \cdot u_{0\xi} + \sqrt{\Delta} u_{0\eta}) \\ & \times E \left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\sqrt{\Delta}(y'' - \eta) - (x'' - \xi) \operatorname{tg} \sigma), x'' - \xi, y'' - \eta \right) d\xi d\eta \\ & + \frac{\beta^2 M^2}{4\Delta} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\square OQ M_0 P} u_0(\xi, \eta) \\ & \times E \left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\sqrt{\Delta}(y'' - \eta) - (x'' - \xi) \operatorname{tg} \sigma), x'' - \xi, y'' - \eta \right) d\xi d\eta \\ & + \frac{\beta^2 M^2}{4\Delta} \int_{\square OQ M_0 P} u_1(\xi, \eta) \\ & \times E \left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\sqrt{\Delta}(y'' - \eta) - (x'' - \xi) \operatorname{tg} \sigma), x'' - \xi, y'' - \eta \right) d\xi d\eta; \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$x'' = 2 \left(y + x \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2} \right), \quad y'' = 2 \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^2} x,$$

в первом интеграле интегрирование ведется вдоль прямой $y'' = B_0 x''$, в следующих двух интегралах – вдоль оси абсцисс $y'' = 0$, в последних двух интегралах вершины O , Q , M_0 , P четырехугольника $\square OQ M_0 P$ имеют следующие координаты:

$$O(0, 0), \quad Q(x'' - y'', 0), \quad P \left(\frac{x'' + y''}{2}, \frac{B_0(x'' + y'')}{2} \right), \quad M_0(x'', y''),$$

функция $E(t, x, y)$ – фундаментальное решение оператора уравнения (1.16) – определяется формулой (3.13), функции $\bar{g}(t, x'')$, $\bar{l}(t, x'')$, $\bar{f}(t, x'')$ находятся по формулам (3.25) (или (3.26)), (3.24), (3.22), соответственно, $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ – начальные данные (здесь координаты x, y выражены через переменные x'', y'').

То, что функция $E(t, x, y)$ является фундаментальным решением оператора уравнения (1.16), представление решения задачи (2.5)–(2.8) в виде (2.10), полученное после преобразования Лапласа по переменной t , а также бесконечная дифференцируемость граничных значений $\bar{f}(t, x'')$, $\bar{l}(t, x'')$, $\bar{g}(t, x'')$, следующая из финитности начальных данных $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$, – позволяют по обычной схеме доказать, что формула (2.38) определяет единственное решение задачи (1.16)–(1.20) в классе функций, удовлетворяющих условию (1.21), причем это решение имеет вторые непрерывные производные вплоть до границы координатной области $t > 0$, $x > 0$, $y > 0$ (по поводу схемы доказательства см., например, [25] для случая задачи Коши для волнового уравнения).

Теорема 1 доказана.

**§ 3. Нахождение граничных значений решения $u(t, x, y)|_{x=0}$, $u(t, x, y)|_{y=0}$ задачи (1.16)–(1.20) и его производной $u_x(t, x, y)|_{x=0}$.
Асимптотическое поведение $u(t, x, y)|_{x=0}$ при $t \rightarrow +\infty$**

В этом параграфе будет доказана теорема 2. Основная идея доказательства – использовать модификацию метода Каньяра–де Хупа [18], [19], [36]–[38] для совместного применения обратного преобразования Лапласа $L_{p \rightarrow x}^{-1}$, $L_{s \rightarrow t}^{-1}$. Ввиду аналогии в определениях функций

$$\bar{f}(t, x) = u(t, x, y)|_{y=0}, \quad \bar{l}(t, x) = u_y(t, x, y)|_{y=0}, \quad \bar{g}(t, x) = u(t, x, y)|_{y=B_0 x}$$

(см. формулы (2.37)) остановимся подробно только на процессе нахождения граничного значения $\bar{f}(t, x) = u(t, x, y)|_{y=0}$ (здесь, как и в начале § 2, сделан переход к новым пространственным переменным x'', y'' и опущены штрихи, а переменная t оставлена без изменений).

Обращаясь к определению функций $H(p, s)$ и $m(x, y)$ (см. формулы (2.22) и (2.9) соответственно), найдем прообраз функции, отвечающей начальной скорости $u_1(x, y)$. (Отметим, что при этом выявляются все возникающие технические трудности.)

Итак, вычислим следующий интеграл.

$$\begin{aligned} \hat{I}(s, x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{M\beta s_0/(2\Delta) - i\infty}^{M\beta s_0/(2\Delta) + i\infty} \exp\left\{px - s \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma \cdot x\right\} \left(\frac{D_2 r_0(p)}{D_2 r_0(p) q_0(p) + L_1(p)} \right. \\ & \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-pz_1 - z_2 \sqrt{p^2 - \Omega^2}\right\} \\ & \times \exp\left\{s \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma \cdot z_1 - s \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2\right\} u_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \Big). \end{aligned} \quad (3.1)$$

После замены переменной $p = k\Omega$, изменения порядка интегрирования, применения теоремы Коши становится понятно, что достаточно найти такой интеграл

$$J(z_1, z_2, x, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \cup C_2} \exp \left\{ -s \left((z_1 - x)k \frac{M\beta}{2\Delta} + z_2 \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{k^2 - 1} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - (z_1 - x) \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma \right) \right\} \left[\frac{D_2 r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \Big|_{\Omega=1} dk. \quad (3.2)$$

Контур интегрирования, направление его обхода и кривые C_1 и C_2 изображены на рис 5.

Рис. 5

Для полубесконечных кривых C_1 и C_2 точка вещественной прямой

$$\frac{z_1 - x}{\sqrt{(z_1 - x)^2 - z_2^2}},$$

где $x > z_1$, $|z_1 - x| > z_2$, является правым или левым концом соответственно. Переменная L пробегает всю вещественную ось; для определенности считаем, что $\operatorname{Im} s > 0$.

Представим интеграл $J(z_1, z_2, x, s)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} J(z_1, z_2, x, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \exp \left\{ -s \left((z_1 - x)k \frac{M\beta}{2\Delta} + z_2 \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{k^2 - 1} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - (z_1 - x) \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma \right) \right\} \left[\frac{D_2 r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \Big|_{\Omega=1} dk \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \exp \left\{ -s \left((z_1 - x)k \frac{M\beta}{2\Delta} + z_2 \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{k^2 - 1} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - (z_1 - x) \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma \right) \right\} \left[\frac{D_2 r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \Big|_{\Omega=1} dk \\ &= J_2 + J_1. \end{aligned}$$

Рис. 6

Рассмотрим интеграл J_1 и дополним контур интегрирования до замкнутого контура так, как показано на рис. 6.

Замкнутый контур состоит из трех частей: части контура C_1 , $\hat{C}_1$, кривых L_1 и L_2 . Кривая L_1 задается параметрически так:

$$(z_1 - x)k \frac{M\beta}{2\Delta} + z_2 \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{k^2 - 1} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - (z_1 - x) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} = t, \quad (3.3)$$

$$t \leq (x - z_1) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 + \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{(z_1 - x)^2 - z_2^2}, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

а на кривой L_2

$$\operatorname{Re} \left\{ -s \left((z_1 - x)k \frac{M\beta}{2\Delta} + z_2 \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{k^2 - 1} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - (z_1 - x) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} \right) \right\} \leq -\alpha < 0. \quad (3.5)$$

Ввиду того, что точка вырождения

$$k = \frac{z_1 - x}{\sqrt{(z_1 - x)^2 - z_2^2}}$$

преобразования перехода от переменной k к переменной t расположена на контуре интегрирования, соотношение (3.3) нужно уточнить:

$$k = k^*(t) = \frac{(x - z_1) \left(t + (z_1 - x) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 \right)}{\frac{M\beta}{2\Delta} (z_2^2 - (z_1 - x)^2)} - \frac{z_2 i \sqrt{-\frac{z_2^2 M^2 \beta^2}{4\Delta^2} - \left(t + (z_1 - x) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 \right)^2 + \frac{M^2 \beta^2}{4\Delta^2} (z_1 - x)^2}}{\frac{M\beta}{2\Delta} (z_2^2 - (z_1 - x)^2)} \quad (3.6)$$

при условии выполнения неравенства (3.4), причем выбирается арифметическое значение корня. После перехода к новой переменной t и применения теоремы Коши получаем

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-sp} \left[\frac{D_2 r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \Big|_{\Omega=1, k=k^*(t)} \frac{dk^*(t)}{dt} \times \Theta_1(z_1, z_2, x, t) dk, \quad (3.7)$$

где

$$\Theta_1(z_1, z_2, x, t) = \Theta(x - z_1 - z_2) \times \left(\Theta(t) - \Theta\left(t - (x - z_1) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{(z_1 - x)^2 - z_2^2}\right) \right),$$

а $\Theta(x)$ – функция Хевисайда.

Заменяя переменную интегрирования $m = -k$ и действуя по аналогии, можно вычислить и интеграл

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} e^{-st} \left[\frac{D_2 r_0(k)}{D_2 r_0(k) + L_1(l)} \right] \Big|_{\Omega=1, k=k_*(t)} \frac{dk_*(t)}{dt} \Theta_1(z_1, z_2, x, t) dt, \quad (3.8)$$

где

$$k_*(t) = \frac{-(x - z_1)(t + (z_1 - x) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2)}{\frac{M\beta}{2\Delta} (z_2^2 - (z_1 - x)^2)} - \frac{z_2 i \sqrt{\frac{M^2 \beta^2}{4\Delta^2} (z_1 - x)^2 - (t + (z_1 - x) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} - \frac{M z_2}{2\sqrt{\Delta}})^2 - \frac{z_2^2 M^2 \beta^2}{4\Delta^2}}}{\frac{M\beta}{2\Delta} (z_2^2 - (z_1 - x)^2)}. \quad (3.9)$$

Складывая интегралы J_1 и J_2 и учитывая замены переменных (3.6) и (3.9), получаем

$$\widehat{I}(s, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{D_2 r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \Big|_{\Omega=1, k=k^*(t)} \frac{dk^*(t)}{dt} \right\} \times \Theta_1(z_1, z_2, x, t) u_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2. \quad (3.10)$$

Наконец, применяя к соотношению (3.10) обратное преобразование Лапласа $L_{s \rightarrow t}^{-1}$, получаем интеграл $I(t, x)$ – вклад начальной скорости $u_1(t, x)$ в функцию $\bar{f}(t, x)$ (речь идет пока только о функциях $H(p, s)$ и $m_1(p, s)$):

$$I(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{D_2 r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \Big|_{\Omega=1, k=k^*(t)} \frac{dk^*(t)}{dt} \right\} \times \Theta_1(z_1, z_2, x, t) u_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2. \quad (3.11)$$

С учетом начальной скорости $u_0(x, y)$ и ее производных функция $m_1(p, s)$ вместе со стоящим при ней коэффициентом дает следующий вклад:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_1(t, x) = & \frac{\beta^2}{4\Delta} \frac{D_2 M^2}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \right|_{\Omega=1, k=k^*(t)} \frac{dk^*(t)}{dt} \right\} \right. \\
 & \times \Theta_1(z_1, z_2, x, t) u_0(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\
 & + 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \right|_{\Omega=1, k=k^*(t)} \frac{dk^*(t)}{dt} \right\} \\
 & \times \Theta_1(z_1, z_2, x, t) \left(\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2} u_{0x} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^2} u_{0y} \right) dz_1 dz_2 \\
 & + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{r_0(k)}{D_2 r_0(k) q_0(k) + L_1(k)} \right] \right|_{\Omega=1, k=k^*(t)} \frac{dk^*(t)}{dt} \right\} \\
 & \left. \times \Theta_1(z_1, z_2, x, t) u_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \right]. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Обращаясь к соотношению (3.6), определяющему замену переменной k , отметим, что функция

$$\begin{aligned}
 E(t, x, y) = & \frac{1}{\pi} \frac{\Theta(|x''| - y'')}{\sqrt{\frac{M^2 \beta^2}{4\Delta^2} ((x'')^2 - (y'')^2) - (t - x'' \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} y'')^2}} \\
 & \times \left(\Theta(t) - \Theta \left(t - x'' \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} y'' - \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{(x'')^2 - (y'')^2} \right) \right), \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$x'' = 2 \left(y + x \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2} \right), \quad y'' = 2 \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^2} x$$

является фундаментальным решением уравнения (1.16) (см. [25], [28], [39]). Носитель фундаментального решения (3.13) – замкнутая область на плоскости, ограниченная некоторым эллипсом, параметры которого зависят от переменной t . Начиная с определенного момента времени t^* , носитель оказывается вне квадранта $x \geq 0, y \geq 0$, удаляясь от него с возрастанием времени t .

Обращая второе слагаемое функции $H(p, s)$, связанное с функцией $m_2(p, s)$, и учитывая формулы (2.25), находим

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_2(t, x) = & \frac{\beta^2}{4\Delta} \frac{D_2 M^2}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{r_0(\hat{k})}{D_2 r_0(\hat{k}) q_0(\hat{k}) + L_1(\hat{k})} \right] \frac{d\hat{k}(t)}{dt} \right\} \right. \\
 & \times \Theta_2(z_1, z_2, x, t) u_0(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\
 & + 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{r_0(\hat{k})}{D_2 r_0(\hat{k}) q_0(\hat{k}) + L_1(\hat{k})} \right] \frac{d\hat{k}(t)}{dt} \right\} \\
 & \left. \times \Theta_2(z_1, z_2, x, t) \left(\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2} u_{0x} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^2} u_{0y} \right) dz_1 dz_2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ \left[\frac{r_0(\widehat{k})}{D_2 r_0(\widehat{k}) q_0(\widehat{k}) + L_1(\widehat{k})} \right] \frac{d\widehat{k}(t)}{dt} \right\} \\
& \quad \times \Theta_2(z_1, z_2, x, t) u_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \Big]. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\widehat{k}(t) = & \frac{\left(t - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma(x - z_1)\right) \left(\frac{1}{1+B_0} (g(z_1, z_2) + B_0 p(z_1, z_2)) - x\right)}{\frac{\beta M}{2\Delta} (g(z_1, z_2) - x + p(z_1, z_2)) (Lg(z_1, z_2) - x - Lp(z_1, z_2))} \\
& + \frac{\frac{i}{1+B_0} (B_0 g(z_1, z_2) + p(z_1, z_2))}{\frac{\beta M}{2\Delta} (g(z_1, z_2) - x + p(z_1, z_2)) (Lg(z_1, z_2) - x - Lp(z_1, z_2))} Q_0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_0^2 = & - \left(t - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 - \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma(x - z_1) \right)^2 \\
& + \frac{\beta^2 M^2}{4\Delta^2} ((g(z_1, z_2) - x) + p(z_1, z_2)) (Lg(z_1, z_2) - x - Lp(z_1, z_2)), \\
\Theta_2(z_1, z_2, x, t) = & \Theta \left(x - \frac{1}{L} (z_1 - z_2) \right) \left(\Theta(t) - \Theta \left(- \left[(x - z_1) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{((g(z_1, z_2) - x) + p(z_1, z_2)) (Lg(z_1, z_2) - x - Lp(z_1, z_2))} \right] + t \right) \right),
\end{aligned}$$

функции $g(z_1, z_2)$, $p(z_1, z_2)$ определяются следующим образом:

$$g(z_1, z_2) = \frac{z_1 - B_0 z_2}{1 - B_0}, \quad p(z_1, z_2) = \frac{B_0 z_1 - z_2}{1 - B_0}.$$

Суммируя интегралы $\widetilde{I}_1(t, x)$ и $\widetilde{I}_2(t, x)$, получаем прообраз функции $H(p, s)$:

$$L_{p \rightarrow x, s \rightarrow t}^{-1} H(p, s) = \widetilde{I}_1(t, x) + \widetilde{I}_2(t, x). \tag{3.15}$$

По аналогии с выводом представления (3.14), найдем прообраз общего члена ряда (2.37), т.е. функции

$$H_n(p, s) = \underbrace{F_2(p) F_2 \left(\frac{\widehat{q}(q(p))}{L} \right) \dots H \left(\frac{\widehat{q}(q(\frac{\widehat{q}(q(\dots))}{L}))}{L} \right)}_{n \text{ сомножителей}}. \tag{3.16}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
& L_{p \rightarrow x, s \rightarrow t} H_n(p, s) \\
& = \frac{\beta^2}{4\Delta} \frac{D_2 M^2}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\operatorname{Im} \left\{ P_n(k, \Omega) \Big|_{\Omega=1, k=k_n^*} \frac{dk_n^*(t)}{dt} \right\} \Theta_3(z_1, z_2, x, t) \right] \right. \\
& \quad + \operatorname{Im} \left\{ P_n(k, \Omega) \Big|_{\Omega=1, k=(k_n)_*} \frac{d(k_n)_*(t)}{dt} \right\} \Theta_4(z_1, z_2, x, t) \Big] u_0(z_1, z_2) dz_1 dz_2 \\
& \quad + 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ P_n(k, \Omega) \Big|_{\Omega=1, k=k_n^*} \frac{dk_n^*(t)}{dt} \right\} \Theta_3(z_1, z_2, x, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Im} \left\{ P_n(k, \Omega) \Big|_{\Omega=1, k=(k_n)_*} \frac{d(k_n)_*(t)}{dt} \right\} \Theta_4(z_1, z_2, x, t) \\
& \quad \times \left(\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2} u_{0x} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\beta^2} u_{0y} \right) dz_1 dz_2 \\
& + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left\{ P_n(k, \Omega) \Big|_{\Omega=1, k=k_n^*} \frac{dk_n^*(t)}{dt} \right\} \Theta_3(z_1, z_2, x, t) \\
& + \operatorname{Im} \left\{ P_n(k, \Omega) \Big|_{\Omega=1, k=(k_n)_*} \frac{d(k_n)_*(t)}{dt} \right\} \Theta_4(z_1, z_2, x, t) u_1(z_1, z_2) dz_1 dz_2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

В этой формуле

$$\begin{aligned}
P_n(p, \Omega) &= \frac{D_2 r_0(p)}{D_2 r_0(p) q_0(p) + l_1(p)} \cdot \underbrace{F_2(p) F_2 \left(\frac{\hat{q}(q(p))}{L} \right) \cdots}_{n \text{ сомножителей}}, \\
k_n^*(t) &= \frac{\left(t - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 + \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma (z_1 - x) \right) \left(L^n + \frac{1}{L^n} \right) z_1}{\frac{M\beta}{\Delta} \left(\frac{1}{L^n} z_1 - x + \frac{1}{L^n} z_2 \right) (L^n z_1 - x - L^n z_2)} \\
& \quad + \frac{\left(\left(\frac{1}{L^n} - L^n \right) z_2 - 2x \right) + i \left(\left(L^n + \frac{1}{L^n} \right) z_2 - \left(L^n - \frac{1}{L^n} \right) z_1 \right)}{\frac{M\beta}{\Delta} \left(\frac{1}{L^n} z_1 - x + \frac{1}{L^n} z_2 \right) (L^n z_1 - x - L^n z_2)} T_n, \\
T_n^2 &= \frac{M^2 \beta^2}{4\Delta^2} \left(\frac{1}{L^n} z_1 - x + \frac{1}{L^n} z_2 \right) \left(L^n z_1 - x - L^n z_2 \right) \\
& \quad - \left(t - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 + \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma (z_1 - x) \right)^2, \\
\Theta_3(z_1, z_2, x, t) &= \Theta \left(x - \frac{1}{L^n} (z_1 + z_2) \right) \left(\Theta(t) - \Theta \left(- \left[(x - z_1) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 + \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{\left(x - \frac{1}{L^n} (z_1 + z_2) \right) (x - L^n (z_1 - z_2))} \right] + t \right) \right), \\
(k_n)_*(t) &= \frac{\left(t - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 + \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma (z_1 - x) \right)}{\frac{M\beta}{\Delta} \left(\frac{1}{L^n} (g(z_1, z_2) + p(z_1, z_2)) - x \right) (L^{n+1} (g(z_1, z_2) - p(z_1, z_2)) - x)} \\
& \quad \times \left(\left(L^{n+1} + \frac{1}{L^n} \right) g(z_1, z_2) - \left(L^{n+1} - \frac{1}{L^n} \right) p(z_1, z_2) - x \right) \\
& \quad + \frac{i \left(\left(L^{n+1} - \frac{1}{L^n} \right) g(z_1, z_2) - \left(L^{n+1} + \frac{1}{L^n} \right) p(z_1, z_2) \right)}{\frac{M\beta}{\Delta} \left(\frac{1}{L^n} (g(z_1, z_2) + p(z_1, z_2)) - x \right) (L^{n+1} (g(z_1, z_2) - p(z_1, z_2)) - x)} Q_n, \\
Q_n^2 &= - \left(t - \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 + \frac{M^2}{2\Delta} \operatorname{tg} \sigma (z_1 - x) \right)^2 \\
& \quad + \frac{M^2 \beta^2}{4\Delta^2} \left(\frac{1}{L^n} (g(z_1, z_2) + p(z_1, z_2)) - x \right) (L^{n+1} (g(z_1, z_2) - p(z_1, z_2)) - x), \\
\Theta_4(z_1, z_2, x, t) &= \Theta(z_2 - z_1 + L^{n+1} x) \left(\Theta(t) - \Theta \left(- \left[(x - z_1) \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} z_2 \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{\left(x - \frac{1}{L^n} (g(z_1, z_2) + p(z_1, z_2)) \right) (x - L^{n+1} (g(z_1, z_2) - p(z_1, z_2)))} \right] + t \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Таким образом, получаем формальное представление функции $f(t, x)$ в виде ряда

$$f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{p \rightarrow x, s \rightarrow t}^{-1} H_n(p, s), \quad (3.19)$$

причем функции $L_{p \rightarrow x, s \rightarrow t}^{-1} H_n(p, s)$ находятся из равенства (3.17).

Несложный анализ соотношений (3.13) и (3.18) позволяет отметить два важных факта, касающихся качественной стороны поведения решения преобразованной задачи (1.16)–(1.20) (и, следовательно, исходной задачи).

Во-первых, оказывается, что значение функции $\bar{f}(t, x)$ в каждой фиксированной точке (t_0, x_0) – результат суперпозиции конечного числа цилиндрических волн, поэтому формула (3.19) требует следующего уточнения:

$$\bar{f}(t, x) = \sum_{n=0}^{N(t, x)} L_{p \rightarrow x, s \rightarrow t}^{-1} H_n(p, s), \quad (3.20)$$

где $N(t, x)$ – некоторое целое число, $N(t, x) \geq 0$. Во-вторых, если $x \in X$, X – некоторый компакт на полупрямой $[0, +\infty)$, то

$$\bar{f}(t, x) \equiv 0, \quad t \geq t_*, \quad (3.21)$$

где t^* зависит от $\sup u_0$, $\sup u_1$ и X . Возвращаясь к исходным пространственным переменным, как и при получении фундаментального решения (3.13), получаем утверждение теоремы 2, т.е.

$$f(t, y) = \bar{f}(t, x'')|_{x''=2y} = \sum_{n=0}^{N(t, y)} L_{p \rightarrow x'', s \rightarrow t}^{-1} H_n(p, s)|_{x''=y} = \sum_{n=0}^{N(t, y)} f_n(t, y), \quad (3.22)$$

$$f(t, y) \equiv 0, \quad t \geq t_*, \quad (3.23)$$

где t^* зависит от $\sup u_0$, $\sup u_1$ и некоторого компакта Y , лежащего на координатной полупрямой Oy .

В формулах (3.22), (3.23) функция $f(t, y) = u(t, x, y)|_{x=0}$ – граничное значение решения $u(t, x, y)$, на ударной волне.

Таким образом, теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Ясно, что в силу формул (2.37) можно по аналогии найти и граничные значения $u_x(t, x, y)|_{x=0}$ и $u(t, x, y)|_{y=0}$ (используются исходные переменные, причем свойства, установленные в теореме 2 для функции $u(t, x, y)|_{x=0}$, остаются справедливыми и для них).

Следовательно,

$$\begin{aligned} l(t, y) &= \bar{l}(t, x'')|_{x''=2y} = \sum_{n=0}^{N(t, y)} L_{p \rightarrow x'', s \rightarrow t}^{-1} \left[\frac{L_1(p)}{D_2 r_0(p)} H_n(p, s) \right] \Big|_{x''=2y} \\ &= \sum_{n=0}^{N(t, y)} l_n(t, y), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
g(t, y) = \bar{g}(t, x'') \Big|_{x''=2x \operatorname{tg} \sigma / \beta^2} &= \sum_{n=0}^{N(t, y)} L_{p \rightarrow x'', s \rightarrow t}^{-1} \left[I_2(p) F\left(\frac{\hat{q}(p)}{L}\right) + \frac{1}{\hat{q}_0(p)} \right. \\
&\times \left. \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{x - B_0 y}{1 - B_0} p - \frac{B_0 x - y}{1 - B_0} \hat{q}_0(p)\right\} m(x, y, s) dx dy \right] \Big|_{x''=2x \operatorname{tg} \sigma / \beta^2}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Чтобы избежать слишком громоздких вычислений для определения функции $g(t, x)$ по формуле (3.25), можно поступить иначе – использовать представление (2.10), в котором, как и при выводе формулы (2.13), совместить точки M_0 и P (однако не делать замену переменных под интегралом).

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
g(t, x) = \bar{g}(t, x'') \Big|_{x''=2x \operatorname{tg} \sigma / \beta^2} &= L_{s \rightarrow t}^{-1} v\left(s, \frac{x''}{1 + B_0}, \frac{B_0 x''}{1 + B_0}\right) \Big|_{x''=2x \operatorname{tg} \sigma / \beta^2} \\
&= \bar{f}\left(t, \frac{1 - B_0}{1 + B_0} x''\right) + 2 \frac{B_0 x''}{1 + B_0} \int_0^{(\frac{1 - B_0}{1 + B_0} x'', 0)} \bar{f}(t, \xi) *_t Z\left(t, \frac{x''}{1 + B_0}, \frac{B_0 x''}{1 + B_0}\right) d\xi \\
&\quad - 2 \int_0^{(\frac{1 - B_0}{1 + B_0} x'', 0)} \bar{l}(t, \xi) *_t E\left(t, \frac{x''}{1 + B_0} - \xi, \frac{B_0 x''}{1 + B_0}\right) d\xi \\
&\quad + \frac{\beta^2 M^2}{2\Delta} \int_{\Delta OQP} u_1(\xi, \eta) \\
&\quad \times E\left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\xi \operatorname{tg} \sigma - \sqrt{\Delta} \eta), \frac{x''}{1 + B_0} - \xi, \frac{B_0 x''}{1 + B_0} - \eta\right) d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{\beta^2 M^2}{2\Delta} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta OQP} u_0(\xi, \eta) \\
&\quad \times E\left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\xi \operatorname{tg} \sigma - \sqrt{\Delta} \eta), \frac{x''}{1 + B_0} - \xi, \frac{B_0 x''}{1 + B_0} - \eta\right) d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{2M^2}{\Delta} \int_{\Delta OQP} (\operatorname{tg} \sigma \cdot u_{0\xi} + \sqrt{\Delta} u_{0\eta}) \\
&\quad \times E\left(t - \frac{M^2}{2\Delta} (\xi \operatorname{tg} \sigma - \sqrt{\Delta} \eta), \frac{x''}{1 + B_0} - \xi, \frac{B_0 x''}{1 + B_0} - \eta\right) d\xi d\eta,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$x'' = 2 \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\beta^2} x.$$

При этом $v(s, x'', y'')$ – решение задачи (2.5)–(2.8) (решение этой зависит от параметра s); функция $E(t, x, y)$ – фундаментальное решение оператора уравнения (1.16) (см. (3.13)); а обобщенная функция $Z(t, x'', y'')$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
Z(t, x'', y'') &= \frac{1}{\pi} \frac{\Theta(|x''| - y'')}{\left(\frac{M^2 \beta^2}{4\Delta^2} ((x'')^2 - (y'')^2) - (t - x'' \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} y'')^2\right)^{3/2}} \\
&\times \left(\Theta(t) - \Theta\left(t - x'' \operatorname{tg} \sigma \frac{M^2}{2\Delta} + \frac{M^2}{2\sqrt{\Delta}} y'' - \frac{M\beta}{2\Delta} \sqrt{(x'')^2 - (y'')^2}\right) \right),
\end{aligned}$$

координаты вершин Q и P треугольника $\triangle OQP$ таковы:

$$Q\left(\frac{1-B_0}{1+B_0}x'', 0\right), \quad P\left(\frac{x''}{1+B_0}, \frac{B_0x''}{1+B_0}\right).$$

Отметим также, что интегрирование в первых двух интегралах ведется по отрезку оси абсцисс от начала координат до точки Q .

Авторы признательны Д. В. Есипову и Я. В. Твердохлебу за помощь в оформлении работы.

Список литературы

- [1] R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic flow and shock waves*, Intersci. Publ., New York, 1948.
- [2] Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2003.
- [3] Г. Г. Чёрный, *Газовая динамика*, Наука, М., 1988.
- [4] M. D. Salas, B. D. Morgan, “Stability of shock waves attached to wedges and cones”, *AIAA J.*, **21**:12 (1983), 1611–1617.
- [5] А. Н. Любимов, В. В. Русанов, *Течение газов около тупых тел*, т. 1, 2, Наука, М., 1970.
- [6] V. Elling, T.-P. Liu, “Exact solutions to supersonic flow onto a solid wedge”, *Hyperbolic problems. Theory, numerics and applications*, Proceedings of the 11th international conference on hyperbolic problems (Ecole Normale Supérieure, Lyon, France, 2006), Springer-Verlag, Berlin, 2008, 101–112.
- [7] А. И. Рылов, “О возможных режимах обтекания заострённых тел конечной толщины при произвольных сверхзвуковых скоростях набегающего потока”, *ПММ*, **55**:1 (1991), 95–99; англ. пер.: A. I. Rylov, “On the possible modes of flow round tapered bodies of finite thickness at arbitrary supersonic velocities of the approach stream”, *J. Appl. Math. Mech.*, **55**:1 (1991), 78–85.
- [8] А. А. Никольский, “О плоских вихревых течениях газа”, *Теор. иссл. по механике жидкости и газа. Тр. ЦАГИ*, **2122** (1984), 74–85.
- [9] Б. М. Булах, *Нелинейные конические течения газа*, Наука, М., 1970; англ. пер.: B. M. Bulakh, *Nonlinear conical flow*, Delft Univ. Press, Delft, 1985.
- [10] Б. Л. Рождественский, “Уточнение теории обтекания клина сверхзвуковым потоком невязкого газа”, *Матем. моделирование*, **1**:8 (1989), 99–102.
- [11] А. М. Блохин, Е. И. Роменский, “Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса”, *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук*, **3**:13 (1978), 87–97.
- [12] А. М. Блохин, Е. И. Роменский, “Влияние свойств предельного стационарного решения на его установление”, *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук*, **1**:3 (1980), 44–50.
- [13] В. В. Русанов, А. А. Шаракшанэ, *Исследование линеаризованной нестационарной модели обтекания бесконечного клина*, препринт № 13, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, М., 1980.
- [14] А. М. Блохин, *Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики*, Наука, Новосибирск, 1986.
- [15] A. M. Blokhin, D. L. Tkachev, L. O. Baldan, “Study of the stability in the problem on flowing around a wedge. The case of strong wave”, *J. Math. Anal. Appl.*, **319**:1 (2006), 248–277.

- [16] A. M. Blokhin, D. L. Tkachev, Yu. Yu. Pashinin, "Stability condition for strong shock waves in the problem of flow around an infinite plane wedge", *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, **2**:1 (2008), 1–17.
- [17] D. L. Tkachev, A. M. Blokhin, Yu. Yu. Pashinin, "The strong shock wave in the problem on flow around infinite plane wedge", *Hyperbolic problems. Theory, numerics and applications*, Proceedings of the 11th international conference on hyperbolic problems (Ecole Normale Supérieure, Lyon, France, 2006), Springer-Verlag, Berlin, 2008, 1037–1044.
- [18] D. L. Tkachev, "Mixed problem for the wave equation in a quadrant", *Siberian J. Differential Equations*, **1**:3 (1997), 269–283.
- [19] A. M. Blokhin, D. L. Tkachev, *Mixed problems for the wave equation in coordinate domains*, Nova Science Publ., Commack, NY, 1998.
- [20] А. М. Блохин, "Корректность линейной смешанной задачи о сверхзвуковом обтекании клина", *Сиб. мат. журн.*, **29**:5 (1988), 48–58; англ. пер.: A. M. Blokhin, "Well-posedness of a linear mixed problem on the supersonic flow around a wedge", *Siberian Math. J.*, **29**:5 (1988), 726–734.
- [21] А. М. Блохин, А. Д. Биркин, "Исследование устойчивости стационарных режимов сверхзвукового обтекания бесконечного клина", *ПМТФ*, **36**:2 (1995), 182–196; англ. пер.: A. M. Blokhin, A. D. Birkin, "Stability analysis of steady supersonic flow regimes past infinite wedge", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **36**:2 (1995), 308–321.
- [22] Ши-И. Бай, *Введение в теорию течения сжимаемой жидкости*, ИЛ, М., 1962.
- [23] R. Sakamoto, *Hyperbolic boundary value problems*, Iwanami Shoten, Tokyo, 1978.
- [24] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, 4-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, Macmillan, New York; Pergamon Press, Oxford, 1963.
- [25] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, 5-е изд., Наука, М., 1988; англ. пер. 2-го изд.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Dekker, New York, 1971.
- [26] С. В. Иорданский, "Об устойчивости стационарной ударной волны", *ПММ*, **21**:4 (1957), 465–472.
- [27] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Wiley, New York, 1972.
- [28] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физики*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir, Moscow, 1979.
- [29] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, tome I–II, Hermann & Cie, Paris, 1950–1951.
- [30] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, М., 1970; пер. с англ.: G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical handbook for scientists and engineers*, McGraw-Hill, New York–Toronto, ON–London, 1961.
- [31] St. Osher, "Initial-boundary value problems for hyperbolic systems in regions with corners. II", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **198** (1974), 155–175.
- [32] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann & Cie, Paris, 1932.
- [33] С. К. Годунов, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1979.
- [34] С. П. Дьяков, "Об устойчивости ударных волн", *ЖЭТФ*, **27**:3 (1954), 288–295.
- [35] M. Ikawa, "Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition", *Osaka J. Math.*, **7**:2 (1970), 495–525.
- [36] L. Cagniard, *Reflection and refraction of progressive seismic waves*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [37] A. T. de Hoop, "A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems", *Appl. Sci. Res. B*, **8**:1 (1960), 349–356.

- [38] В. А. Добрушкин, *Краевые задачи динамической теории упругости для клиновидных областей*, Наука и техника, Минск, 1988.
- [39] Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965; пер. с англ.: L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.

А. М. Блохин (А. М. Blokhin)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: blokhin@math.nsc.ru

Поступила в редакцию

20.05.2008 и 26.11.2008

Д. Л. Ткачёв (D. L. Tkachev)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: tkachev@math.nsc.ru