Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, О разрушении решения системы уравнений Осколкова, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 4, 83–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 02:35:27

УДК 517.957

М. О. Корпусов, А. Г. Свешников

О разрушении решения системы уравнений Осколкова

В работе рассматривается система уравнений Осколкова с кубическим источником, описывающая динамику вязко-упругой жидкости. Доказана локальная во времени разрешимость задачи в слабом обобщенном смысле. Получены некоторые условия на начальную функцию, при которых имеет место разрушение решения за конечное время, а также двусторонние оценки на время существования решения. Кроме того, найдены достаточные условия глобальной во времени разрешимости задачи.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: разрушение системы уравнений Осколкова, обобщенное решение, уравнения гидродинамического типа.

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о достаточных условиях возникновения разрушения решения следующей начально-краевой задачи для трехмерной системы уравнений Осколкова [1] с кубическим источником:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} = \nabla p, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad (1.3)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, Ω – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$, область Ω локально расположена по одну сторону от границы $\partial\Omega$,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

p – давление в жидкости, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скорости в жидкости.

Система уравнений (1.1)–(1.3) описывает динамику вязко-упругой жидкости Кельвина–Фойгта при учете кубического источника. Для системы уравнений без кубического источника (т.е. без слагаемого $|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}$) ранее в [2] была доказана ее глобальная во времени однозначная разрешимость в слабом и в классическом смыслах. При этом на начальные данные не накладывались какие-либо условия малости. Представляется интересным рассмотреть указанную выше систему уравнений с учетом кубического источника и получить достаточные

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00376-а) и в рамках Президентской программы поддержки молодых докторов наук (грант № МД-1006.2007.1).

условия на начальные данные, при которых нет глобальной во времени разрешимости в том классе, в котором в [2] была доказана глобальная разрешимость этой системы уравнений без кубического источника.

Система уравнений (1.1)–(1.3), с одной стороны, является системой уравнений гидродинамического типа, поскольку содержит конвективную нелинейность $(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}$ и слагаемое ∇p – градиент давления. С другой стороны, система уравнений (1.1)–(1.3) представляет собой систему уравнений третьего порядка, не разрешенную относительно старшей производной по времени. Такие системы уравнений называют *псевдопараболическими*.

Как было предсказано О. А. Ладыженской в 1966 г. на Международном математическом конгрессе [3] и затем доказано в работах А. П. Осколкова [4]–[6], уравнения жидкостей Кельвина–Фойгта регуляризуют трехмерные нестационарные уравнения Навье–Стокса при больших градиентах скоростей. Отметим также, что разнообразным задачам для систем уравнений, обобщающих систему Осколкова, посвящены работы Г. А. Свиридюка [7], [8] и работа Г. В. Демиденко и С. В. Успенского [9].

В классической работе Г. А. Левайна [10] был предложен энергетический подход к исследованию вопроса о разрушении сильного и слабого обобщенных решений при достаточно больших начальных данных задачи. В работе [10] изучалась глобальная во времени неразрешимость задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения вида

$$\mathbb{A} \frac{du}{dt} + \mathbb{L}u = \mathbb{F}(u), \quad u(0) = u_0,$$

при этом существенно использовалось то, что операторы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{L}$ – линейные, положительно определенные и самосопряженные, а $\mathbb{F}(u)$ имеет симметричную производную Фреше.

Много результатов по исследованию неограниченных решений было получено в работе А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова и А. П. Михайлова [11], в которой исследованы вопросы разрушения решений квазилинейных параболических уравнений. При этом использовалась самая разнообразная техника. Для одних задач применялись признаки сравнения, с помощью которых при использовании верхних и нижних решений доказывались теоремы существования (или несуществования). Для других задач применялся метод неограниченных коэффициентов Фурье. В [11] получены достаточные условия разрушения решений классов квазилинейных уравнений параболического типа. Заметим, что методика, развитая в [11] для доказательства разрушения решений параболических уравнений, может быть применена и при исследовании вопросов разрушения для псевдопараболических уравнений.

В монографии С. И. Похожаева и Е. Митидьери [12] был развит оригинальный метод исследования вопросов разрушения решений дифференциальных неравенств эллиптического, параболического и гиперболического типов. Для всех трех типов уравнений авторами было предложено обобщение понятия “емкости” – “нелинейная емкость”. С помощью этого понятия изучение вопросов

разрушения проводится по одной и той же схеме, вне зависимости от типа дифференциального неравенства. Указанный выше подход, по всей видимости, может быть применен к исследованию дифференциальных неравенств псевдопараболического типа в неограниченных областях.

Отметим, что в работе В. К. Калантарова и О. А. Ладыженской [13] впервые рассмотрены дифференциальные неравенства вида

$$\Phi\Phi'' - (1 + \alpha)(\Phi')^2 + C_1\Phi\Phi' + C_2\Phi^2 \geq 0, \quad C_1 \geq 0, \quad C_2 \geq 0, \quad \alpha > 0,$$

из которых получаются достаточные условия возникновения разрыва второго рода у функции $\Phi(t)$, имеющей смысл энергии. Мы (см. [14]) многократно используем это обыкновенное дифференциальное неравенство для получения достаточных условий разрушения решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений псевдопараболического типа.

Отметим, что развитый в работе Н. Хайяши, И. А. Шишмарева, П. И. Намкина, Е. И. Кайкиной [15] метод построения асимптотики при больших временах для широкого класса нелинейных эволюционных уравнений может быть применен к исследованию асимптотики при больших временах для уравнений псевдопараболического типа. В частности, в [15] было изучено асимптотическое поведение решения задачи Коши для следующего диссипативного уравнения псевдопараболического типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u + \alpha u^3 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

§ 2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе мы введем некоторые обозначения и сформулируем ряд вспомогательных результатов, используемых в дальнейшем. Эти результаты опубликованы в [16].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная липшицева область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$. Обозначим через $\mathbb{L}^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, (соответственно через $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$) пространство вещественных функций, определенных на Ω , абсолютно интегрируемых с p -й степенью (соответственно существенно ограниченных) по лебеговой мере $dx = dx_1 dx_2 dx_3$. Это пространство с нормой

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

(соответственно с нормой $\|u\|_\infty = \text{ess sup}_{\Omega} |u(x)|$) является банаховым пространством. Введем банаховы пространства векторнозначных функций

$$\mathbf{L}^q(\Omega) = \mathbb{L}^q(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega) \times \mathbb{L}^q(\Omega), \quad q \in [1, +\infty],$$

где для $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ по определению

$$|\mathbf{u}| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{1/2}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \\ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Кроме того, через $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_2$ обозначим скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Пусть $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ – пространство векторнозначных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ таких, что $u_k \in \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $k = 1, 2, 3$. Можно доказать, что $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. Таким образом, $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sum_{i=1}^3 (D_i \mathbf{u}, D_i \mathbf{v})_2, \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{+1} = \left(\sum_{j=1}^3 \|D_j \mathbf{u}\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Двойственное к гильбертовому пространству $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, т.е. $(\mathbf{H}_0^1(\Omega))' = \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, а норму в нем обозначим через $\|\mathbf{u}\|_{-1}$. Кроме того, нам потребуется пространство $\mathbf{D}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, где $\mathcal{D}(\Omega)$ – пространство основных функций с компактным носителем, $\mathbf{u} \in \mathbf{D}(\Omega)$, когда $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$, $k = 1, 2, 3$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Теперь введем пространство

$$\mathbf{V}(\Omega) = (\mathbf{u} \in \mathbf{D}(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0). \quad (2.1)$$

Замыкание $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{H}(\Omega)$, а замыкание $\mathbf{V}(\Omega)$ в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$ – через $\mathbf{X}(\Omega)$. Пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ вложено в $\mathbf{X}(\Omega)$ и плотно в нем, причем это вложение непрерывно.

Пространство, двойственное к гильбертовому пространству $\mathbf{H}(\Omega)$, обозначим через $\mathbf{H}'(\Omega)$.

ЛЕММА 1. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$. Для того чтобы для некоторого $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ выполнялось равенство

$$\mathbf{u} = \operatorname{grad} p, \quad (2.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega),$$

где $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ – скобка двойственности между пространствами $\mathbf{D}(\Omega)$ и $\mathbf{D}'(\Omega)$, а $\mathbf{D}'(\Omega)$ – это пространство, двойственное к $\mathbf{D}(\Omega)$.

Лемма доказана в [16].

ЛЕММА 2. Если у распределения p все первые слабые производные $D_i p$, $1 \leq i \leq 3$, принадлежат $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$, то $p \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ и

$$\|p\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq c(\Omega) \|\operatorname{grad} p\|_{\mathbb{H}^{-1}(\Omega)}, \quad (2.3)$$

где

$$\mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R} = \left(p \in \mathbb{L}^2(\Omega), \int_{\Omega} p(x) dx = 0 \right),$$

которое является гильбертовым. Кроме того, $p \in \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(\Omega)$.

Лемма доказана в [16].

ЛЕММА 3. *Предположим, что Ω – липшицева открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ и $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$. Тогда $\mathbf{f} = \text{grad } p$, где $p \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.*

Лемма доказана в [16].

ЛЕММА 4. *Пусть Ω – открытое ограниченное липшицево множество. Тогда*

$$\mathbf{H}(\Omega) = (\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \text{div } \mathbf{u} = 0).$$

Лемма доказана в [16].

Воспользуемся теперь некоторыми результатами из работы Ладыженской [3]. Для векторного пространства $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{L}^2(\Omega)$ справедливо разложение в прямую сумму

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbb{J}(\Omega) \oplus \mathbb{G}(\Omega),$$

где $\mathbb{J}(\Omega)$ – замыкание по норме пространства $\mathbf{L}^2(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в Q_T соленоидальных векторов. Совокупность элементов из $\mathbf{L}^2(\Omega)$, ортогональных $\mathbb{J}(\Omega)$, образует подпространство, которое мы обозначим через $\mathbb{G}(\Omega)$.

ЛЕММА 5. *Подпространство $\mathbb{G}(\Omega)$ состоит из $\text{grad } p(x)$, где $p(x)$ – однозначная в Ω функция, имеющая первые слабые производные из $\mathbf{L}^2(\Omega)$.*

Лемма доказана в [3].

§ 3. Однозначная локальная разрешимость в слабом обобщенном смысле

Прежде всего поясним, в каком смысле мы понимаем слабую обобщенную разрешимость задачи (1.1)–(1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Слабым обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) называется решение $\mathbf{u}(x)(t) \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ ($\mathbf{u}'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$) следующей задачи*

$$\int_0^T dt \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{w} \rangle = 0, \quad \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между пространствами $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, т.е.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbb{D}_1(\mathbf{u}), w_1 \rangle_1 + \langle \mathbb{D}_2(\mathbf{u}), w_2 \rangle_1 + \langle \mathbb{D}_3(\mathbf{u}), w_3 \rangle_1, \\ \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= (\mathbb{D}_1(\mathbf{u}), \mathbb{D}_2(\mathbf{u}), \mathbb{D}_3(\mathbf{u})), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3), \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ – скобки двойственности между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слабой производной функции $v \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ в смысле скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ между гильбертовыми пространствами $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ называется следующая величина:

$$\left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, w \right\rangle_1 \equiv \left\langle v, -\frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_1 = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx, \quad w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее мы будем пользоваться этим определением слабой производной и говорить об интегрировании “по частям” в указанном выше смысле. В частности,

$$\begin{aligned} \langle \Delta v, w \rangle_1 &\equiv -\langle \nabla v, \nabla w \rangle = - \sum_{i=1}^3 \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\rangle_1 = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} dx \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i}, \\ v &\in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \quad w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

В силу определения 2 слабой производной задачу (3.1)–(3.2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} dt dx \phi(t) &\left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) + (\mathbf{u}', \mathbf{w}) + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^3 u_i \left(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right) - \left(|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \mathbf{w} \right) \right] = 0, \quad \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega). \end{aligned}$$

Прежде всего докажем, что задача (3.1)–(3.2) эквивалентна следующей задаче (3.3)–(3.4):

$$\int_0^T dt \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} + |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}. \quad (3.4)$$

Пусть $\mathbb{B}$ – сепарабельное банахово пространство с сопряженным пространством $\mathbb{B}^*$ и со скобкой двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$. Обозначим через $\| \cdot \|_{\mathbb{B}}$ норму в $\mathbb{B}$, а через $\| \cdot \|_{\mathbb{B}}^*$ – норму в $\mathbb{B}^*$. Кроме того, пусть $\mathbb{B}_1$ – сепарабельное банахово пространство, вложенное в $\mathbb{B}$.

Пусть $\mathcal{L}[u]$ – некоторый дифференциальный оператор в частных производных такой, что для любого $T \in (0, T_0)$ имеет место неравенство

$$\int_0^T dt \|\mathcal{L}[u]\|_{\mathbb{B}}^{*2}(t) \leq C(T) < +\infty, \quad T \in (0, T_0). \quad (3.5)$$

Рассмотрим следующие два определения слабого обобщенного решения оператора $\mathcal{L}[u]$:

$$\int_0^T dt \langle \mathcal{L}[u], w \rangle_{\mathbb{B}} \phi(t) = 0, \quad w \in \mathbb{B}_1, \quad \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T), \quad T \in (0, T_0), \quad (3.6)$$

$$\int_0^T dt \langle \mathcal{L}[u], v \rangle_{\mathbb{B}} = 0, \quad v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{B}_1), \quad T \in (0, T_0), \quad (3.7)$$

где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$ обозначена скобка двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$. В силу (3.5) левые части выражений (3.6) и (3.7) определены.

Докажем теперь, что произвольную фиксированную функцию из $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{B}_1)$ можно приблизить в смысле $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{B}_1)$ функциями из $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}_1)$ с любой наперед заданной точностью. Действительно, введем финитную в $\mathbb{R}^1$ бесконечно дифференцируемую функцию

$$\rho(t) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right), & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

где постоянная $C > 0$ определяется условием

$$\int_{\mathbb{R}^1} dt \rho(t) = 1.$$

Зафиксируем произвольную функцию $v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{B}_1)$ и через $\bar{v}$ обозначим продолжение функции v нулем вне интервала $(0, T)$. Используя функцию (3.8), введем срезку функции $\bar{v}$:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^1} ds \rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) \bar{v}(s), \quad (3.9)$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера. Заметим, что на основании теоремы 3.8.4. из [17] из (3.9) заключаем, что $v^\varepsilon \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}_1)$. Справедливо следующее равенство:

$$v^\varepsilon(t) - v(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^1} ds \rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) [\bar{v}(s) - v(t)].$$

Из него получаем, что

$$\|v^\varepsilon(t) - v(t)\|_{\mathbb{B}_1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^1} ds \rho\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) \|\bar{v}(s) - v(t)\|_{\mathbb{B}_1}, \quad t \in (0, T), \quad (3.10)$$

а из (3.10) имеем

$$\|v^\varepsilon(t) - v(t)\|_{\mathbb{B}_1} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} ds \|v(s) - v(t)\|_{\mathbb{B}_1}. \quad (3.11)$$

В силу теоремы 3.8.5 из [17] получаем, что для почти всех $t \in (0, T)$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} ds \|v(s) - v(t)\|_{\mathbb{B}_1} = 0.$$

Следовательно, для почти всех $t \in (0, T)$ в силу (3.11) справедливо предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|v(t) - v^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{B}_1} = 0.$$

Используя теорему Лебега, приходим к выводу, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^T dt \|v(t) - v^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{B}_1}^2 = 0.$$

Итак, доказано, что любую функцию из $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{B}_1)$ сколь угодно точно можно приблизить функциями из $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}_1)$.

Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}_1)$. В силу сепарабельности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ в этом пространстве найдется счетная всюду плотная система элементов $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$. В силу теоремы 1.3 главы IV работы [18] система функций $\{w_{k_1} t^{k_2}\}_{k_1, k_2=1}^{+\infty}$, $t \in [0, T]$, всюду плотна в $\mathbb{C}([0, T]; \mathbb{B}_1)$.

Пусть $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^{+\infty}$ – какой-либо базис в $\mathbb{L}^2(0, T)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \left\| v - \sum_{k_1, k_3=1}^{m_1, m_3} c_{m_1 m_3 k_1 k_3} \phi_{k_3}(t) w_{k_1} \right\|_{\mathbb{B}_1}^2 \\ & \leq \int_0^T dt \|v - v_\varepsilon\|_{\mathbb{B}_1}^2 + \int_0^T dt \left\| v_\varepsilon - \sum_{k_1, k_2=1}^{m_1, m_2} d_{m_1 m_2 k_1 k_2} w_{k_1} t^{k_2} \right\|_{\mathbb{B}_1}^2 \\ & \quad + \int_0^T dt \left\| \sum_{k_1, k_2=1}^{m_1, m_2} d_{m_1 m_2 k_1 k_2} w_{k_1} \left(t^{k_2} - \sum_{k_3=1}^{m_3} \gamma_{k_2 k_3} \phi_{k_3}(t) \right) \right\|_{\mathbb{B}_1}^2 \\ & = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$c_{m_1 m_3 k_1 k_3} = \sum_{k_2=1}^{m_2} d_{m_1 m_2 k_1 k_2} \gamma_{k_2 k_3}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такая функция v_ε , что $I_1 \leq \varepsilon/3$, такие $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и такие $d_{m_1 m_2 k_1 k_2}$, что $I_2 \leq \varepsilon/3$. Наконец, найдутся такие $\gamma_{k_2 k_3}$, что $I_3 \leq \varepsilon/3$. Следовательно, из (3.12) получаем, что

$$\int_0^T dt \left\| v - \sum_{k_1, k_3=1}^{m_1, m_3} c_{m_1 m_3 k_1 k_3} \phi_{k_3}(t) w_{k_1} \right\|_{\mathbb{B}_1}^2 \leq \varepsilon. \quad (3.13)$$

Рассмотрим задачи (3.6) и (3.7). Очевидно, что из (3.7) следует (3.6). Теперь докажем, что из (3.6) следует (3.7). Действительно, для всех $v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{B}_1)$ справедливо равенство

$$\int_0^T dt \langle \mathcal{L}[u], v \rangle_{\mathbb{B}} = \int_0^T dt \left\langle \mathcal{L}[u], v - \sum_{k_1, k_3=1}^{m_1, m_3} c_{m_1 m_3 k_1 k_3} \phi_{k_3}(t) w_{k_1} t \right\rangle_{\mathbb{B}}. \quad (3.14)$$

В силу (3.5) и (3.13) из него получаем, что правая часть (3.14) для любого $\varepsilon > 0$ может быть сделана меньше $\delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) \rightarrow +0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Так как левая часть (3.14) не зависит от $\varepsilon > 0$, то приходим к (3.7). Таким образом, задачи (3.6) и (3.7) эквивалентны.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда для того чтобы имело место равенство

$$\int_0^T dt \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)),$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая функция $p(t, x)$, $p(t, x) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что $\mathbf{f} = \text{grad}_x p$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скобки двойственности между $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Предположим, что существует такая функция $p(x, t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что $\mathbf{f} = \text{grad}_x p \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда имеет место следующая цепочка равенств для всех $\mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$:

$$\int_0^T dt \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_0^T dt \langle \text{grad } p, \mathbf{v} \rangle = - \int_0^T dt \langle p, \text{div } \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)).$$

Необходимость. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ и справедливо равенство

$$\int_0^T dt \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)).$$

Пусть, кроме того, $\mathbf{v} = \phi(t)\mathbf{w}$, $\phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$ и $\mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega)$. Тогда в силу основной леммы вариационного исчисления получим, что

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega) \quad \text{и почти всех } t \in [0, T].$$

В частности, отсюда следует, что

$$\langle \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}(\Omega) \quad \text{и почти всех } t \in [0, T].$$

Отсюда и в силу лемм 2 и 3 получаем, что найдется такая функция $p(t, x) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)/\mathbb{R})$, что

$$\mathbf{f} = \text{grad}_x p(t, x) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что классическое решение является слабым обобщенным решением в смысле определения 1.

Докажем теперь единственность решения задачи (3.1)–(3.2). Сначала покажем, что справедлива

ЛЕММА 6. Пусть $\mathbf{u} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$, $\mathbf{u}' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$. Тогда имеет место следующее равенство для почти всех $t \in (0, T)$:

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 + ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) - \|\mathbf{u}_0\|_2^2 - ((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) = 2 \int_0^t ds [(\mathbf{u}', \mathbf{u})_2 + ((\mathbf{u}', \mathbf{u}))]. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регуляризуя функцию $\hat{\mathbf{u}}$, действующую из $\mathbb{R}$ в $\mathbf{H}(\Omega)$ и равную $\mathbf{u}$ на $[0, T]$ и нулю вне этого интервала, получаем последовательность функций $\mathbf{u}_m$, удовлетворяющую условиям

$$\mathbf{u}_m \in C^\infty([0, T]; \mathbf{H}(\Omega)), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{сильно в } \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u}'_m \rightarrow \mathbf{u}' \quad \text{сильно в } \mathbb{L}_{\text{loc}}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)). \quad (3.18)$$

Очевидно, что для функций $\mathbf{u}_m$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} [(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2 + ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))] = 2(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2 + 2((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)). \quad (3.19)$$

Из (3.17)–(3.19) следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_m\|_2^2 &\rightarrow \|\mathbf{u}\|_2^2, & ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)) &\rightarrow ((\mathbf{u}', \mathbf{u})), \\ (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)_2 &\rightarrow (\mathbf{u}', \mathbf{u})_2 & \text{сильно в } \mathbb{L}_{\text{loc}}^1(0, T). \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в смысле $\mathscr{D}'(0, T)$ в равенстве (3.19), получим такое равенство в смысле $\mathscr{D}'(0, T)$:

$$\frac{d}{dt} [(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2 + ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))] = 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}')_2 + 2((\mathbf{u}, \mathbf{u}')). \quad (3.20)$$

Теперь заметим, что

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2, ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) \in \mathbb{L}^1(0, T), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}')_2, ((\mathbf{u}, \mathbf{u}')) \in \mathbb{L}^1(0, T).$$

Таким образом, интегрируя (3.20) по $t \in (0, T)$, приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Наконец, мы можем доказать единственность задачи (3.3)–(3.4), которая, как было показано, эквивалентна задаче (3.1)–(3.2).

ЛЕММА 7. В классах функций

$$\mathbf{u} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$$

при $T > 0$ решение задачи (3.3)–(3.4) единственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ – два решения задачи (3.3)–(3.4), соответствующие одной и той же начальной функции $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$. Обозначим

$$\mathbf{w}(s) = \begin{cases} \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, & s \in [0, t], \\ \mathbf{0}, & s \in [t, T]. \end{cases}$$

Возьмем в (3.3) $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ и вычтем уравнение (3.3) для решения $\mathbf{u}_2$ из уравнения (3.3) для решения $\mathbf{u}_1$. Тогда после интегрирования по частям, что законно

в рассматриваемых классах, получим следующее равенство:

$$\int_0^t ds \left[(\mathbf{w}', \mathbf{w})_2 + ((\mathbf{w}', \mathbf{w})) + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) - \int_{\Omega} dx (|\mathbf{u}_1|^2 \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2 \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} dx (w_k \mathbf{u}_2 + u_{1k} \mathbf{w}) \mathbf{w}_{x_k} \right] = 0. \quad (3.21)$$

Из (3.21) в силу (3.15) получим

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) + 2 \int_0^t ds \left[((\mathbf{w}, \mathbf{w})) - \int_{\Omega} dx (|\mathbf{u}_1|^2 \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2 \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - \int_{\Omega} dx \sum_{k=1}^3 (w_k \mathbf{u}_2 + u_{1k} \mathbf{w}) \mathbf{w}_{x_k} \right] = 0.$$

Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0$, то из последнего равенства получим

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) + 2 \int_0^t ds \left[((\mathbf{w}, \mathbf{w})) - \int_{\Omega} dx (|\mathbf{u}_1|^2 \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2 \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - \int_{\Omega} dx \sum_{k=1}^3 (w_k \mathbf{u}_2) \mathbf{w}_{x_k} \right] = 0. \quad (3.22)$$

Рассмотрим сначала последнее слагаемое в равенстве (3.22). Заметим, что оно в точности совпадает с тем слагаемым, которое было рассмотрено в работе [3]. Из теорем вложения Соболева при $N = 3$ имеем $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$, поэтому $\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \subset \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))$. В силу условий леммы для почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^3 (u_{2k})^4 dx \leq C(T).$$

Тогда из [3] следует, что

$$\left| \int_{\Omega} dx \sum_{k=1}^3 (w_k \mathbf{u}_2) \mathbf{w}_{x_k} \right| \leq C_1(T)((\mathbf{w}, \mathbf{w})) + C_2(T)\|\mathbf{w}\|_2^2.$$

Кроме того,

$$\left| \int_{\Omega} dx (|\mathbf{u}_1|^2 \mathbf{u}_1 - |\mathbf{u}_2|^2 \mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \right| \leq C_3(T)((\mathbf{w}, \mathbf{w})).$$

Таким образом, из (3.22) получаем неравенство

$$\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w})) \leq C_4(T) \int_0^t ds [\|\mathbf{w}\|_2^2 + ((\mathbf{w}, \mathbf{w}))](s), \quad t \in [0, T], \quad (3.23)$$

из которого в силу леммы Гронуолла–Белмана $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ для почти всех $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$.

Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству основного результата этого параграфа. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (3.3)–(3.4) такое, что*

$$u \in \mathbb{L}^\infty(0, T_0; \mathbf{H}(\Omega)), \quad u' \in \mathbb{L}^2(0, T_0; \mathbf{H}(\Omega)),$$

причем момент времени $T_0 > 0$ максимален в том смысле, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конечномерную аппроксимацию задачи (3.1)–(3.2). Так как пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ сепарабельно, то существует последовательность линейно-независимых элементов $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n, \dots$, тотальная в $\mathbf{H}(\Omega)$. Для каждого m определим приближенное решение $\mathbf{u}_m$ уравнения (3.1) следующим образом:

$$\int_0^{T_m} dt \phi(t) \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle = 0, \quad k = \overline{1, m} \quad \forall \phi(t) \in \mathbb{L}^2(0, T_m),$$

$$\mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{m0} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (3.24)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}_m) = \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m) + \Delta \mathbf{u}_m + (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m + |\mathbf{u}_m|^2 \mathbf{u}_m, \quad (3.25)$$

где

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{u}_m(0) = \mathbf{u}_{m0} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{w}_k \rightarrow \mathbf{u}_0 \quad \text{сильно в } \mathbf{H}(\Omega). \quad (3.26)$$

Относительно функций $c_{mk}(t)$ мы предполагаем, что они являются решениями системы уравнений (3.24) класса $\mathbb{C}^{(1)}[0, T_m]$ при некотором $T_m > 0$. В указанном классе имеет место вложение

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle \in \mathbb{C}[0, T_m],$$

поэтому в силу вложения $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(\infty)}[0, T_m] \subset \mathbb{L}^2(0, T_m)$ и, следовательно, в силу основной леммы вариационного исчисления имеем

$$\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle = 0. \quad (3.27)$$

Отсюда в силу (3.26) получим для $c_{mk}(t)$ следующую систему уравнений

$$\sum_{i=1}^m [(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)_2 + ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j))] c'_{mi} + \sum_{i=1}^m ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) c_{mi} + \sum_{i,l=1}^{m,m} b(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j) c_{mi}(t) c_{ml}(t) = \sum_{i=1}^m \left(\left| \sum_{k=1}^m c_{mk} \mathbf{w}_k \right|_2^2 \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \right)_2 c_{mi}, \quad (3.28)$$

где

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3).$$

Поскольку по построению система $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N, \dots$ линейно независима в $\mathbf{H}(\Omega)$, то матрица

$$((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) + (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)_2$$

невырождена, поэтому, обращая ее, приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} c'_{mi} + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} c_{mj}(t) + \sum_{j,k=1,1}^{m,m} \alpha_{ijk} c_{mj}(t) c_{mk}(t) \\ = \sum_{j=1}^m \beta_{ij} \sum_{l=1}^m \left(\left| \sum_{k=1}^m c_{mk} \mathbf{w}_k \right|^2 \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j \right)_2 c_{ml} \end{aligned} \quad (3.30)$$

с начальными условиями $c_{mi}(0) = \gamma_{mi}$. В силу общих результатов система уравнений (3.30) с соответствующими начальными условиями действительно имеет решение в классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T_m]$.

Теперь приступим к выводу априорных оценок. Умножим уравнение (3.27) на $c_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$. Тогда получим первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2] + ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \quad (3.31)$$

Теперь умножим обе части уравнения (3.27) на $c'_{mk}(t)$ и просуммируем по $k = \overline{1, m}$. Тогда получим второе энергетическое равенство

$$((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 + ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2. \quad (3.32)$$

Рассмотрим первое энергетическое равенство. Прежде всего отметим, что поскольку мы рассматриваем трехмерное пространство, то имеет место вложение $\mathbb{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbb{L}^4(\Omega)$. Отсюда сразу получаем вложение

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega).$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\|\mathbf{u}_m\|_4 \leq C((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^{1/2}.$$

Введем обозначение

$$\Phi_m = \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2, \quad \Phi_{m0} = \Phi_m(0). \quad (3.33)$$

Из первого энергетического равенства следует, что

$$\Phi'_m \leq 4C^4 \Phi_m^2, \quad (3.34)$$

а из (3.34) получаем, что

$$\Phi_m(t) \leq \frac{\Phi_{m0}}{1 - 4\Phi_{m0}} C^4 t. \quad (3.35)$$

Поскольку $u_{m0} \rightarrow u_0$ сильно в $\mathbf{H}(\Omega)$, то $\Phi_{m0} \leq C_0$, где C_0 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее, для некоторой подпоследовательности последовательности $\{u_m\}$ возможны два случая: либо $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$, либо $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Обозначим $\bar{B} = 4C^4$.

Рассмотрим сначала случай $\Phi_{m0} \uparrow \Phi_0$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 1 - \bar{B}\Phi_{m0}t &\geq 1 - \bar{B}\Phi_0t \quad \forall t \in (0, T_1), \quad T_1 = \bar{B}^{-1}\Phi_0^{-1}, \\ \Phi_m &\leq C_1 \quad \forall t \in (0, T), \quad T \in (0, T_1), \quad T_1 = \bar{B}^{-1}\Phi_0^{-1}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где C_1 не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{m0} \downarrow \Phi_0$. Для любого $\bar{m} < m$ имеем

$$\Phi_{\bar{m}0} > \Phi_{m0}, \quad 1 - \bar{B}\Phi_{m0}t \geq 1 - \bar{B}\Phi_{\bar{m}0}t.$$

Тогда для любого $t \in [0, \bar{B}^{-1}\Phi_{\bar{m}0}^{-1})$ получим

$$\Phi_m \leq \frac{C_0}{[1 - \Phi_{\bar{m}0}\bar{B}t]}.$$

Итак, для любого фиксированного $T \in (0, T_1)$ найдется такое $\bar{m} \in \mathbb{N}$, что имеют место неравенства (3.36).

Теперь из (3.32) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^t ds [((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2] &\leq \frac{1}{4}\|\mathbf{u}_m\|_4^4 + \frac{1}{2}((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0})) \\ &+ \left| \int_0^t ds ((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2 \right|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Рассмотрим слагаемое $((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2$. Обозначим $\mathbf{h} = \mathbf{u}'_m$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2 &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 h_i(\mathbf{u}_m, \nabla)u_{mi} = \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_{\Omega} h_i(u_{mj}, \partial_j)u_{mi} \\ &= - \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_{\Omega} u_{mi}u_{mj} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = - \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \int_{\Omega} u_{mi}u_{mj} \frac{\partial u'_{mi}}{\partial x_j} = I. \end{aligned}$$

Для I имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \left| u_{mi}u_{mj} \frac{\partial u'_{mi}}{\partial x_j} \right| \leq \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i,j=1,1}^{3,3} \left| \frac{\partial u'_{mi}}{\partial x_j} \right| \\ &\leq \sqrt{3} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_3} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 3 \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m|^2 \left(\sum_{i=1}^3 \left[\left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u'_i}{\partial x_3} \right|^2 \right] \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{2} ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + \frac{3}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из (3.37) и (3.38) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right) \int_0^t ds [(\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2] \\ & \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2\varepsilon}\right) \|\mathbf{u}_m\|_4^4 + \frac{1}{2}((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0})), \quad \varepsilon = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Из (3.36) и (3.39) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m & \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \\ \mathbf{u}'_m & \text{ равномерно по } m \text{ ограничено в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Из (3.40) заключаем, что найдется такая подпоследовательность последовательности $\mathbf{u}_m$, для которой

$$\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{*}-\text{слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad (3.41)$$

$$\mathbf{u}'_m \rightharpoonup \mathbf{v}^* \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)). \quad (3.42)$$

Докажем, что $\mathbf{v}^* = \mathbf{u}'$. Действительно, из (3.41) следует, что в смысле распределений $\mathcal{D}'(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ справедливо предельное равенство $\mathbf{u}'_m \rightarrow \mathbf{u}'$, а в силу единственности предела имеем $\mathbf{v}^* = \mathbf{u}'$.

ЛЕММА 8. Для некоторой подпоследовательности последовательности $\mathbf{u}_m = (u_{1m}, u_{2m}, u_{3m})$ имеем: $u_{im}u_{jm} \rightharpoonup u_i u_j$ слабо в $\mathbb{L}^2(Q_T)$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ для всех $i, j = \overline{1, 3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3.40) имеем

$$u_{mi} \in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad u'_{mi} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad i = \overline{1, 3},$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. Значит,

$$u_{mi} \in \mathbb{H}^1(Q_T) \subset \subset \mathbb{L}^4(Q_T) \subset \mathbb{L}^2(Q_T).$$

Следовательно, $u_{mi} \rightarrow u_i$ сильно в $\mathbb{L}^4(Q_T)$. Докажем теперь утверждение леммы. Действительно, для всех $w \in \mathbb{L}^2(Q_T)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega dx dt u_{mi} u_{mj} w &= \int_0^T \int_\Omega dx dt [u_{mi} - u_i] u_{mj} w \\ &+ \int_0^T \int_\Omega dx dt u_i [u_{mj} - u_j] w + \int_0^T \int_\Omega dx dt u_i u_j w. \end{aligned}$$

При $m \rightarrow +\infty$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_\Omega dx dt [u_{mi} - u_i] u_{mj} w \right| &\leq \|u_{mi} - u_i\|_4 \|u_{mj}\|_4 \|w\|_2 \rightarrow +0, \\ \left| \int_0^T \int_\Omega dx dt [u_{mj} - u_j] u_i w \right| &\leq \|u_{mj} - u_j\|_4 \|u_i\|_4 \|w\|_2 \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 9. Пусть последовательность $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C, \quad \int_0^T dt \|\mathbf{u}'_m\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 \leq C, \quad t \in (0, T), \quad (3.43)$$

где $0 < T < +\infty$ и постоянная C зависит от T . Тогда существует функция $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ для почти всех $s \in [0, T]$ и $\mathbf{u}_{m_k}(s) \rightarrow \mathbf{u}(s)$ сильно в $\mathbf{L}^4(\Omega)$ для почти всех $s \in [0, T]$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеет место компактное вложение $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset\subset \mathbf{L}^4(\Omega)$. Рассмотрим рефлексивное банахово пространство

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)), \mathbf{u}' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))\}. \quad (3.44)$$

Заметим, что для функции $\mathbf{u}_m(t)$ после возможного изменения переменной t на множестве нулевой меры Лебега на $(0, T)$ имеем

$$\mathbf{u}_m(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \subset \mathbb{C}([0, T]; \mathbf{L}^4(\Omega)).$$

В силу (3.43) последовательность $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ ограничена в $\mathbf{R}$. Поскольку $\mathbf{R}$ – рефлексивное банахово пространство, то из последовательности $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{u}_{m_k}\}_{m_k=1}^{+\infty}$. В частности,

$$\mathbf{u}_{m_k} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega)). \quad (3.45)$$

Докажем, что

$$\mathbf{u}_{m_k}(s) \rightarrow \mathbf{u}(s) \quad \text{сильно в } \mathbf{L}^4(\Omega) \text{ для почти всех } s \in [0, T]. \quad (3.46)$$

Воспользуемся техникой работы [19]. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Кроме того, s не играет никакой особой роли и нам остается только показать, что

$$\mathbf{u}_{m_k}(0) \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } \mathbf{L}^4(\Omega). \quad (3.47)$$

Определим теперь $\mathbf{v}_k$ равенством

$$\mathbf{v}_k(t) = \mathbf{u}_{m_k}(\lambda t), \quad (3.48)$$

где $\lambda > 0$ фиксировано, причем

$$\mathbf{u}_{m_k}(0) = \mathbf{v}_k(0), \quad \|\mathbf{v}_k\|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))} \leq c_1 \lambda^{-1/2}, \quad \|\mathbf{v}'_k\|_{\mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{L}^4(\Omega))} \leq c_2 \lambda^{1/2}. \quad (3.49)$$

Если функция $\varphi \in \mathbb{C}^1[0, T]$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi(T) = 0$, то

$$\mathbf{v}_k(0) = \int_0^T (\varphi(t) \mathbf{v}_k)' dt = \beta_k + \gamma_k, \quad \beta_k = \int_0^T \varphi \mathbf{v}'_k dt, \quad \gamma_k = \int_0^T \varphi' \mathbf{v}_k dt.$$

Значит,

$$\|u_{m_k}(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq \|\beta_k\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|\gamma_k\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq c_3 \lambda^{1/2} + \|\gamma_k\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $c_3 \lambda^{1/2} \leq \varepsilon/2$. Поскольку $\mathbf{v}_k \rightharpoonup 0$ слабо в $\mathbb{L}^2(0, T; \mathbf{H}_0^1(\Omega))$, то $\gamma_k \rightharpoonup 0$ слабо в $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Но вложение $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$ компактно, поэтому имеет место сильная сходимости $\gamma_k \rightarrow 0$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$. Следовательно, для произвольного ε найдется такое N , что для всех $m_k > N$ имеет место неравенство

$$\|u_{m_k}(0)\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Итак, (3.47) установлено. Лемма доказана.

Теперь докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 10. Пусть последовательность $\{\mathbf{u}_m\}_{m=1}^{+\infty}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C, \quad \int_0^T dt \|\mathbf{u}'_m\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}^2 \leq C, \quad t \in (0, T), \quad (3.50)$$

где $0 < T < +\infty$ и постоянная C зависит от T . Тогда существует функция $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ для почти всех $s \in [0, T]$ и

$$|\mathbf{u}_{m_k}|^2 \mathbf{u}_{m_k} \rightarrow |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}$$

сильно в $\mathbb{L}^{4/3}(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 9 получаем, что для некоторой подпоследовательности $\mathbf{u}_{m_k}$ последовательности $\mathbf{u}_m$ имеем: $\mathbf{u}_{m_k} \rightarrow \mathbf{u}$ сильно в $\mathbb{L}^4(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$||\mathbf{u}_{m_k}|^2 \mathbf{u}_{m_k} - |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}| \leq C \max\{|\mathbf{u}|^2, |\mathbf{u}_{m_k}|^2\} |\mathbf{u}_{m_k} - \mathbf{u}|.$$

На основе этого неравенства, используя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\| |\mathbf{u}_{m_k}|^2 \mathbf{u}_{m_k} - |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \|_{4/3} \leq C \max\{\|\mathbf{u}\|_4^2, \|\mathbf{u}_{m_k}\|_4^2\} \|\mathbf{u}_{m_k} - \mathbf{u}\|_4,$$

из которой сразу же следует к утверждение леммы. Лемма доказана.

Теперь перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$ в уравнении (3.24). Действительно, в силу (3.41) и (3.42) имеем

$$\int_0^T dt \phi(t) \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m) + \Delta \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k \right\rangle \rightarrow \int_0^T dt \phi(t) \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}) + \Delta \mathbf{u}, \mathbf{w}_k \right\rangle.$$

Рассмотрим теперь нелинейные слагаемые в уравнении (3.24). В силу лемм 8 и 10 получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \phi(t) \langle (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k \rangle &= - \sum_{l,j=1}^{3,3} \int_0^T \int_{\Omega} dx dt \phi(t) u_{jm} u_{lm} \frac{\partial w_{lk}}{\partial x_j} \\ &\rightarrow - \sum_{l,j=1}^{3,3} \int_0^T \int_{\Omega} dx dt \phi(t) u_j u_l \frac{\partial w_{lk}}{\partial x_j} = \int_0^T dt \phi(t) \langle (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{w}_k \rangle, \\ \int_0^T dt \phi(t) \langle |\mathbf{u}_m|^2 \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k \rangle &\rightarrow \int_0^T dt \phi(t) \langle |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u}, \mathbf{w}_k \rangle. \end{aligned}$$

Пусть $T = T_0 > 0$, причем T_0 – максимальный момент времени, т.е. либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < \infty$ и имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty.$$

Предположим что выполнено условие $T_0 < +\infty$, но

$$((\mathbf{u}, \mathbf{u}))(t) \leq C < +\infty, \quad t \in [0, T_0].$$

Заметим теперь, что после изменения переменной t на множестве меры Лебега нуль имеем $u \in \mathbb{C}([0, T_0]; \mathbf{H}(\Omega))$. Пусть $T' \in (0, T_0)$. Тогда

$$\int_0^{T'} ds \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2([0, T']; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega). \quad (3.51)$$

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\int_{T'}^{T'+t} ds \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{L}^2([T', T' + t]; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}(T') = \mathbf{u}_{T'} \in \mathbf{H}(\Omega). \quad (3.52)$$

Сделаем замену переменных $\sigma = s - T'$, $\mathbf{w}(\sigma) = \mathbf{u}(\sigma + T')$. Тогда придем к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \int_0^t d\sigma \langle \mathbf{D}(\mathbf{w})(\sigma), \mathbf{v}(\sigma + T') \rangle &= 0 \quad \forall \mathbf{v}(\sigma + T') \in \mathbb{L}^2([0, t]; \mathbf{H}(\Omega)), \\ \mathbf{w}(0) &= \mathbf{u}_{T'} \in \mathbf{H}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Сравним эту задачу с (3.1). Поэтому в силу локальной разрешимости задачи (3.1) найдется такое $t = T^* = T^*(T') > 0$, что существует единственное решение задачи (3.53). Поскольку

$$\sup_{T' \in [0, T_0]} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) < +\infty,$$

то существует точная нижняя грань функции $T^* = T^*(T') > 0$, которую обозначим через $T^* > 0$. Возьмем $T' = T_0 - T^*/2$. Теперь имеем

$$\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}(t), t \in [0, T']; \mathbf{w}(t - T'), t \in [T', T' + T^*]\}.$$

Так как $T' = T_0 - T^*/2$, то

$$\hat{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}(t), \in [0, T']; \mathbf{w}(t - T'), t \in [T', T_0 + T^*/2]\}.$$

Мы приходим к выводу, что решение задачи (3.1) можно продолжить на интервал $(T_0, +\infty)$. Это противоречит условию $0 < T_0 < +\infty$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Разрушение решения и глобальная во времени разрешимость

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2, \\ \Phi_m(t) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2, \quad J_m(t) = ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и неравенство

$$\|\mathbf{u}_0\|_4^4 > 50((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + 49(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi(0), \quad T_2 = A^{-1}\Phi_0^{-1/2}, \quad T_1 = \frac{1}{4}\Phi_0^{-1}C_2^{-4}, \\ A &= \left[\frac{1}{4}\Phi_0^{-3}[(\Phi'(0) - 84\Phi_0)^2 - 196\Phi_0^2] \right]^{1/2}, \quad B_1 = \frac{2C_1^2}{1 + C_1^2}, \quad B_2 = 4C_2^4, \end{aligned}$$

где C_1 – наилучшая константа вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, т.е.

$$C_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})_2^{1/2} \leq ((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

а C_2 – наилучшая константа вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, т.е.

$$\|\mathbf{w}\|_4 \leq C_2((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Тогда решение задачи (3.3)–(3.4) разрушается за конечное время $T_0 > 0$, т.е.

$$\limsup_{t \uparrow T_0} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty,$$

причем $T_0 \in [T_1, T_2]$. Если же

$$\Phi_0 \leq \frac{C_1^2}{2(1 + C_1^2)C_2^4},$$

то решение задачи (3.3)–(3.4) существует глобально во времени $T_0 = +\infty$, причем

$$\Phi(t) \leq \frac{e^{-B_1 t}}{\Phi_0^{-1} - [1 - e^{-B_1 t}]B_2/B_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом введенных обозначений перепишем первое и второе энергетические равенства (3.31) и (3.32) в следующем виде:

$$\frac{d\Phi_m(t)}{dt} = -((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \quad (4.2)$$

Умножив обе части уравнения (3.27) на $c'_{mk}(t)$ и просуммировав по $k = \overline{1, m}$, получим второе энергетическое равенство

$$J_m(t) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 + ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)_2. \quad (4.3)$$

В силу (3.38) справедлива следующая оценка для $J_m(t)$:

$$J_m(t) \leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 + \frac{3\varepsilon}{2} J_m(t) + \frac{3}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \quad (4.4)$$

Из (4.4) с учетом (4.1) и (4.2) получаем неравенства

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right) J_m(t) \leq -\frac{1}{4} \frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{4} \Phi''_m(t) + \frac{3}{2\varepsilon} \Phi'_m(t) + \frac{3}{\varepsilon} \Phi_m(t), \quad (4.5)$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)) \leq \frac{1}{4\varepsilon}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{\varepsilon}{4}((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)). \quad (4.6)$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\left(1 - \frac{7\varepsilon}{4}\right) J_m(t) \leq \frac{1}{4} \Phi''_m(t) + \frac{3}{2\varepsilon} \Phi'_m(t) + \frac{7}{2\varepsilon} \Phi_m(t). \quad (4.7)$$

Докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 11. *Имеет место неравенство*

$$(\Phi'_m)^2 \leq 2\Phi_m J_m. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения $\Phi_m(t)$ имеем

$$(\Phi'_m(t))^2 = (((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)_2)^2,$$

откуда в силу неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\begin{aligned} (\Phi'_m(t))^2 &\leq (((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m))^{1/2}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^{1/2} + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2^{1/2}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2^{1/2})^2 \\ &\leq (((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)_2)((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2 \leq 2\Phi_m J_m. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из (4.7) и (4.8) получаем такое обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка (см. работу [13]):

$$\Phi''_m \Phi_m - \alpha(\Phi'_m)^2 + \beta\Phi'_m \Phi_m + \gamma\Phi_m^2 \geq 0, \quad (4.9)$$

где

$$\alpha = 2 \left[1 - \frac{7\varepsilon}{4}\right], \quad \beta = \frac{6}{\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{14}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{2}{7}\right).$$

Так как $\varepsilon \in (0, 2/7)$, то $\alpha > 1$. Рассмотрим теперь неравенство (4.9) более подробно. Его нетрудно привести к линейному дифференциальному неравенству вида

$$\mathbb{Z}_m'' + \beta \mathbb{Z}_m' - \delta \mathbb{Z}_m \leq 0, \quad \delta = \gamma(\alpha - 1), \quad (4.10)$$

относительно новой функции

$$\mathbb{Z}_m = \Phi_m^{1-\alpha}. \quad (4.11)$$

Перейдем теперь в уравнении (4.10) к функции

$$\mathbb{Y}_m \equiv \mathbb{Z}_m e^{\beta t}. \quad (4.12)$$

Тогда с учетом (4.11) получим неравенство

$$\mathbb{Y}_m'' - \beta \mathbb{Y}_m' - \delta \mathbb{Y}_m \leq 0. \quad (4.13)$$

Из (4.12) следует, что

$$\mathbb{Y}_m' = e^{\beta t}(\alpha - 1)\Phi_m^{-\alpha} \left(-\Phi_m' + \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_m \right). \quad (4.14)$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0). \quad (4.15)$$

Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим, что

$$\Phi_m'(0) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_m(0). \quad (4.16)$$

В силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathbb{Y}_m$ из условия (4.16), учитывая (4.14), приходим к выводу, что найдется такой интервал $[0, T_{3m})$, принадлежащий области определения $\Phi_m(t)$, что $\mathbb{Y}_m' \leq 0$. Следовательно, при $t \in [0, T_{3m}]$ величина $-\beta \mathbb{Y}_m'(t) \geq 0$. Отсюда и из (4.13) получим

$$\mathbb{Y}_m'' - \delta \mathbb{Y}_m \leq 0, \quad t \in [0, T_{3m}]. \quad (4.17)$$

Потребуем выполнения условия

$$\Phi'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha - 1}} \Phi(0) + \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0). \quad (4.18)$$

Тогда, переходя, если нужно, к подпоследовательности, получим неравенство

$$\Phi_m'(0) > \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha - 1}} \Phi_m(0) + \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_m(0). \quad (4.19)$$

Из (4.17) следует, что

$$(\mathbb{Y}_m')^2 \geq \delta \mathbb{Y}_m^2 + \mathbb{A}_m^2, \quad (4.20)$$

причем в силу (4.19) имеем

$$A_m \equiv \left[(1 - \alpha)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'_m(0) - \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_m(0) \right)^2 - \frac{\delta}{(\alpha - 1)^2} (\Phi_m(0))^2 \right] \right]^{1/2} > 0.$$

Из (4.20) получим, что

$$\mathbb{Y}'_m(t) \leq -A_m \quad \forall t \in [0, T_{3m}]. \quad (4.21)$$

Из (4.21) заключаем, что на области определения функции $\Phi_m(t)$ величина $\mathbb{Y}'_m < 0$, откуда и из (4.21) имеем

$$\mathbb{Y}_m(t) \leq \mathbb{Y}_{m0} - A_m t.$$

Следовательно, найдется такой момент времени $T_{m0} \in (0, T_{2m})$, что

$$\limsup_{t \uparrow T_{m0}} \Phi_m(t) = +\infty,$$

где $T_{2m} = \mathbb{Y}_m(0) A_m^{-1}$.

Теперь получим оптимальные условия на коэффициенты α , β и γ , которые зависят от произвольного параметра $\varepsilon \in (0, 2/7)$.

Действительно, в выражении (4.19) фигурируют две функции параметра $\varepsilon \in (0, 2/7)$:

$$f_1 = \frac{\beta}{\alpha - 1}, \quad f_2 = \left(\frac{\gamma}{\alpha - 1} \right)^{1/2}.$$

Из условия минимума этих функций, учитывая явные значения коэффициентов α , β и γ , приходим к выводу, что $\varepsilon = 1/7$. Следовательно,

$$f_1 = 84, \quad f_2 = (196)^{1/2} = 14, \quad \alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = 42, \quad \gamma = 98.$$

Учитывая это, приходим к оптимальному условию на начальную функцию

$$\Phi'(0) > 14\Phi(0) + 84\Phi(0) = 98\Phi(0), \quad (4.22)$$

где

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2, \quad \Phi'(0) = -((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + \|\mathbf{u}_0\|_4^4.$$

Преобразуя полученное выражение, находим следующее условие на начальную функцию:

$$\|\mathbf{u}_0\|_4^4 > 50((\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)) + 49(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)_2. \quad (4.23)$$

Заметим, что первое энергетическое равенство (4.2) можно переписать в таком эквивалентном виде:

$$\Phi_m(t) = \Phi_{m0} + \int_0^t ds e^{-(t-s)} [(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)_2 + \|\mathbf{u}_m\|_4^4](s). \quad (4.24)$$

Как мы ранее доказали, $\mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u}$ слабо в $\mathbf{H}^1(Q_T)$, откуда в силу теорем вложения Соболева $\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}$ сильно в $\mathbf{L}^4(Q_T) \subset \mathbf{L}^2(Q_T)$. Поэтому в силу (4.24) имеем

$$\begin{aligned}\Phi_m(t) &\rightarrow \eta(t) = \Phi_0 + \int_0^t ds e^{-(t-s)} [(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2 + \|\mathbf{u}\|_4^4](s), \\ \Phi(t) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + \frac{1}{2}(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2, \quad \Phi_0 = \Phi(0),\end{aligned}\quad (4.25)$$

для почти всех $t \in (0, T)$, так как $\mathbf{u}_{m0} \rightarrow \mathbf{u}_0$ сильно в $\mathbf{H}(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$. Возьмем в (3.3)

$$\mathbf{v}(s) = \begin{cases} \mathbf{u}(s), & s \in [0, t], \\ \mathbf{0}, & s \in [t, T], \end{cases}$$

где $\mathbf{u}$ – решение задачи (3.3)–(3.4), существующее в силу теоремы 2. В результате получим

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_0^t ds e^{-(t-s)} [(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2 + \|\mathbf{u}\|_4^4](s).$$

Отсюда и из (4.25) приходим к выводу, что $\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t)$ для почти всех $t \in (0, T)$. Теперь заметим, что из (4.21) следует оценка

$$\Phi_m(t) \geq \frac{\Phi_{m0} e^{\beta t / (\alpha - 1)}}{[1 - \Phi_{m0}^{\alpha-1} A_m t]^{1/(\alpha-1)}},$$

где

$$A_m \equiv \left[(1 - \alpha)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'_m(0) - \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi_m(0) \right)^2 - \frac{\delta}{(\alpha - 1)^2} (\Phi_m(0))^2 \right] \right]^{1/2} > 0.$$

Действуя точно так же как и в работе [14] и переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получим, что

$$\Phi(t) \geq \frac{\Phi_0 e^{\beta t / (\alpha - 1)}}{[1 - \Phi_0^{\alpha-1} A t]^{1/(\alpha-1)}}$$

для почти всех $t \in (0, T_2)$, где $T_2 = A^{-1} \Phi_0^{1-\alpha}$ и

$$A \equiv \left[(1 - \alpha)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[\left(\Phi'(0) - \frac{\beta}{\alpha - 1} \Phi(0) \right)^2 - \frac{\delta}{(\alpha - 1)^2} (\Phi(0))^2 \right] \right]^{1/2} > 0.$$

Из (3.35) получаем оценку снизу на время разрушения решения исходной задачи.

Из первого энергетического равенства (3.31) следует что

$$\Phi'(t) + ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) \leq 4C_2^4 \Phi^2(t), \quad (4.26)$$

где C_2 – константа наилучшего вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^4(\Omega)$, т.е.

$$\|\mathbf{w}\|_4 \leq C_2((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Из (4.26) следует, что

$$\Phi'(t) + C_1^2(\mathbf{u}, \mathbf{u})_2 \leq 4C_2^4\Phi^2(t), \quad (4.27)$$

где C_1 – константа наилучшего вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, т.е.

$$C_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})_2^{1/2} \leq ((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Из (4.26) и (4.27) получаем неравенство

$$\Phi'(t) + B_1\Phi(t) \leq B_2\Phi^2(t), \quad B_1 = \frac{2C_1^2}{1 + C_1^2}, \quad B_2 = 4C_2^4.$$

Отсюда при условии

$$\Phi_0 \leq \frac{C_1^2}{2(1 + C_1^2)C_2^4}$$

получаем, что

$$\Phi(t) \leq \frac{e^{-B_1 t}}{\Phi_0^{-1} - [1 - e^{-B_1 t}]B_2/B_1} \quad \forall t \in [0, +\infty].$$

Теорема доказана.

В заключение мы выражаем искреннюю признательность И. А. Шишмареву за полезное обсуждение полученных в работе результатов и А. К. Гущину за весьма ценное замечание относительно теоремы 1.

Список литературы

- [1] А. П. Осолков, “О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 9, Записки науч. сем. ЛОМИ, **59**, Наука, Л., 1976, 133–177; англ. пер.: А. П. Oskolkov, “Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids”, *J. Math. Sci.*, **10**:2 (1978), 299–335.
- [2] А. П. Осолков, “Нелокальные проблемы для уравнений жидкостей Кельвина–Фойгта и их ε -аппроксимаций”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 26, Записки науч. сем. ЛОМИ, **221**, Наука, Л., 1995, 185–207; англ. пер.: А. П. Oskolkov, “Nonlocal problems for the equations of Kelvin–Voight fluids and their ε -approximations”, *J. Math. Sci. (New York)*, **87**:2 (1997), 3393–3408.
- [3] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1969.
- [4] А. П. Осолков, “О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 6, Записки науч. сем. ЛОМИ, **27**, Наука, Л., 1972, 145–160.

- [5] А. П. Осолков, “Об одной нестационарной системе с малым параметром, регулирующий систему уравнений Навье–Стокса”, *Проблемы математического анализа. Выпуск 4. Интегральные и дифференциальные операторы. Дифференциальные уравнения*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1973, 78–87.
- [6] А. П. Осолков, “О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, 7, Записки науч. сем. ЛОМИ, **38**, Наука, Л., 1973, 98–136.
- [7] Г. А. Свиридюк, “Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости”, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, № 1, 74–79; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, “A model of dynamics of incompressible viscoelastic liquid”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **32**:1 (1988), 94–100.
- [8] Г. А. Свиридюк, “Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости”, *Изв. вузов. Матем.*, 1994, № 1, 62–70; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, “On a model for dynamics of weak-compressible viscous-elastic liquid”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **38**:1 (1994), 59–68.
- [9] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998.
- [10] H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
- [11] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [12] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
- [13] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, 10, Записки науч. сем. ЛОМИ, **69**, Наука, Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
- [14] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [15] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Berlin, 2006.
- [16] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
- [17] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.
- [18] Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

- [19] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

М. О. Корпусов (M. O. Korpusev)

Физический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: korpusev@rsci.ru

Поступила в редакцию

21.05.2008 и 21.11.2008

А. Г. Свешников (A. G. Sveshnikov)

Физический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: agsveshn@math380b.phys.msu.su