Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Жабицкая, Средняя длина приведенной регулярной непрерывной дроби, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 8, 79–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6367>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:52:22

УДК 511.335

Е. Н. Жабицкая

Средняя длина приведенной регулярной непрерывной дроби

Пусть $l(a/b)$ – число шагов в алгоритме Евклида с делением “по избытку”, примененном к числам a и b . В работе получена трехчленная асимптотическая формула для математического ожидания случайной величины $l(a/b)$, когда $1 \leq a \leq b \leq R$ и $R \rightarrow \infty$.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: алгоритм Евклида, деление “по избытку”, средняя длина, непрерывные дроби.

§ 1. Введение

Приведенной регулярной непрерывной дробью называется выражение следующего вида:

$$[[t_0; t_1, t_2, \dots, t_l]] = t_0 - \frac{1}{t_1 - \frac{1}{t_2 - \dots - \frac{1}{t_l}}},$$

где все числа t_n – целые, $t_n \geq 2$ при $n \geq 1$. Всякое рациональное число r единственным образом представляется в виде приведенной регулярной непрерывной дроби $[[t_0; t_1, t_2, \dots, t_l]]$, где $t_0 = [r]$ (верхняя целая часть r), $t_n \geq 2$ при $n \geq 1$ (основные свойства таких дробей приведены в работе Перрона [1; глава I], см. также работу Финкельштейна [2]). Обозначим длину приведенной регулярной непрерывной дроби $[[t_0; t_1, t_2, \dots, t_l]]$, представляющей число r , через $l(r)$.

В настоящей работе получена трехчленная асимптотика со степенным понижением в остаточном члене для средней длины приведенной регулярной непрерывной дроби числа a/b , где $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b \leq R$, $R > 2$ – действительное число. Обозначим через $N(R) = \sum_{b \leq R} \sum_{a \leq b} l(a/b)$ сумму длин всех таких дробей. Тогда $E(R) = 2N(R)/([R]([R] + 1))$ – это средняя длина дроби.

ТЕОРЕМА 1 (основной результат). *При $R \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\begin{aligned} E(R) = & \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \log R \\ & + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^2(2)} \right) \\ & + O(R^{-1} \log^5 R), \end{aligned}$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, γ – константа Эйлера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00371-а).

Приближенные численные значения коэффициентов асимптотической формулы таковы: 0.3039 при $\log^2 R$, 0.1364 при $\log R$ и 0.1264 при единице.

Можно также рассматривать сумму

$$N^*(R) = \sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} l\left(\frac{a}{b}\right)$$

длин приведенных регулярных непрерывных дробей только по взаимно простым числам a , b и, соответственно, среднюю длину таких дробей $E^*(R)$. Тогда каждая приведенная регулярная непрерывная дробь рационального числа, не превосходящего единицу, со знаменателем, не превосходящим R , будет учтена ровно один раз.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $R \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} E^*(R) = & \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \log R \\ & + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{3(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^2(2)} \right) \\ & + O(R^{-1} \log^6 R). \end{aligned} \quad (1)$$

Вопрос о поведении средней длины для обычных непрерывных дробей был впервые исследован Хейльбронном в работе [3]. В 1968 г. он выделил главный член асимптотики для средней длины, где усреднение ведется по числителям. Позднее Портер [4] для того же среднего получил асимптотическую формулу с двумя значащими членами. При усреднении по числителям и знаменателям вероятностными и эргодическими методами Валлее [5] была получена асимптотическая формула со степенным понижением в остаточном члене. Последний результат в этой области принадлежит Устинову [6], который получил асимптотическую формулу с лучшим, чем можно получить из результата Портера, понижением в остаточном члене.

Длина обычной непрерывной дроби числа a/b равна числу шагов в алгоритме Евклида, примененном к числам a и b . Аналогично, можно рассматривать величину $l(a/b)$ как число шагов в алгоритме Евклида с “делением по избытку”. Таким образом, величина $E(R)$ является математическим ожиданием числа шагов алгоритма Евклида с “делением по избытку”, примененном к числам a и b , меняющимся в пределах

$$1 \leq a \leq b \leq R, \quad R \rightarrow \infty.$$

В 2003 году Валлее, исследуя статистические свойства различных видов алгоритмов Евклида в работе [7] с использованием вероятностных и эргодических методов, получила, в частности, главный член асимптотической формулы для математического ожидания числа шагов алгоритма Евклида с “делением по избытку” и, следовательно, для средней длины приведенной регулярной непрерывной дроби. В настоящей работе используется подход, предложенный Устиновым в [6], и получен более сильный результат, чем у Валлее [7; теорема 5].

§ 2. Сведение задачи к нахождению числа решений системы неравенств

2.1. Простейшие свойства подходящих дробей. Пусть r – рациональное число и $[[t_0; t_1, t_2, \dots, t_l]]$ – его представление в виде приведенной регулярной непрерывной дроби. Для $n \leq l$ определим подходящую дробь с номером n как $p_n/q_n = [[t_0; t_1, t_2, \dots, t_n]]$, где $(p_n, q_n) = 1$.

Приведем ниже простейшие свойства подходящих дробей, которые нетрудно доказать с помощью индукции по k (также их можно найти в работе [1; глава I]).

Свойство 1. Для любого целого k , $1 < k \leq l$, выполняются равенства

$$\begin{cases} p_k = a_k p_{k-1} - p_{k-2}, \\ q_k = a_k q_{k-1} - q_{k-2}. \end{cases}$$

Чтобы формулы были справедливы и при $k = 1$, положим

$$p_{-1} = 1, \quad q_{-1} = 0.$$

Свойство 2. Для любого целого k , $0 \leq k \leq l$, выполняется равенство

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = -1.$$

Свойство 3. Для любого целого k , $0 \leq k \leq l$, выполняется неравенство

$$\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}.$$

Свойство 4. Для любого целого k , $0 \leq k \leq l$, выполняется неравенство

$$q_k > q_{k-1}.$$

Свойство 5. Для любого целого k , $0 \leq k \leq l$, выполняется равенство

$$\frac{p_k - \alpha q_k}{p_{k-1} - \alpha q_{k-1}} = a_k - \frac{1}{a_{k-1} - \frac{1}{a_{k-2} - \dots - \frac{1}{a_0 - \alpha}}}.$$

Свойство 6. Для любого целого k , $0 \leq k \leq l$, выполняется неравенство

$$p_k - \alpha q_k < p_{k-1} - \alpha q_{k-1}.$$

2.2. Лемма, характеризующая пару подходящих дробей.

ЛЕММА 1. Пусть α – действительное число из интервала $(0, 1)$, P, P', Q', Q – натуральные числа и $Q < Q'$. Тогда следующие два условия эквивалентны.

- 1) $P/Q, P'/Q'$ – последовательные подходящие дроби приведенной регулярной непрерывной дроби числа α , отличные от этого числа.
- 2) $PQ' - P'Q = 1$ и $0 < (P' - \alpha Q')/(P - \alpha Q) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено первое условие. Тогда из свойств подходящих дробей следует, что

$$\begin{aligned} PQ' - P'Q &= 1, \\ \alpha < \frac{P'}{Q'} < \frac{P}{Q} &\implies \frac{P' - \alpha Q'}{P - \alpha Q} > 0, \\ 0 < P' - \alpha Q' < P - \alpha Q &\implies \frac{P' - \alpha Q'}{P - \alpha Q} < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено второе условие.

Пусть выполнено второе условие. Представим P'/Q' в виде приведенной регулярной непрерывной дроби

$$\frac{P'}{Q'} = [[t_0; t_1, \dots, t_{k+1}]]$$

и рассмотрим ее подходящую дробь с номером k

$$\frac{P''}{Q''} = [[t_0; t_1, \dots, t_k]].$$

Для дробей P'/Q' и P''/Q'' выполняются условия

$$P''Q' - P'Q'' = 1, \quad Q'' < Q'.$$

Покажем, что P'', Q'' совпадают с P, Q из условия леммы. Предположим противное, т.е. что существуют целые P и Q , отличные от P'', Q'' , для которых выполняются условия

$$PQ' - P'Q = 1, \quad Q < Q'.$$

Тогда

$$Q'(P - P'') - P'(Q - Q'') = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{Q'}{P'} = \frac{Q - Q''}{P - P''}.$$

Поскольку дробь в левой части несократима, то

$$Q - Q'' = kQ', \quad P - P'' = kP',$$

где k – целое число. Отсюда следует, что

$$-Q' < Q - Q'' = kQ' < Q' \implies k = 0 \implies P = P'', Q = Q''.$$

Пришли к противоречию.

Из условия $0 < (P' - \alpha Q')/(P - \alpha Q) < 1$ и свойства 5 получаем

$$0 < \frac{P' - \alpha Q'}{P - \alpha Q} = t_{k+1} - \frac{1}{t_k - \frac{1}{t_{k-1} - \dots - \frac{1}{t_0 - \alpha}}} < 1.$$

Так как $t_i \geq 2$ при $i = 1, \dots, k+1$, то

$$0 < t_k - \frac{1}{t_{k-1} - \frac{1}{t_{k-2} - \dots - \frac{1}{t_0 - \alpha}}} < 1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$0 < t_0 - \alpha < 1.$$

Из последних неравенств следует, что

$$0 < t_0 - \alpha < 1 \implies t_0 = [\alpha] = 1,$$

.....

$$0 < t_{k+1} - \frac{1}{t_k - \frac{1}{t_{k-1} - \dots - \frac{1}{t_0 - \alpha}}} < 1 \implies t_{k+1} = \left[\frac{1}{t_k - \frac{1}{t_{k-1} - \dots - \frac{1}{t_0 - \alpha}}} \right].$$

В результате получаем, что

$$\alpha = [[1; t_1, \dots, t_{k+1}, \alpha']].$$

Лемма доказана.

2.3. О числе решений системы. Обозначим через $T(R)$ число решений следующей системы:

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = 1, \\ nP' - mP = a, & nQ' - mQ = b, \\ 1 \leq P' \leq Q', & 1 \leq P \leq Q, & Q < Q', \\ 0 < m < n, & 1 \leq a < b \leq R. \end{cases} \quad (2)$$

ЛЕММА 2. Сумма длин приведенных регулярных непрерывных дробей чисел a/b , где $1 \leq a \leq b \leq R$, равна

$$N(R) = T(R) + \frac{R^2}{2} + O(R). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим число a/b , где $1 \leq a < b \leq R$. По лемме 1 все числа P, P', Q, Q' такие, что $P/Q, P'/Q'$ – последовательные подходящие дроби к числу a/b , отличные от этого числа, и только они являются решениями системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = 1, \\ 0 < \frac{aQ' - bP'}{aQ - bP} < 1, \\ 1 \leq P' \leq Q', & 1 \leq P \leq Q, & Q < Q'. \end{cases} \quad (4)$$

в целых числах. Число таких пар равно $l(a/b) - 1$. Поэтому

$$l\left(\frac{a}{b}\right) = 1 + m(a, b), \quad (5)$$

где $m(a, b)$ – число решений системы (4).

Так как $PQ' - P'Q = 1$, то по паре чисел a и b однозначно находятся m и n такие, что

$$nP' - mP = a, \quad nQ' - mQ = b.$$

Поэтому число решений системы (4) относительно P, P', Q, Q' совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = 1, \\ 0 < \frac{aQ' - bP'}{aQ - bP} < 1, \\ nP' - mP = a, \quad nQ' - mQ = b, \\ 1 \leq P' \leq Q', \quad 1 \leq P \leq Q, \quad Q < Q'. \end{cases} \quad (6)$$

относительно P, P', Q, Q', m, n . Далее, так как

$$\frac{aQ' - bP'}{aQ - bP} = \frac{m}{n},$$

то неравенство $0 < (aQ' - bP')/(aQ - bP) < 1$ системы (6) эквивалентно неравенству $0 < m/n < 1$, т.е. либо $0 < m < n$, либо $n < m < 0$. Если предположить, что реализуется случай $n < m < 0$, то с учетом неравенства $Q < Q'$ получаем, что

$$b = nQ' - mQ < 0.$$

Но это противоречит выбору числа b . Следовательно, реализуется неравенство $n < m < 0$ и система (6) эквивалентна системе

$$\begin{cases} PQ' - P'Q = 1, \\ nP' - mP = a, \quad nQ' - mQ = b, \\ 1 \leq P' \leq Q', \quad 1 \leq P \leq Q, \quad Q < Q', \\ 0 < m < n. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, $m(a, b)$ равно числу решений системы (7).

Просуммировав отдельно левые и правые части формулы (5) по точкам (a, b) , лежащим внутри треугольника $\{(a, b) : 1 \leq a < b \leq R\}$, получаем требуемое равенство (3).

Лемма доказана.

Покажем теперь, что число решений системы (2) равно числу решений системы

$$\begin{cases} nQ' - mQ \leq R, \\ 1 \leq Q < Q', \quad (Q, Q') = 1, \\ 0 < m < n. \end{cases} \quad (8)$$

Очевидно, что любому набору $\{P, P', Q, Q', m, n, a, b\}$ решений системы (2) соответствует набор $\{Q, Q', m, n\}$ решений системы (8). Обратно, по набору $\{Q, Q', m, n\}$ однозначно восстанавливается набор $\{P, P', Q, Q', m, n, a, b\}$ решений системы (2), так как числа P, P' восстанавливаются однозначно по Q, Q' из равенства $PQ' - P'Q = 1$ и неравенств $1 \leq P' \leq Q', 1 \leq P \leq Q$, причем таким образом, что $-mP + nP' < -mQ + nQ'$, а числа a, b определяются однозначно по P, P', Q, Q', m, n .

Сделав замену переменных $k = n - m$, $Q'' = Q' - Q$, преобразуем систему (8) к виду

$$\begin{cases} nQ'' + kQ \leq R, \\ 1 \leq Q, \quad 1 \leq Q'', \quad (Q, Q'') = 1, \\ 1 \leq k < n. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, $T(R)$ равно числу решений системы (9).

§ 3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 3. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$, функции $\rho(x)$ и $\sigma(x)$ определены равенствами

$$\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \rho(t) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{a < x \leq b} f(x) &= \int_a^b f(x) dx + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) + \sigma(a)f'(a) \\ &\quad - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где суммирование ведется по целым x .

Доказательство см., например, в работе [8; теорема I].

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливы следующие формулы:

$$\sum_{a < Q \leq b} 1 = b - a + \rho(b) - \rho(a), \quad (11)$$

$$\sum_{a < Q \leq b} Q = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + b\rho(b) - a\rho(a) + O(1), \quad (12)$$

$$\sum_{Q \leq U} \frac{1}{Q^2} = \zeta(2) - \frac{1}{U} + O\left(\frac{1}{U^2}\right), \quad (13)$$

$$\sum_{Q \leq U} \frac{1}{Q} = \log U + \gamma + \frac{\rho(U)}{U} + O\left(\frac{1}{U^2}\right), \quad (14)$$

$$\sum_{Q \leq U/2} \frac{1}{U - Q} = \log 2 + O\left(\frac{1}{U}\right), \quad (15)$$

$$\sum_{Q \leq U} \frac{\log Q}{Q} = \frac{\log^2 U}{2} + \gamma_1 + \rho(U) \frac{\log U}{U} + O\left(\frac{\log U}{U^2}\right), \quad (16)$$

(γ_1 – константа Стильтьеса)

$$\sum_{Q \leq U/2} \frac{\log(1 - Q/U)}{Q} = \frac{1}{2}(\log^2 2 - \zeta(2)) - \frac{2}{U} \rho\left(\frac{U}{2}\right) \log 2 + \frac{1}{2U} + O\left(\frac{1}{U^2}\right). \quad (17)$$

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha = p/q$ – рациональное число, $(p, q) = 1$ ((p, q) – наибольший общий делитель чисел p и q); β , R_1 , R_2 – действительные числа. Тогда

$$\sum_{R_1 < x \leq R_2} \{\alpha x + \beta\} = \frac{R_2 - R_1}{2} + O\left(\left(\frac{R_2 - R_1}{q} + 1\right)s(\alpha)\right),$$

где $s(\alpha)$ – сумма неполных частных обычной непрерывной дроби числа α (если $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, то $s(\alpha) = a_0 + a_1 + \dots + a_n$).

Доказательство см., например, в работе [9; § 2, теорема 2].

ЛЕММА 5. Для любого натурального $b \geq 2$

$$\sum_{a=1}^b s\left(\frac{a}{b}\right) \ll b \log^2 b.$$

Доказательство см. в работе [10].

ЛЕММА 6. При $U \geq 2$ для суммы

$$\Phi(U) = \sum_{Q'' \leq U} \sum_{Q \leq Q''} \frac{U^4}{2Q''(Q'' + Q)}$$

справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \Phi(U) &= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 + \frac{U^4}{2} \left(\log^2 2 + \gamma \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2} \right) \\ &\quad + \frac{U^3}{2} \left(\rho(U) \log 2 + \frac{1}{4} \right) + O(U^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство см. в работе [6; лемма 8].

Следующие леммы приведем с доказательствами.

ЛЕММА 7. При $R \geq 2$ справедливы следующие асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d)}{d^2} &= \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d) \log d}{d^2} = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\left(\frac{\log R}{R}\right), \\ \sum_{d \leq R} \frac{\mu(d) \log^2 d}{d^2} &= \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^3(2)} + O\left(\frac{\log^2 R}{R}\right), \end{aligned}$$

где $\mu(d)$ – функция Мёбиуса ($\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^r$, если n есть произведение r различных простых чисел, $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим представление функции $1/\zeta(s)$ в виде ряда (см., например, [11]):

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^s}.$$

Дважды продифференцировав его по s , получим равенства

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} &= \left(\frac{1}{\zeta(s)}\right)'_s = -\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \log d}{d^s}, \\ \frac{2(\zeta'(s))^2 - \zeta''(s)\zeta(s)}{\zeta^3(s)} &= \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta^2(s)}\right)'_s = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d) \log^2 d}{d^s}, \end{aligned}$$

в которых остается подставить $s = 2$ и оценить остаток ряда интегралом от R до ∞ от суммируемой функции.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\Psi(R) = aR^2 \log^2 R + bR^2 \log R + cR^2 + O(R \log^k R)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq R} \Psi\left(\frac{R}{d}\right) \mu(d) &= \frac{a}{\zeta(2)} R^2 \log^2 R + \left(\frac{b}{\zeta(2)} - 2a \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} \right) R^2 \log R \\ &+ \left(\frac{c}{\zeta(2)} - b \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + a \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^3(2)} \right) R^2 + O(R \log^{k+1} R). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению $\Psi(R)$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{R}{d}\right) \mu(d) &= \left(a \frac{\mu(d)}{d^2} \right) R^2 \log^2 R + \left(b \frac{\mu(d)}{d^2} - 2a \frac{\mu(d) \log d}{d^2} \right) R^2 \log R \\ &+ \left(c \frac{\mu(d)}{d^2} - b \frac{\mu(d) \log d}{d^2} + a \frac{\mu(d) \log^2 d}{d^2} \right) R^2 + O\left(\frac{R}{d} \log^k \frac{R}{d} \right). \end{aligned}$$

Остается просуммировать эти равенства по $d \leq R$ и применить лемму 7.

ЛЕММА 8. При $U \geq 2$, $U \notin \mathbb{Z}$ справедливы следующие асимптотические формулы

$$\sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2kn} = \frac{U^4}{4} \zeta(2) - \frac{U^3}{2} + O(U^2 \log U), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq U \\ n+k \leq U}} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2nk} &= \sum_{\substack{n < U \\ n+k \leq U}} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2nk} = \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \gamma \log U + \frac{U^4}{4} (\gamma^2 - 2\zeta(2)) \\ &+ \frac{3U^3}{4} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma) + O(U^2 \log U). \end{aligned} \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первую сумму разобьем на две части

$$\sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2kn} = \sum_{k \leq U/2} \sum_{U-k < n < U} \frac{U^4}{2kn} + \sum_{U/2 < k < U} \sum_{k < n < U} \frac{U^4}{2kn}.$$

Найдем асимптотическую формулу для первой части. Для этого проведем сначала суммирование по n , используя формулу (14), затем сложим подобные слагаемые, используя то, что $\rho(U-k) = \rho(U)$, и подставим в полученное выражение формулы (17) и (15) из следствия 2. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq U/2} \sum_{U-k < n < U} \frac{U^4}{2nk} &= \sum_{k \leq U/2} \frac{U^4}{2k} (\log U - \log(U-k) + \frac{\rho(U)}{U} - \frac{\rho(U-k)}{U-k}) \\ &+ O\left(\frac{1}{U^2}\right) + O\left(\frac{1}{(U-k)^2}\right) \\ &= -\frac{U^4}{2} \sum_{k \leq U/2} \frac{\log(1-k/U)}{k} - \frac{U^3}{2} \sum_{k \leq U/2} \frac{\rho(U)}{U-k} + O(U^2 \log U) \\ &= \frac{U^4}{2} \left(\frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\log^2 2}{2} \right) - \frac{U^3}{4} - \frac{U^3}{2} \rho(U) \log 2 + U^3 \rho\left(\frac{U}{2}\right) \log 2 + O(U^2 \log U). \end{aligned} \quad (21)$$

Найдем асимптотическую формулу для второй части. Для этого, как и выше, проведем сначала суммирование по n , используя формулу (14), затем разобьем сумму на слагаемые по степеням k и $\log k$ и почленно применим формулы (14), (16) и (13) следствия 2. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{U/2 < k < U} \sum_{k < n < U} \frac{U^4}{2nk} \\
 &= \sum_{U/2 < k < U} \frac{U^4}{2k} \left(\log U - \log k + \frac{\rho(U)}{U} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{U^2}\right) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) \\
 &= \left(\frac{U^4}{2} \log U + \frac{U^3}{2} \rho(U) \right) \left(\log 2 + \frac{\rho(U)}{U} - \frac{2}{U} \rho\left(\frac{U}{2}\right) + O\left(\frac{1}{U^2}\right) \right) \\
 &\quad - \frac{U^4}{2} \left(\frac{\log^2 U}{2} - \frac{\log^2 U/2}{2} + \frac{\rho(U)}{U} \log U - \frac{2}{U} \rho\left(\frac{U}{2}\right) \log \frac{U}{2} + O\left(\frac{1}{U^2} \log U\right) \right) \\
 &\quad - \frac{U^4}{4} \left(-\frac{1}{U} + \frac{2}{U} + O\left(\frac{1}{U^2}\right) \right) \\
 &= \frac{U^4}{4} \log^2 2 - \frac{U^3}{4} + \frac{U^3}{2} \rho(U) \log 2 - U^3 \rho\left(\frac{U}{2}\right) \log 2 + O(U^2 \log U). \tag{22}
 \end{aligned}$$

Сложив формулы (21) и (22), получим требуемый результат (19).

Вторую сумму представим в виде следующей разности:

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k \leq U}} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2nk} = \sum_{n \leq U} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2nk} - \sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2nk}.$$

Найдем асимптотическую формулу для уменьшаемого (используем формулы (14) и (13) следствия 2). Имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq U} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2nk} &= \frac{U^4}{4} \left(\left(\sum_{n \leq U} \frac{1}{n} \right)^2 - \left(\sum_{n \leq U} \frac{1}{n^2} \right) \right) \\
 &= \frac{U^4}{4} \left(\left(\log U + \gamma + \frac{\rho(U)}{U} + O\left(\frac{1}{U^2}\right) \right)^2 - \left(\zeta(2) - \frac{1}{U} + O\left(\frac{1}{U^2}\right) \right) \right) \\
 &= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \gamma \log U + \frac{U^4}{4} (\gamma^2 - \zeta(2)) \\
 &\quad + \frac{U^3}{4} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma) + O(U^2 \log U). \tag{23}
 \end{aligned}$$

Вычитая из формулы (23) формулу (19), получим (20).

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. При $U \geq 2$, $U \notin \mathbb{Z}$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{n < U \\ n+k \leq U}} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2n(n+k)} &= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 + \frac{U^4}{2} \left(\gamma \log 2 - \zeta(2) + \frac{\log^2 2}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{U^3}{2} + \frac{U^3}{2} \rho(U) \log 2 + O(U^2 \log U), \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^4}{2k(n+k)} \\
&= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \log U (\gamma - \log 2) + \frac{U^4}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \gamma \log 2 - \frac{\log^2 2}{2} \right) \\
&\quad + \frac{U^3}{4} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma - \log 2) + O(U^2 \log U). \tag{25}
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем первую сумму на две части:

$$\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^4}{2n(n+k)} = \sum_{n \leq U/2} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2n(n+k)} + \sum_{U/2 < n < U} \sum_{n+k \leq U} \frac{U^4}{2n(n+k)}.$$

Найдем асимптотическую формулу для первой части (используем лемму 6 и формулу (13) следствия 2). Имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq U/2} \sum_{k < n} \frac{U^4}{2n(n+k)} = \sum_{n \leq U/2} \sum_{k \leq n} \frac{U^4}{2n(n+k)} - \sum_{n \leq U/2} \frac{U^4}{4n^2} \\
&= \frac{U^4}{2} \log \frac{U}{2} \log 2 + \frac{U^4}{2} \left(\log^2 2 + \gamma \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2} \right) \\
&\quad + U^3 \left(\rho \left(\frac{U}{2} \right) \log 2 + \frac{1}{4} \right) + O(U^2) - \frac{U^4}{4} \left(\zeta(2) - \frac{2}{U} + O \left(\frac{1}{U^2} \right) \right) \\
&= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 + \frac{U^4}{2} (\gamma \log 2 - \zeta(2)) + \frac{3U^3}{4} + U^3 \rho \left(\frac{U}{2} \right) \log 2 + O(U^2), \tag{26}
\end{aligned}$$

Найдем асимптотическую формулу для второй части. Для этого сведем сумму к уже найденной сумме (см. формулу (22)). Имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{U/2 < n < U} \sum_{n+k \leq U} \frac{U^4}{2n(n+k)} = \sum_{U/2 < n < U} \sum_{n < t \leq U} \frac{U^4}{2nt} \\
&= \frac{U^4}{4} \log^2 2 - \frac{U^3}{4} + \frac{U^3}{2} \rho(U) \log 2 - U^3 \rho \left(\frac{U}{2} \right) \log 2 + O(U^2 \log U). \tag{27}
\end{aligned}$$

Сложив формулы (26) и (27), получим требуемый результат (24).

Вторую сумму представим в виде разности и, подставляя формулы (20) и (24), получим требуемый результат:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^4}{2k(n+k)} = \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^4}{2nk} - \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^4}{2n(n+k)} \\
&= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \log U (\gamma - \log 2) + \frac{U^4}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \gamma \log 2 - \frac{\log^2 2}{2} \right) \\
&\quad + \frac{U^3}{4} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma - \log 2) + O(U^2 \log U).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 10. При $U \geq 2$, $U \notin \mathbb{Z}$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{U^3}{k} = U^4 \log 2 - \frac{U^3}{2} (1 + \log 2) + U^3 \rho(U) \log 2 + O(U^2). \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем рассматриваемую сумму на две части так:

$$\sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{U^3}{k} = \sum_{k \leq U/2} \sum_{U-k < n < U} \frac{U^3}{k} + \sum_{U/2 < k < U} \sum_{k < n < U} \frac{U^3}{k}.$$

Найдем асимптотическую формулу для первой части с помощью формулы (11). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq U/2} \sum_{U-k < n < U} \frac{U^3}{k} &= \sum_{k \leq U/2} U^3 = U^3 \left(\frac{U}{2} + \rho\left(\frac{U}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{U^4}{2} - \frac{U^3}{2} + U^3 \rho\left(\frac{U}{2}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Найдем асимптотическую формулу для второй части. Для этого используем формулы (11) и (14). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{U/2 < k < U} \sum_{k < n < U} \frac{U^3}{k} &= \sum_{U/2 < k < U} \frac{U^3}{k} \left(U - k + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(U^4 + U^3 \rho(U) - \frac{U^3}{2} \right) \left(\log 2 + \frac{\rho(U)}{U} - \frac{2}{U} \rho\left(\frac{U}{2}\right) + O\left(\frac{1}{U^2}\right) \right) \\ &\quad - U^3 \left(\frac{U}{2} + \rho(U) - \rho\left(\frac{U}{2}\right) \right) \\ &= U^4 \log 2 - \frac{U^4}{2} - U^3 \frac{\log 2}{2} + U^3 \rho(U) \log 2 - U^3 \rho\left(\frac{U}{2}\right) + O(U^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Сложив формулы (29) и (30), получим требуемый результат (28).

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. При $U \geq 2$, $U \notin \mathbb{Z}$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{nU^2}{2k} = \frac{U^4}{4} \log 2 + \frac{U^4}{8} - \frac{3U^3}{8} + \frac{U^3}{2} \rho(U) \left(\log 2 + \frac{1}{2} \right) + O(U^2 \log U). \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем рассматриваемую сумму на две части так:

$$\sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{nU^2}{2k} = \sum_{k \leq U/2} \sum_{U-k < n < U} \frac{nU^2}{2k} + \sum_{U/2 < k < U} \sum_{k < n < U} \frac{nU^2}{2k}.$$

Найдем асимптотическую формулу для первой части. Для этого используем формулы (11) и (12). Имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \leq U/2} \sum_{U-k < n < U} \frac{nU^2}{2k} \\
&= \sum_{k \leq U/2} \frac{U^2}{2k} \left(\frac{U^2}{2} - \frac{1}{2}(U-k)^2 + \rho(U)U - \rho(U)(U-k) + O(1) \right) \\
&= \sum_{k \leq U/2} \left(\frac{U^3}{2} - \frac{kU^2}{4} + \frac{U^2}{2}\rho(U) + O\left(\frac{U^2}{k}\right) \right) \\
&= \left(\frac{U^3}{2} + \frac{U^2}{2}\rho(U) \right) \left(\frac{U}{2} + \rho\left(\frac{U}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) \\
&\quad - \frac{U^2}{4} \left(\frac{U^2}{8} + \rho\left(\frac{U}{2}\right)\frac{U}{2} + O(1) \right) + O(U^2 \log U) \\
&= \frac{7U^4}{32} - \frac{U^3}{4} + \frac{U^3}{4}\rho(U) + \frac{3U^3}{8}\rho\left(\frac{U}{2}\right) + O(U^2 \log U). \tag{32}
\end{aligned}$$

Найдем асимптотическую формулу для второй части. Для этого сначала проведем суммирование по n с помощью формулы (12), а затем разобьем полученное выражение на слагаемые по степеням k и применим формулы (14), (12) и (11). Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \sum_{U/2 < k < U} \sum_{k < n < U} \frac{nU^2}{2k} = \sum_{U/2 < k < U} \frac{U^2}{2k} \left(\frac{U^2}{2} - \frac{k^2}{2} + \rho(U)U - \frac{k}{2} + O(1) \right) \\
&= \sum_{U/2 < k < U} \left(\frac{U^4}{4k} + \frac{U^3}{2k}\rho(U) - \frac{U^2k}{4} - \frac{U^2}{4} + O\left(\frac{U^2}{k}\right) \right) \\
&= \left(\frac{U^4}{4} + \frac{U^3}{2}\rho(U) \right) \left(\log 2 + \frac{\rho(U)}{U} - \rho\left(\frac{U}{2}\right)\frac{2}{U} + O\left(\frac{1}{U^2}\right) \right) \\
&\quad - \frac{U^2}{4} \left(\frac{3U^2}{8} + \rho(U)U - \rho\left(\frac{U}{2}\right)\frac{U}{2} + O(1) \right) \\
&\quad - \frac{U^2}{4} \left(\frac{U}{2} + O(1) \right) + O(U^2 \log U) \\
&= \frac{U^4}{4} \log 2 - \frac{3U^4}{32} - \frac{U^3}{8} + \frac{U^3}{2}\rho(U) \log 2 - \frac{3U^3}{8}\rho\left(\frac{U}{2}\right) + O(U^2 \log U). \tag{33}
\end{aligned}$$

Сложив (32) и (33), получим требуемый результат (31).

Лемма доказана.

ЛЕММА 12. При $U \geq 2$, $U \notin \mathbb{Z}$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{k < n} \frac{U^3}{n} = U^4(1 - \log 2) - \frac{U^3}{2} \log 2 + U^3 \rho(U)(1 - \log 2) + O(U^2). \tag{34}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулы (11) и (14), для рассматриваемой суммы получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{U^3}{n} &= \sum_{U/2 < n \leq U} \sum_{U-n < k \leq n-1} \frac{U^3}{n} = \sum_{U/2 < n \leq U} \frac{U^3}{n} \left(2n - U - \frac{1}{2} - \rho(U) \right) \\
 &= \sum_{U/2 < n \leq U} \left(2U^3 - \frac{U^4}{n} - \frac{U^3}{2n} - \rho(U) \frac{U^3}{n} \right) = 2U^3 \left(\frac{U}{2} + \rho(U) - \rho \left(\frac{U}{2} \right) \right) \\
 &\quad - \left(U^4 + \frac{U^3}{2} + U^3 \rho(U) \right) \left(\log 2 + \frac{\rho(U)}{U} - \frac{2}{U} \rho \left(\frac{U}{2} \right) + O \left(\frac{1}{U^2} \right) \right) \\
 &= U^4 (1 - \log 2) - \frac{U^3}{2} \log 2 + U^3 \rho(U) (1 - \log 2) + O(U^2),
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. При $U \geq 2$, $U \notin \mathbb{Z}$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{n \leq U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{kU^2}{2n} = \frac{U^4}{4} (1 - \log 2) - \frac{U^3}{8} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (1 - \log 2) + O(U^2). \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (12), (14) и (11), для рассматриваемой суммы получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{kU^2}{2n} &= \sum_{U/2 < n \leq U} \sum_{U-n < k \leq n-1} \frac{kU^2}{2n} \\
 &= \sum_{U/2 < n \leq U} \frac{U^2}{2n} \left(\frac{(n-1)^2}{2} - \frac{1}{2} (U-n)^2 + \frac{n}{2} - \rho(U) (U-n) + O(1) \right) \\
 &= \sum_{U/2 < n \leq U} \left(-\frac{U^4}{4n} + \frac{U^3}{2} - \frac{U^2}{4} - \frac{U^3}{2n} \rho(U) + \frac{U^2}{2} \rho(U) + O(1) \right) \\
 &= \left(-\frac{U^4}{4} - \frac{U^3}{2} \rho(U) \right) \left(\log 2 + \frac{\rho(U)}{U} - \frac{2}{U} \rho \left(\frac{U}{2} \right) + O \left(\frac{1}{U^2} \right) \right) \\
 &\quad + \left(\frac{U^3}{2} - \frac{U^2}{4} + \frac{U^2}{2} \rho(U) \right) \left(\frac{U}{2} + \rho(U) - \rho \left(\frac{U}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{U^4}{4} (1 - \log 2) - \frac{U^3}{8} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (1 - \log 2) + O(U^2).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 14. При $U \geq 2$, $U \notin \mathbb{Z}$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k+Q'' < U} \frac{U^4}{2kQ''} &= \frac{U^4}{2} \log^2 U + U^4 \gamma \log U + \frac{U^4}{2} (\gamma^2 - \zeta(2)) + \frac{U^3}{2} \\
 &\quad + U^3 \rho(U) (\log U + \gamma) + O(U^2 \log U). \quad (36)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем сумму на части следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k+Q'' < U} \frac{U^4}{2kQ''} &= \sum_{\substack{k < Q'' \\ k+Q'' < U}} \frac{U^4}{2kQ''} + \sum_{\substack{Q'' < k \\ k+Q'' < U}} \frac{U^4}{2kQ''} + \sum_{k < U/2} \frac{U^4}{2k^2} \\ &= 2 \sum_{\substack{k < Q'' \\ k+Q'' < U}} \frac{U^4}{2kQ''} + \sum_{k < U/2} \frac{U^4}{2k^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Согласно лемме 8 асимптотическая формула для первой части такова:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k < Q'' \\ k+Q'' < U}} \frac{U^4}{2kQ''} &= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \gamma \log U + \frac{U^4}{4} (\gamma^2 - 2\zeta(2)) + \frac{3U^3}{4} \\ &\quad + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma) + O(U^2 \log U). \end{aligned} \quad (38)$$

Найдем асимптотическую формулу для второй части, используя формулу (13). Имеем

$$\sum_{k < U/2} \frac{U^4}{2k^2} = \frac{U^4}{2} \zeta(2) - U^3 + O(U^2). \quad (39)$$

Сложив (38) и (39), получим требуемый результат (36).

Лемма доказана.

§ 4. Доказательство основного результата

ТЕОРЕМА 1 (основной результат). При $R \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} E(R) &= \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \log R \\ &\quad + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^2(2)} \right) \\ &\quad + O(R^{-1} \log^5 R), \end{aligned} \quad (40)$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, γ – константа Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что формула (40) доказана для всех R , не являющихся полными квадратами. Докажем ее для $R = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Для этого рассмотрим $R_1 = n^2 + n^{-10}$. Для R_1 формула (40) верна по предположению, а поскольку неравенствам $1 \leq a \leq b \leq R$ и $1 \leq a \leq b \leq R_1$ удовлетворяют одни и те же целые числа a и b , то из нее будет следовать соответствующая формула для R . Следовательно, $R = n^2$ можно не рассматривать при дальнейшем доказательстве.

В силу леммы 2 и определения величины $E(R)$ теорема 1 следует из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. При $R \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула для $T(R)$:

$$\begin{aligned} T(R) = & \frac{R^2}{4\zeta(2)} \log^2 R + \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) - \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} \right) \log R \\ & + \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma - \zeta(2) + \frac{7}{4} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^3(2)} \right) + O(R \log^5 R). \end{aligned} \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $K(R)$ число решений системы

$$\begin{cases} nQ'' + kQ \leq R, \\ 1 \leq Q, \quad 1 \leq Q'', \\ 1 \leq k < n. \end{cases} \quad (42)$$

Так как $T(R)$ – это число решений системы (8), то

$$K(R) = \sum_{d \leq R} T\left(\frac{R}{d}\right),$$

и по формуле преобразования Мёбиуса получаем

$$T(R) = \sum_{d \leq R} \mu(d) K\left(\frac{R}{d}\right). \quad (43)$$

Таким образом, достаточно найти $K(R)$.

Для этого введем параметр $U = \sqrt{R}$. Мы можем считать, что U – не целое (т.е. R не является полным квадратом). Рассмотрим следующие пять случаев:

1. $Q \leq Q'', Q'' \leq U$;
2. $Q \leq Q'', Q'' > U$;
3. $Q > Q'', Q \leq U$;
4. $Q > Q'', Q > U, n \leq U$;
5. $Q > Q'', Q > U, n > U$.

4.1. Случай 1. В этом случае система (42) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} nQ'' + kQ \leq R, \\ 1 \leq Q \leq Q'' \leq U, \\ 1 \leq k < n. \end{cases} \quad (44)$$

При фиксированных значениях Q, Q'' область S решений системы (44) относительно n и k изображена на рис. 1.

Найдем количество целых точек в области S . Для этого представим ее в виде разности трапеции

$$S_1 = \left\{ (k, n) : 0 < k \leq \frac{R}{Q + Q''}, 0 < n \leq -k \frac{Q}{Q''} + \frac{R}{Q''} \right\}$$

и треугольника

$$S_2 = \left\{ (k, n) : 0 < k \leq \frac{R}{Q + Q''}, 0 < n \leq k \right\}.$$

Рис. 1

Число целых точек в трапеции S_1 равно

$$\begin{aligned}\Sigma_1(Q, Q'') &= \sum_{k=1}^{\lfloor R/(Q+Q'') \rfloor} \left[-k \frac{Q}{Q''} + \frac{R}{Q''} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor R/(Q+Q'') \rfloor} \left(\left(-k \frac{Q}{Q''} + \frac{R}{Q''} \right) - \left\{ -k \frac{Q}{Q''} + \frac{R}{Q''} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{R}{Q+Q''} \right] \left(2 \frac{R}{Q''} - \frac{Q}{Q''} - \frac{Q}{Q''} \left[\frac{R}{Q+Q''} \right] \right) - W \left(-\frac{Q}{Q''}, \frac{R}{Q''}, 1, \left[\frac{R}{Q+Q''} \right] \right),\end{aligned}$$

где

$$W(\alpha, \beta, R_1, R_2) = \sum_{x=R_1}^{R_2} \{ \alpha x + \beta \}.$$

Число целых точек в треугольнике S_2 равно

$$\Sigma_2(Q, Q'') = \sum_{k=1}^{\lfloor R/(Q+Q'') \rfloor} [k] = \sum_{k=1}^{\lfloor R/(Q+Q'') \rfloor} k = \frac{1}{2} \left[\frac{R}{Q+Q''} \right] \left(\left[\frac{R}{Q+Q''} \right] + 1 \right).$$

Вычитая Σ_2 из Σ_1 и применяя лемму 4, получаем, что число целых точек в области S равно

$$\begin{aligned}\Sigma(Q, Q'') &= \Sigma_1(Q, Q'') - \Sigma_2(Q, Q'') \\ &= \frac{R^2}{2Q''(Q+Q'')} - \frac{R}{2Q''} + \frac{Q+Q''}{2Q''} \left(\left\{ \frac{R}{Q+Q''} \right\} - \left\{ \frac{R}{Q+Q''} \right\}^2 \right) \\ &\quad - W \left(-\frac{Q}{Q''}, \frac{R}{Q''}, 1, \left[\frac{R}{Q+Q''} \right] \right) = \frac{U^4}{2Q''(Q+Q'')} - \frac{U^2}{2Q''} - \frac{U^2}{2(Q+Q'')} \\ &\quad + O \left(\frac{Q}{Q''} \right) + O(1) + O \left(\left(\frac{(Q, Q'')U^2}{Q''(Q+Q'')} + 1 \right) s \left(\frac{Q}{Q''} \right) \right),\end{aligned}\tag{45}$$

где (Q, Q'') – это наибольший общий делитель Q и Q'' .

Чтобы найти количество целочисленных решений системы (44), нужно просуммировать величины $\Sigma(Q, Q'')$ по Q и Q'' , где $Q \leq Q'' \leq U$. Будем суммировать отдельно слагаемые каждого вида в выражении (45) для $\Sigma(Q, Q'')$.

К слагаемым первого вида применим лемму 6. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{Q'' \leq U} \sum_{Q \leq Q''} \frac{U^4}{2Q''(Q + Q'')} &= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 \\ &+ \frac{U^4}{2} \left(\log^2 2 + \gamma \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2} \right) + \frac{U^3}{2} \left(\rho(U) \log 2 + \frac{1}{4} \right) + O(U^2). \end{aligned}$$

Сумму слагаемых второго вида вычислим непосредственно, т.е.

$$\sum_{Q'' \leq U} \sum_{Q \leq Q''} \frac{U^2}{2Q''} = \sum_{Q'' \leq U} \frac{U^2}{2} = \frac{U^3}{2} + O(U^2).$$

Сумму слагаемых третьего вида найдем, используя формулу (14):

$$\begin{aligned} \sum_{Q'' \leq U} \sum_{Q \leq Q''} \frac{U^2}{2(Q + Q'')} &= \sum_{Q'' \leq U} \frac{U^2}{2} \left(\log 2 + O\left(\frac{1}{Q''}\right) \right) \\ &= \frac{U^3}{2} \log 2 + O(U^2 \log U). \end{aligned} \quad (46)$$

Оценим теперь остаточный член в выражении (45). Так как выполняются неравенства

$$O\left(\frac{Q}{Q''}\right) \leq O(1) \leq s\left(\frac{Q}{Q''}\right) \leq O\left(\frac{(Q'', Q)U^2}{Q''(Q'' + Q)} s\left(\frac{Q}{Q''}\right)\right),$$

то достаточно оценить последнее выражение в этой цепочке неравенств. Используем для этого лемму 5. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{Q'' < U} \sum_{Q < Q''} O\left(\frac{(Q'', Q)U^2}{Q''(Q'' + Q)} s\left(\frac{Q}{Q''}\right)\right) &\leq \sum_{d < U} \sum_{Q'' < U} \sum_{\substack{Q < Q'' \\ (Q'', Q) = d}} O\left(\frac{U^2 d}{(Q'')^2} s\left(\frac{Q}{Q''}\right)\right) \\ &\leq \sum_{d < U} \sum_{Q''_1 < U/d} \sum_{\substack{Q_1 < Q''_1 \\ (Q''_1, Q_1) = 1}} O\left(\frac{U^2}{d(Q''_1)^2} s\left(\frac{Q_1}{Q''_1}\right)\right) \\ &\leq \sum_{d < U} \sum_{Q''_1 < U/d} O\left(\frac{U^2}{dQ''_1} \log^2 Q''_1\right) \leq \sum_{d < U} O\left(\frac{U^2}{d} \log^3 U\right) \leq O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (47)$$

Сложив отдельно левые и отдельно правые части полученных формул, находим число решений в случае 1:

$$\begin{aligned} \sum_{Q'' \leq U} \sum_{Q \leq Q''} \Sigma(Q, Q'') &= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 + \frac{U^4}{2} \left(\log^2 2 + \gamma \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2} \right) \\ &+ \frac{U^3}{2} \left(\rho(U) \log 2 - \frac{3}{4} - \log 2 \right) + O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (48)$$

4.2. Случай 2. В этом случае система (42) принимает вид

$$\begin{cases} nQ'' + kQ \leq R, \\ 1 \leq Q \leq Q'', & Q'' > U, \\ 1 \leq k < n. \end{cases} \quad (49)$$

Рис. 2

Рис. 3

Из неравенств $nQ'' + kQ \leq R$ и $Q'' > U$ следует, что $n < R/U = U$.

Зафиксируем значения k, n . Область S решений системы (49) относительно Q, Q'' при $n+k \leq U$ изображена на рис. 2, а при $n+k > U$ – на рис. 3.

Найдем число целых точек в этой области в каждом из получившихся двух подслучаев.

В случае $n+k \leq U$ представим S в виде разности трапеции

$$S_1 = \left\{ Q, Q'' : 0 < Q \leq \frac{R}{n+k}, U < Q'' \leq -Q \frac{k}{n} + \frac{R}{n} \right\},$$

и треугольника

$$S_2 = \left\{ U < Q \leq \frac{R}{n+k}, U < Q'' < Q \right\}.$$

Число целых точек в трапеции S_1 равно

$$\begin{aligned} \Sigma_1(k, n) &= \sum_{Q=1}^{\lfloor R/(n+k) \rfloor} \left(\left\lfloor -Q \frac{k}{n} + \frac{R}{n} \right\rfloor - [U] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{R}{n+k} \right\rfloor \left(-\frac{k}{n} \left\lfloor \frac{R}{n+k} \right\rfloor - \frac{k}{n} + 2 \frac{R}{n} - 2[U] \right) - W \left(-\frac{k}{n}, \frac{R}{n}, 1, \left\lfloor \frac{R}{n+k} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

Число целых точек в треугольнике S_2 равно

$$\Sigma_2(k, n) = \sum_{Q=[U]+1}^{[R/(n+k)]} (Q - 1 - [U]) = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{R}{n+k} \right] - [U] - 1 \right) \left(\left[\frac{R}{n+k} \right] - [U] \right).$$

Используя лемму 4, получаем, что число целых точек в области S равно

$$\begin{aligned} \Sigma(k, n) = \Sigma_1(k, n) - \Sigma_2(k, n) &= \frac{U^4}{2n(n+k)} - \frac{U^2}{2n} + \frac{U^2}{2(n+k)} - \frac{U^2}{2} - \rho(U)U \\ &+ O(1) + O\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\left(\frac{(n, k)U^2}{n(n+k)} + 1\right)s\left(\frac{k}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Просуммируем $\Sigma(k, n)$ по k и n , лежащим в области

$$\{(k, n) : k < n < U, n+k \leq U\}.$$

Будем суммировать отдельно слагаемые каждого вида в выражении (50) для $\Sigma(k, n)$.

Сумму слагаемых первого вида найдем с помощью леммы 9. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^4}{2n(n+k)} &= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 + \frac{U^4}{2} \left(\gamma \log 2 - \zeta(2) + \frac{\log^2 2}{2} \right) \\ &+ \frac{U^3}{2} + \frac{U^3}{2} \rho(U) \log 2 + O(U^2 \log U). \end{aligned}$$

Сумму слагаемых второго вида вычислим, используя равенство (14). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^2}{2n} &= \sum_{m \leq U} \sum_{m/2 < n < m} \frac{U^2}{2n} = \sum_{m \leq U} \frac{U^2}{2} \left(\log 2 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right) \\ &= \frac{U^3}{2} \log 2 + O(U^2 \log U). \end{aligned}$$

Сумму слагаемых третьего вида вычислим непосредственно, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^2}{2(n+k)} &= \sum_{m \leq U} \sum_{m/2 < n < m} \frac{U^2}{2m} = \sum_{m \leq U} \frac{U^2}{2m} \left(\frac{m}{2} + O(1) \right) \\ &= \sum_{m \leq U} \left(\frac{U^2}{4} + O\left(\frac{U^2}{m}\right) \right) = \frac{U^3}{4} + O(U^2 \log U), \end{aligned} \quad (51)$$

Сумму слагаемых четвертого вида найдем, используя формулы (11), (12):

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \left(\frac{U^2}{2} + \rho(U)U \right) &= \left(\frac{U^2}{2} + \rho(U)U \right) \sum_{k < U/2} \sum_{k < n \leq U-k} 1 \\ &= \left(\frac{U^2}{2} + \rho(U)U \right) \sum_{k < U/2} \left(U - 2k + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(\frac{U^2}{2} + \rho(U)U \right) \left(\left(U + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{U}{2} + \rho\left(\frac{U}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{U^2}{8} + \frac{U}{2} \rho\left(\frac{U}{2}\right) + O(1) \right) \right) = \frac{U^4}{8} - \frac{3U^3}{8} + \frac{U^3}{2} \rho(U) + O(U^2). \end{aligned} \quad (52)$$

Оценим теперь остаточный член выражения (50). Как и в предыдущем случае, достаточно оценить

$$O\left(\frac{(n, k)U^2}{n(n+k)}s\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Проводя те же выкладки, что и в (47), и учитывая, что $s(k/n) = s(n/k)$, получим

$$\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} O\left(\frac{(n, k)U^2}{n(n+k)}s\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq O(U^2 \log^4 U).$$

Сложив отдельно левые и отдельно правые части приведенных выше формул, получим асимптотическую формулу для числа решений системы (49) в случае $n + k \leq U$:

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \Sigma(k, n) &= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 + \frac{U^4}{2} \left(\gamma \log 2 - \zeta(2) + \frac{\log^2 2}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &+ \frac{U^3}{2} \left(\frac{9}{4} - \log 2 \right) + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log 2 - 1) + O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (53)$$

В случае $n + k > U$ число целых точек в треугольнике S (см. рис. 3) равно

$$\begin{aligned} \Sigma(k, n) &= \sum_{Q=1}^{[(R-nU)/k]} \left(\left[-Q \frac{k}{n} + \frac{R}{n} \right] - [U] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{R-nU}{k} \right] \left(-\frac{k}{n} \left[\frac{R-nU}{k} \right] - \frac{k}{n} + 2 \frac{R}{n} - 2[U] \right) - W\left(-\frac{k}{n}, \frac{R}{n}, 1, \left[\frac{R-nU}{k} \right] \right) \\ &= \frac{U^4}{2kn} - \frac{U^3}{k} - \frac{U^2}{2n} + \frac{nU^2}{2k} + \frac{U}{2} - \rho(U) \frac{U^2 - nU}{k} \\ &+ O(1) + O\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\left(\frac{(n, k)(U^2 - nU)}{nk} + 1\right)s\left(\frac{k}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (54)$$

Просуммируем $\Sigma(k, n)$ по k и n , лежащим в области

$$\{(k, n) : k < n < U, n + k > U\}.$$

Как и раньше, будем суммировать отдельно слагаемые каждого вида в выражении (54).

Сумму слагаемых первого вида найдем с помощью леммы 8. Имеем

$$\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{U^4}{2kn} = \frac{U^4}{4} \zeta(2) - \frac{U^3}{2} + O(U^2 \log U).$$

Сумму слагаемых второго вида найдем, используя лемму 10. Имеем

$$\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{U^3}{k} = U^4 \log 2 - \frac{U^3}{2} (1 + \log 2) + U^3 \rho(U) \log 2 + O(U^2).$$

Применяя к слагаемым третьего вида лемму 12, получаем

$$\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{U^2}{2n} = \frac{U^3}{2} (1 - \log 2) + O(U^2),$$

а к слагаемым четвертого вида – лемму 11, находим, что

$$\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{nU^2}{2k} = \frac{U^4}{4} \log 2 + \frac{U^4}{8} - \frac{3U^3}{8} + \frac{U^3}{2} \rho(U) \left(\log 2 + \frac{1}{2} \right) + O(U^2 \log U).$$

Сумму слагаемых пятого вида вычислим непосредственно, используя формулы (11), (12):

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{U}{2} &= \sum_{U/2 < n < U} \sum_{U-n < k < n} \frac{U}{2} = \sum_{U/2 < n < U} \frac{U}{2} (2n - U + O(1)) \\ &= U \left(\frac{3U^2}{8} + O(U) \right) - \frac{U^2}{2} \left(\frac{U}{2} + O(1) \right) = \frac{U^3}{8} + O(U^2). \end{aligned} \quad (55)$$

Для вычисления суммы слагаемых шестого вида используем результаты подсчета второй и четвертой сумм, т.е.

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \rho(U) \frac{U^2 - nU}{k} &= \rho(U) \left(\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{U^2}{k} - \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} \frac{nU}{k} \right) \\ &= \rho(U) \left(U^3 \log 2 - \frac{U^3}{2} \log 2 - \frac{U^3}{4} \right) + O(U^2) = \frac{U^3}{2} \rho(U) \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) + O(U^2). \end{aligned}$$

Оценка остаточного члена выражения (54) сводится к оценке величины

$$O \left(\frac{(n, k)(U^2 - nU)}{nk} s \left(\frac{k}{n} \right) \right).$$

Проводя те же преобразования, что и в выражении (47), получим

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k > U}} O \left(\frac{(n, k)(U^2 - nU)}{nk} s \left(\frac{k}{n} \right) \right) \\ \leq \sum_{d < U} \sum_{n_1 < U/d} \sum_{\substack{k_1 < n_1 \\ (n_1, k_1) = 1}} O \left(\left(\frac{U^2}{dn_1 k_1} - \frac{U}{k_1} \right) s \left(\frac{k_1}{n_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Согласно лемме 5 и преобразованию Абеля (см., например, [11; глава 2, § 1, лемма 4]), получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \leq n} s \left(\frac{k}{n} \right) \frac{1}{k} \right| &= \left| \frac{n \log^2}{n} - \int_1^n \sum_{k \leq t} s \left(\frac{k}{n} \right) \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \right| \\ &\leq \log^2 n + \sum_{k \leq n} s \left(\frac{k}{n} \right) \int_1^n \frac{1}{t^2} dt = O(\log^2 n). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{d < U} \sum_{n_1 < U/d} \sum_{k_1 < n_1} O \left(\left(\frac{U^2}{dn_1} - U \right) \frac{1}{k_1} s \left(\frac{k_1}{n_1} \right) \right) \\ \leq \sum_{d < U} \sum_{n_1 < U/d} O \left(\left(\frac{U^2}{dn_1} - U \right) \log^2 n_1 \right) \leq \sum_{d < U} O \left(\frac{U^2}{d} \log^3 U \right) \leq O(U^2 \log^4 U). \end{aligned}$$

Сложив отдельно левые и отдельно правые части полученных формул, находим асимптотическую формулу для числа решений системы (49) в случае $n + k > U$:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{k < n} \Sigma(k, n) &= \frac{U^4}{4} \left(\zeta(2) - 3 \log 2 + \frac{1}{2} \right) \\ &+ U^3 \left(\log 2 - \frac{3}{4} \right) + U^3 \rho(U) \left(\frac{1}{2} - \log 2 \right) + O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (56)$$

Сложив теперь (53) и (56), получаем общее число решений в случае 2:

$$\begin{aligned} \sum_{n < U} \sum_{k < n} \Sigma(k, n) &= \frac{U^4}{2} \log U \log 2 + \frac{U^4}{2} \left(\gamma \log 2 - \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{3}{2} \log 2 + \frac{\log^2 2}{2} \right) \\ &+ \frac{U^3}{2} \left(\frac{3}{4} + \log 2 \right) - \frac{U^3}{2} \rho(U) \log 2 + O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (57)$$

4.3. Случай 3. В этом случае система (42) принимает вид

$$\begin{cases} nQ'' + kQ \leq R, \\ 1 \leq Q'' < Q \leq U, \\ 1 \leq k < n. \end{cases} \quad (58)$$

При фиксированных значениях Q , Q'' множество решений системы (58) относительно n и k совпадает с множеством решений системы (44). Таким образом,

$$\begin{aligned} \Sigma(Q, Q'') &= \frac{U^4}{2Q''(Q + Q'')} - \frac{U^2}{2Q''} - \frac{U^2}{2(Q + Q'')} \\ &+ O\left(\frac{Q}{Q''}\right) + O(1) + O\left(\left(\frac{(Q, Q'')U^2}{Q''(Q + Q'')} + 1\right)s\left(\frac{Q}{Q''}\right)\right). \end{aligned} \quad (59)$$

Просуммируем по $Q'' < Q \leq U$ отдельно слагаемые каждого вида в выражении (59) для $\Sigma(Q, Q'')$.

Для нахождения суммы слагаемых первого вида используем лемму 6 и формулу (14):

$$\begin{aligned} \sum_{Q \leq U} \sum_{Q'' < Q} \frac{U^4}{2Q''(Q'' + Q)} &= \sum_{Q \leq U} \sum_{Q'' < Q} \left(\frac{U^4}{2Q''Q} - \frac{U^4}{2Q(Q + Q'')} \right) \\ &= \frac{U^4}{4} \left(\sum_{Q \leq U} \frac{1}{Q} \right)^2 - \frac{U^4}{2} \left(\sum_{Q \leq U} \sum_{Q'' \leq Q} \frac{1}{Q(Q + Q'')} \right) \\ &= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \log U (\gamma - \log 2) + \frac{U^4}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \log^2 2 - \gamma \log 2 + \frac{\zeta(2)}{2} \right) \\ &\quad - \frac{U^3}{8} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma - \log 2) + O(U^2 \log U). \end{aligned}$$

Сумму слагаемых второго вида вычислим непосредственно, применяя формулу (14):

$$\begin{aligned} \sum_{Q \leq U} \sum_{Q'' < Q} \frac{U^2}{2Q''} &= \sum_{Q \leq U} \frac{U^2}{2} \left(\log Q + \gamma + O\left(\frac{1}{Q}\right) \right) \\ &= \frac{U^2}{2} (U \log U - U + \gamma U + O(\log U)) \\ &= \frac{U^3}{2} \log U + \frac{U^3}{2} (\gamma - 1) + O(U^2 \log U), \end{aligned}$$

Формула для суммы слагаемых третьего вида следует из равенства (46):

$$\sum_{Q \leq U} \sum_{Q'' < Q} \frac{U^2}{2(Q + Q'')} = \frac{U^3}{2} \log 2 + O(U^2 \log U).$$

Остаточный член выражения (59), с учетом того, что $s(Q/Q'') = s(Q''/Q)$, оценивается так же, как и в предыдущих случаях.

Сложив левые и правые части полученных формул, находим число решений в случае 3:

$$\begin{aligned} \sum_{Q \leq U} \sum_{Q'' < Q} \Sigma(Q, Q'') &= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \log U (\gamma - \log 2) \\ &+ \frac{U^4}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \log^2 2 - \gamma \log 2 + \frac{\zeta(2)}{2} \right) - \frac{U^3}{2} \left(\log U + \gamma - \frac{3}{4} + \log 2 \right) \\ &+ \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma - \log 2) + O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (60)$$

4.4. Случай 4. В этом случае система (42) принимает вид

$$\begin{cases} nQ'' + kQ \leq R, \\ 1 \leq Q'' < Q, & Q > U, \\ 1 \leq k < n \leq U. \end{cases} \quad (61)$$

Будем действовать также, как и в случае 2. Зафиксируем значения k и n . Область решений системы (61) относительно Q, Q'' при $n + k \leq U$ изображена на рис. 4, а при $n + k > U$ — на рис. 5.

Найдем число целых точек в этой области в каждом из получившихся двух подслучаев.

В случае $n + k \leq U$ представим S в виде суммы трапеции

$$S_1 = \left\{ (Q, Q'') : U < Q \leq \frac{R}{n+k}, 0 < Q'' < Q \right\}$$

и треугольника

$$S_2 = \left\{ (Q, Q'') : \frac{R}{n+k} < Q \leq \frac{R}{k}, 0 < Q'' \leq -Q \frac{k}{n} + \frac{R}{n} \right\}.$$

Число целых точек в трапеции S_1 равно

$$\Sigma_1(k, n) = \sum_{Q=[U]+1}^{[R/(n+k)]} (Q-1) = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{R}{n+k} \right] + [U] - 1 \right) \left(\left[\frac{R}{n+k} \right] - [U] \right).$$

Рис. 4

Рис. 5

Число целых точек в треугольнике S_2 равно

$$\begin{aligned} \Sigma_2(k, n) &= \sum_{[R/(n+k)]+1}^{[R/k]} \left[-Q \frac{k}{n} + \frac{R}{n} \right] = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{R}{k} \right] - \left[\frac{R}{n+k} \right] \right) \\ &\times \left(-\frac{k}{n} \left[\frac{R}{k} \right] - \frac{k}{n} \left[\frac{R}{n+k} \right] - \frac{k}{n} + \frac{R}{n} \right) - W \left(-\frac{k}{n}, \frac{R}{n}, \left[\frac{R}{n+k} \right], \left[\frac{R}{k} \right] \right). \end{aligned}$$

Используя лемму 4, получаем, что число целых точек в области S равно

$$\begin{aligned} \Sigma(k, n) &= \Sigma_1(k, n) + \Sigma_2(k, n) \\ &= \frac{U^4}{2k(n+k)} - \frac{U^2}{2(n+k)} - \frac{U^2}{2k} - \frac{U^2}{2} + U - \rho(U)U + O(1) \\ &\quad + O\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\left(\frac{(n, k)}{n} \left(\frac{U^2}{k} - \frac{U^2}{n+k}\right) + 1\right) s\left(\frac{k}{n}\right)\right). \end{aligned} \quad (62)$$

Теперь просуммируем величины $\Sigma(k, n)$ по k и n , принадлежащим множеству

$$\{(k, n) : k < n \leq U, n+k \leq U\}.$$

Будем суммировать слагаемые каждого вида в выражении (62) для $\Sigma(k, n)$.

Чтобы найти сумму первых слагаемых, используем формулу (25). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^4}{2k(n+k)} \\ = \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} \log U (\gamma - \log 2) + \frac{U^4}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \gamma \log 2 - \frac{\log^2 2}{2} \right) \\ + \frac{U^3}{4} + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma - \log 2) + O(U^2 \log U). \end{aligned}$$

Суммы вторых слагаемых была вычислена в случае 2 (см. формулу (51)), т.е.

$$\sum_{n < U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \frac{U^2}{2(n+k)} = \frac{U^3}{4} + O(U^2 \log U).$$

Для нахождения суммы третьих слагаемых используем формулы (11) и (14):

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq U} \sum_{k < n} \frac{U^2}{2k} &= \sum_{k < U/2} \sum_{k < n \leq U-k} \frac{U^2}{2k} = \sum_{k < U/2} \frac{U^2}{2k} (U - 2k + O(1)) \\ &= \frac{U^3}{2} \left(\log \frac{U}{2} + \gamma + O\left(\frac{1}{U}\right) \right) - U^2 \left(\frac{U}{2} + O(1) \right) + O(U^2 \log U) \\ &= \frac{U^3}{2} \log U + \frac{U^3}{2} (\gamma - 1 - \log 2) + O(U^2 \log U). \end{aligned}$$

Для вычисления суммы четвертых слагаемых используем равенство (52):

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \left(-\frac{U^2}{2} + U - \rho(U)U \right) &= \left(-\frac{U^2}{2} + U - \rho(U)U \right) \sum_{k < U/2} \sum_{k < n \leq U-k} 1 \\ &= \left(-\frac{U^2}{2} + U - \rho(U)U \right) \left(\frac{U^2}{4} - \frac{3U}{4} + \frac{U}{2} \rho(U) + O(1) \right) \\ &= -\frac{U^4}{8} + \frac{5U^3}{8} - \frac{U^3}{2} \rho(U) + O(U^2). \end{aligned}$$

Остаточный член оценивается так же, как и в случае 2.

Сложив левые и правые части полученных формул, выводим асимптотическую формулу для числа решений системы (61) в случае $n + k \leq U$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \Sigma(k, n) &= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} (\gamma - \log 2) \log U \\ &+ \frac{U^4}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \gamma \log 2 - \frac{\log^2 2}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{U^3}{2} \left(-\log U - \gamma + \frac{9}{4} + \log 2 \right) \\ &+ \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma - \log 2 - 1) + O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (63)$$

Рассмотрим случай $n + k > U$.

Используя лемму 4, получаем, что в этом случае число целых точек в области S равно

$$\begin{aligned}
 \Sigma(k, n) &= \sum_{Q=[U]+1}^{[R/k]} \left[-\frac{k}{n}Q + \frac{R}{n} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{R}{k} \right] - [U] \right) \left(-\frac{k}{n} \left[\frac{R}{k} \right] - \frac{k}{n}[U] - \frac{k}{n} + 2\frac{R}{n} \right) - W \left(-\frac{k}{n}, \frac{R}{k}, [U], \left[\frac{R}{k} \right] \right) \\
 &= \frac{U^4}{2nk} - \frac{U^3}{n} + \frac{kU^2}{2n} - \rho(U) \frac{U^2 - kU}{n} - \frac{U^2}{2k} + \frac{U}{2} \\
 &\quad + O\left(\frac{k}{n}\right) + O(1) + O\left(\left(\frac{(n, k)}{n} \left(\frac{U^2}{k} - U\right) + 1\right) s\left(\frac{k}{n}\right)\right). \tag{64}
 \end{aligned}$$

Теперь просуммируем $\Sigma(k, n)$ по k, n , принадлежащим множеству

$$\{(k, n) : k < n \leq U, n + k > U\}.$$

Для нахождения суммы первых слагаемых выражения (64) используем лемму 8:

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{U^4}{2kn} = \sum_{\substack{n < U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{U^4}{2kn} = U^4 \frac{\zeta(2)}{4} - \frac{U^3}{2} + O(U^2 \log U).$$

Сумму вторых слагаемых найдем с помощью леммы 12:

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{U^3}{n} = U^4(1 - \log 2) - \frac{U^3}{2} \log 2 + U^3 \rho(U)(1 - \log 2) + O(U^2),$$

а для третьих – с помощью леммы 13:

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{kU^2}{2n} = \frac{U^4}{4}(1 - \log 2) - \frac{U^3}{8} + \frac{U^3}{2} \rho(U)(1 - \log 2) + O(U^2).$$

Формула для суммы четвертых слагаемых следует из двух предыдущих формул, т.е.

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \rho(U) \frac{U^2 - kU}{n} = \frac{U^3}{2} \rho(U)(1 - \log 2) + O(U^2),$$

а для пятых – из леммы 10, т.е.

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{U^2}{2k} = \frac{U^3}{2} \log 2 + O(U^2).$$

Сумма шестых слагаемых уже была вычислена в случае 2 (см. равенство (55)):

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{\substack{k < n \\ k < U}} \frac{U}{2} = U \left(\frac{3U^2}{8} + O(U) \right) - \frac{U^2}{2} \left(\frac{U}{2} + O(1) \right) = \frac{U^3}{8} + O(U^2).$$

Остаточный член оценивается так же, как и в случае 2.

Сложив левые и правые части полученных формул, выводим асимптотическую формулу для числа решений системы (61) в случае $n + k > U$:

$$\sum_{\substack{n \leq U \\ n+k > U}} \sum_{k < n} \Sigma(k, n) = \frac{U^4}{4} (\zeta(2) - 3 + 3 \log 2) - \frac{U^3}{2} + U^3 \rho(U) (\log 2 - 1) + O(U^2 \log^4 U). \quad (65)$$

Сложив теперь (63) и (65), получим формулу для общего числа решений в случае 4:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq U} \sum_{\substack{k < n \\ n+k \leq U}} \Sigma(k, n) &= \frac{U^4}{4} \log^2 U + \frac{U^4}{2} (\gamma - \log 2) \log U \\ &+ \frac{U^4}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \gamma \log 2 - \frac{\log^2 2}{2} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2} \log 2 + \frac{\zeta(2)}{2} \right) \\ &+ \frac{U^3}{2} \left(\log 2 - \log U - \gamma + \frac{5}{4} \right) + \frac{U^3}{2} \rho(U) (\log U + \gamma - 3 + \log 2) \\ &+ O(U^2 \log^4 U). \end{aligned} \quad (66)$$

4.5. Случай 5. В этом случае система (42) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} nQ'' + kQ \leq R, \\ 1 \leq Q'' < Q, & Q > U, \\ 1 \leq k < n, & n > U. \end{cases} \quad (67)$$

Здесь условия $Q'' < Q$ и $k < n$ являются избыточными, так как они следуют из условий $Q > U$, $n > U$ и первого неравенства системы.

При фиксированных значениях k , Q'' множество решений S системы (67) относительно n и Q изображено на рис. 6, причем оно непусто только для тех k , Q'' , для которых выполняется неравенство $k + Q'' < U$.

Рис. 6

Число целых точек в треугольнике S равно

$$\Sigma(k, Q'') = \sum_{n=[R/U]+1}^{[(R-kU)/Q'']} \left(\left[-n \frac{Q''}{k} + \frac{R}{k} \right] - [U] \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{Q''}{k} \left(\left[\frac{R-kU}{Q''} \right] + \left[\frac{R}{U} \right] + 1 \right) + 2 \left(\frac{R}{k} - [U] \right) \right) \\
&\quad \times \left(\left[\frac{R-kU}{Q''} \right] - \left[\frac{R}{U} \right] \right) - W \left(-\frac{Q''}{k}, \frac{R}{k}, \left[\frac{R}{U} \right], \left[\frac{R-kU}{Q''} \right] \right) \\
&= \frac{U^4}{2kQ''} - U^3 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{Q''} \right) + \frac{U^2}{2} \left(\frac{Q''}{k} + \frac{k}{Q''} \right) + U^2 \\
&\quad + \rho(U) \left(-U^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{Q''} \right) + U \left(\frac{k}{Q''} + \frac{Q''}{k} \right) + 2U \right) + O \left(\frac{Q''}{k} \right) \\
&\quad + O(1) + O \left(\left(\frac{(k, Q'')(U^2 - kU - Q''U)}{kQ''} + 1 \right) s \left(\frac{Q''}{k} \right) \right). \quad (68)
\end{aligned}$$

Осталось просуммировать $\Sigma(k, Q'')$ по k , Q'' , удовлетворяющим условию $k + Q'' < U$. Будем суммировать отдельно слагаемые каждого вида в выражении (68).

Для суммирования слагаемых первого вида используем лемму 14. Имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{k+Q'' < U} \frac{U^4}{2kQ''} &= \frac{U^4}{2} \log^2 U + U^4 \gamma \log U + \frac{U^4}{2} (\gamma^2 - \zeta(2)) + \frac{U^3}{2} \\
&\quad + U^3 \rho(U) (\log U + \gamma) + O(U^2 \log U).
\end{aligned}$$

Выражения для сумм слагаемых второго, третьего и четвертого вида в (68) найдем, используя формулы (11), (12), (14):

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k < U \\ k+Q'' < U}} U^3 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{Q''} \right) = 2 \sum_{k < U} \frac{U^3}{k} \left(U - k + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) \\
&= 2 \left(U^4 + U^3 \rho(U) - \frac{U^3}{2} \right) \left(\log U + \gamma + \frac{\rho(U)}{U} + O \left(\frac{1}{U^2} \right) \right) \\
&\quad - 2U^3 \left(U + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) = 2U^4 \log U + 2U^4 (\gamma - 1) \\
&\quad - U^3 (\log U + \gamma - 1) + 2U^3 \rho(U) (\log U + \gamma) + O(U^2), \\
&\sum_{\substack{k < U \\ k+Q'' < U}} \frac{U^2}{2} \left(\frac{Q''}{k} + \frac{k}{Q''} \right) = \sum_{k < U} \frac{U^2}{k} \left(\frac{(U-k)^2}{2} + \rho(U)(U-k) + O(1) \right) \\
&= \left(\frac{U^4}{2} + U^3 \rho(U) \right) \left(\log U + \gamma + \frac{\rho(U)}{U} + O \left(\frac{1}{U^2} \right) \right) \\
&\quad - (U^3 + U^2 \rho(U)) \left(U + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) \\
&\quad + \frac{U^2}{2} \left(\frac{U^2}{2} + \rho(U)U + O(1) \right) + O(U^2 \log U) \\
&= \frac{U^4}{2} \log U + \frac{U^4}{2} \left(\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{U^3}{2} + U^3 \rho(U) (\log U + \gamma - 1) + O(U^2 \log U), \quad (69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \leq U \\ k+Q'' < U}} U^2 &= \sum_{k < U} U^2 \left(U - k + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) \\
&= \left(U^3 + U^2 \rho(U) - \frac{U^2}{2} \right) \left(U + \rho(U) - \frac{1}{2} \right) - U^2 \left(\frac{U^2}{2} + \rho(U)U + O(1) \right) \\
&= \frac{U^4}{2} - U^3 + U^3 \rho(U) + O(U^2).
\end{aligned} \tag{70}$$

Из них следует формула для суммы слагаемых пятого вида:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \leq U \\ k+Q'' < U}} \rho(U) \left(-U^2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{Q''} \right) + U \left(\frac{k}{Q''} + \frac{Q''}{k} \right) + 2U \right) \\
= U^3 \rho(U) \left(-\log U - \gamma + \frac{3}{2} \right) + O(U^2 \log U).
\end{aligned} \tag{71}$$

Чтобы оценить остаточный член, разобьем сначала соответствующую сумму на две части:

$$\begin{aligned}
\sum_{k+Q'' < U} O \left(\frac{(k, Q'')(U^2 - kU - Q''U)}{kQ''} s \left(\frac{Q''}{k} \right) \right) \\
\leq \sum_{d < U} \sum_{k < U} \sum_{\substack{Q'' < k \\ (k, Q'')=d}} O \left(\frac{d(U^2 - kU - Q''U)}{kQ''} s \left(\frac{Q''}{k} \right) \right) \\
+ \sum_{d < U} \sum_{Q'' < U} \sum_{\substack{k < Q'' \\ (k, Q'')=d}} O \left(\frac{d(U^2 - kU - Q''U)}{kQ''} s \left(\frac{k}{Q''} \right) \right),
\end{aligned}$$

каждая из которых оценивается аналогично тому, как это делалось во втором подслучае случая 2.

Сложив левые и правые части полученных формул, выводим формулу для числа решений в случае 5:

$$\begin{aligned}
\sum_{k+Q'' < U} \Sigma(k, Q'') &= \frac{U^4}{2} \log^2 U + U^4 \left(\gamma - \frac{3}{2} \right) \log U + \frac{U^4}{2} \left(\gamma^2 - \zeta(2) - 3\gamma + \frac{7}{2} \right) \\
&+ U^3 (\log U + \gamma - 1) + \rho(U) \left(-\log U - \gamma + \frac{3}{2} \right) + O(U^2 \log^4 U).
\end{aligned} \tag{72}$$

4.6. Завершение доказательства теоремы 2. Чтобы найти $K(R)$, теперь достаточно сложить левые и правые части формул (48), (57), (60), (66), (72), полученные в каждом случае:

$$\begin{aligned}
K(R) &= U^4 \log^2 U + U^2 \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) \log U + \frac{U^2}{2} \left(2\gamma^2 - 3\gamma - \zeta(2) + \frac{7}{4} \right) + O(U^2 \log^4 U) \\
&= \frac{R^2}{4} \log^2 R + \frac{R^2}{2} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) \log R + \frac{R^2}{2} \left(2\gamma^2 - 3\gamma - \zeta(2) + \frac{7}{4} \right) + O(R \log^4 R).
\end{aligned}$$

Согласно равенству (43) и следствию 3 имеем

$$\begin{aligned} T(R) &= \sum_{d \leq R} \mu(d) K\left(\frac{R}{d}\right) = \frac{R^2}{4\zeta(2)} \log^2 R + \frac{R^2}{2} R \left(\frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) - \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} \right) \log R \\ &\quad + \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma - \zeta(2) + \frac{7}{4} \right) - \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{2\zeta^3(2)} \right) + O(R \log^5 R). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

При подсчете величины $E(R)$ учитываются все дроби вида a/b , $a \leq b \leq R$, а среди них есть равные, поэтому длины некоторых приведенных регулярных непрерывных дробей считаются несколько раз. Чтобы избежать этих повторений, можно вместо величины $N(R)$ рассмотреть величину

$$N^*(R) = \sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} l\left(\frac{a}{b}\right)$$

и соответствующее среднее $E^*(R)$. Докажем сформулированное во введении следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. При $R \rightarrow \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$\begin{aligned} E^*(R) &= \frac{1}{2\zeta(2)} \log^2 R + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) \log R \\ &\quad + \frac{1}{\zeta(2)} \left(2\gamma^2 - 3\gamma + \frac{7}{4} - 2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \left(2\gamma - \frac{3}{2} \right) + \frac{3(\zeta'(2))^2 - \zeta''(2)\zeta(2)}{\zeta^2(2)} \right) \\ &\quad + O(R^{-1} \log^6 R). \end{aligned} \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $E^*(R)$ есть средняя длина приведенных регулярных непрерывных дробей чисел a/b , где $a \leq b \leq R$, $(a, b) = 1$, то

$$E^*(R) = N^*(R) / \left(\sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} 1 \right),$$

а согласно формуле преобразования Мёбиуса

$$\begin{aligned} N^*(R) &= \sum_{d \leq R} \mu(d) N\left(\frac{R}{d}\right), \\ \sum_{b \leq R} \sum_{\substack{a \leq b \\ (a,b)=1}} 1 &= \sum_{d \leq R} \mu(d) \sum_{b \leq R/d} \sum_{a \leq b} 1 = \sum_{d \leq R} \mu(d) \left(\frac{R^2}{2d^2} + O\left(\frac{R}{d}\right) \right). \end{aligned}$$

Осталось применить к двум последним равенствам следствие 3 и разделить один результат на другой.

Следствие 4 доказано.

Список литературы

- [1] О. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I. Elementare Kettenbrüche*, Teubner, Stuttgart, 1954.
- [2] Ю. Ю. Финкельштейн, “Полигоны Клейна и приведенные регулярные непрерывные дроби”, *УМН*, **48**:3 (1993), 205–206; англ. пер.: Yu. Yu. Finkel’shtein, “Klein polygons and reduced regular continued fractions”, *Russian Math. Surveys*, **48**:3 (1993), 198–200.
- [3] Н. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number theory and analysis (papers in honor of E. Landau)*, Plenum, New York, 1968, 87–96.
- [4] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Matematika*, **22**:1 (1975), 20–28.
- [5] B. Vallée, “A unifying framework for the analysis of a class of Euclidean algorithms”, *LATIN 2000: Theoretical informatics* (Punta del Este, Uruguay, 2000), Lecture Notes in Comput. Sci., **1776**, Springer-Verlag, Berlin, 343–354.
- [6] А. В. Устинов, “Асимптотическое поведение первого и второго моментов для числа шагов в алгоритме Евклида”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 189–224; англ. пер.: A. V. Ustinov, “Asymptotic behaviour of the first and second moments for the number of steps in the Euclidean algorithm”, *Russian Math. Surveys*, **72**:5 (2008), 1023–1059.
- [7] B. Vallée, “Dynamical analysis of a class of Euclidean algorithms”, *Theoret. Comput. Sci.*, **297**:1–3 (2003), 447–486.
- [8] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983; англ. пер.: A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] А. Я. Хинчин, *Избранные труды по теории чисел*, МЦНМО, М., 2006.
- [10] А. С. Yao, D. E. Knuth, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:12 (1975), 4720–4722.
- [11] А. И. Галочкин, Ю. В. Нестеренко, А. Б. Шидловский, *Введение в теорию чисел*, Изд-во МГУ, М., 1984.

Е. Н. Жабицкая (E. N. Zhabitskaya)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова

E-mail: elena.melnikova@mail.ru

Поступила в редакцию

21.05.2008 и 27.03.2009