Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Федотов, Аффинные алгебраические группы с периодическими компонентами, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 7, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:18:19

УДК 512.743

С. Н. Федотов

Аффинные алгебраические группы с периодическими компонентами

Будем называть компоненту связности аффинной алгебраической группы периодической, если все ее элементы имеют конечный порядок. В работе получена характеристика периодических компонент в терминах автоморфизмов с конечным числом неподвижных точек. Также обсуждается, какие связные группы допускают конечные расширения с периодическими компонентами. Полученные результаты применяются к изучению нормализаторов максимальных торов в простых алгебраических группах.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: линейная алгебраическая группа, алгебраический тор, элемент конечного порядка, регулярный автоморфизм, элемент Кокстера.

§ 1. Введение

Хорошо известно, что каждая связная комплексная алгебраическая группа положительной размерности содержит элементы бесконечного порядка. С другой стороны, для несвязных групп некоторые компоненты связности могут состоять из элементов конечного порядка. Такие компоненты мы будем называть *периодическими*. Например, одна из компонент связности ортогональной группы $O_2(\mathbb{C})$ состоит из отражений и потому является периодической. Настоящая работа посвящена исследованию аффинных алгебраических групп с периодическими компонентами.

Пусть G – аффинная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ нулевой характеристики и $G^0 = H$ – ее связная компонента единицы. В § 2 мы формулируем эквивалентные условия периодичности компоненты gH группы G в терминах автоморфизмов, индуцированных действием элементов компоненты gH на подгруппе H сопряжениями. А именно, периодичность компоненты gH равносильна тому, что автоморфизм $\varphi_g: H \rightarrow H, h \mapsto g^{-1}hg$ имеет лишь конечное число неподвижных точек. Кроме того, доказывается, что для периодической компоненты gH действие H на gH сопряжениями транзитивно и, как следствие, все элементы gH имеют одинаковые порядки. В § 3 мы изучаем, какие связные алгебраические группы допускают конечные расширения с периодическими компонентами, и показываем, что все такие группы разрешимы. Однако оказывается, что разрешимость является только необходимым условием: приводится пример целого семейства связных разрешимых групп, не

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1983.2008.1).

имеющих расширений с периодическими компонентами. Исследованию циклических расширений торов и, в частности, получению оценок на порядки элементов в периодических компонентах этих расширений посвящен § 4. Так, если имеется расширение $G = T \cup gT \cup \dots \cup g^{m-1}T$ тора T , в котором компонента gT является периодической и $\text{ord}(\varphi_g) = k$, то $\text{ord}(g)$ делит mk . В § 5 с использованием полученных результатов изучаются периодические компоненты нормализаторов максимальных торов простых групп и указываются порядки элементов в этих компонентах. В частности, дана формула для числа периодических компонент в нормализаторах и показано, что смежные классы, соответствующие элементам Кокстера группы Вейля, отвечают периодическим компонентам.

Автор благодарит И. В. Аржанцева за ценные обсуждения, Д. А. Шмелькина, предложившего первоначальный вариант теоремы 1, Е. И. Хухро, указавшего автору на работу [1], и рецензента, указавшего на работу [2] и сделавшего ряд замечаний, позволивших упростить доказательства основных результатов.

§ 2. Периодические компоненты и автоморфизмы

Следующая теорема предлагает несколько характеристик периодических компонент.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – аффинная алгебраическая группа и $H = G^0$ – ее связная компонента единицы. Для каждого $g \in G$ определим автоморфизм $\varphi_g: H \rightarrow H$, $h \mapsto g^{-1}hg$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) связная компонента gH является периодической;
- (2) группа неподвижных точек автоморфизма φ_g конечна;
- (3) действие H на gH сопряжениями транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H^{φ_g} – подгруппа неподвижных точек автоморфизма φ_g .

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть компонента gH состоит из элементов конечного порядка, а группа H^{φ_g} бесконечна. Тогда последняя имеет положительную размерность и потому содержит элемент бесконечного порядка. Обозначим его h_0 . Заметим, что $h_0g = gh_0$ и, следовательно, $\forall n \in \mathbb{N} \quad (gh_0)^n = g^n h_0^n \neq e$, противоречие.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $|H^{\varphi_g}| < \infty$. Факторгруппа G/H конечна, следовательно, $\exists m \in \mathbb{N}: g^m \in H$. Но тогда $g^m \in H^{\varphi_g}$, откуда g имеет конечный порядок.

Рассмотрим морфизм $f_g: H \rightarrow gH$, $h \mapsto hgh^{-1}$ (это определение корректно, ибо $\forall h \in H \quad hgh^{-1} = g\varphi_g(h)h^{-1} \in gH$). Его образ обозначим через $C(g)$. Будучи орбитой точки g , он изоморфен H/H^{φ_g} , так как H^{φ_g} совпадает с нормализатором элемента g . Поскольку группа H^{φ_g} конечна, получаем $\dim C(g) = \dim gH$.

С другой стороны, как связная компонента алгебраической группы gH неприводима, поэтому $C(g)$ плотно в ней. Таким образом, получаем, что компонента gH содержит плотное подмножество, состоящее из элементов, сопряженных с g и, следовательно, имеющих тот же порядок.

Пусть $N = \text{ord}(g)$. Заметим, что множество $M = \{x \in gH \mid (gh)^N = e\}$ замкнуто в gH в топологии Зариского. С другой стороны, M содержит плотное в gH подмножество $C(g)$, а потому совпадает с gH .

(1), (2) $\implies$ (3). Поскольку всякий элемент $s \in gH$ имеет конечный порядок, то образ $C(s)$ морфизма f_s плотен в gH (это было получено в ходе доказательства импликации (1) $\implies$ (2)) и как орбита действия $H : gH$ открыт в gH . Но для различных $s \in gH$ множества $C(s)$ либо не пересекаются, либо совпадают, а с другой стороны – как открытые подмножества они не могут не иметь общих точек. Следовательно, $gH = C(s) \forall s \in gH$.

(3) $\implies$ (2). Из сюръективности орбитного отображения $H \rightarrow gH \cong H/H^{\varphi_g}$ и равенства $\dim H = \dim gH$ следует конечность подгруппы H^{φ_g} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Импликация (2) $\implies$ (3) следует также из утверждения, доказанного Стейнбергом (см. [2; теорема 10.1]) для алгебраически замкнутого поля произвольной характеристики: если H – связная алгебраическая группа и φ – ее эндоморфизм с конечным числом неподвижных точек, то отображение $H \rightarrow H, h \mapsto \varphi(h)h^{-1}$ сюръективно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если компонента gH периодична, то порядки всех ее элементов совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если компонента gH периодична, то H содержится в коммутанте $[G, G]$ группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $gH = Hg = \{hgh^{-1} \mid h \in H\}$ влечет $H = \{hgh^{-1}g^{-1} \mid h \in H\} \subseteq [G, G]$.

Таким образом, если группа G содержит периодическую компоненту, то вычисление ее коммутанта сводится к вычислению коммутанта конечной группы ее компонент.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если группа G имеет периодическую компоненту, то для любого ее линейного представления $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ имеет место включение $\rho(G^0) \subseteq \mathrm{SL}(V)$.

Пусть теперь дана связная группа H и автоморфизм $\varphi: H \rightarrow H$ порядка $m < \infty$ с конечным числом неподвижных точек. Рассмотрим определяемое этим автоморфизмом полупрямое произведение $H \rtimes \langle a \rangle_m$, где $\langle a \rangle_m$ – циклическая группа порядка m с образующей a . По теореме 1 смежный класс $\{(h, a) \mid h \in H\}$ является периодической компонентой полученной группы. Таким образом, получаем следующий критерий: наличие у связной группы конечного расширения с периодической компонентой равносильно наличию у нее автоморфизма конечного порядка с конечным числом неподвижных точек.

Пусть G – конечное расширение связной группы H . Заметим, что $\forall g \in G$ автоморфизм φ_g имеет конечный порядок в факторгруппе $\mathrm{Aut} H / \mathrm{Int} H$. На самом деле в описанном выше критерии условие конечности порядка автоморфизма можно заменить на условие конечности его порядка по модулю внутренних автоморфизмов группы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть H – связная алгебраическая группа, φ – ее автоморфизм, имеющий порядок $k < \infty$ по модулю внутренних автоморфизмов H и такой, что $|H^\varphi| < \infty$. Тогда порядок автоморфизма φ конечен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\varphi^k \in \text{Int } H$, следовательно, $\exists x \in H: \varphi^k(h) = xhx^{-1} \forall h \in H$. Для произвольного $h \in H$ вычислим $\varphi^{k+1}(h)$ двумя способами: с одной стороны,

$$\varphi^{k+1}(h) = \varphi^k(\varphi(h)) = x\varphi(h)x^{-1},$$

а с другой –

$$\varphi^{k+1}(h) = \varphi(\varphi^k(h)) = \varphi(xhx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(h)(\varphi(x))^{-1}.$$

Но φ – автоморфизм, поэтому $\varphi(H) = H$ и $\forall h \in H$ имеем $x\varphi(h)x^{-1} = \varphi(x)\varphi(h)\varphi(x)^{-1}$, т.е. $x^{-1}\varphi(x)$ лежит в центре $Z(H)$ группы H . Отсюда получаем $x^{-1}\varphi(x) = xx^{-1}\varphi(x)x^{-1} = \varphi(x)x^{-1}$. Следовательно, $\forall s \in \mathbb{N}$

$$x^{-s}\varphi(x^s) = x^{-s}(\varphi(x))^s = (x^{-1}\varphi(x))^s \in Z(G).$$

Рассмотрим морфизм $f: H \rightarrow H$, $h \mapsto h^{-1}\varphi(h)$. Легко видеть, что его слои конечны.

Рассмотрим также морфизмы $f_s: x^s Z(H) \rightarrow Z(H)$, $h \mapsto h^{-1}\varphi(h)$, $s = 1, 2, \dots$. Поскольку $f_s = f|_{x^s Z(H)}$, то слои f_s конечны и содержат не больше $|H^\varphi|$ точек. С другой стороны, по теореме о размерности слоев $\dim \text{Im } f_s = \dim x^s Z(H) = \dim Z(H)$, откуда для каждого s множество $\overline{\text{Im } f_s}$ есть объединение нескольких связных компонент группы $Z(H)$ и, следовательно, по теореме об образе доминантного морфизма $\text{Im } f_s$ содержит открытое по Зарискому подмножество этого объединения. Если количество различных смежных классов вида $x^s Z(H)$ достаточно велико, мы получим противоречие с ограничением на число точек в слое морфизма f . В самом деле, пусть d – число компонент связности $Z(H)$, $m > d \cdot |H^\varphi|$ и все $x^s Z(H)$, $s = 1, 2, \dots, m$, различны. Тогда согласно принципу Дирихле среди множеств $\text{Im } f_s$, $s = 1, 2, \dots, m$, хотя бы $|H^\varphi| + 1$ имеют непустое пересечение. Пусть g_0 – элемент, лежащий одновременно в $|H^\varphi| + 1$ таких множествах. Но $f^{-1}(g_0) \supseteq \bigcup_{s=1}^m f_s^{-1}(g_0)$ и, следовательно, $|f^{-1}(g_0)| \geq m/d > |H^\varphi|$, противоречие.

Таким образом, среди смежных классов вида $x^s Z(H)$, $s = 1, 2, \dots$, лишь конечное число различных и, стало быть, $\exists q: x^q \in Z(H)$ (как было показано, $q \leq d \cdot |H^\varphi|$, где d – число компонент связности группы $Z(H)$). Но тогда $\varphi^{kq} = \text{id}$.

§ 3. Расширения с периодическими компонентами

Перейдем к вопросу о том, какие связные аффинные алгебраические группы допускают конечные расширения с периодическими компонентами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если редукитивная алгебраическая группа имеет периодическую компоненту, то ее связная компонента единицы является тором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – редукитивная группа, gG^0 – ее периодическая компонента. Как любая связная редукитивная группа, G^0 раскладывается в почти прямое произведение центрального тора T и полупростой подгруппы S (см. [3; гл. 6]). Но $S = [G^0, G^0]$ и, следовательно, сохраняется при действии автоморфизма φ_g .

ЛЕММА 1. Для связной полупростой группы H любой смежный класс группы $\text{Aut } H$ по подгруппе $\text{Int } H$ содержит автоморфизм с бесконечным числом неподвижных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – связная полупростая алгебраическая группа, $\mathfrak{h} = \text{Lie } H$ – ее касательная алгебра. Рассмотрим отображение $D: \text{Aut } H \longrightarrow \text{Aut } \mathfrak{h}$, $f \mapsto d_e f$. При этом $D(\text{Int } H) = \text{Int } \mathfrak{h}$ и, таким образом, D корректно определяет отображение из $\text{Out } H = \text{Aut } H / \text{Int } H$ в $\text{Out } \mathfrak{h} = \text{Aut } \mathfrak{h} / \text{Int } \mathfrak{h}$. Далее, для полупростых алгебр Ли известен следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Группа $\text{Int } \mathfrak{h}$ совпадает со связной компонентой единицы в $\text{Aut } \mathfrak{h}$; различные связные компоненты группы $\text{Aut } \mathfrak{h}$ суть множества $(\text{Int } \mathfrak{h})\hat{\tau}$ для различных $\tau \in \text{Aut } \Pi$ (Π – некоторая система простых корней алгебры $\mathfrak{h}$), где $\hat{\tau}$ определяются таким образом:

$$\hat{\tau}(h_\alpha) = h_{\tau^{-1}(\alpha)}, \quad \hat{\tau}(e_\alpha) = e_{\tau^{-1}(\alpha)}, \quad \hat{\tau}(e_{-\alpha}) = e_{-\tau^{-1}(\alpha)}, \quad \alpha \in \Pi.$$

Здесь h_α , e_α , $e_{-\alpha}$ – канонические образующие алгебры $\mathfrak{h}$; более подробно о них и о самом приведенном факте см. [3; § 4, гл. 4].

Таким образом, в любом смежном классе $\text{Aut } \mathfrak{h}$ по $\text{Int } \mathfrak{h}$ найдется автоморфизм φ , действующий как $\hat{\tau}$ для некоторого $\tau \in \text{Aut } \Pi$. Рассмотрим $\lambda = \sum_{\alpha \in \Pi} h_\alpha$. Из определения $\hat{\tau}$ следует, что $d_e \varphi$ тождественно действует на прямой, порожденной λ , поэтому φ тождественно действует на соответствующей однопараметрической подгруппе. Следовательно, $|H^\varphi| = \infty$.

Лемма 1 доказана.

Заметим, что при $h \in S$ автоморфизмы φ_{gh} заматают целиком смежный класс $\varphi_g(\text{Int } S)$ и в силу леммы 1 хотя бы один из них будет имеет бесконечно много неподвижных точек, противоречие.

Утверждение 2 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле любой автоморфизм связной полупростой группы имеет бесконечное число неподвижных точек (см. [2; следствие 10.13]).

ТЕОРЕМА 2. Если аффинная алгебраическая группа G имеет периодическую компоненту, то G^0 разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение Леви $G^0 = L \ltimes U$, где U – унитарный радикал, а L редуктивна (подгруппа Леви; см. [3; § 4, гл. 6]). Пусть далее gG^0 – периодическая компонента. Тогда gLg^{-1} – также подгруппа Леви и по теореме Мальцева $\exists h \in U: gLg^{-1} = hLh^{-1}$; следовательно, автоморфизм $\varphi_{h^{-1}g}$ сохраняет подгруппу L . Но поскольку подгруппа L редуктивна, в силу утверждения 2 ограничение на нее автоморфизма $\varphi_{h^{-1}g}$ может иметь конечное число неподвижных точек лишь в том случае, когда L – тор. Следовательно, $G^0 = L \ltimes U$ разрешима.

После того как автор доказал теорему 2, он узнал, что утверждение о разрешимости группы, допускающей автоморфизм с конечным числом неподвижных точек, не является новым и может быть найдено в [2; следствие 10.12].

Напомним, что автоморфизм алгебры Ли называется *регулярным*, если единственным его неподвижным элементом является нуль. Заметим, что автоморфизм алгебраической группы, имеющий конечное число неподвижных

точек, индуцирует регулярный автоморфизм ее касательной алгебры. В работе [4] доказано, что конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль, обладающая регулярным автоморфизмом, разрешима. Это дает альтернативное доказательство теоремы 2. Другие свойства алгебр Ли, допускающих регулярный автоморфизм, можно найти в [5].

ПРИМЕР 1. Рассмотрим $G = U_n \cup gU_n \cup \dots \cup g^{n-1}U_n$, где $U_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ – группа всех унитреугольных матриц, а g – диагональная матрица с собственными значениями $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$, где ξ – первообразный корень степени n из 1. Все элементы связной компоненты gU_n являются верхнетреугольными матрицами с различными корнями n -й степени из единицы на диагонали, а потому полупросты и имеют конечный порядок.

Теперь возникает вопрос: всякая ли унипотентная группа допускает расширения с периодическими компонентами, или, что то же самое, всякая ли нильпотентная алгебра Ли обладает периодическим регулярным автоморфизмом? В самом деле, по уточненной теореме Адо (см. [6; гл. 1, § 5.3]) любая конечномерная нильпотентная алгебра Ли изоморфна подалгебре в алгебре Ли всех нильпотентных треугольных матриц некоторого порядка $n \in \mathbb{N}$. В силу формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа (см. [7; ч. 1, гл. IV, § 7, 8]) образ этой подалгебры при экспоненциальном отображении будет подгруппой в U_n , причем экспоненциальное отображение осуществляет изоморфизм алгебраических многообразий. Таким образом, если найдется нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$, у которой все автоморфизмы унипотентны, то соответствующая ей унипотентная группа не будет допускать расширений с периодическими компонентами. Пример такой алгебры можно найти в [1].

Следующее утверждение показывает, что даже если тор T и унипотентная группа U допускают расширения с периодическими компонентами, то для их полупрямого произведения это может быть не так.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Среди алгебраических групп вида $\mathbb{k}^* \ltimes \mathbb{k}$ только $\mathbb{k}^* \times \mathbb{k}$ имеют конечное расширение с периодическими компонентами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, если произведение не является прямым, достаточно заметить, что некоммутативная двумерная алгебра Ли не допускает регулярного автоморфизма конечного порядка.

Теперь покажем, что для группы $\mathbb{k}^* \times \mathbb{k}$ расширение с периодической компонентой имеется. Предъявим его в следующем виде:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & \\ 0 & 0 & 1 & s \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t^{-1} & 0 \\ t & 0 & \\ 0 & 1 & s \\ & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad t \in \mathbb{k}^*, \quad s \in \mathbb{k}.$$

Может возникнуть впечатление, что автоморфизмы с конечным числом неподвижных точек существуют только у групп вида $T \times U$, где T – тор, U – унипотентная группа. На самом деле это не так.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим группу $H = T \ltimes U$, где $T \cong (\mathbb{k}^*)^{n-1}$, $U \cong \mathbb{k}^n$, а умножение определено следующим образом: $(t, u) \cdot (s, v) = (ts, \psi(s)(u) + v)$, где

$$\psi(s)(u) = (s_1^{-1}u_1, \dots, s_{n-1}^{-1}u_{n-1}, s_1 \cdots s_{n-1}u_n).$$

Зафиксируем натуральное число k , делящее n , и определим отображение $\varphi: H \rightarrow H$ следующим образом: $\varphi((t, u)) = (\beta(t), \alpha(u))$, где

$$\beta((t_1, t_2, \dots, t_{n-1})) = (t_2, \dots, t_{n-1}, t_1^{-1}t_2^{-1} \cdots t_{n-1}^{-1}),$$

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \xi & & & & 0 \end{pmatrix} u,$$

ξ – первообразный корень степени k из 1. Докажем, что φ является автоморфизмом:

$$\begin{aligned} \varphi((t, u)(s, v)) &= \varphi((ts, \psi(s)(u) + v)) = (\beta(ts), \alpha(\psi(s)(u) + \alpha(v))), \\ \varphi((t, u))\varphi((s, v)) &= (\beta(t), \alpha(u))(\beta(s), \alpha(v)) = (\beta(t)\beta(s), \psi(\beta(s))(\alpha(u)) + \alpha(v)). \end{aligned}$$

Но легко видеть, что $\forall t \in T, u \in U$

$$\begin{aligned} \alpha(\psi(t)(u)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \xi & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{-1} & & & & 0 \\ & t_2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t_{n-1}^{-1} & \\ 0 & & & & t_1 t_2 \cdots t_{n-1} \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} t_2^{-1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & t_{n-1}^{-1} & & \\ & & & t_1 t_2 \cdots t_{n-1} & \\ 0 & & & & t_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \xi & & & & 0 \end{pmatrix} u \\ &= \psi(\beta(t))(\alpha(u)), \end{aligned}$$

поэтому φ является автоморфизмом. Кроме того, φ имеет порядок nk и ровно n неподвижных точек $((\eta, \dots, \eta), 0)$, где η – корень степени n из 1.

Укажем матричную реализацию расширения группы H , реализующую автоморфизм φ :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} T & K \\ 0 & E \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} T = \text{diag}(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n), \ t_i \in \mathbb{k}^*; \\ K = \text{diag}(t_1 a_1, \dots, t_{n-1} a_{n-1}, t_n a_n), \ a_i \in \mathbb{k}; \\ t_1 \cdots t_n = 1 \end{array} \right\},$$

$$G = H \cup g_0 H \cup \cdots \cup g_0^{n-1} H,$$

где

$$g_0 = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma D \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & & & & \xi^{n-1} \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(\xi, 1, \dots, 1).$$

Теперь определим порядки элементов периодической компоненты g_0H . Как мы знаем, $\forall g \in g_0H \quad \text{ord}(g) = \text{ord}(g_0) = \text{НОК}(\text{ord}(\Sigma), \text{ord}(\Sigma D))$, но так как $\Sigma^n = \xi^{n-1}E$, имеем $\text{ord}(\Sigma) = nk$, а

$$(\Sigma D)^n = \begin{pmatrix} 0 & & & \xi^{n-1} \\ \xi & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \xi^n E = E,$$

поэтому получаем, что $\text{ord}(g_0) = nk$.

§ 4. Расширения торов

Пусть связная компонента единицы группы G – тор T . В этом случае критерий наличия периодических компонент можно сформулировать в более удобном виде. Для этого заметим, что автоморфизм φ_g индуцирует автоморфизм A_{φ_g} решетки характеров тора T :

$$(A_{\varphi_g} \circ \lambda)(t) = \lambda(\varphi_g(t)).$$

Далее, решетка характеров T является свободной абелевой группой с образующими $\chi_s: T \cong (\mathbb{k}^*)^m \longrightarrow \mathbb{k}^*, (t_1, \dots, t_m) \mapsto t_s$. Пользуясь аддитивной формой записи группы характеров, можно сопоставить автоморфизму A_{φ_g} матрицу $A_g \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Если $G^0 = T$, то компонента gT является периодической тогда и только тогда, когда матрица A_g не имеет собственных значений, равных 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть компонента gT периодическая и $g^n = e$. Тогда в силу следствия 1 $\forall h \in T \quad (gh)^n = e$. Но $(gh)^n = g^n \cdot \varphi_g^{n-1}(h) \cdots \varphi_g(h) \cdot h$, поэтому $\forall h \in T \quad \varphi_g^{n-1}(h) \cdots \varphi_g(h) \cdot h = e$, или, в терминах матрицы A_g ,

$$A_g^{n-1} + \cdots + A_g + E = 0.$$

Следовательно, матрица A_g не имеет собственных значений, равных 1.

Обратно, допустим, что g – элемент бесконечного порядка, а матрица A_g не имеет собственных значений, равных 1. Поскольку число компонент связности группы G конечно, то $\exists k \in \mathbb{N}: g^k \in T$, и, таким образом, $\varphi_g^k = \text{id}$. Следовательно, $0 = A_g^k - E = (A_g - E)(A_g^{k-1} + \cdots + A_g + E)$. Но по предположению матрица $A_g - E$ невырождена, поэтому $A_g^{k-1} + \cdots + A_g + E = 0$, откуда $\forall h \in T \quad \varphi_g^{k-1}(h) \cdots \varphi_g(h) \cdot h = e$. Но g^k лежит в T и имеет бесконечный порядок, стало быть, $\varphi_g^{k-1}(g^k) \cdots \varphi_g(g^k) \cdot g^k = g^{k^2} \neq e$. Получили противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть T – тор, $G = T \cup gT \cup \cdots \cup g^{n-1}T$ – его циклическое расширение с периодической компонентой gT . Из теоремы 1 мы знаем, что в этом случае $gT = \{tgt^{-1} \mid t \in T\}$, поэтому $(gT)^n = \{tg^nt^{-1} \mid t \in T\}$ – класс сопряженности элемента $g^n \in T$. Но тор коммутативен, поэтому $(gT)^n = \{g^n\}$.

Впрочем, для произвольных разрешимых групп это неверно. Вернемся к примеру 2. Поскольку

$$g_0^n = \begin{pmatrix} \xi^{n-1}E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \notin Z_H(U),$$

то имеем $(g_0H)^n = \{hg_0^n h^{-1} \mid h \in H\} \supsetneq \{g_0^n\}$. Таким образом, пример 2 иллюстрирует различие между конечными расширениями торов и произвольных разрешимых групп.

Из примеров, которые будут приведены ниже, мы увидим, что собственные значения матрицы A_g не определяют порядки элементов в компоненте gT . Впрочем, кое-что о них сказать все-таки можно. Для этого сформулируем несколько более общее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть T – тор, $G = T \cup gT \cup \dots \cup g^{m-1}T$ – его циклическое расширение порядка m , $\varphi_g(t) = g^{-1}tg$ и k – порядок автоморфизма φ_g . Тогда существует элемент $g_0 \in gT$ такой, что $g_0^{mk} = e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P_g(t) = \varphi_g^{m-1}(t) \cdots \varphi_g^2(t) \cdot \varphi_g(t) \cdot t, \quad Q_g(t) = \varphi_g^{k-1}(t) \cdots \varphi_g^2(t) \cdot \varphi_g(t) \cdot t.$$

Тогда $\forall t \in T$ $(gt)^m = g^m \cdot P_g(t)$ и $(gt)^k = g^m \cdot Q_g(t)$. Поскольку φ_g – гомоморфизм, а тор коммутативен, то P_g и Q_g суть гомоморфизмы тора T . Кроме того, $\varphi_g^k = \text{id} \implies P_g(t) = (Q_g(t))^r$, где $m = kr$.

ЛЕММА 2. Имеют место соотношения:

- 1) $Q_g(Q_g(t)) = (Q_g(t))^k$;
- 2) $P_g(P_g(t)) = (P_g(t))^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что φ_g – гомоморфизм и $\varphi_g^k = \text{id}$:

$$\begin{aligned} Q_g(Q_g(t)) &= Q_g(\varphi_g^{k-1}(t) \cdots \varphi_g(t) \cdot t) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \varphi_g^i(\varphi_g^{k-1}(t) \cdots \varphi_g(t) \cdot t) = \prod_{i=0}^{k-1} \varphi_g^i(\varphi_g^{k-1}(t)) \cdots \varphi_g^i(\varphi_g(t)) \cdot \varphi_g^i(t) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \varphi_g^{i+(k-1)}(t) \cdots \varphi_g^{i+(k-i+1)}(t) \cdot \varphi_g^{i+(k-i)}(t) \cdot \varphi_g^{i+(k-i-1)}(t) \cdots \varphi_g^{i+1}(t) \cdot \varphi_g^i(t) \\ &= \prod_{i=0}^{k-1} \varphi_g^{i-1}(t) \cdots \varphi_g(t) \cdot t \cdot \varphi_g^{k-1}(t) \cdots \varphi_g^{i+1}(t) \cdot \varphi_g^i(t) = \prod_{i=0}^{k-1} Q_g(t) = (Q_g(t))^k. \end{aligned}$$

Для доказательства тождества 2) можно заметить, что

$$\begin{aligned} P_g(P_g(t)) &= (Q_g((Q_g(t))^r))^r = (Q_g(Q_g(t)))^{r^2} = ((Q_g(t))^k)^{r^2} \\ &= ((Q_g(t))^r)^{kr} = (P_g(t))^m. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Группы $\text{Ker } P_g \cap \text{Im } P_g$ и $\text{Ker } Q_g \cap \text{Im } Q_g$ конечны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s \in \text{Im } P_g$, то $\exists t \in T: s = P_g(t)$. Далее, $s \in \text{Ker } P_g \implies e = P_g(s) = P_g(P_g(t)) = (P_g(t))^m = s^m$. Но в торе есть лишь конечное число элементов порядка не выше m . Для Q_g доказательство проводится аналогично.

Имеем $T/\text{Ker } P_g \cong \text{Im } P_g$, следовательно, $\dim \text{Ker } P_g + \dim \text{Im } P_g = \dim T$. Рассмотрим теперь гомоморфизм

$$\gamma: \text{Ker } P_g \times \text{Im } P_g \longrightarrow T, \quad (t_1, t_2) \mapsto t_1 \cdot t_2.$$

Поскольку ядро γ равно $\{(t, t^{-1})\} \subset \text{Ker } P_g \times \text{Im } P_g$ и по следствию 4 есть конечная подгруппа, имеем $T = \text{Ker } P_g \cdot \text{Im } P_g$.

ЛЕММА 3. *Имеет место равенство $\text{Im } Q_g = \text{Im } P_g$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $t \in \text{Im } P_g$, то $\exists s \in T: t = P_g(s)$. Но тогда $Q_g(s^r) = (Q_g(s))^r = P_g(s) = t$, т.е. $t \in \text{Im } Q_g$.

Обратно, пусть $t \in \text{Im } Q_g$, т.е. $\exists s \in T: t = Q_g(s)$. Докажем, что $\exists s_1 \in T: t = P_g(s_1)$. Основное поле алгебраически замкнуто, следовательно, $\exists s' \in T: (s')^r = s$, откуда $P_g(s') = (Q_g(s'))^r = Q_g((s')^r) = Q_g(s) = t$. Стало быть, $t \in \text{Im } P_g$.

Значит, $T/\text{Ker } Q_g \cong \text{Im } Q_g = \text{Im } P_g$, откуда, повторяя предыдущие рассуждения и используя следствие 4, получаем, что $T = \text{Ker } Q_g \cdot \text{Im } P_g$.

Теперь заметим, что образ отображения

$$\alpha: T \longrightarrow T, \quad t \mapsto (gt)^m = g^m \cdot P_g(t)$$

совпадает со смежным классом $g^m \text{Im } P_g \subset T$. Но $T = \text{Ker } Q_g \cdot \text{Im } P_g$, следовательно, любой такой смежный класс содержит хотя бы один элемент из $\text{Ker } Q_g$, т.е. $\exists t_0 \in T: (gt_0)^m = g^m \cdot P_g(t) = s \in \text{Ker } Q_g$. Без ограничения общности можно считать, что $g^m \in \text{Ker } Q_g$.

ЛЕММА 4. *Если $g^m \in \text{Ker } Q_g$, то $g^{mk} = e$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\forall l = 1, \dots, m-1$ $\varphi_g^l(g^m) = g^{-l} g^m g^l = g^m$. Но $g^m \in \text{Ker } Q_g$, следовательно, $e = Q_g(g^m) = \varphi_g^{k-1}(g^m) \cdots \varphi_g(g^m) \cdot g^m = (g^m)^k$, откуда $g^{mk} = e$.

Утверждение 6 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если компонента gT является периодической, то порядок любого ее элемента делит mk , где $k = \text{ord}(\varphi_g)$ и m – порядок gT в G/T .*

В примере 4 будет показано, что существуют тор T и его автоморфизм φ такие, что для любого расширения $G = T \cup gT \cup \dots \cup g^{m-1}T$, в котором $\forall t \in T$ $g^{-1}tg = \varphi(t)$, выполнено неравенство $\text{ord}(g') < m \text{ord}(\varphi) \quad \forall g' \in gT$. Однако во многих случаях равенство все-таки достигается.

Перемножая уравнения системы и меняя их местами, мы тем самым будем совершать элементарные целочисленные преобразования над строками матрицы $B = (a_{ij} - \delta_{ij})$. Такие преобразования, во-первых, не будут изменять модуля ее определителя, а во-вторых – с их помощью мы приведем матрицу B к верхнетреугольному виду. Система (1) тогда примет вид

$$\begin{cases} t_1^{a'_{11}} t_2^{a'_{12}} t_3^{a'_{13}} \dots t_n^{a'_{1n}} = 1, \\ t_2^{a'_{22}} t_3^{a'_{23}} \dots t_n^{a'_{2n}} = 1, \\ \dots\dots\dots \\ t_n^{a'_{nn}} = 1, \end{cases}$$

т.е. мы получаем

$$t_n^{a'_{nn}} = 1, \quad t_{n-1}^{a'_{n-1,n-1}} = t_n^{-a'_{n-1,n}}, \quad \dots, \quad t_1^{a'_{11}} = t_2^{-a'_{12}} \dots t_n^{-a'_{1n}}.$$

Стало быть, по ходу решения мы сначала извлечем корень степени $|a'_{nn}|$ из 1, затем корень степени $|a'_{n-1,n-1}|$ из некоего корня степени $|a'_{nn}|$ из 1 и т.д., но самое большее, что мы получим, – это корень степени $|a'_{11} \dots a'_{nn}|$ из 1. Порядок найденной таким образом неподвижной точки автоморфизма φ_g равен $\text{НОК}(\text{ord}(t_1), \dots, \text{ord}(t_n))$, но $\text{ord}(t_i)$ делит $|a'_{ii} \dots a'_{nn}|$, поэтому их НОК делит $|a'_{11} \dots a'_{nn}| = |\det(a'_{ij})| = |\det(B)| = |\det(A - E)| = |\chi_g(1)|$.

В некоторых случаях эта оценка оказывается сильнее оценки из следствия 5.

ПРИМЕР 4. Для любого расширения $G = T \cup gT \cup \dots \cup g^{m-1}T$ с $\chi_g(\lambda) = (\lambda^r + 1)/(\lambda + 1)$, где $r = \dim T + 1$, имеем $\chi_g(1) = 1$, т.е. $\text{ord}(g) = m$. Иными словами, $G \cong T \rtimes \langle g \rangle_m$.

§ 5. Нормализаторы максимальных торов простых групп

В этом параграфе мы изучим нормализаторы максимальных торов классических групп, а также исключительных групп G_2 и отчасти F_4 и E_8 , найдем их периодические компоненты и порядки элементов в этих компонентах.

Приведем сначала несколько общих фактов. Пусть T – максимальный тор односвязной простой алгебраической группы G , $N_G(T)$ – его нормализатор в G , $W = N_G(T)/T$ – группа Вейля, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – некоторая система простых корней. *Элементом Кокстера* группы W называется произведение $c = r_1 r_2 \dots r_n$, где r_i – отражения, ассоциированные с простыми корнями, а *числом Кокстера* h называется порядок элемента c . Напомним, что с точностью до сопряженности в группе W элемент c не зависит от нумерации простых корней, и любой элемент группы Вейля, сопряженный элементу Кокстера, также является элементом Кокстера для некоторой системы простых корней. В частности, элемент c сопряжен c^{-1} .

Как показано в [8; гл. 3.16], элемент Кокстера не имеет собственных значений, равных 1. Таким образом, его собственные значения имеют вид $\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_n}$, где ζ – первообразный корень h -й степени из 1 и $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$. Числа m_i называются *показателями* группы G . Значения показателей для каждой из простых групп можно найти, например, в справочном разделе работы [3]. Из вышесказанного непосредственно следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. Компонента gT нормализатора $N_G(T)$, соответствующая элементу Кокстера группы Вейля, является периодической.

Как показано в [9; предложение 30], элемент Кокстера коммутирует только со своими степенями, а потому число N_c элементов Кокстера равно $|W|/h$.

Впрочем, во многих простых группах нормализаторы максимальных торов имеют периодические компоненты, не отвечающие ни элементам Кокстера, ни их степеням. Будем рассматривать естественное действие группы W в рациональном векторном пространстве, порожденном решеткой характеров тора T . Чтобы найти число всех периодических компонент, воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в [10].

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. Если g_k – число элементов группы Вейля W , размерность пространства неподвижных точек которых равна $n - k$, то

$$\sum_{k=0}^n g_k z^k = \prod_{i=1}^n (1 + m_i z).$$

По теореме 1 число периодических компонент в $N_G(T)$ равно $g_n = m_1 \cdots m_n$. Результаты мы запишем в виде таблицы:

	SL_n	SO_{2n}	SO_{2n+1}	Sp_{2n}	G_2	F_4
$ W $	$n!$	$2^{n-1}n!$	$2^n n!$	$2^n n!$	12	1152
g_n	$(n-1)!$	$(2n-3)!!(n-1)$	$(2n-1)!!$	$(2n-1)!!$	5	385
N_c	$(n-1)!$	$2^{n-2}(n-2)!n$	$2^{n-1}(n-1)!$	$2^{n-1}(n-1)!$	2	96

	E_6	E_7	E_8
$ W $	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
g_n	$2^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$
N_c	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

Теперь определим порядки элементов в периодических компонентах.

1. Группа SL_n . Легко видеть, что элементами Кокстера в группе Вейля, состоящей из подстановок на n элементах, будут в точности циклы длины n . Их число равно $(n-1)!$, а это и есть количество периодических компонент в $N(T)$.

Вычислим порядки элементов в компоненте, соответствующей циклу длины n . Для этого рассмотрим лежащую в ней мономиальную $(0, 1, -1)$ -матрицу A ;

$$\text{ord}(A) = \begin{cases} n & \text{при нечетном } n, \\ 2n & \text{при четном } n. \end{cases}$$

2. Группа SO_{2n} . Будем рассматривать следующую матричную реализацию: $SO_{2n} \cong \{g \in GL_{2n} \mid g^T \Omega g = \Omega\}$, где Ω – мономиальная матрица с единицами по побочной диагонали.

Нормализатор максимального тора T есть

$$\left\{ A = (a_{ij}) \in SL_{2n} \mid \begin{array}{l} A - \text{мономиальная матрица;} \\ a_{2n-i+1, 2n-j+1} = a_{ij}^{-1}, \text{ если } a_{ij} \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим произвольную компоненту gT нормализатора. Ей соответствует гомоморфизм $\varphi_g: t \mapsto gtg^{-1}$, а ему в свою очередь – матрица A_g отображения, индуцированного в решетке характеров. Легко видеть, что она будет мономиальной $(0, 1, -1)$ -матрицей. Будем говорить, что мономиальная матрица $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ соответствует подстановке $\tau \in S_n$ (будем обозначать это $A = A_\tau$), если $\forall j = 1, \dots, n \exists \alpha_j \in \mathbb{k}^*: Ae_j = \alpha_j e_{\tau(j)}$. Тогда матрица A_g соответствует некоторой подстановке $\sigma \in S_n$.

Пусть $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ – разложение в произведение независимых циклов (в том числе длины 1). Тогда матрица A сопряжена матрице

$$A' = \begin{pmatrix} S_{\sigma_1} & & & \\ & S_{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_{\sigma_k} \end{pmatrix},$$

где S_{σ_j} – мономиальная матрица, соответствующая подстановке σ_j . Но если $\tau \in S_m$ – цикл длины m , то $(-1)^\tau = (-1)^{m-1}$ и характеристический многочлен матрицы S_τ равен

$$\chi_{S_\tau}(\lambda) = \lambda^m + (-1)^\tau (-1)^k P = \lambda^m - P,$$

где P – произведение ненулевых элементов матрицы S . Поэтому характеристический многочлен матрицы A равен

$$\chi_A = \chi_{S_{\sigma_1}} \cdots \chi_{S_{\sigma_k}} = (\lambda^{s_1} - P_1) \cdots (\lambda^{s_k} - P_k),$$

где s_j и P_j – соответственно порядок подстановки σ_j и произведение ненулевых элементов матрицы S_{σ_j} .

Теперь ясно, что матрица A не имеет собственных значений 1 тогда и только тогда, когда $P_j \neq 1$, а поскольку ненулевые элементы A могут быть равны только ± 1 (этот факт переносится и на матрицу A' , полученную из A перестановкой строк и столбцов), то это равносильно тому, что в каждом из блоков S_{σ_j} матрицы A' нечетное число элементов равны -1 .

Окончательно получаем, что периодические компоненты соответствуют элементам группы Вейля (σ, θ) , где $\sigma \in S_n$, $\theta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$, причем если $\sigma = (i_{1,1}, \dots, i_{1,s_1}) \cdots (i_{k,1}, \dots, i_{k,s_k})$ – разложение в произведение независимых циклов (в том числе длины 1), то

$$\prod_{q=1}^{s_j} \varepsilon_{i_{j,q}} = -1 \quad \forall j = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Напомним, что число -1 встречается среди компонент вектора θ четное число раз.

Теперь определим порядки элементов в соответствующей компоненте. Для этого рассмотрим лежащую в ней мономиальную $(0, 1)$ -матрицу g . Непосредственные вычисления показывают, что порядок g , а вместе с ним и порядок любого элемента рассматриваемой компоненты равен $2 \text{НОК}(s_1, \dots, s_k)$.

3. *Группа* SO_{2n+1} . Результаты п. 2 почти дословно переносятся на этот случай. Разница состоит только в том, что число -1 встречается среди компонент вектора θ не обязательно четное число раз.

4. *Группа* Sp_{2n} . Будем рассматривать следующую матричную реализацию: $Sp_{2n} \cong \{g \in GL_{2n} \mid g^T \Lambda g = \Lambda\}$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

(здесь I – мономиальная матрица с единицами по побочной диагонали).

Нормализатор максимального тора T есть

$$\left\{ A = (a_{ij}) \in GL_{2n} \left| \begin{array}{l} A - \text{мономиальная матрица;} \\ a_{2n-i+1, 2n-j+1} = a_{i,j}^{-1}, \\ \text{если } a_{ij} \neq 0 \text{ и } i, j \leq n \text{ или } i, j > n; \\ a_{2n-i+1, 2n-j+1} = -a_{i,j}^{-1}, \\ \text{если } a_{ij} \neq 0 \text{ и } i \leq n < j \text{ или } j \leq n < i \end{array} \right. \right\}.$$

Легко видеть, что группа Вейля в данном случае такая же, как и для SO_{2n+1} , поэтому можно воспользоваться результатами п. 2. Периодические компоненты соответствуют элементам группы Вейля (σ, θ) , где $\sigma \in S_n$, $\theta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$, причем если $\sigma = (i_{1,1}, \dots, i_{1,s_1}) \cdots (i_{k,1}, \dots, i_{k,s_k})$ – разложение в произведение независимых циклов (в том числе длины 1), то выполняется равенство (2).

Непосредственные вычисления показывают, что порядок мономиальной $(0, 1, -1)$ -матрицы, лежащей в периодической компоненте gT , равен $4 \text{НОК}(s_1, \dots, s_k)$.

5. *Группа* G_2 . Соответствующая группа Вейля состоит из 12 элементов: единичного, шести отражений относительно положительных корней и пяти поворотов на углы, кратные $\pi/6$. Последние являются степенями элемента Кокстера s и, как любые повороты, не имеют собственных значений, равных 1. Таким образом, периодические компоненты соответствуют элементам $s, \dots, s^5$.

Для нахождения порядков элементов в этих компонентах рассмотрим характеристический многочлен $\chi_c(\lambda)$ матрицы A_c . Он имеет вторую степень, коэффициенты его – целые числа, а корни равны ζ и ζ^5 , где ζ – примитивный корень шестой степени из 1. Следовательно, $\chi_c(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$. Из утверждения 7 для любого элемента g компоненты, соответствующей элементу s , имеет место неравенство $\text{ord}(g) \leq 6|\chi_c(1)| = 6$, откуда $\text{ord}(g) = 6$. Порядки элементов в компонентах, отвечающих $s^2, \dots, s^5$, равны соответственно 3, 2, 3 и 6.

6. *Группа* F_4 . Здесь мы определим порядки элементов в компонентах, отвечающих элементу Кокстера и его степеням.

Заметим, что показатели группы F_4 равны 1, 5, 7 и 11 и, таким образом, взаимно просты с числом Кокстера $h = 12$. Поэтому все степени элемента Кокстера отвечают периодическим компонентам.

Пусть компонента gT соответствует элементу Кокстера s . Из следствия 5 получаем $\text{ord}(g) = \text{ord}(s)a = 12a$, где $a \mid 12$. Но тогда $\text{ord}(g^6) = 2a$, причем из следствия 5 получаем $a \mid 2$. Рассматривая $\text{ord}(g^4)$, получаем $a \mid 3$, т.е. $a = 1$.

Окончательно получаем, что порядки элементов в компонентах, отвечающих c , c^2 , c^3 , c^4 , c^5 , c^6 , равны соответственно 12, 6, 4, 3, 12, 2. Легко видеть, что в нормализаторе максимального тора группы F_4 имеются периодические компоненты, не отвечающие ни элементам Кокстера, ни их степеням.

Отметим, что аналогичное рассуждение можно провести для элементов Кокстера группы E_8 . Что же касается элементов периодических компонент нормализаторов максимальных торов групп E_6 и E_7 , а также периодических компонент нормализаторов максимальных торов групп F_4 и E_8 , не отвечающих степеням элементов Кокстера, то определение их порядков требует дальнейшего изучения.

Список литературы

- [1] J. L. Dyer, “A nilpotent Lie algebra with nilpotent automorphism group”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 52–56.
- [2] R. Steinberg, “Endomorphisms of linear algebraic groups”, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **80** (1968), 1–108.
- [3] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988; англ. пер.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [4] A. Borel, G. D. Mostow, “On semi-simple automorphisms of Lie algebras”, *Ann. of Math.* (2), **61**:3 (1955), 389–405.
- [5] В. А. Крекнин, “О разрешимости алгебр Ли с регулярным автоморфизмом конечного порядка”, *Докл. АН СССР*, **150**:3 (1963), 467–469; англ. пер.: V. A. Krekнин, “Solvability of Lie algebras with a regular automorphism of finite period”, *Soviet Math. Dokl.*, **4** (1963), 683–685.
- [6] Э. Б. Винберг, В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, “Строение групп и алгебр Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **41**, ВИНТИ, М., 1990, 5–253; англ. пер.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, V. V. Gorbachevich, *Lie groups and Lie algebras III. Structure of Lie groups and Lie algebras*, Encyclopaedia Math. Sci., **41**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [7] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, Мир, М., 1969; пер. с англ. и фр.: J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1965; *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1966.
- [8] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [9] R. W. Carter, “Conjugacy classes in the Weyl group”, *Compositio Math.*, **25**:1 (1972), 1–59.
- [10] L. Solomon, “Invariants of finite reflection groups”, *Nagoya Math. J.*, **22** (1963), 57–64.

С. Н. Федотов (S. N. Fedotov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: glwrath@yandex.ru

Поступила в редакцию
23.05.2008 и 13.04.2009