Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Филимонов, О покрытии плоских множеств, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 8, 127–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:36:08

УДК 514.174

В. П. Филимонов

О покрытии плоских множеств

Исследованы задачи, связанные с классической проблемой Борсука о разбиении множеств в евклидовом пространстве на части меньшего диаметра, а также с известной задачей Нелсона–Хадвигера о хроматическом числе евклидова пространства. Получены новые оценки величин $d_n = \sup d_n(\Phi)$ и $d'_n = \sup d'_n(\Phi)$, где супремумы берутся по всем множествам единичного диаметра на плоскости, а величины $d_n(\Phi)$ и $d'_n(\Phi)$ для данного ограниченного множества $\Phi \subset \mathbb{R}^2$ определяются следующим образом:

$$d_n(\Phi) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \text{ diam } \Phi_i \leq x\},$$

$$d'_n(\Phi) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \forall X, Y \in \Phi_i \text{ } XY \neq x\},$$

где $\Phi_i \subset \mathbb{R}^2$ – некоторые множества, $\text{diam } \Phi_i$ – диаметр Φ_i , XY – расстояние между точками X и Y , $n \in \mathbb{N}$. Полученные оценки для d_n являются более точными, чем известные ранее оценки; величины d_n рассматриваются в настоящей работе впервые.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: хроматическое число, проблема Борсука, диаметр множества, покрытия плоских множеств, универсальные покрывающие множества и системы.

§ 1. Введение и основные определения

В настоящей статье изложены некоторые результаты, связанные с классической проблемой Борсука (см. [1]–[6]) о разбиении множеств в $\mathbb{R}^n$ на части меньшего диаметра, а также с известной задачей Нелсона–Хадвигера (см. [2], [7]–[10]) о хроматическом числе евклидова пространства. Мы всюду будем рассматривать случай плоскости $\mathbb{R}^2$.

Пусть Φ – произвольное ограниченное множество на плоскости, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $d_n(\Phi)$ точную нижнюю грань множества положительных вещественных чисел x , обладающих тем свойством, что Φ может быть покрыто n множествами $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, диаметры которых не превосходят x , т.е.

$$d_n(\Phi) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \text{ diam } \Phi_i \leq x\}.$$

Можно показать, что эта точная нижняя грань достижима, т.е. что Φ может быть полностью покрыто n множествами, диаметры которых не превосходят $d_n(\Phi)$. Величина $d_n(\Phi)$ не изменится, если дополнительно потребовать, чтобы все множества покрытия были выпуклыми и замкнутыми. Действительно, легко убедиться в том, что диаметр замыкания $[\text{conv } \Phi_i]$ выпуклой оболочки

$\text{conv } \Phi_i$ произвольного множества покрытия Φ_i совпадает с диаметром этого множества. При этом $\Phi_i \subseteq [\text{conv } \Phi_i]$ и, стало быть,

$$\Phi \subseteq [\text{conv } \Phi_1] \cup \dots \cup [\text{conv } \Phi_n].$$

Аналогично определим функцию $d'_n(\Phi)$ как точную нижнюю грань множества положительных вещественных чисел x с тем свойством, что Φ может быть покрыто такими n множествами $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, что расстояние между любыми двумя точками каждого Φ_i не равно x (такие множества далее всюду будем называть *множествами без расстояния x*), т.е.

$$d'_n(\Phi) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \forall X, Y \in \Phi_i \quad XY \neq x\}.$$

Заметим, что для произвольного Φ обе последовательности $d_n(\Phi)$ и $d'_n(\Phi)$ являются невозрастающими, поскольку в классе всех покрытий $n+1$ множеством существует подкласс, для которого $\Phi_{n+1} = \emptyset$, совпадающий с классом всех покрытий n множествами.

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим величины $d_n = \sup d_n(\Phi)$ и $d'_n = \sup d'_n(\Phi)$, где супремумы берутся по всем множествам Φ единичного диаметра на плоскости.

Из сделанного выше замечания легко следует, что последовательности d_n и d'_n также не возрастают.

Очевидно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ произвольное множество единичного диаметра на плоскости может быть покрыто n множествами, диаметры которых не превосходят d_n , причем d_n – наименьшее вещественное число с таким свойством.

Значения d_n и d'_n не изменятся, если взять супремумы только по всем выпуклым и замкнутым множествам Φ единичного диаметра. Действительно, $\text{diam}[\text{conv } \Phi] = \text{diam } \Phi$ и $\Phi \subseteq [\text{conv } \Phi]$, поэтому

$$d_n(\Phi) \leq d_n([\text{conv } \Phi]), \quad d'_n(\Phi) \leq d'_n([\text{conv } \Phi]).$$

Заметим также, что чуть более тонкие рассуждения показывают, что всякое множество единичного диаметра содержится в некотором множестве постоянной единичной ширины (см. [11]) и поэтому достаточно взять супремум лишь по выпуклым замкнутым множествам постоянной единичной ширины без изменения значений d_n и d'_n .

Напомним, что множество называется *множеством постоянной единичной ширины*, если его ширина по каждому направлению (т.е. расстояние между двумя опорными прямыми к множеству, проходящими в направлении, перпендикулярном данному) равна единице.

В дальнейшем мы увидим, что последовательность d_n связана с гипотезой Борсука, в то время как d'_n связана с задачей о хроматическом числе плоскости.

Обратим внимание на то, что определения и некоторые свойства последовательностей $d_n(\Phi)$ и d'_n уже описаны (см. [12]–[14]), тогда как $d'_n(\Phi)$ и d'_n рассматриваются здесь впервые.

Очевидно, что $d_1 = d_2 = 1$, так как, например, множество из трех точек, образующих правильный треугольник со стороной, равной единице, нельзя разбить на два множества меньшего диаметра. Последовательность d_n исследована Ленцем в статьях [12], [13]. Им найдены точные значения

$$d_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad d_7 = \frac{1}{2},$$

доказаны оценки

$$d_5 \geq \sin \frac{\pi}{5}, \quad d_6 \leq \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq d_n \leq \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(n-1)} \right), \quad n \geq 2, \quad (1.1)$$

и асимптотические оценки

$$(1.06 + o(1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < \left(\sqrt{\frac{\pi}{6\sqrt{3} \operatorname{tg} \pi/12}} + o(1) \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \leq d_n \leq \left(\sqrt{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}} + o(1) \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$< (1.1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (1.2)$$

Также в книге [14] упоминается оценка $d_6 \geq 1/(2 \cos \pi/22) \approx 0.5051$. Наконец, в работе [15] доказаны оценки

$$d_{13} \geq \frac{1}{3}, \quad d_{14} \leq \frac{\sqrt{2657 - 896\sqrt{3}}}{100} \approx 0.3324.$$

В настоящей статье при помощи техники построения универсальных покрывающих множеств и систем доказан ряд верхних оценок для элементов последовательности d_n , улучшающих указанные выше известные оценки. Также предложен новый метод оценивания величин d_n снизу, позволивший для большого количества натуральных $n > 7$ существенно улучшить единственную известную на данный момент оценку (1.1). Наконец, исследована последовательность d'_n .

Напомним, что *универсальным покрывающим множеством* (или *универсальной покрывающей*) называется такое множество Ω , что любое плоское множество Φ единичного диаметра может быть полностью покрыто Ω (т.е. на плоскости существует множество Ω_0 , конгруэнтное Ω , такое, что $\Phi \subseteq \Omega_0$). Аналогично, *универсальной покрывающей системой* называется такая система множеств $\Omega = \{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$, что произвольное плоское множество Φ единичного диаметра может быть полностью покрыто одним из множеств Ω_α . Здесь I – некоторый (возможно, бесконечный) набор индексов. Универсальное покрывающее множество является частным случаем универсальной покрывающей системы, когда I состоит из одного элемента. Подробнее об универсальных покрывающих множествах и системах см. в [16], [17].

Легко видеть, что если $\Omega = \{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – универсальная покрывающая система, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$d_n \leq \sup_{\alpha \in I} d_n(\Omega_\alpha), \quad d'_n \leq \sup_{\alpha \in I} d'_n(\Omega_\alpha).$$

В частности, если Ω – универсальное покрывающее множество, то $d_n \leq d_n(\Omega)$ и $d'_n \leq d'_n(\Omega)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

В 1920 году Пал в работе [18] (см. также [5]) доказал, что правильный шестиугольник с длиной стороны $1/\sqrt{3}$ является универсальной покрывшей. Введем для него обозначение Ω_6 .

Напомним также, что *хроматическим числом* пространства $\mathbb{R}^n$ называется минимальное число цветов, в которые можно так раскрасить все точки $\mathbb{R}^n$, что любые две точки на единичном расстоянии будут окрашены в разные цвета (произвольная такая раскраска называется *правильной*).

Обратим внимание на то, что правильную раскраску плоскости в семь цветов можно получить, замостив плоскость правильными шестиугольниками и раскрасив их надлежащим образом (см. рис. 1). Это свойство “паркетности” правильного шестиугольника будет полезно нам при доказательстве теорем 3 и 4.

Рис. 1. Правильная раскраска плоскости в семь цветов

Подробные обзоры результатов, касающихся хроматических чисел, содержатся в [2], [7]–[10], [19].

Наконец, сформулируем задачи, обратные задачам отыскания элементов последовательностей d_n и d'_n .

Пусть Φ – произвольное ограниченное множество на плоскости, $x > 0$ – вещественное число. Обозначим через $\chi(\Phi, x)$ минимальное число $n \in \mathbb{N}$, обладающее тем свойством, что Φ может быть полностью покрыто n множествами $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, диаметры которых не превосходят x , т.е.

$$\chi(\Phi, x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \text{ diam } \Phi_i \leq x\}.$$

Величина $\chi(\Phi, x)$ не изменится, если дополнительно потребовать, чтобы все множества покрытия были выпуклыми и замкнутыми.

Аналогично определим функцию $\chi'(\Phi, x)$ как минимальное число $n \in \mathbb{N}$ с тем свойством, что Φ может быть покрыто такими n множествами $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, что расстояние между любыми двумя точками каждого Φ_i не равно x , т.е.

$$\chi'(\Phi, x) = \min\{n \in \mathbb{N} : \Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n, \forall i \forall X, Y \in \Phi_i \text{ } XY \neq x\}.$$

Очевидно, что для произвольного Φ функции $\chi(\Phi, x)$ и $\chi'(\Phi, x)$ являются кусочно постоянными и невозрастающими.

Для всякого вещественного $x > 0$ рассмотрим величины $\chi(x) = \max \chi(\Phi, x)$ и $\chi'(x) = \max \chi'(\Phi, x)$, где максимумы берутся по всем множествам Φ единичного диаметра на плоскости. Очевидно, что для каждого $x > 0$ произвольное множество единичного диаметра на плоскости может быть покрыто $\chi(x)$ множествами, диаметры которых не превосходят x , либо $\chi'(x)$ множествами без расстояния x , причем $\chi(x)$ и $\chi'(x)$ – наименьшие натуральные числа с соответствующими свойствами.

Легко видеть, что функции $\chi(x)$ и $\chi'(x)$ не возрастают и, кроме того, значения этих функций не изменятся, если взять максимумы только по всем выпуклым и замкнутым множествам Φ единичного диаметра. Последнее утверждение следует из того, что для произвольных ограниченных множеств Φ и $\tilde{\Phi}$ на плоскости таких, что $\tilde{\Phi} \subseteq \Phi$, и произвольного $x > 0$ справедливы неравенства $\chi(\tilde{\Phi}, x) \leq \chi(\Phi, x)$ и $\chi'(\tilde{\Phi}, x) \leq \chi'(\Phi, x)$.

Отметим также, что значения этих функций не изменятся, если взять максимумы только по выпуклым замкнутым множествам постоянной единичной ширины.

Из оценок элементов последовательностей d_n и d'_n очевидным образом получаются оценки функций $\chi(x)$ и $\chi'(x)$ в соответствующих точках (в приведенных ниже неравенствах Φ – произвольное ограниченное множество на плоскости, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$). Аналогично, из оценок значений функций $\chi(x)$ и $\chi'(x)$ в различных точках получаются оценки элементов последовательностей d_n и d'_n :

$$\begin{aligned} d_n(\Phi) > x &\iff \chi(\Phi, x) \geq n+1, & d_n(\Phi) \leq x &\iff \chi(\Phi, x) \leq n, \\ d_n > x &\iff \chi(x) \geq n+1, & d_n \leq x &\iff \chi(x) \leq n. \end{aligned}$$

Действительно, выполнение обоих неравенств $d_n(\Phi) \leq x$ и $\chi(\Phi, x) \leq n$ эквивалентно утверждению о том, что множество Φ может быть покрыто n множествами, диаметр каждого из которых не превосходит x . Выполнение обоих неравенств $d_n \leq x$ и $\chi(x) \leq n$ эквивалентно утверждению о том, что произвольное множество Φ единичного диаметра на плоскости может быть покрыто n множествами диаметров, не превосходящих x . Неравенства из оставшихся пар являются отрицаниями соответствующих неравенств в рассмотренных парах и поэтому также эквивалентны.

Рассмотренные кусочно постоянные функции помогают проследить связь наших задач с проблемами Борсука и Нелсона–Хадвигера. Однако последовательности – более простой объект по сравнению с кусочно постоянными функциями и поэтому в настоящей статье исследуются именно элементы d_n и d'_n .

§ 2. Формулировки результатов

ТЕОРЕМА 1. *Верны следующие равенства и оценки:*

$$0 \leq d'_n \leq d_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

$$d'_1 = d'_2 = 1, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq d'_3 \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (2.3)$$

$$d'_4 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.4)$$

$$d'_5 \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (2.5)$$

$$d'_6 \leq d_6 \leq 0.5577 \dots, \quad (2.6)$$

$$d'_n = 0, \quad n \geq 7. \quad (2.7)$$

Таким образом, для полного исследования последовательности d'_n необходимо найти d'_n при $n = 3, 4, 5, 6$.

ТЕОРЕМА 2. Выполнены следующие неравенства:

$$d_{nm} \leq d_n d_m, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

$$d_5 \leq 0.6020 \dots, \quad (2.9)$$

$$d_6 \leq \sqrt{\frac{13}{3}}(2 - \sqrt{3}) = 0.5577 \dots, \quad (2.10)$$

$$d_8 \leq 0.4456 \dots, \quad (2.11)$$

$$d_9 \leq \sqrt{\frac{32 - 2\sqrt{109}}{63}} = 0.4201 \dots, \quad (2.12)$$

$$d_{10} \leq \frac{7}{10\sqrt{3}} = 0.4041 \dots, \quad (2.13)$$

$$d_{12} \leq \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 0.3660 \dots. \quad (2.14)$$

ТЕОРЕМА 3. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$d_{f(n)} \leq \frac{2}{n\sqrt{3}}, \quad \text{где } f(n) = \begin{cases} 9k^2 + 9k + 1 & \text{при } n = 3k + 1, \\ 9k^2 + 15k + 7 & \text{при } n = 3k + 2, \\ 9k^2 + 3k + 1 & \text{при } n = 3k. \end{cases} \quad (2.15)$$

Более того,

$$d_{f(9)-3} = d_{88} \leq \frac{2}{9\sqrt{3}}. \quad (2.16)$$

ТЕОРЕМА 4. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$d_{3n^2-3n+1-3\delta(m)} \leq \frac{2}{3n-2}, \quad (2.17)$$

где

$$m \equiv m(n) = 4n - \left[2\sqrt{3}n - \frac{4}{\sqrt{3}} \right] - 6, \quad \delta(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \leq 0, \\ k^2 & \text{при } m = 2k - 1, \\ k(k+1) & \text{при } m = 2k. \end{cases}$$

Более того, при $n = 14$ имеем

$$d_{3n^2-3n+1-3(\delta(m)+1)} = d_{526} \leq \frac{2}{3n-2} = 0.05. \quad (2.18)$$

ТЕОРЕМА 5. Для любого $0 < x \leq 1$ справедливо неравенство $d_{g(x)} \geq x$, где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor (1-x)/(2x) \rfloor} \left\lceil \frac{2\pi}{\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2(1/2-kx)^2}\right)} \right\rceil - \varepsilon(x),$$

причем $\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil = 2n - 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.19)$

Отметим, что асимптотически оценки теорем 3, 4 и 5 слабее (1.1). Однако для конечного числа небольших значений n , $f(n)$ и $g(x)$ они оказываются лучше. В этом улучшении известной оценки (1.1) и заключается главный результат настоящей статьи.

§ 3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 1. Начнем с (2.1). Покажем сначала, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и любого множества Φ единичного диаметра на плоскости справедливо неравенство $d'_n(\Phi) \leq d_n(\Phi)$. Действительно, рассмотрим произвольное покрытие Φ множествами, диаметры которых не превосходят x для данного $x \in \mathbb{R}$. Тогда для каждого множества из этого покрытия, очевидно, верно, что расстояние между любыми двумя его точками не равно $x + \varepsilon$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Из этого немедленно следует, что $d'_n(\Phi) \leq d_n(\Phi) + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем требуемое неравенство. Теперь для доказательства (2.1) осталось лишь взять супреумы обеих частей по всем множествам Φ единичного диаметра на плоскости.

Рис. 2. Мозеровское веретено

Оценка сверху в (2.3), а также (2.4) и (2.6) сразу получаются из соответствующих известных оценок для d_3 и d_4 , а также неравенства (2.10) теоремы 2 в силу (2.1).

Оценку снизу в (2.3) получим, рассмотрев так называемое мозеровское веретено (см. [7], [19]). Оно определяется следующим образом. Пусть ABC –

правильный треугольник с длинами сторон $1/\sqrt{3}$ и точка O симметрична точке C относительно прямой AB . Рассмотрим четырехугольник $OA'C'B'$, получающийся из $OACB$ поворотом относительно точки O , такой, что длина отрезка CC' также равна $1/\sqrt{3}$. Построенное множество из семи точек $\Delta = \{O, A, B, C, A', B', C'\}$ (вместе с отрезками длины $1/\sqrt{3}$, соединяющими указанные точки) и называется *мозеровским веретеном* (см. рис. 2).

Возьмем в качестве Φ его выпуклую оболочку – пятиугольник $OAC'C'B'$. Легко убедиться в том, что $\text{diam } \Phi = OC = 1$ и что Φ нельзя покрыть тремя множествами без расстояния x для всякого $x \leq 1/\sqrt{3}$.

Легко видеть, что Φ содержит в качестве подмножества гомотетичную копию Δ произвольного диаметра, не превосходящего единицу (достаточно сделать гомотетию с центром в точке O с соответствующим коэффициентом). Аналогичные рассуждения для всех таких копий показывают, что ни для какого $x \leq 1/\sqrt{3}$ требуемого покрытия не существует. Из этого сразу получаем, что $d'_3 \geq d'_3(\Phi) \geq 1/\sqrt{3}$, и (2.3) полностью доказано.

Аналогичным образом доказывается (2.2): для этого достаточно рассмотреть в качестве Φ правильный треугольник со стороной единичной длины.

Неравенство (2.7) является следствием оценки $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ хроматического числа плоскости. Действительно, произвольную правильную раскраску плоскости в n цветов мы можем интерпретировать как покрытие плоскости n множествами без единичного расстояния, каждое из которых образовано точками одного цвета. Сделав гомотетию с коэффициентом $x > 0$ и произвольным центром, получим аналогичное покрытие множествами без расстояния x для любого положительного x . Пересечения множеств, входящих в такое покрытие, с произвольным множеством Φ , очевидно, образуют покрытие Φ множествами без расстояния x . Поэтому упомянутая выше оценка хроматического числа влечет неравенство $d''_n(\Phi) \leq x$ для всякого $x > 0$ при $n \geq 7$. Следовательно, при таких n имеем $d'_n(\Phi) = 0$, откуда в силу произвольности Φ получаем (2.7).

Для доказательства (2.5) убедимся в справедливости неравенства $d'_5(\Omega_6) \leq 1/\sqrt{3}$, где Ω_6 – универсальная покрывающая Пала. Для этого построим покрытие Ω_6 пятью множествами $\Omega_6^1, \dots, \Omega_6^5$ без расстояния $1/\sqrt{3}$.

Обозначим вершины Ω_6 через A, B, C, D, E, F . Далее, пусть точки P, N, Q, R, M, S – середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA соответственно. Наконец, обозначим через G, O, H середины отрезков BF, NM, CE соответственно (см. рис. 3, а)).

Положим

$$\begin{aligned}\Omega_6^1 &= (OMFSG \setminus \{O, G\}) \cup \{C\}, & \Omega_6^2 &= (OGPBN \setminus \{O, G\}) \cup \{E\}, \\ \Omega_6^3 &= (ONCQH \setminus \{N, C\}), & \Omega_6^4 &= (OHREM \setminus \{O, H, E, M\}), \\ \Omega_6^5 &= (APGS \cup DRHQ) \setminus \{P, S, Q, H, R\}.\end{aligned}$$

Очевидно, $\Omega_6 = \Omega_6^1 \cup \dots \cup \Omega_6^5$ (см. рис. 3, б)); после каждой буквы через дефис указан номер множества, которому она принадлежит).

Рис. 3. а) К доказательству теоремы 1; б) покрытие Ω_6 пятью множествами без расстояния $1/\sqrt{3}$

Проверим, что все пять построенных множеств – без расстояния $1/\sqrt{3}$. Действительно, диаметр множества $\Omega_6^1 \setminus \{C\}$ (т.е. пятиугольника $OMFSG$ без вершин O и G) равен $1/\sqrt{3}$ и достигается он исключительно на концах отрезков GM и OF . Однако ни для одного из этих отрезков оба его конца не лежат в Ω_6^1 одновременно и поэтому для любых $X, Y \in \Omega_6^1 \setminus \{C\}$ верно

$$XY < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В то же время любая точка множества $\Omega_6^1 \setminus \{C\}$ удалена от точки C на расстояние, большее $1/\sqrt{3}$. Таким образом, в Ω_6^1 расстояния $1/\sqrt{3}$ нет.

Аналогичная проверка влечет необходимые утверждения и для остальных множеств в покрытии, что и завершает доказательство (2.5).

Теорема 1 полностью доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2. Сначала докажем (2.8). Заметим, что для всех $n, m \in \mathbb{N}$ и произвольного ограниченного множества Φ справедливо неравенство $d_{nm}(\Phi) \leq d_n d_m(\Phi)$.

Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие $\Phi \subseteq \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_m$, для которого $\text{diam } \Phi_i \leq d_m(\Phi) + \varepsilon$ при каждом $i \leq m$. Поэтому

$$\begin{aligned} d_{nm}(\Phi) &\leq d_{nm}(\Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_m) = d_{n+\dots+n}(\Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_m) \leq \max_i d_n(\Phi_i) \\ &\leq d_n \max_i \text{diam } \Phi_i \leq d_n(d_m(\Phi) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Устремив ε к нулю, получаем требуемое неравенство. Для доказательства (2.8) осталось взять инфимумы обеих его частей по всем множествам единичного диаметра.

Для доказательства (2.9), (2.10) и (2.11) нам потребуется новое универсальное покрывающее множество – усеченный шестиугольник Ω'_6 , а также универсальная покрывающая система из двух усеченных шестиугольников $\Omega_{6,1}$ и $\Omega_{6,2}$.

Рис. 4. а) Универсальная покрывка Ω'_6 ; б) универсальная покрывающая система $\{\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}\}$

Рассмотрим произвольное множество Φ единичного диаметра. Накроем его множеством Ω_6 и проведем шесть прямых, которые перпендикулярны отрезкам, соединяющим центр шестиугольника со всеми его вершинами, и отстоят от центра на расстояние $1/2$. Эти прямые отсекают от Ω_6 шесть треугольников. Очевидно, для каждой пары треугольников, содержащих противоположные вершины, хотя бы один из них не содержит внутренних точек Φ (поскольку расстояние между этими треугольниками равно единице). Назовем такой треугольник *отсеченным*.

Поскольку отсеченные треугольники всегда существуют (их, по крайней мере, три), очевидно, что Φ покрывается множеством Ω'_6 , изображенным на рис. 4, а). Также несложным перебором вариантов взаимного расположения отсеченных треугольников можно убедиться в том, что Φ покрывается одним из множеств, изображенных на рис. 4, б) (отсеченные треугольники им не принадлежат). Обозначим их через $\Omega_{6,1}$ и $\Omega_{6,2}$. В силу произвольности Φ множество Ω'_6 – универсальное покрывающее множество, а $\{\Omega_{6,1}, \Omega_{6,2}\}$ – универсальная покрывающая система.

Заметим, что каждый из отсеченных треугольников является равнобедренным с длиной боковой стороны, равной $2(1/\sqrt{3} - 1/2)$. Отношение последней величины к длине стороны шестиугольника равно $2 - \sqrt{3} = \operatorname{tg} \pi/12 = 0.2679 \dots$. Обозначим это число через λ .

Докажем (2.10). Для этого обозначим $\sigma = \sqrt{13/3}(2 - \sqrt{3})$ и убедимся в том, что

$$\max\{d_6(\Omega_{6,1}), d_6(\Omega_{6,2})\} \leq \sigma.$$

Сначала проверим, что $d_6(\Omega_{6,1}) \leq \sigma$. Для этого построим покрытие $\Omega_{6,1}$ шестью множествами, диаметры которых не превосходят σ .

Пусть $\Omega_{6,1}$ получается из правильного шестиугольника $ABCDEF$ с серединами сторон $M_1, \dots, M_6$ и центром O отсечением треугольников BB_1B_2 , DD_1D_2 и FF_1F_2 (см. рис. 5). Отложим на лучах AO , CO , EO отрезки AX , CY , EZ длины $1/2$ и проведем отрезки OX , OY , OZ . Далее, соединим каждую из точек X , Y , Z с двумя серединами сторон шестиугольника так, как показано на рисунке. Тем самым задано покрытие $\Omega_{6,1}$ шестью многоугольниками $OXM_1B_2B_1M_2Y$, AM_1XM_6 и т.д.

Рис. 5. К доказательству (2.10): покрытие $\Omega_{6,1}$ шестью множествами

Убедимся в том, что их диаметры не превосходят σ . Действительно, $AX = M_1M_6 = 1/2$, а значит, диаметр четырехугольника AM_1XM_6 равен $1/2$. Диаметр семиугольника $OXM_1B_1B_2M_2Y$, как легко проверить, равен

$$OB_1 = \frac{1}{(2 \cos \pi/12)} \approx 0.5176.$$

Остальные множества покрытия получаются из этих двух поворотами и поэтому имеют такие же диаметры. Следовательно, $d_6(\Omega_{6,1}) \leq 1/(2 \cos \pi/12) < \sigma$.

Теперь аналогичным способом проверим неравенство $d_6(\Omega_{6,2}) \leq \sigma$.

Рис. 6. К доказательству (2.10): покрытие $\Omega_{6,2}$ шестью множествами

Пусть $\Omega_{6,2}$ получается из правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром O отсечением треугольников AA_1A_2 , BB_1B_2 и FF_1F_2 (см. рис. 6). Пусть точка M – середина отрезка A_1A_2 , а серединный перпендикуляр к отрезку A_1C пересекает отрезок AD в точке J . Очевидно, $JA_1 = JC$.

Проведем через точку J прямые, параллельные диагоналям BE и CF шестиугольника. Пусть они высекают на $\Omega_{6,2}$ отрезки PQ и RS (см. рис. 6). Тогда отрезки MD , PQ , RS , а также граница $\Omega_{6,2}$ образуют покрытие $\Omega_{6,2}$ шестью многоугольниками.

Проверим, что диаметр каждого из них не превосходит σ . Заметим сначала, что $JA_1 = JC = \sigma$. Действительно, равенство $JA_1^2 = JC^2$ в силу теоремы Пифагора для треугольников JMA_1 и JM_2C (точка M_2 – середина BC) равносильно следующему соотношению:

$$\left(OJ + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg} \pi/12}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - OJ\right)^2,$$

откуда находим

$$OJ = \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \pi/12}{4(3 + \sqrt{3})}.$$

Теперь длину отрезка JA_1 можно найти по теореме Пифагора из треугольника JMA_1 .

Легко показать, что диаметры пятиугольников JMA_1B_2P и JPB_1CR равны $JA_2 = JC = \sigma$, а диаметр равностороннего треугольника JRD меньше σ . Поскольку множества покрытия разбиваются на пары симметричных относительно прямой MD , из этого следует, что $d_6(\Omega_{6,2}) \leq \sigma$, что и завершает доказательство (2.10).

Для доказательства (2.9) и (2.10) мы построим покрытия множества Ω'_6 соответственно пятью и восемью множествами. Пусть Ω'_6 получается из правильного шестиугольника $ABCDEF$ с центром O отсечением треугольника AA_1A_2 . Обозначим середину отрезка A_1A_2 через M . Опишем необходимое покрытие Ω'_6 пятью множествами.

Рис. 7. К доказательству (2.9): покрытие Ω'_6 пятью множествами

Рассмотрим на сторонах BC , CD , DE и EF точки X , Y , Z и T соответственно такие, что все стороны пятиугольника $MXYZT$ равны (см. рис. 7). Это можно сделать единственным образом. Действительно, при условии равенства всех сторон произвольного пятиугольника $MX'Y'Z'T'$ с вершинами на соответствующих сторонах $ABCDEF$ (кроме, быть может, $Y'Z'$) увеличение длины отрезка MX' влечет уменьшение длины $Y'Z'$. Поэтому равенство $MX' = Y'Z'$ возможно при единственном положении точки X' на стороне BC .

Если принять длину отрезка MX' за неизвестную переменную x , то условие равенства длин отрезков MX' и $Y'Z'$ эквивалентно уравнению четвертой степени на x , единственный корень которого, отвечающий положению точек X' и Y' на отрезках BC и CD соответственно, совпадает с длиной каждой из сторон пятиугольника $MXYZT$. Обозначим длину отрезка MX через ρ'_5 . Можно убедиться в том, что $\rho'_5 = 0.6020\dots$. Соединим точку O с каждой из вершин $MXYZT$. Этим задано покрытие Ω'_6 пятью многоугольниками. Очевидно, что расстояние от точки O до произвольной точки границы Ω'_6 не превосходит $1/\sqrt{3} < \rho'_5$, а значит, диаметры всех многоугольников покрытия равны ρ'_5 . Этим доказано (2.9).

Покрытие Ω'_6 восемью множествами строится аналогично.

Рассмотрим на сторонах $ABCDEF$ такие точки X, Y, Z, T, P и Q , что все стороны семиугольника $MXYZTPQ$ равны (см. рис. 8).

Рис. 8. К доказательству (2.11): покрытие Ω'_6 восемью множествами

Рассуждая так же, как при доказательстве (2.9), убеждаемся в том, что это можно сделать единственным образом, а длина MX является корнем некоторого алгебраического уравнения. Обозначим длину отрезка MX через ρ'_7 . Можно убедиться в том, что $\rho'_7 = 0.4456\dots$. Рассмотрим окружность ω'_7 с центром в точке O диаметра ρ'_7 и обозначим точки пересечения отрезков, соединяющих O с вершинами $MXYZTPQ$, как на рис. 9. Соединим вершины $MXYZTPQ$ с соответствующими им точками на окружности. Этим задано покрытие Ω'_6 кругом с границей ω'_7 и семью многоугольниками $MA_1XX_1M_1$, $XBYY_1X_1$ и т.д. Можно убедиться в том, что диаметр каждого из этих восьми множеств равен ρ'_7 , что и доказывает (2.11). Для доказательства остальных неравенств построим соответствующие покрытия множества Ω_6 . Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром в точке O , конгруэнтный Ω_6 . Докажем (2.12). Для этого построим покрытие $ABCDEF$ девятью множествами. Пусть точки M и N – середины отрезков BC и EF . Рассмотрим на отрезках AB, CD, DE и FA точки X, Y, Z и T соответственно такие, что длины всех сторон восьмиугольника $AXMYDZNT$ равны (см. рис. 9).

Рис. 9. К доказательству (2.12): покрытие Ω_6 девятью множествами

В треугольнике AMO рассмотрим такую точку X_1 , что $AX_1 = MX_1 = 2OX_1$. Пусть точка Z_1 симметрична X_1 относительно точки O , а точки Y_1 и T_1 симметричны X_1 и Z_1 соответственно относительно прямой MN . Легко видеть, что при таком построении длины всех отрезков, изображенных на рис. 9 пунктиром, равны. Обозначим их через σ_9 . Можно убедиться в том, что

$$\sigma_9 = \sqrt{\frac{(32 - 2\sqrt{109})}{63}} = 0.4201 \dots$$

Пусть ω_9 – окружность с центром в точке O диаметра σ_9 . Обозначим через A_1 , M_1 , D_1 и N_1 точки пересечения ω_9 с отрезками OA , OM , OD и ON соответственно. Проведем отрезки, соединяющие соответствующие вершины восьмиугольников $AXMYDZNT$ и $A_1X_1N_1Y_1D_1Z_1N_1T_1$. Этим задано покрытие Ω_6 кругом с границей ω_9 и восемью многоугольниками AXX_1A_1 , BMM_1X_1X и т.д. Можно убедиться в том, что диаметр каждого из этих множеств равен σ_9 . Этим доказано (2.12).

Для доказательства (2.13) построим покрытие $ABCDEF$ десятью множествами. Определим точки M , N , X , Y , Z и T так же, как при доказательстве (2.12) (см. рис. 10).

Обозначим длину отрезка AX через ρ_8 . Легко убедиться в том, что $\rho_8 = 7/(10\sqrt{3})$. Пусть точка X_1 симметрична X относительно прямой AM . Аналогично определим точки Y_1 , Z_1 и T_1 . Пусть A_1 и D_1 – такие точки на отрезке AD , что $AA_1 = DD_1 = \rho_8$. Наконец, пусть M_1 и N_1 – такие точки на отрезке MN , что $BM_1 = FN_1 = \rho_8$. Несложно убедиться в том, что при таком построении длины всех отрезков, изображенных на рис. 10 пунктиром, равны ρ_8 . Проведем все отрезки, изображенные на рис. 10 сплошной линией. Этим задано покрытие Ω_6 десятью многоугольниками $A_1X_1M_1Y_1D_1$, AXX_1A_1 , BMM_1X_1X и т.д. Легко убедиться в том, что диаметр каждого из этих многоугольников равен ρ_8 . Этим доказано (2.13).

Наконец, докажем (2.14). Заметим, что шестиугольник $ABCDEF$ представим в виде объединения трех конгруэнтных ромбов $ABCO$, $CDEO$ и $EFAO$.

Рис. 10. К доказательству (2.13): покрытие Ω_6 десятью множествами

Поэтому очевидно, что $d_{12}(ABCDEF) \leq d_4(ABCO)$. Обозначим

$$\sigma_{12} = \frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$

Построим покрытие $ABCO$ четырьмя множествами, диаметр каждого из которых не превосходит σ_{12} . Пусть X, Y, Z и T – такие точки на отрезках AB, BC, CO и OA соответственно, что все стороны шестиугольника $AXYCZT$ равны (см. рис. 11). Легко показать, что в этом случае длина каждой из этих сторон равна σ_{12} .

Рис. 11. К доказательству (2.14): фрагмент покрытия Ω_6 двенадцатью множествами

Пусть P и Q – такие точки на отрезке AC , что $AP = CQ = \sigma_{12}$. Можно убедиться в том, что при таком построении длины всех отрезков, изображенных на рис. 11 пунктиром, равны σ_{12} . Диаметр каждого из многоугольников $AXPT, BYQPX, CZQY$ и $OTRQZ$ также равен σ_{12} . Поэтому эти четыре многоугольника образуют требуемое покрытие $ABCO$. Этим доказано (2.14).

Теорема 2 полностью доказана.

3.3. Доказательство теоремы 3. Для доказательства (2.15) воспользуемся универсальной покрывкой Ω_6 . Покажем, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $d_{f(n)}(\Omega_6) \leq 2/(n\sqrt{3})$.

Фиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Замостим всю плоскость паркетом из правильных шестиугольников диаметра $2/(n\sqrt{3})$. Пусть точка O – центр любого из них. Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ диаметра $2/\sqrt{3}$ с центром в точке O и со сторонами, параллельными соответствующим сторонам шестиугольников паркета (случаи $n = 4, 5, 9$ проиллюстрированы на рис.12). Несложно убедиться в том, что среди шестиугольников паркета в точности $f(n)$ имеют общие точки с внутренностью $ABCDEF$. Но $ABCDEF$ конгруэнтен Ω_6 , а потому Ω_6 допускает покрытие $f(n)$ множествами диаметра $2/(n\sqrt{3})$, из чего и следует нужное нам неравенство.

Рис. 12. К доказательству теоремы 3

Теперь докажем (2.16). Достаточно проверить, что

$$\max\{d_{88}(\Omega_{6,1}), d_{88}(\Omega_{6,2})\} \leq \frac{2}{(9\sqrt{3})}.$$

Для этого заметим, что на рис. 12 отношение AA_1/AB равно $2/9 < \lambda$ (см. п. 3.2). При этом пересечение шестиугольника паркета с центром в точке A и шестиугольника $ABCDEF$ полностью содержится в треугольнике AA_1A_2 . Поэтому многоугольники, конгруэнтные $\Omega_{6,1}$ и $\Omega_{6,2}$ и получающиеся из $ABCDEF$ отсечением соответствующих треугольников, очевидно, могут быть покрыты $f(9) - 3 = 88$ маленькими шестиугольниками, что и доказывает (2.16).

Теорема 3 доказана.

3.4. Доказательство теоремы 4. Пусть n – произвольное натуральное число. Замостим плоскость паркетом из правильных шестиугольников диаметра $2/(3n - 2)$. Зафиксируем произвольный из них. Назовем его *выделенным*. Пусть точка O – его центр. Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ диаметра $2/\sqrt{3}$ с центром в точке O , стороны которого перпендикулярны прямым, соединяющим O с соответствующими вершинами выделенного шестиугольника (случаи $n = 2, 3, 4$ проиллюстрированы на рис. 13). Легко видеть, что среди шестиугольников паркета с внутренностью $ABCDEF$ общие точки имеют в точности

$$1 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + \dots + (n - 1) \cdot 6 = 1 + \frac{6n(n - 1)}{2} = 3n^2 - 3n + 1$$

шестиугольников. Так как $ABCDEF$ конгруэнтен Ω_6 , то Ω_6 может быть покрыт $3n^2 - 3n + 1$ множеством диаметра $2/(3n - 2)$ и поэтому $d_{3n^2 - 3n + 1}(\Omega_6) \leq 2/(3n - 2)$. Отсюда получаем (2.17) при $m(n) \leq 0$.

Рис. 13. К доказательству (2.17) при $m(n) \leq 0$

Для доказательства (2.17) в общем случае покажем, что произвольное множество единичного диаметра можно так расположить на плоскости, что общие точки с его внутренностью будут иметь не более $3n^2 - 3n + 1 - 3\delta(m)$ шестиугольников паркета. При этом нам удобно будет ограничиться рассмотрением множеств постоянной единичной ширины. Это ограничение не уменьшает общности наших рассуждений в силу замечания из § 1.

Пусть Φ – произвольное плоское множество постоянной единичной ширины. Расположим Φ на плоскости так, чтобы оно было полностью покрыто шестиугольником $ABCDEF$. Рассмотрим произвольную главную диагональ $ABCDEF$, например, AD , и две опорные к Φ прямые, ей перпендикулярные. Обозначим их через L_1 и L_2 так, что расстояние от точки A до прямой L_1 меньше, чем до L_2 (см. рис. 14).

Ясно, что расстояние между прямыми L_1 и L_2 равно единице, поскольку оно равно ширине множества Φ по направлению AD . В то же время расстояние от точки D до прямой BF равно $\sqrt{3}/2 < 1$. Поэтому прямая L_1 рас-

положена ближе к точке A , чем BF . Аналогично, прямая L_2 расположена ближе к точке D , чем CE . Значит, прямые L_1 и L_2 отсекают от $ABCDEF$ два равнобедренных треугольника. Назовем их *AD-отсеченными* и обозначим через T_1 и T_2 соответственно. Очевидно, что все шестиугольники паркета, пересечение которых с внутренностью $ABCDEF$ непусто и полностью содержится в $T_1 \cup T_2$ (такие шестиугольники также назовем *AD-отсеченными*, а их пересечения с $ABCDEF$ – *AD-отсеченными частями*), не содержат внутренних точек множества Φ .

Обозначим количество *AD-отсеченных* шестиугольников паркета через h_{AD} . Аналогичным образом, рассмотрев две другие главные диагонали $ABCDEF$, определим величины h_{BE} и h_{CF} .

Покажем, что $h_{AD} \geq \delta(m)$. Для этого покроем плоскость замкнутыми полосами ширины $\sqrt{3}/(2(3n-2))$, границы которых перпендикулярны AD , так, что точка O лежит на границе двух соседних полос (границы четырех таких полос изображены на рис. 14). Обозначим через M количество полос покрытия, хотя бы одна из границ которых лежит строго между L_1 и L_2 . Все эти полосы, кроме, быть может, двух крайних, полностью лежат в полосе между прямыми L_1 и L_2 , ширина которой равна единице. Поэтому в силу иррациональности числа $\sqrt{3}/(2(3n-2))$ справедливо строгое неравенство $(M-2) \cdot \sqrt{3}/2(3n-2) < 1$, из которого следует, что $M \leq [2\sqrt{3}n - 4/\sqrt{3}] + 2$.

В то же время, общее число полос покрытия, обе границы которых пересекают $ABCDEF$ (назовем такие полосы *полными*), равно $4(n-1)$. Очевидно, что $4(n-1) - M \geq m(n)$, поэтому если $m > 0$, то по меньшей мере m полных полос не содержат внутренних точек Φ . Назовем такие полосы *AD-отсеченными*. Поскольку при $m \leq 0$ неравенство (2.17) уже доказано, будем предполагать далее, что $m > 0$.

Разобьем множество всех *AD-отсеченных* полос на две группы: к первой отнесем все полосы, лежащие между L_1 и A , ко второй – все оставшиеся, т.е.

Рис. 14. Опорные прямые к множеству Φ

лежащие между L_2 и D (например, на рис. 14 вторая группа пуста, а в первой содержится одна полоса). Пусть в этих группах m_1 и m_2 полос соответственно. Легко видеть, что в этом случае в T_1 и T_2 содержится соответственно $m_1(m_1 + 1)/2$ и $m_2(m_2 + 1)/2$ AD -отсеченных частей (поскольку отсечение k -й от вершины A или D полосы увеличивает количество таких частей на k). Поэтому, учитывая, что $m_1 + m_2 \geq m$, получаем, что

$$h_{AD} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{m_1 + m_2}{2} \geq \frac{m_1^2 + (m - m_1)^2}{2} + \frac{m}{2}.$$

Поскольку функция x^2 – выпукла, а m_1 – целое число, последнее выражение достигает своего минимального значения, если $m_1 = \lfloor m/2 \rfloor$. При $m = 2k$ это значение равно $k^2 + k$, при $m = 2k - 1 - ((k - 1)^2 + k^2 + (2k - 1))/2 = k^2$. Следовательно, для всех $m > 0$ выполнено $h_{AD} \geq \delta(m)$.

Аналогично, $h_{BE} \geq \delta(m)$ и $h_{CF} \geq \delta(m)$.

Поэтому если в множестве отсеченных треугольников, соответствующих всем трем главным диагоналям, никакие два не содержат общей отсеченной части, получаем, что Φ может быть покрыто не более чем $3n^2 - 3n + 1 - 3\delta(m)$ шестиугольниками диаметра $2/(3n - 2)$, из чего следует (2.17) для этого случая. Если же какие-то два из этих треугольников содержат общую отсеченную часть, то, очевидно, что эти треугольники соответствуют двум вершинам разных главных диагоналей шестиугольника $ABCDEF$, причем эти вершины являются концами одной из сторон $ABCDEF$ (см. рис. 15).

Рис. 15. Два отсеченных треугольника с общей отсеченной частью

Обозначим суммарное количество отсеченных частей, содержащихся в этих двух отсеченных треугольниках, через h_0 . Покажем, что $h_0 \geq 3\delta(m)$. Действительно, h_0 будет наименьшим, если пересечение треугольников содержит ровно одну отсеченную часть. В этом случае общая отсеченная часть имеет пересечение хотя бы с одной стороной $ABCDEF$ (назовем такие отсеченные части *примыкающими* к этой стороне). Пусть она – l -я, считая от любой из вершин, среди примыкающих к этой стороне (на рис. 13 пронумерованы все отсеченные части, примыкающие к одной из сторон шестиугольника $ABCDEF$ при $n = 4$). В этом случае

$$h_0 = \frac{l(l + 1)}{2} + \frac{(n - l + 1)(n - l + 2)}{2} - 1 = \frac{l^2 + (n - l + 1)^2}{2} + \frac{n - 1}{2}.$$

Покажем, что $h_0 > n^2/4$. Действительно, вновь используя выпуклость функции x^2 , а также тождество $l + (n - l + 1) = n + 1$, получаем, что при $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, выполнено

$$h_0 \geq \frac{k^2 + k^2}{2} + \frac{2k - 2}{2} = k^2 + k - 1 > k^2 - k + \frac{1}{4} = \frac{(2k - 1)^2}{4}.$$

Если же $n = 2k$, то справедливо неравенство

$$h_0 \geq \frac{k^2 + (k + 1)^2}{2} + \frac{2k - 1}{2} = k^2 + 2k > k^2 = \frac{(2k)^2}{4}.$$

Теперь оценим $\delta(m)$ сверху. Имеем

$$m = 4n - \left[2\sqrt{3}n - \frac{4}{\sqrt{3}} \right] - 6 \leq 4n - 2\sqrt{3}n + \frac{4}{\sqrt{3}} + 1 - 6 < 4n - 2\sqrt{3}n - 2.$$

Несложно убедиться в том, что при любом m выполнено неравенство $\delta(m) \leq (\frac{m+1}{2})^2$. Поэтому

$$\delta(m) \leq \left(\frac{m+1}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{4n - 2\sqrt{3}n - 1}{2} \right)^2 < (2 - \sqrt{3})^2 n^2.$$

Осталось заметить, что $3(2 - \sqrt{3})^2 < 1/4$, и поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$h_0 > \frac{n^2}{4} > 3(2 - \sqrt{3})^2 n^2 > 3\delta(m).$$

Значит, и в этом случае Φ допускает покрытие не более чем $3n^2 - 3n + 1 - 3\delta(m)$ шестиугольниками диаметра $2/(3n - 2)$. Этим полностью доказано (2.17).

Перейдем к доказательству (2.18). Пусть $n = 14$. Тогда $m = 4$, $\delta(m) = 6$. Обозначим через Φ_1 третий по счету от вершины A шестиугольник паркета, примыкающий к стороне AF шестиугольника $ABCDEF$, через Φ_2 — симметричный Φ_1 относительно точки O шестиугольник паркета, через $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ — шестиугольники паркета, симметричные Φ_1 и Φ_2 относительно прямой AD . Для вершин Φ_1 введем обозначения $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$, для соответствующих им вершин Φ_2 — $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$. Наконец, пусть G_1 — такая точка, что $\overrightarrow{B_1G_1} = \overrightarrow{F_1D_1}$, а H_1 и I_1 — точки пересечения прямой OA с прямыми B_1G_1 и B_1C_1 соответственно (см. рис. 16).

Покажем, что $\rho(\{O\}, \Phi_1) = OB_1$ (через $\rho(\Phi, \Psi)$ здесь и всюду далее обозначено расстояние между множествами Φ и Ψ , т.е. $\rho(\Phi, \Psi) = \inf\{X_1X_2 : X_1 \in \Phi, X_2 \in \Psi\}$). Для этого проверим, что точка B_1 — наименее удаленная от O вершина Φ_1 . Действительно, $\angle OB_1G_1 > \angle OH_1G_1 = \pi/3$, поэтому

$$\angle OB_1C_1 = \angle OB_1G_1 + \angle G_1B_1C_1 > \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, в треугольнике OB_1C_1 угол при вершине B_1 — наибольший, а значит, $OC_1 > OB_1$.

Далее, $\angle OB_1A_1 > \angle OB_1H_1 > \pi/2$, и поэтому $OA_1 > OB_1$.

Рис. 16. К доказательству (2.18)

Наконец, очевидно, что каждый из углов OA_1F_1 , OC_1D_1 и OB_1E_1 больше $\pi/2$, из чего по аналогичным соображениям следует, что $OF_1 > OA_1 > OB_1$, $OD_1 > OC_1 > OB_1$ и $OE_1 > OB_1$. Таким образом, OB_1 – наименьшее из расстояний от точки O до вершин Φ_1 , а значит, $\rho(\{O\}, \Phi_1) = OB_1$. Так как выпуклые шестиугольники Φ_1 и Φ_2 симметричны относительно точки O , то из этого следует, что

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) = 2\rho(\{O\}, \Phi_1) = 2OB_1 = B_1B_2.$$

Убедимся в том, что $OB_1 > 1/2$. Действительно, диаметр каждого шестиугольника паркета равен $2/(3 \cdot 14 - 2) = 1/20$, а расстояние между его противоположными сторонами – $\sqrt{3}/40$. Поэтому в силу теоремы Пифагора для треугольника OI_1B_1 имеем

$$OB_1 = \sqrt{\left(11.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{40}\right)^2 + \left(1.25 \cdot \frac{1}{20}\right)^2} = 0.501 \dots > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\rho(\Phi_1, \Phi_2) = 2OB_1 > 1 = \text{diam } \Phi$. Значит, хотя бы один из шестиугольников Φ_1 и Φ_2 не содержит внутренних точек множества Φ . Аналогично, хотя бы один из шестиугольников $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ не содержит внутренних точек Φ .

Обозначим через $\tilde{h}_{AD}$ количество AD -отсеченных шестиугольников из множества $\Phi_{AD} = \{\Phi_1, \Phi_2, \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2\}$, а через h'_{AD} – количество шестиугольников из множества Φ_{AD} , не содержащих внутренних точек Φ и не являющихся AD -отсеченными.

Легко проверить, что если $\tilde{h}_{AD} \geq 1$, то $h_{AD} \geq (3 + 2 + 1) + 1 = 7 = \delta(m) + 1$. Если же $\tilde{h}_{AD} = 0$, то $h'_{AD} \geq 2$. При этом ранее было показано, что $h_{AD} \geq \delta(m)$. Значит, справедливо неравенство $h_{AD} + h'_{AD} \geq \delta(m) + 1$. Если вместо AD рассмотреть диагонали BE и CF , получатся неравенства $h_{BE} + h'_{BE} \geq \delta(m) + 1$ и $h_{CF} + h'_{CF} \geq \delta(m) + 1$. При этом множества Φ_{AD} , Φ_{BE} и Φ_{CF} попарно не пересекаются. Поэтому очевидно, что Φ допускает покрытие не более чем

$$3n^2 - 3n + 1 - (h_{AD} + h'_{AD} + h_{BE} + h'_{BE} + h_{CF} + h'_{CF}) \leq 3n^2 - 3n + 1 - 3(\delta(m) + 1) = 526$$

шестиугольниками паркета, что и завершает доказательство (2.18).

Теорема 4 полностью доказана.

3.5. Доказательство теоремы 5. Фиксируем произвольное $0 < x \leq 1$. Пусть O – произвольная точка на плоскости. Для каждого $r \geq 0$ обозначим через Γ_r окружность с центром в O радиуса r . В частности, $\Gamma_0 = \{O\}$.

Рассмотрим множества

$$\Sigma = \bigcup_{k=0}^{[(1-x)/(2x)]} \Gamma_{1/2-kx}, \quad \Sigma_0 = \begin{cases} \Sigma, & \text{если } \left[\frac{1}{x}\right] = 2n-1, \quad n \in \mathbb{N}; \\ \Sigma \cup \Gamma_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что $d_{g(x)}(\Sigma_0) \geq x$. Поскольку $\text{diam } \Sigma_0 = 1$, это неравенство влечет утверждение теоремы.

Пусть, напротив, $d_{g(x)}(\Sigma_0) < x$. Тогда Σ_0 может быть покрыто $g(x)$ множествами, диаметр каждого из которых меньше x . Рассмотрим произвольное такое покрытие Φ . Заметим, что никакое множество из Φ не может иметь общих точек с двумя разными окружностями, составляющими Σ_0 , поскольку иначе в этом множестве покрытия есть точки на расстоянии не менее x . Действительно, разность радиусов любых двух окружностей, образующих Σ , не меньше x . При этом легко убедиться в том, что если $[1/x]$ – четное число, то радиус наименьшей из этих окружностей также не меньше x . Из этого следует нужное нам утверждение.

Рассмотрим случай $[1/x] = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$. В силу последнего замечания имеем

$$\Phi = \bigcup_{k=0}^{[(1-x)/(2x)]+1} \Phi_k, \quad \Phi_k = \{\Phi \in \Phi : \Phi \cap \Gamma_{1/2-kx} \neq \emptyset\}, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{1-x}{2x}\right],$$

$$\Phi_{[(1-x)/(2x)]+1} = \{\Phi \in \Phi : \Phi \cap \Sigma_0 = \emptyset\}.$$

Поскольку $\varepsilon(x) = 1$, по принципу Дирихле найдется такое

$$0 \leq k_0 \leq \left[\frac{1-x}{2x}\right],$$

что

$$|\Phi_{k_0}| < \left\lceil \frac{2\pi}{\arccos\left(1 - \frac{x^2}{2(1/2-k_0x)^2}\right)} \right\rceil.$$

Обозначим $r_0 = 1/2 - k_0x$. Очевидно, что множества из Φ_{k_0} образуют покрытие Γ_{r_0} , так как множества из $\Phi \setminus \Phi_{k_0}$ не пересекают эту окружность по построению. Убедимся в том, что это невозможно.

Можно считать, что все множества покрытия Φ_{k_0} замкнуты. Легко видеть, что $r_0 \geq 1/2 - [(1-x)/(2x)]x \geq x/2$. Если $r_0 > x/\sqrt{2}$, то пересечение любого множества $\Phi \in \Phi_{k_0}$ с Γ_{r_0} целиком содержится в некоторой полуокружности Γ_{r_0} (поскольку в этом случае окружность радиуса x с центром в произвольной точке из $\Phi \cap \Gamma_{r_0}$ высекает на Γ_{r_0} дугу угловой величины меньше π). Поэтому можно считать, что всякое такое пересечение – некоторая дуга Γ_{r_0} (так как прибавление к множеству $\Phi \cap \Gamma_{r_0}$ меньшей из дуг, соединяющих произвольные две его точки, не изменит его диаметра). Угловая мера каждой из

этих дуг не превосходит $\arccos(1 - x^2/(2r_0^2))$ – величины угла между боковыми сторонами равнобедренного треугольника с длинами сторон r_0, r_0, x . Но $|\Phi_{k_0}| \arccos(1 - x^2/(2r_0^2)) < 2\pi$. Получаем противоречие с тем, что множества из Φ_{k_0} образуют покрытие Γ_{r_0} .

При $x/\sqrt{3} < r_0 \leq x/\sqrt{2}$ имеем

$$\left\lceil \frac{2\pi}{\arccos(1 - x^2/(2r_0^2))} \right\rceil = 4.$$

Однако (см., например, [5])

$$d_3(\Gamma_{r_0}) = \sqrt{3}r_0 > x.$$

Получаем противоречие. Если же $x/2 \leq r_0 \leq x/\sqrt{3}$, то

$$\left\lceil \frac{2\pi}{\arccos(1 - x^2/(2r_0^2))} \right\rceil \in \{2, 3\},$$

но (см. [5])

$$d_1(\Gamma_{r_0}) = d_2(\Gamma_{r_0}) = 2r_0 \geq x$$

вопреки нашему предположению. Полученные противоречия завершают разбор первого случая.

Случай $[1/x] = 2n, n \in \mathbb{N}$, разбирается аналогично с учетом условия $\varepsilon(x) = 0$. Дополнительно необходимо рассмотреть множество

$$\Phi_{[(1-x)/(2x)]+2} = \{\Phi \in \Phi : \Phi \cap \Gamma_0 \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, $|\Phi_{[(1-x)/(2x)]+2}| \geq 1$, что и компенсирует различие в значениях функции $\varepsilon(x)$.

Теорема 5 доказана.

§ 4. Комментарии

4.1. Комментарий к теореме 1. Для полного исследования последовательности d'_n необходимо вычислить точные значения d'_3, d'_4, d'_5 и d'_6 . Однако, это сложная задача. Проясним ее связь с задачей о хроматическом числе плоскости.

Из доказательства (2.7) следует равенство $d'_{\chi(\mathbb{R}^2)} = 0$. В настоящий момент известно, что $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$. Справедливость оценки $\chi(\mathbb{R}^2) \leq n$ для некоторого $n < 7$ немедленно повлечет равенство $d'_n = 0$. Обратно, из неравенства $d'_n > 0$ для некоторого $n > 3$ сразу следует, что $\chi(\mathbb{R}^2) > n$. Подобные утверждения представляются сейчас практически недостижимыми. О сложности отыскания хроматического числа плоскости см. [2], [7], [9].

В случае, если справедлива гипотеза о том, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$, получаем, что $d'_4 = d'_5 = d'_6 = 0$ и остается вычислить лишь значение d'_3 . Но и эта задача видится весьма непростой.

4.2. Комментарий к теореме 2. Можно показать, что справедливы следующие неравенства:

$$d_9 < 0.4047, \quad d_{10} < 0.4012, \quad d_{11} \leq \rho'_8 = 0.3970 \dots$$

Их доказательства были получены построением соответствующих покрытий универсального покрывающего множества Ω'_6 . Однако эти покрытия строятся существенно сложнее, чем использованные при доказательстве теоремы 2, и поэтому в настоящей статье они не приведены. Заметим только, что величина ρ'_8 определяется аналогично ρ_8 и является длиной стороны равностороннего восьмиугольника, “вписанного” в Ω'_6 . Именно, пусть Ω'_6 получается из правильного шестиугольника $ABCDEF$ отсечением треугольника AA_1A_2 , и точка M – середина отрезка A_1A_2 . Рассмотрим на отрезках A_1B , BC , CD , DE , EF и FA_2 точки X , Y , Z , T , P и Q соответственно такие, что длины всех сторон восьмиугольника $MXYZDTPQ$ равны. В этом случае длина каждой из этих сторон равна ρ'_8 .

Отметим также, что следствием (2.14) является неравенство

$$d_{13} \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

которое сильнее соответствующей оценки (1.1).

Таким образом, теорема 2 вместе с неравенствами, приведенными в начале этого параграфа, дает наилучшие известные оценки для d_n при $8 \leq n \leq 13$, т.е. для шести элементов этой последовательности.

Укажем уравнение четвертой степени, корнем которого является число ρ'_5 , а также по восемь точных знаков после запятой чисел ρ'_5 и ρ'_7 :

$$32x^4 - (112 + 80\sqrt{3})x^3 + (156 + 120\sqrt{3})x^2 + (236 + 132\sqrt{3})x - (181 + 104\sqrt{3}) = 0, \\ \rho'_5 = 0.60204315\dots, \quad \rho'_7 = 0.44564331\dots$$

4.3. Комментарий к теореме 3. Неравенства, аналогичные (2.16), могут быть получены не только для $n = 9$, но и для всех достаточно больших n . Для их доказательства необходимо подсчитать количество шестиугольников паркета, попадающих в отсеченные треугольники множеств $\Omega_{6,1}$ и $\Omega_{6,2}$.

Несложно убедиться в том, что неравенство (2.15), а также неравенства, аналогичные (2.16), асимптотически слабее (1.1) (при стремлении n к бесконечности отношение их правых частей стремится к константе, большей единицы). Однако при $3 \leq n \leq 9$ они оказываются лучше. Выпишем соответствующие неравенства:

$$d_{13} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad d_{19} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad d_{31} \leq \frac{2}{5\sqrt{3}}, \quad d_{43} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}, \\ d_{55} \leq \frac{2}{7\sqrt{3}}, \quad d_{73} \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}, \quad d_{91} \leq \frac{2}{9\sqrt{3}}.$$

Также лучше оказываются несколько тривиальных следствий из этих неравенств вида

$$d_{f(n)+k} \leq \frac{2}{n\sqrt{3}}, \quad k > 0.$$

ТАБЛИЦА 1. Новые оценки величин d_n сверху, следующие из теоремы 3

n	(1.1)	(1.1)	Теорема 3
31	0.17960	0.24291	0.23094
32	0.17677	0.23823	0.23094
33	0.17407	0.23379	0.23094
43	0.15249	0.19938	0.19245
44	0.15075	0.19668	0.19245
45	0.14907	0.19408	0.19245
55	0.13484	0.17254	0.16495
56	0.13363	0.17074	0.16495
57	0.13245	0.16900	0.16495
58	0.13130	0.16731	0.16495
59	0.13018	0.16566	0.16495
73	0.11704	0.14661	0.14433
74	0.11624	0.14548	0.14433
75	0.11547	0.14438	0.14433
88	0.10660	0.13191	0.12830
89	0.10600	0.13107	0.12830
90	0.10540	0.13025	0.12830

Однако некоторые из этих неравенств слабее оценок для тех же элементов последовательности d_n , основанных на результатах теорем 2 и 4.

В таблице 1 представлены все наилучшие на настоящий момент оценки элементов последовательности d_n , основанные на результате теоремы 3. В первом столбце указан номер элемента последовательности n , во втором и третьем – оценки снизу и сверху соответственно для d_n , основанные на (1.1), в последнем – оценка сверху для d_n , основанная на результате теоремы 3. Все константы приведены с пятью верными знаками после запятой. Для удобства таблица разбита на блоки столбцов, которым соответствует одна и та же оценка, основанная на результате теоремы 3.

Таким образом, теорема 3 дает наилучшие оценки для семнадцати элементов d_n .

4.4. Комментарий к теореме 4. Если учесть, что для любых двух симметричных относительно точки O шестиугольников паркета, расстояние между которыми больше или равно единице, хотя бы один из них не содержит внутренних точек Φ , то можно получить оценки, аналогичные (2.18), для всех достаточно больших n .

Неравенство (2.17), а также неравенства, аналогичные (2.18), асимптотически слабее (1.1). Однако при $3 \leq n \leq 15$, а также при $n = 17, 20, 22$ они оказываются лучше. Приведем соответствующие неравенства:

$$\begin{aligned} d_{19} &\leq \frac{2}{7}, & d_{37} &\leq \frac{1}{5}, & d_{61} &\leq \frac{2}{13}, & d_{91} &\leq \frac{1}{8}, & d_{124} &\leq \frac{2}{19}, & d_{166} &\leq \frac{1}{11}, \\ d_{214} &\leq \frac{2}{25}, & d_{268} &\leq \frac{1}{14}, & d_{319} &\leq \frac{2}{31}, & d_{385} &\leq \frac{1}{17}, & d_{451} &\leq \frac{2}{37}, \\ d_{526} &\leq \frac{1}{20}, & d_{604} &\leq \frac{2}{43}, & d_{781} &\leq \frac{2}{49}, & d_{1081} &\leq \frac{1}{29}, & d_{1312} &\leq \frac{1}{32}. \end{aligned}$$

Также лучше оказываются несколько тривиальных следствий из этих неравенств, вновь основанных на невозрастании последовательности d_n .

В таблице 2 представлены все наилучшие на настоящий момент оценки элементов последовательности d_n , основанные на результате теоремы 4. Структура ее такая же, как и у таблицы 1. При $n = 1313$ выписано по шесть точных знаков соответствующих оценок, чтобы продемонстрировать их различие.

Таблица 2. Новые оценки величин d_n сверху, следующие из теоремы 4

n	(1.1)	(1.1)	Теорема 4
19	0.22941	0.33115	0.28571
20	0.22360	0.32026	0.28571
21	0.21821	0.31030	0.28571
22	0.21320	0.30116	0.28571
23	0.20851	0.29273	0.28571
37	0.16439	0.21813	0.20000
38	0.16222	0.21466	0.20000
39	0.16012	0.21134	0.20000
40	0.15811	0.20816	0.20000
41	0.15617	0.20511	0.20000
42	0.15430	0.20219	0.20000
61	0.12803	0.16250	0.15384
62	0.12700	0.16099	0.15384
63	0.12598	0.15951	0.15384
64	0.12500	0.15807	0.15384
65	0.12403	0.15667	0.15384
66	0.12309	0.15531	0.15384
67	0.12216	0.15397	0.15384

Таблица 2 (продолжение)

91	0.10482	0.12945	0.12500
92	0.10425	0.12865	0.12500
93	0.10369	0.12788	0.12500
94	0.10314	0.12711	0.12500
95	0.10259	0.12636	0.12500
96	0.10206	0.12562	0.12500
124	0.08980	0.10898	0.10526
125	0.08944	0.10850	0.10526
126	0.08908	0.10802	0.10526
127	0.08873	0.10755	0.10526
128	0.08838	0.10709	0.10526
129	0.08804	0.10663	0.10526
130	0.08770	0.10618	0.10526
131	0.08737	0.10573	0.10526
132	0.08703	0.10529	0.10526
166	0.07761	0.09289	0.09090
167	0.07738	0.09258	0.09090
168	0.07715	0.09228	0.09090
169	0.07692	0.09199	0.09090
170	0.07669	0.09169	0.09090
171	0.07647	0.09140	0.09090
172	0.07624	0.09111	0.09090
214	0.06835	0.08096	0.08000
215	0.06819	0.08075	0.08000
216	0.06804	0.08055	0.08000
217	0.06788	0.08035	0.08000
218	0.06772	0.08015	0.08000
268	0.06108	0.07176	0.07142
269	0.06097	0.07161	0.07142
270	0.06085	0.07147	0.07142
319	0.05598	0.06540	0.06451

Таблица 2 (продолжение)

320	0.05590	0.06529	0.06451
321	0.05581	0.06518	0.06451
322	0.05572	0.06507	0.06451
323	0.05564	0.06497	0.06451
324	0.05555	0.06486	0.06451
325	0.05547	0.06475	0.06451
326	0.05538	0.06465	0.06451
327	0.05530	0.06454	0.06451
385	0.05096	0.05920	0.05882
386	0.05089	0.05912	0.05882
387	0.05083	0.05904	0.05882
388	0.05076	0.05896	0.05882
389	0.05070	0.05888	0.05882
451	0.04708	0.05446	0.05405
452	0.04703	0.05440	0.05405
453	0.04698	0.05434	0.05405
454	0.04693	0.05427	0.05405
455	0.04688	0.05421	0.05405
456	0.04682	0.05415	0.05405
457	0.04677	0.05409	0.05405
526	0.04360	0.05024	0.05000
527	0.04356	0.05019	0.05000
528	0.04351	0.05014	0.05000
529	0.04347	0.05009	0.05000
530	0.04343	0.05004	0.05000
604	0.04068	0.04673	0.04651
605	0.04065	0.04669	0.04651
606	0.04062	0.04665	0.04651
607	0.04058	0.04661	0.04651
608	0.04055	0.04657	0.04651
609	0.04052	0.04653	0.04651

Таблица 2 (продолжение)

781	0.03578	0.04088	0.04081
782	0.03576	0.04085	0.04081
783	0.03573	0.04082	0.04081
1081	0.03041	0.03454	0.03448
1082	0.03040	0.03453	0.03448
1083	0.03038	0.03451	0.03448
1084	0.03037	0.03449	0.03448
1312	0.02760	0.03126	0.03125
1313	0.027597	0.031251	0.031250

Теорема 4 дает наилучшие оценки для 89 элементов d_n .

Таким образом, теоремы 2, 3 и 4 позволяют улучшить оценки сверху для 112 элементов d_n .

4.5. Комментарий к теореме 5. Можно убедиться в том, что оценка (2.19) асимптотически слабее (1.1). Улучшение (1.1) происходит лишь для конечного числа элементов d_n .

Очевидно, что $g(x)$ – кусочно постоянная функция, принимающая целые значения. Из доказательства (2.19) ясно, что она также является невозрастающей. Поэтому самые сильные оценки для элементов d_n могут быть получены при стремлении x слева к точкам убывания функции $g(x)$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим n -ю по удаленности от единицы точку убывания функции $g(x)$ через x_n , а левый предел $g(x)$ в точке x_n – через $g(x_{n-})$. Тогда для каждого n число x_n является супремумом множества всех вещественных чисел x , для которых справедливость неравенства $d_{g(x_{n-})} \geq x$ следует из (2.19). Следовательно, из (2.19) вытекает справедливость неравенства $d_{g(x_{n-})} \geq x_n$, и лучшую оценку для $d_{g(x_{n-})}$ из (2.19) получить нельзя.

Из доказательства (2.19) ясно, как устроена последовательность x_n . Действительно, функция $g(x)$ убывает в точке x тогда и только тогда, когда одна из окружностей, составляющих множество Σ , является описанной окружностью некоторого правильного многоугольника со стороной x либо имеет диаметр, равный x (в последнем случае, очевидно, $1/x = 2n - 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$). При этом в сумме, определяющей $g(x)$, слагаемое, соответствующее этой окружности, в точке x уменьшается на один либо на два. Обозначим число сторон многоугольника через m . В этом случае диаметр его описанной окружности равен $x(\sin \pi/m)^{-1}$. Если эта окружность – $\Gamma_{1/2-kx}$, то справедливо равенство $x(\sin \pi/m)^{-1} = 1 - 2kx$, откуда

$$x = \left(2k + \left(\sin \frac{\pi}{m} \right)^{-1} \right)^{-1}.$$

Все числа такого вида (при $k \geq 0$, $m \geq 3$) вместе с числами вида $1/(2n-1)$ (при $n \geq 0$), упорядоченные по убыванию, и образуют последовательность x_n .

В таблице 3 представлены все “неулучшаемые” оценки, более сильные, чем соответствующие оценки (1.1), а также следствия из них, основанные на невозрастании d_n . Следствий всего четыре – при $n = 11, 19, 27, 38$, и они возникли из-за того, что в соответствующих точках x_n левый и правый пределы функции $g(x)$ отличаются на два. В первом столбце таблицы указан номер элемента последовательности n , во втором и третьем – оценки снизу для d_n , основанные на (1.1) и (2.19) соответственно, в последнем – точное значение оценки. Все константы приведены с четырьмя верными знаками после запятой. Прочерк означает, что оценка (2.19) для данного n оказалась не лучше, чем оценка (1.1).

Таблица 3. Новые оценки величин d_n снизу, следующие из теоремы 5

n	(1.1)	Теорема 5	
8	0.3535	0.4338	$\sin \frac{\pi}{7}$
9	0.3333	0.3826	$\sin \frac{\pi}{8}$
10	0.3333	0.3420	$\sin \frac{\pi}{9}$
11	0.3333	-	$\frac{1}{3}$
12	0.3333	-	$\frac{1}{3}$
13	0.3333	-	$\frac{1}{3}$
14	0.2672	0.3090	$\sin \frac{\pi}{10}$
15	0.2581	0.2928	$(2 + (\sin \frac{\pi}{4})^{-1})^{-1}$
16	0.2500	0.2817	$\sin \frac{\pi}{11}$
17	0.2425	0.2701	$(2 + (\sin \frac{\pi}{5})^{-1})^{-1}$
18	0.2357	0.2588	$\sin \frac{\pi}{12}$
19	0.2294	0.2500	$\frac{1}{4}$
20	0.2236	0.2500	$\frac{1}{4}$
21	0.2182	0.2393	$\sin \frac{\pi}{13}$
22	0.2132	0.2323	$(2 + (\sin \frac{\pi}{7})^{-1})^{-1}$
23	0.2085	0.2225	$\sin \frac{\pi}{14}$
24	0.2041	0.2167	$(2 + (\sin \frac{\pi}{8})^{-1})^{-1}$
25	0.2000	0.2079	$\sin \frac{\pi}{15}$

Таблица 3 (продолжение)

26	0.1961	0.2030	$(2 + (\sin \frac{\pi}{9})^{-1})^{-1}$
27	0.1924	0.2000	$\frac{1}{5}$
28	0.1889	0.2000	$\frac{1}{5}$
29	0.1856	0.1950	$\sin \frac{\pi}{16}$
30	0.1825	0.1939	$(4 + (\sin \frac{\pi}{3})^{-1})^{-1}$
31	0.1796	0.1909	$(2 + (\sin \frac{\pi}{10})^{-1})^{-1}$
32	0.1767	0.1846	$(4 + (\sin \frac{\pi}{4})^{-1})^{-1}$
33	0.1740	0.1837	$\sin \frac{\pi}{17}$
34	0.1714	0.1801	$(2 + (\sin \frac{\pi}{11})^{-1})^{-1}$
35	0.1690	0.1753	$(4 + (\sin \frac{\pi}{5})^{-1})^{-1}$
36	0.1666	0.1736	$\sin \frac{\pi}{18}$
37	0.1643	0.1705	$(2 + (\sin \frac{\pi}{12})^{-1})^{-1}$
38	0.1622	0.1666	$\frac{1}{6}$
39	0.1601	0.1666	$\frac{1}{6}$
40	0.1581	0.1645	$\sin \frac{\pi}{19}$
41	0.1561	0.1618	$(2 + (\sin \frac{\pi}{13})^{-1})^{-1}$
42	0.1543	0.1586	$(4 + (\sin \frac{\pi}{7})^{-1})^{-1}$
43	0.1524	0.1564	$\sin \frac{\pi}{20}$
44	0.1507	0.1539	$(2 + (\sin \frac{\pi}{14})^{-1})^{-1}$
45	0.1490	0.1512	$(4 + (\sin \frac{\pi}{8})^{-1})^{-1}$
46	0.1474	0.1490	$\sin \frac{\pi}{21}$
47	0.1458	0.1468	$(2 + (\sin \frac{\pi}{15})^{-1})^{-1}$
48	0.1443	0.1444	$(4 + (\sin \frac{\pi}{9})^{-1})^{-1}$
49	0.1428	-	$\frac{1}{7}$
50	0.1414	0.1428	$\frac{1}{7}$
51	0.1400	0.1423	$\sin \frac{\pi}{22}$
52	0.1386	0.1403	$(2 + (\sin \frac{\pi}{16})^{-1})^{-1}$

Таблица 3 (продолжение)

53	0.1373	0.1397	$(6 + (\sin \frac{\pi}{3})^{-1})^{-1}$
54	0.1360	0.1381	$(4 + (\sin \frac{\pi}{10})^{-1})^{-1}$
55	0.1348	0.1361	$\sin \frac{\pi}{23}$
56	0.1336	0.1348	$(6 + (\sin \frac{\pi}{4})^{-1})^{-1}$
57	0.1324	0.1343	$(2 + (\sin \frac{\pi}{17})^{-1})^{-1}$
58	0.1313	0.1324	$(4 + (\sin \frac{\pi}{11})^{-1})^{-1}$
59	0.1301	0.1305	$\sin \frac{\pi}{24}$
60	0.1290	0.1298	$(6 + (\sin \frac{\pi}{5})^{-1})^{-1}$
61	0.1280	0.1288	$(2 + (\sin \frac{\pi}{18})^{-1})^{-1}$
62	0.1270	0.1271	$(4 + (\sin \frac{\pi}{12})^{-1})^{-1}$
63	0.1259	-	$\frac{1}{\sqrt{63}}$
64	0.1250	-	$\frac{1}{8}$
65	0.1240	0.1250	$\frac{1}{8}$
66	0.1230	0.1238	$(2 + (\sin \frac{\pi}{19})^{-1})^{-1}$
67	0.1221	0.1222	$(4 + (\sin \frac{\pi}{13})^{-1})^{-1}$
68	0.1212	-	$\frac{1}{\sqrt{68}}$
69	0.1203	0.1204	$(6 + (\sin \frac{\pi}{7})^{-1})^{-1}$

Таким образом, оценка снизу в (1.1) улучшена при всех $8 \leq n \leq 69$, за исключением $n = 11, 12, 13, 49, 63, 64, 68$, т.е. для 55 различных значений n .

§ 5. Таблица результатов

В заключение приведем таблицу 4 наилучших известных на данный момент оценок для элементов последовательности d_n при $1 \leq n \leq 25$. В первом столбце таблицы указан номер элемента последовательности n , в третьем и четвертом – оценки снизу и сверху соответственно для d_n , основанные на (1.1), во втором и пятом – новые оценки снизу и сверху, доказанные в настоящей статье. Все константы приведены с четырьмя верными знаками после запятой. Прочерк означает, что оценка для данного n не была улучшена.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю А. М. Райгородскому за помощь в написании настоящей статьи. Автор также благодарит своих родителей за понимание и поддержку.

Таблица 4. Наилучшие оценки величин d_n для $1 \leq n \leq 25$

n	Новая оценка	Старая оценка	Старая оценка	Новая оценка
1	-	1.0000	1.0000	-
2	-	1.0000	1.0000	-
3	-	0.8660	0.8660	-
4	-	0.7071	0.7071	-
5	-	0.5877	0.7071	0.6020
6	-	0.5051	0.5773	0.5577
7	-	0.5000	0.5000	-
8	0.4338	0.3535	0.5000	0.4456
9	0.3826	0.3333	0.5000	0.4047
10	0.3420	0.3333	0.5000	0.4012
11	-	0.3333	0.4818	0.3970
12	-	0.3333	0.4527	0.3660
13	-	0.3333	0.4279	0.3660
14	0.3090	0.2672	0.3324	-
15	0.2928	0.2582	0.3324	-
16	0.2817	0.2500	0.3324	-
17	0.2701	0.2425	0.3324	-
18	0.2588	0.2357	0.3324	-
19	0.2500	0.2294	0.3311	0.2857
20	0.2500	0.2236	0.3202	0.2857
21	0.2393	0.2182	0.3103	0.2857
22	0.2323	0.2132	0.3011	0.2857
23	0.2225	0.2085	0.2927	0.2857
24	0.2167	0.2041	0.2849	-
25	0.2079	0.2000	0.2776	-

Список литературы

- [1] K. Borsuk, “Drei Sätze uber die n -dimensionale euklidische Sphäre”, *Fundamenta Math.*, **20** (1933), 177–190.
- [2] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56:1** (2001), 103–139.

- [3] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, СМФН, **23**, 2007, 147–164; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “Around Borsuk’s hypothesis”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **154**:4 (2008), 604–623.
- [4] A. M. Raigorodskii, “Three lectures on the Borsuk partition problem”, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 202–247.
- [5] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, М., 1965; англ. пер.: V. G. Boltjansky, I. Ts. Gohberg, *Results and problems in combinatorial geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [6] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [7] А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, *Матем. просвещение*, 2004, № 8, 186–221.
- [8] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [9] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics. II* (Budapest, Hungary, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer-Verlag, Berlin; János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [10] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [11] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1958.
- [12] H. Lenz, “Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser”, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **58** (1956), 87–97.
- [13] H. Lenz, “Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers”, *Arch. Math. (Basel)*, **7**:1 (1956), 34–40.
- [14] Г. Хадвигер, Г. Дебруннер, *Комбинаторная геометрия плоскости*, Наука, М., 1965; пер. с нем.: H. Hadwiger, H. Debrunner, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*, Institut de Math., Genève, 1960.
- [15] M. Dembiński, M. Lassak, “Covering plane sets with sets of three times less diameter”, *Demonstratio Math.*, **18**:2 (1985), 517–526.
- [16] B. Weissbach, “Polyhedral covers”, *Intuitive geometry* (Siófok, Hungary, 1985), Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **48**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 639–646.
- [17] В. В. Макеев, “Универсальные покрывающие и проекции тел постоянной ширины”, *Укр. геом. сборник*, **32** (1989), 84–88; англ. пер.: V. V. Makeev, “Universal coverings and projections of bodies of constant width”, *J. Soviet Math.*, **59**:2 (1992), 750–752.
- [18] J. Pál, “Über ein elementares Variationsproblem”, *Bull. de l’Acad. de Dan.*, **3**:2 (1920), 1–35.
- [19] А. М. Райгородский, *Хроматические числа*, МЦНМО, М., 2003.

В. П. Филимонов (V. P. Filimonov)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: V_Filimonov@mail.ru

Поступила в редакцию
27.05.2008 и 24.08.2009