Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Парамонов, О C^1 -продолжении и C^1 -отражении
субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини
на $\mathbb{R}^N$, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 12, 79–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:13:21

УДК 517.57

П. В. Парамонов

О C^1 -продолжении и C^1 -отражении субгармонических функций с областей Ляпунова–Дини на $\mathbb{R}^N$

Для областей Ляпунова–Дини D в $\mathbb{R}^N$, $N \in \{2, 3, \dots\}$, исследуется возможность C^1 -продолжения и C^1 -отражения субгармонических функций в D класса $C^1(\bar{D})$ через границу области D на все $\mathbb{R}^N$. В частности, доказано, что продолжения и отражения такого рода всегда осуществимы для любой области Ляпунова со связным дополнением.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

С имеющимися результатами по тематике C^m -продолжения субгармонических функций и различными постановками задач в этой области читатель может ознакомиться в работах [1]–[5] и цитированной в них литературе. В настоящей работе рассматривается следующая проблема: для каких компактных множеств X в $\mathbb{R}^N$ всякая функция $f \in C^1(X)$, субгармоническая внутри X , может быть продолжена до функции F , субгармонической и класса C^1 на всем $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющей условию $\|F\|_{C^1(\mathbb{R}^N)} \leq A_X \|f\|_{C^1(X)}$, где константа $A_X > 0$ зависит только от X ?

Основным результатом настоящей работы является теорема 3, согласно которой указанное выше свойство выполняется для любой замкнутой ограниченной области X в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, со связным дополнением и C^1 -гладкой границей, удовлетворяющей так называемому логарифмическому условию Дини. Аналогичный результат в случае $N = 2$ был получен в [3] другими методами, а для шаров в $\mathbb{R}^N$ – еще раньше в [2]. Также в настоящей работе установлен ряд результатов вспомогательного характера о C^1 -отражении гармонических и субгармонических функций (теоремы 1, 3.1 и 3.5), представляющих, на наш взгляд, и самостоятельный интерес. Кроме того, приведено несколько примеров (см. § 4), показывающих, что достаточные условия в полученных теоремах близки к необходимым.

Перейдем теперь к точным определениям, обозначениям и утверждениям.

Функцией класса Дини называется функция $\varepsilon(\cdot) \in C([0, +\infty))$ такая, что $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\varepsilon(t)$ нестрого возрастает и $\varepsilon(t)/t$ убывает на $(0, +\infty)$, причем

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} dt < +\infty. \quad (1.1)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Академии наук Финляндии (грант № 211485) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3877.2008.01).

Ограниченная область D в $\mathbb{R}^N$, $N \in \{2, 3, \dots\}$, с C^1 -гладкой границей $S = \partial D$ называется *областью Ляпунова–Дини* (коротко (Л–Д)-областью), если существует функция класса Дини $\varepsilon(\cdot)$ (называемая *функцией Дини области D*) такая, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ выполнено неравенство

$$|\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i - \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^i| \leq \varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (1.2)$$

где $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i$ – внутренняя (по отношению к D) единичная нормаль к S в точке $\mathbf{x} \in S$.

Как обычно, $\overline{E}$, E° , ∂E суть замыкание, внутренность и граница множества $E \neq \emptyset$ в $\mathbb{R}^N$; $\|f\|_E = \sup_{\mathbf{x} \in E} |f(\mathbf{x})|$ означает равномерную норму функции f на E , причем $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^N}$. Для произвольного открытого множества Ω в $\mathbb{R}^N$ через $H(\Omega)$ (соответственно через $SH(\Omega)$) обозначается класс всех вещественных функций, гармонических (соответственно субгармонических) на Ω .

Напомним, что для замкнутого множества X в $\mathbb{R}^N$ и $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ через $C^m(X)$ обозначается пространство $C^m(\mathbb{R}^N)|_X$ с нормой

$$\|f\|_{m,X} = \inf \|F\|_m,$$

где инфимум берется по всем функциям $F \in C^m(\mathbb{R}^N)$ таким, что $F|_X = f$ и $\|F\|_m := \max_{|\beta| \leq m} \{\|\partial^\beta F\|\} < +\infty$. Заметим, что в случае $X = \overline{X}^\circ$ для любой функции $f \in C^m(X)$ производные

$$\partial^\beta f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\beta|} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}},$$

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N), \quad \beta_n \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad |\beta| := \beta_1 + \dots + \beta_N \leq m,$$

однозначно определены для всех $\mathbf{x} \in X$, так что в этом случае пространство $C^m(X)$ может быть отождествлено с пространством струй по Уитни $C_{\text{jet}}^m(X)$ (см. [6]). При $m = 0$ мы опускаем индекс m в обозначениях $C^m(X)$ и $\|\cdot\|_{m,X}$.

Всюду в дальнейшем мы фиксируем $N \in \{2, 3, \dots\}$, произвольную функцию класса Дини $\varepsilon(\cdot)$ и $d > 0$. Пусть D является (Л–Д)-областью в $\mathbb{R}^N$ с функцией Дини $\varepsilon(\cdot)$ и $\text{diam } D < d$ (предполагается, что область D с такими параметрами существует). Положим $D_o = \mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$. Константа $A > 0$ в теоремах 1–3 зависит только от N , ε и d .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_i \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$, а u_o есть (единственное) решение задачи Дирихле в D_o с граничными данными $u_o|_{\partial D_o} = u_i|_{\partial D_o}$ (в неограниченной компоненте множества D_o дополнительно требуется, чтобы существовал предел $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} u_o(\mathbf{x}) = u_o(\infty)$ и $u_o(\infty) = 0$ при $N \geq 3$ или $|u_o(\infty)| < +\infty$ при $N = 2$). Тогда $u_o \in C^1(\overline{D_o})$ и

$$\|u_o\|_{1,\overline{D_o}} \leq A \|u_i\|_{1,\overline{D}}. \quad (1.3)$$

Будем говорить, что u_o является C^1 -отражением функции u_i через границу S области D . В теореме 3.1 приводится весьма полезное уточнение этого результата. Из теоремы 1 мы получаем также следующий результат о C^1 -субгармоническом продолжении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D имеет связное дополнение, и пусть $u_i \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$. Тогда найдется функция $F \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$ при $N \geq 3$ ($F \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$ при $N = 2$) такая, что $F|_{\overline{D}} = u_i$ и

$$\begin{aligned} \|F\|_1 &\leq A\|u_i\|_{1,\overline{D}}, & N \geq 3, \\ \|\nabla F\| &\leq A\|\nabla u_i\|_{\overline{D}}, & N = 2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Хорошо известно, что связность $\mathbb{R}^N \setminus D$ и, следовательно, D_o эквивалентна связности $S = \partial D$ (в нашем контексте). Следующее локализационное свойство при $N = 2$ выполняется даже для произвольных областей Жордана (см. [3; теорема 2.5]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть D имеет связное дополнение и $f \in SH(D) \cap C^1(\overline{D})$. Если при каждом $\mathbf{a} \in \partial D$ найдутся шар $B_{\mathbf{a}}$ с центром $\mathbf{a}$ и функция $g_{\mathbf{a}} \in SH(B_{\mathbf{a}}) \cap C^1(\overline{B_{\mathbf{a}}})$ такая, что $g_{\mathbf{a}}|_{B_{\mathbf{a}} \cap D} = f|_{B_{\mathbf{a}} \cap D}$, то найдется функция $F \in SH(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ при $N \geq 3$ (соответственно $F \in SH(\mathbb{R}^N) \cap C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ при $N = 2$) такая, что $F|_{\overline{D}} = f$ и $\|F\|_1 < +\infty$ (соответственно $\|\nabla F\| < +\infty$ при $N = 2$).

Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 3. Предположим, что D имеет связное дополнение и $\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет следующему логарифмическому условию Дини:

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} \log \frac{1}{t} dt < +\infty.$$

Тогда для любой функции $f \in SH(D) \cap C^1(\overline{D})$ найдется $F \in SH(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ при $N \geq 3$ (или $F \in SH(\mathbb{R}^N) \cap C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ при $N = 2$), удовлетворяющая условиям $F|_{\overline{D}} = f$ и

$$\begin{aligned} \|F\|_1 &\leq A\|f\|_{1,\overline{D}}, & N \geq 3, \\ \|\nabla F\| &\leq A\|\nabla f\|_{\overline{D}}, & N = 2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Более того, при любом $\delta > 0$ функция F может быть выбрана с дополнительным условием гармоничности вне δ -окрестности множества $\overline{D}$ (тогда константа A дополнительно зависит от δ).

Последняя теорема основана на конструктивном, но технически сложном результате – теореме 3.5 (свойстве C^1 -отражения субгармонических функций).

Насколько известно автору, теоремы 1–3 при $N \geq 3$ являются новыми даже для так называемых областей Ляпунова ((Л–Д)-областей с функциями Дини $\varepsilon(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$).

Сформулированные выше результаты в основном были получены в течение осеннего семестра 2007 г. во время визита автора в университет г. Хельсинки. Автор очень признателен этому университету, а также Академии наук Финляндии за финансовую поддержку и выражает особую благодарность профессору Пертти Маттиле за внимание к настоящей работе.

§ 2. Доказательства теорем 1 и 2

Далее через $A_0, A_1, \dots$ обозначены некоторые (фиксированные в этом параграфе) положительные константы, которые зависят только от $N, \varepsilon(\cdot)$ и d (последнее свойство важно для доказательств теорем 1–3 и оно будет обсуждаться в каждой нетривиальной ситуации). Константы A_N (зависящие только от N) и A (зависящие от $N, \varepsilon(\cdot)$ и d) могут быть различными в разных местах статьи. Положим $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$, $\overline{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq r\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N, r > 0$.

Сначала мы сформулируем несколько вспомогательных результатов, которые по существу следуют из теорем 2.2–2.5 работы [7]. Автор счел целесообразным для полноты изложения и удобства читателя привести детальные доказательства этих результатов в § 4 (см. теоремы 4.4–4.9).

ТЕОРЕМА W1. Пусть D является (L, D) -областью в $\mathbb{R}^N$ с функцией Дирихле $\varepsilon(\cdot)$ и $\text{diam } D < d, S = \partial D$. Пусть $\psi \in C(S)$ и u_i (соответственно u_o) есть решение задачи Дирихле в D (соответственно в $D_o = \mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$) с граничными данными ψ .

- (1) Если $\psi \in C^2(S)$, то u_i и u_o принадлежат классам $C^1(\overline{D})$ и $C^1(\overline{D_o})$ соответственно, причем справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|u_i\|_{1, \overline{D}} &\leq A_0 \|\psi\|_{2, S}, \\ \|u_o\|_{1, \overline{D_o}} &\leq A_0 \|\psi\|_{2, S}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

- (2) Пусть $\mathbf{a} \in S, r \in (0, d/2)$ и предположим, что $\psi = 0$ на $S \cap B(\mathbf{a}, r)$. Тогда u_i и u_o принадлежат классам $C^1(\overline{D} \cap \overline{B}(\mathbf{a}, r/2))$ и $C^1(\overline{D_o} \cap \overline{B}(\mathbf{a}, r/2))$ соответственно, причем

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{a}}^i} \right| + \left| \frac{\partial u_o}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{a}}^o} \right| \leq \frac{A_0}{r} \log \frac{d}{r} \|\psi\|_S,$$

где $\mathbf{n}_{\mathbf{a}}^o = -\mathbf{n}_{\mathbf{a}}^i$ есть внешняя нормаль к S в точке $\mathbf{a} \in S$.

- (3) Пусть $N \geq 3, D_*$ – неограниченная компонента множества $D_o, S_* = \partial D_*$, и пусть $w \in H(D_*) \cap C(\overline{D_*})$ такова, что $w|_{S_*} = 0, w(\infty) = 1$. Тогда $w \in C^1(\overline{D_*}), \|w\|_{1, \overline{D_*}} \leq A_0$ и для всех $\mathbf{a} \in S_*$ имеем

$$A_0 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{a}}^o} \geq 1.$$

В п. (1) теоремы W1 нельзя в общем случае взять $\|\psi\|_{1, S}$ вместо $\|\psi\|_{2, S}$ (см. [7; замечание 1] и пример 4.1 в § 4). Отметим, что зависимость константы A_0 только от N, ε, d не была установлена в [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала мы сведем доказательство к случаю, когда u_i может быть продолжена как гармоническая функция в некоторую окрестность множества $\overline{D}$ так, что $u_i|_{\partial D}$ заведомо принадлежит классу $C^2(S)$ и поэтому по теореме W1, п. (1) имеем $u_o \in C^1(\overline{D_o})$. Действительно,

пусть (1.3) доказано для всех таких u_i . В общем случае, пользуясь [8; следствие 6.3], можно найти такую последовательность $\{v_{is}\}_{s=1}^{+\infty}$, в которой каждая из v_{is} гармонична в (своей) окрестности множества $\bar{D}$, и $u_i = \sum_{s=1}^{+\infty} v_{is}$, а $\|v_{is}\|_{1,\bar{D}} \leq 2^{2-s} \|u_i\|_{1,\bar{D}}$. Определим v_{os} по v_{is} как мы определяли u_o по u_i . Тогда $v_{os} \in H(D_o) \cap C^1(\bar{D}_o)$, $\|v_{os}\|_{1,\bar{D}_o} \leq A \|v_{is}\|_{1,\bar{D}}$. Функция $v_o = \sum_{s=1}^{+\infty} v_{os}$ – искомая. Таким образом, можно всегда предполагать, что $u_o \in C^1(\bar{D}_o)$.

Положим $h_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i}$, $h_o(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_o}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^o}$. Хорошо известно (см. [9; гл. 2, § 6.5, формула (27)]), что если положить $u = u_i$ в $\bar{D}$, $u = u_o$ в D_o , то

$$\Delta u = (h_i + h_o)\sigma \quad (2.2)$$

в обобщенном смысле, где σ есть $(N-1)$ -мерная (лебегова) поверхностная мера на S . Обозначим через $\Phi_N(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ стандартное фундаментальное решение для лапласиана Δ в $\mathbb{R}^N$, т.е.

$$\Phi_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}|, \quad \Phi_N(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\alpha_N(N-2)|\mathbf{x}|^{N-2}}, \quad N \geq 3,$$

где $\alpha_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ – поверхностная мера (точнее, ее значение) единичной сферы в $\mathbb{R}^N$.

Пусть $h = h_i + h_o$ на S . По теореме Лиувилля имеем

$$u(\mathbf{x}) = (\Phi * (h\sigma))(\mathbf{x}) + c_2 = \int_S \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} + c_2, \quad (2.3)$$

где $c_2 = 0$ при всех $N > 2$ и $|c_2| \leq \|u_i\|_S$ при $N = 2$. Остается надлежащим образом оценить $\|h_o\|_S$. Действительно, так как $u_i \in C^1(\bar{D})$, $u_o \in C^1(\bar{D}_o)$, то имеем

$$\nabla u_o(\mathbf{y}) \rightarrow h_o(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^o + \nabla u_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}) \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i$$

при $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \in S$, $\mathbf{y} \in D_o$, а также $\|u_o\|_{\bar{D}_o} = \|u_i\|_{\bar{D}}$. Если мы докажем, что $\|h_o\|_S \leq A \|u_i\|_{1,S}$, то по принципу максимума и по теореме Уитни [6] струя $(u_o, \nabla u_o)_{\bar{D}_o}$ продолжается до некоторой функции класса $C^1(\mathbb{R}^N)$ с оценкой (1.3).

Сначала мы получим оценку априорного типа на функцию h_o . Из определения функций класса Дини непосредственно вытекает следующее свойство:

$$\varepsilon(kt) \leq k\varepsilon(t) \quad \forall t > 0, \quad \forall k \geq 1,$$

которое часто будет использоваться далее (без комментариев). Зафиксируем максимальное $r_0 = r_0(\varepsilon) \in (0, 1]$ с условием $\varepsilon(r_0) \leq 1/8$. Возьмем произвольное $\mathbf{a} \in S$. Используя вращение и сдвиг исходной системы координат, мы можем считать, что $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{n}_{\mathbf{0}}^i = \{0, \dots, 0, 1\}$ (так что D находится “сверху” от $\mathbf{0}$), а также найти $r \in (0, r_0]$ и функцию $\varphi(\mathbf{x}')$ (полагаем $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N)$, $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{N-1})$) такие, что $\varphi \in C^1(|\mathbf{x}'| \leq r)$, $\varphi(\mathbf{0}') = 0$, $\nabla \varphi(\mathbf{0}') = \mathbf{0}'$, $|\nabla \varphi(\mathbf{x}')| \leq 1/4$ при $|\mathbf{x}'| \leq r$, а для $Q_r = \{|\mathbf{x}'| \leq r, |x_N| \leq r\}$ имеет место

$$Q_r \cap S = \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}')), |\mathbf{x}'| \leq r\}. \quad (2.4)$$

Пусть $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))$, $|\mathbf{x}'| < r$, так что $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i = (-\nabla\varphi(\mathbf{x}'), 1)/\sqrt{1 + |\nabla\varphi(\mathbf{x}')|^2}$. Используя (1.2) для указанного $\mathbf{x}$ и для $\mathbf{y} = \mathbf{a} = \mathbf{0}$, легко заключить, что для всех $\mathbf{x}'$, $|\mathbf{x}'| < r$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(\mathbf{x}')| &\leq 2\varepsilon(|\mathbf{x}'|), \\ |\varphi(\mathbf{x}')| &\leq 2\varepsilon(|\mathbf{x}'|)|\mathbf{x}'|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

из которых вытекает, что в последних рассуждениях можно взять $r = r_0$. Положим $Q_0 = Q_{r_0}$.

Используя (2.3), теорему Лебега о мажорируемой сходимости интегралов, а также равенство $\frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial x_n} = \frac{x_n}{\alpha_N|\mathbf{x}|^N}$, получаем, что

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{0}) - h_o(\mathbf{0}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_S \frac{\Phi(\delta\mathbf{n}_0^i - \mathbf{x}) - (\pm\Phi(-\mathbf{x})) - \Phi(-\delta\mathbf{n}_0^i - \mathbf{x})}{\delta} h(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} \\ &= - \int_{S \cap Q_0} \frac{2\varphi(\mathbf{x}')}{\alpha_N|\mathbf{x}|^N} h(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} - \int_{S \setminus Q_0} 2 \frac{\partial\Phi(\mathbf{x})}{\partial x_N} h(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

откуда ввиду (2.4) и (2.5)

$$\begin{aligned} |h_i(\mathbf{0}) - h_o(\mathbf{0})| &\leq \frac{5}{\alpha_N} \int_{\{|\mathbf{x}'| \leq r_0\}} \frac{\varepsilon(|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x}'|^{N-1}} h(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' \\ &\quad + \frac{2}{\alpha_N} \|h\|_{S \setminus Q_0} \int_{S \setminus Q_0} \frac{d\sigma_{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|^{N-1}} \\ &\leq A_1 \|h\|_{Q_0 \cap S} \int_0^{r_0} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt + A_2 \|h\|_{S \setminus Q_0}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $A_1 = 5\alpha_{N-1}/\alpha_N$, $A_2 \leq A_N d/r_0$. При $N \geq 3$ первый интеграл в (2.6) оценивается с помощью введения сферических координат в $\mathbb{R}_{\mathbf{x}'}^{N-1}$ следующим образом:

$$\int_{B(\mathbf{0}', r)} f(|\mathbf{x}'|) d\mathbf{x}' = \alpha_{N-1} \int_0^r f(t) t^{N-2} dt$$

(при $N = 2$ просто полагаем $\alpha_1 = 2$). Второй интеграл (т.е. A_2) в (2.6) оценивается в формуле (4.11) в § 4.

Ввиду (1.1) найдется максимальное $r_1 = r_1(\varepsilon) \in (0, r_0]$, удовлетворяющее условию

$$A_1 \int_0^{r_1} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \leq \frac{1}{2}.$$

Используя неравенство (2.6) для r_1 вместо r_0 (что, конечно, можно сделать), получаем для всех $\mathbf{a} \in S$ оценку

$$|h_i(\mathbf{a}) - h_o(\mathbf{a})| \leq \frac{1}{2} \|h\|_{S \cap B(\mathbf{a}, 2r_1)} + A_3 \|h\|_{S \setminus B(\mathbf{a}, r_1)},$$

из которой при всех $\mathbf{a} \in S$ следует неравенство

$$|h_o(\mathbf{a})| \leq \frac{1}{2} \|h_o\|_{S \cap B(\mathbf{a}, r_1)} + A_4 (\|h_o\|_{S \setminus B(\mathbf{a}, r_1)} + \|h_i\|_S), \quad (2.7)$$

которое и является упомянутой выше априорной оценкой для h_o при $A_4 \leq A_N d/r_1$.

Пример $u_i \equiv 1$ (т.е. $h_i \equiv 0$), $u_o = 1 - w$ (см. теорему W1, п. (3)) показывает, что неравенство (2.7) само по себе не влечет оценку $\|h_o\|_S \leq A\|h_i\|_S$ и что для получения нужной оценки $\|h_o\|_S \leq A\|u_i\|_{1,S}$ действительно требуются дополнительные усилия. Мы продолжаем доказательство теоремы 1 с помощью локализационной техники [10], [8].

В оставшейся части доказательства подробно рассмотрим только случаи $N \geq 3$ (при $N = 2$ следует использовать и оценивать норму $\|\nabla f\| + \|f\|_{B(\mathbf{0}, d+1)}$ вместо $\|f\|_1$). Можно считать, что $\mathbf{0} \in \overline{D}$ (вместо прежнего предположения $\mathbf{0} \in \partial D$), так что $B(\mathbf{0}, d)$ содержит $\overline{D}$. По определению $\|u_i\|_{1, \overline{D}}$ можно найти $U \in C^1(\mathbb{R}^N)$ такую, что $U|_{\overline{D}} = u_i$, $\text{Supp } U \subset B(\mathbf{0}, d+1)$ и $\|U\|_1 \leq 3\|u_i\|_{1, \overline{D}}$. Положим для краткости $m = \|u_i\|_{1, \overline{D}}$.

Пусть $M = \max_{\mathbf{x} \in S} |h_o(\mathbf{x})|$ достигается в некоторой точке $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \in S$. Возьмем $B_0 = B(\mathbf{b}, r_1/8)$, $\varphi_0 \in C_0^\infty(B_0)$, $\varphi_0 = 1$ на $B(\mathbf{b}, r_1/16)$, $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, $\|\Delta \varphi_0\| \leq A_N/r_1^2$. Мы также можем найти точки $\mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^N$, $j = 1, \dots, J$, и функции $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $B_j = B(\mathbf{b}_j, r_1/64)$ такие, что $0 \leq \varphi_j \leq 1$, $\|\Delta \varphi_j\| \leq A_N/r_1^2$ и $\sum_{j=0}^J \varphi_j = 1$ на $B(\mathbf{0}, d+1)$. Ясно также, что можно считать J зависимым только от N , r_1 и d и что $B_j \cap B(\mathbf{0}, d+1) \neq \emptyset$, но $B_j \cap B(\mathbf{b}, r_1/16) = \emptyset$, $j \geq 1$. Таким образом,

$$U = \Phi * \Delta U = \Phi * \left(\sum_{j=0}^J \varphi_j \Delta U \right) = \sum_{j=0}^J U_j,$$

где $U_j = \Phi * (\varphi_j \Delta U)$. Согласно [8; лемма 4.1] справедлива оценка $\|\nabla U_j\| \leq A_N \|\nabla U\|$. Отсюда, поскольку $U_j(\infty) = 0$, для всех $j = 0, \dots, J$ нетрудно установить, что

$$\|U_j\|_1 \leq A_5 m, \quad A_5 = A_5(N), \quad U_j \in H(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_j}) \cap H(D). \quad (2.8)$$

Далее, используя формулу $U_j = \Phi * \Delta U_j$ и интегрирование по частям, получаем

$$\|U_j\|_{2, E_j^2} \leq A_6 m, \quad A_6 \leq A_N/r_1, \quad (2.9)$$

где при $k > 0$ полагаем $E_j^k = \mathbb{R}^N \setminus B(\mathbf{b}_j, kr_1/64)$, $j = 1, \dots, J$, и $E_0^k = \mathbb{R}^N \setminus B(\mathbf{b}_0, kr_1/8)$.

По функции $u_{ij} = U_j|_{\overline{D}}$ определим h_{ij} , u_{oj} и h_{oj} так же, как мы определили h_i , u_o и h_o по u_i . Имеем $u_{i(o)} = \sum_{j=0}^J u_{i(o)j}$, $h_{i(o)} = \sum_{j=0}^J h_{i(o)j}$, а также ввиду (2.8)

$$\|h_{ij}\|_S \leq \|u_{ij}\|_{1, \overline{D}} \leq \|U_j\|_1 \leq A_5 m. \quad (2.10)$$

Если $B_j \subset D$, то $U_j \equiv 0$ и тогда $u_{ij} \equiv 0$, поэтому можно предположить, что $B_j \not\subset D$ при всех j . Пусть $2B_j \equiv B(\mathbf{b}_j, r_1/32)$, $j \neq 0$. Если $2B_j \cap \overline{D} = \emptyset$ (т.е. $S \subset E_j^2$), то из (2.9) имеем $\|u_{ij}\|_{2, S} = \|U_j\|_{2, S} \leq A_6 m$, откуда ввиду (2.2), примененного к $u_{ij}|_S$, получаем оценку

$$\|h_{oj}\|_S \leq \|u_{oj}\|_{1, \overline{D_o}} \leq A_0 \|u_{ij}\|_{2, S} \leq A_0 A_6 m = A_7 m. \quad (2.11)$$

Изменяя, если потребуется, нумерацию, можно считать, что индексы $j = 1, \dots, I$ ($I \leq J$) таковы, что $2B_j \cap S \neq \emptyset$ и $B_j \not\subseteq D$.

ЛЕММА 2.1. Для каждого $j = 0, \dots, I$ имеем

$$\|h_{oj}\|_{E_j^3 \cap S} \leq A_8 m. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как в силу (2.9) для каждого j выполняется

$$\|u_{ij}\|_{2, E_j^2 \cap S} \leq \|U_j\|_{2, E_j^2} \leq A_6 m,$$

то можно найти $v_{ij} \in C^2(S)$ такие, что $v_{ij} = u_{ij}$ на $E_j^2 \cap S$ и

$$\|v_{ij}\|_{2, S} \leq 2\|u_{ij}\|_{2, E_j^2 \cap S} \leq 2A_6 m. \quad (2.13)$$

Пусть $w_{ij} = u_{ij} - v_{ij}$ и v_{oj} (соответственно w_{oj}) суть решения задачи Дирихле в D_o с граничными данными v_{ij} (соответственно w_{ij}). Ввиду (2.13) и (2.1) имеем

$$\left\| \frac{\partial v_{oj}}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^o} \right\|_S \leq \|v_{oj}\|_{1, \overline{D_o}} \leq 2A_0 A_6 m.$$

Так как $w_{ij} = 0$ на $E_j^2 \cap S$ и $\|w_{oj}\|_{\overline{D_o}} \leq A_6 m$, то по теореме W1, п. (2), примененной к функции $\psi = w_{ij}|_S$ и $r = r_1/16$, справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial w_{oj}}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^o} \right\|_{E_j^3 \cap S} \leq \frac{64A_0}{r_1} \log\left(\frac{d}{r_1}\right) \|w_{oj}\|_{\overline{D_o}} \leq \frac{256A_0 A_6}{r_1} \log\left(\frac{d}{r_1}\right) m,$$

что и дает (2.12).

Теперь, согласно (2.11), (2.12) и условию $b \in E_j^3$ при всех $j \neq 0$ получаем, что

$$\left| \sum_{j=1}^J h_{oj}(\mathbf{b}) \right| \leq A_9 m, \quad (2.14)$$

$$\|h_{o0}\|_{E_0^3 \cap S} \leq A_8 m. \quad (2.15)$$

Будем считать, что $A_8 \leq A_9$. Также предположим, что $M \geq 2A_9 m$, иначе теорема 1 доказана. Из (2.14) вытекает, что $|h_{o0}(\mathbf{b})| \geq M/2$, а из (2.15) видно, что функция $|h_{o0}(\mathbf{x})|$ достигает свой максимум на S в некоторой точке $\mathbf{b}_* \in B(\mathbf{b}, 3r_1/8) \cap S$. Теперь применяя (2.7) для h_{o0} вместо h_o , $\mathbf{b}_*$ вместо $\mathbf{a}$ и h_{i0} вместо h_i , замечая, что $B(\mathbf{b}_*, r_1)$ содержит $B(\mathbf{b}, 3r_1/8)$ (так что ввиду (2.15) $\|h_{o0}\|_{S \setminus B(\mathbf{b}_*, r_1)} \leq A_8 m$), и учитывая (2.10), находим, что

$$|h_{o0}(\mathbf{b}_*)| \leq \frac{1}{2} |h_{o0}(\mathbf{b}_*)| + A_4(A_8 m + A_5 m),$$

и окончательно

$$M \leq 2|h_{o0}(\mathbf{b}_*)| \leq 4A_4(A_8 + A_5)m,$$

что завершает доказательство теоремы 1 при $A = A(N, d, r_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

ЛЕММА 2.2. Пусть D является (Л-Д)-областью с функцией Дини $\varepsilon(\cdot)$ и $\text{diam } D < d$. Тогда существуют функция класса Дини ε_* с условием

$$\varepsilon_*(t) \leq A_N \left(\frac{t}{r_0} + \varepsilon(t) \right),$$

окрестность Ω множества $S = \partial D$ и функция $E \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\|E\|_1 \leq A_N$, $E \equiv 0$ на S , $|\nabla E(\mathbf{x})| \geq 1$ при всех $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, $E > 0$ в $\Omega \cap D$ ($E \geq 0$ в D), $E < 0$ в $\Omega \setminus \bar{D}$ ($E \leq 0$ в D_o) и

$$|\nabla E(\mathbf{x}) - \nabla E(\mathbf{y})| \leq \varepsilon_*(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$$

для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в $\mathbb{R}^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $\mathbf{a} \in S$ и рассмотрим соответствующие r_0 , $Q_{\mathbf{a}}$ и $\varphi_{\mathbf{a}}$ как в доказательстве теоремы 1. Напомним, что после вращения и сдвига исходной системы координат мы получаем новую координатную систему, которую снова обозначаем через $\mathbf{0}_{\mathbf{x}}$, где исходные объекты трансформируются следующим образом: $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{0}$, $Q_{\mathbf{a}} \rightarrow Q_{\mathbf{0}} = \{|\mathbf{x}'| \leq r_0, |x_N| \leq r_0\}$, $\varphi_{\mathbf{a}} \rightarrow \varphi = \varphi_{\mathbf{0}}$, так что $S \cap Q_{\mathbf{0}} = \{(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')), |\mathbf{x}'| \leq r_0\}$, $\bar{D} \cap Q_{\mathbf{0}} = \{|\mathbf{x}'| \leq r_0, \varphi(\mathbf{x}') \leq x_N \leq r_0\}$, где $\varphi \in C^1(\{|\mathbf{x}'| \leq r_0\})$, $\varphi(\mathbf{0}') = 0$, $\nabla \varphi(\mathbf{0}') = \mathbf{0}'$, $\|\nabla \varphi(\mathbf{x}')\|_{\{|\mathbf{x}'| \leq r_0\}} \leq 1/4$.

На самом деле, пользуясь (1.2), можно получить нечто большее, чем в (2.5). А именно, для всех $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ с условиями $|\mathbf{x}'| \leq r_0$, $|\mathbf{y}'| \leq r_0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} |\mathbf{n}_{(\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}'))}^i - \mathbf{n}_{(\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}'))}^i| &= \left| \frac{(-\nabla \varphi(\mathbf{y}'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{y}')|^2}} - \frac{(-\nabla \varphi(\mathbf{x}'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{x}')|^2}} \right| \\ &\leq \varepsilon(|(\mathbf{x}' - \mathbf{y}', \varphi(\mathbf{x}') - \varphi(\mathbf{y}'))|) \leq \frac{5}{4} \varepsilon(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|), \end{aligned}$$

откуда $|1/\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{y}')|^2} - 1/\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{x}')|^2}| \leq \frac{5}{4} \varepsilon(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|)$.

Следовательно,

$$\frac{|\nabla \varphi(\mathbf{y}') - \nabla \varphi(\mathbf{x}')|}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{y}')|^2}} \leq \frac{5}{4} \varepsilon(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|) + |\nabla \varphi(\mathbf{x}')| \frac{5}{4} \varepsilon(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|) \leq \frac{25}{16} \varepsilon(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|),$$

а тогда при $|\mathbf{x}'| \leq r_0$, $|\mathbf{y}'| \leq r_0$

$$|\nabla \varphi(\mathbf{y}') - \nabla \varphi(\mathbf{x}')| \leq 2\varepsilon(|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'|).$$

Теперь зафиксируем функцию χ со следующими свойствами: $\chi \equiv 0$ вне $Q_{\mathbf{0}}$, $0 < \chi \leq 2$ внутри $Q_{\mathbf{0}}^o$, $\chi = 2$ на $Q_{\mathbf{0}}' = \{|\mathbf{x}'| \leq r_0/2, |x_N| \leq r_0/2\}$, $\chi \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $\|\chi\|_s \leq A_N/r_0^s$ ($s = 1$ или $s = 2$). Положим

$$E_0(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x})(x_N - \varphi(\mathbf{x}')).$$

Тогда $E_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Так как мы заранее предположили, что $\bar{D} \cap Q_{\mathbf{0}} = \{|\mathbf{x}'| \leq r_0, \varphi(\mathbf{x}') \leq x_N \leq r_0\}$, то $E_0(\mathbf{x}) \geq 0$ в D и $E_0 > 0$ на $D \cap Q_{\mathbf{0}}^o$. Ясно, что $E_0(\mathbf{x}) \equiv 0$

на S . Кроме того,

$$\begin{aligned} \nabla E_0(\mathbf{x})|_S &= \nabla \chi(\mathbf{x})(x_N - \varphi(\mathbf{x}'))|_S + \chi(\mathbf{x})(-\nabla \varphi(\mathbf{x}'), 1)|_S \\ &= \chi(\mathbf{x})\sqrt{1 + |\nabla \varphi(\mathbf{x}')|^2} \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i, \quad \|E_0\| \leq A_N r_0, \quad \|\nabla E_0\| \leq A_N, \end{aligned}$$

а также $|\nabla E_0(\mathbf{x}) - \nabla E_0(\mathbf{y})| \leq A_N(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/r_0 + \varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|))$ для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Теперь обозначим через $E_{\mathbf{a}}$ функцию E_0 , записанную в начальной координатной системе, и пусть $Q'_{\mathbf{a}}$ — цилиндр, соответствующий Q'_0 .

Наконец, выберем некоторое покрытие $\{Q'_{\mathbf{a}_s}\}$, $s = 1, \dots, s_0$, множества S цилиндрами $Q'_{\mathbf{a}_s}$, $\mathbf{a}_s \in S$, такое, что каждая точка $\mathbf{x}$ содержится в не более чем A_N цилиндрах $Q_{\mathbf{a}_s}$, и рассмотрим соответствующие $E_{\mathbf{a}_s}$ и $\chi_{\mathbf{a}_s}$ (уже в исходной системе координат, которая снова обозначается через $\mathbf{O}_{\mathbf{x}}$). Введем

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{s_0} E_{\mathbf{a}_s}(\mathbf{x}).$$

Тогда $|\nabla E(\mathbf{x})| \geq \sum_{s=1}^{s_0} \chi_{\mathbf{a}_s}(\mathbf{x}) \geq 2$ на S и

$$\|E\|_1 \leq A_N, \quad |\nabla E(\mathbf{x}) - \nabla E(\mathbf{y})| \leq A_N \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{r_0} + \varepsilon(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \right).$$

Функция E и множество $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\nabla E(\mathbf{x})| > 1\}$ и являются требуемыми.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. В условиях предыдущей леммы для всех достаточно малых $\delta > 0$ обозначим через D_δ связную компоненту открытого множества $\{\mathbf{x} \in \Omega \cup D \mid E(\mathbf{x}) > -\delta\}$, содержащую D . Тогда $D_\delta \rightarrow D$ при $\delta \rightarrow 0$ и для всех достаточно малых δ области D_δ имеют одну и ту же функцию Дини $\varepsilon_*(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для всех достаточно малых δ имеем

$$S_\delta = \partial D_\delta \subset \{\mathbf{x} \in \Omega \mid E(\mathbf{x}) = -\delta\}.$$

Возьмем любые $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ на S_δ и пусть $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^{i\delta}$ есть единичная внутренняя нормаль к S_δ в точке $\mathbf{x} \in S_\delta$ (по отношению к D_δ). Простые факты из элементарной планиметрии и лемма 2.2 показывают, что

$$|\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^{i\delta} - \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^{i\delta}| = \left| \frac{\nabla E(\mathbf{x})}{|\nabla E(\mathbf{x})|} - \frac{\nabla E(\mathbf{y})}{|\nabla E(\mathbf{y})|} \right| \leq |\nabla E(\mathbf{x}) - \nabla E(\mathbf{y})| \leq \varepsilon_*(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|),$$

поскольку $\inf_{S_\delta} |\nabla E| \geq \inf_\Omega |\nabla E| \geq 1$.

Теперь продолжим доказательство теоремы 2 (только для $N > 2$, случай $N = 2$ будет кратко обсуждаться позже). Пусть $u_i = u_1 \in C^1(\overline{D}) \cap H(D)$, $m = \|u_1\|_{1,\overline{D}}$. Пусть u_p , $p \in \mathbb{N}$, определено (с условиями $u_p \in C^1(\overline{D}) \cap H(D)$, $\|u_p\|_{1,\overline{D}} \leq m/2^{p-1}$). Продолжим u_p до функции $f_p \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющей условию $\|f_p\|_1 \leq m/2^{p-2}$. Согласно [8; следствие 6.3] можно найти функцию $g_p \in C^1(\mathbb{R}^N)$, гармоническую в некоторой области D_{δ_p} ($\delta_p \in (0, 1)$ достаточно мало, так что $S_p = S_{\delta_p}$ и $D_p = D_{\delta_p}$ удовлетворяют следствию 2.3 при $\delta = \delta_p$ ($\text{diam } D_p < d$) и $\|f_p - g_p\|_1 \leq m/2^p$). Следовательно, $\|g_p\|_1 \leq 5m/2^p$.

Пусть $u_{p+1} = (f_p - g_p)|_{\overline{D}}$. Тогда $\|u_{p+1}\|_{1,\overline{D}} \leq m/2^p$, $u_{p+1} \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$ (далее по индукции определяем u_q для всех $q \in \mathbb{N}$). Так как $u_i = \sum_{p=1}^{+\infty} g_p|_{\overline{D}}$ и $\|g_p\|_{1,\overline{D}} \leq \|g_p\|_1 \leq 5m/2^p$, то остается для каждого $p \in \mathbb{N}$ найти функцию $F_p \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$ со свойствами $F_p|_{\overline{D}} = g_p|_{\overline{D}}$, $\|F_p\|_1 \leq A\|g_p\|_{1,\overline{D}}$. Тогда искомая функция F имеет вид $\sum_{p=1}^{+\infty} F_p$.

Итак, имеем $g_p \in C^1(\overline{D_p}) \cap H(D_p)$. Пусть $m_p = \|g_p\|_{1,\overline{D_p}} \leq \|g_p\|_1 \leq 5m/2^p$. Так как $\overline{D}$ имеет связное дополнение, также можно предположить, что $\overline{D_p}$ имеет связное дополнение Ω_p . По теореме 1 найдется функция $h_p \in C^1(\overline{\Omega_p}) \cap H(\Omega_p)$, $h_p(\infty) = 0$, такая, что $h_p = g_p$ на $S_p = \partial\Omega_p$ и

$$\|h_p\|_{1,\overline{\Omega_p}} \leq A_{10}m_p.$$

Здесь A_{10} зависит только от N , ε и d , так как области D_p ввиду следствия 2.3 имеют одну и ту же функцию Дини $\varepsilon_*(\cdot)$ и их диаметры не превосходят d . Применяя теорему W1, п. (3) для Ω_p , возьмем функцию $w_p \in H(\Omega_p) \cap C^1(\overline{\Omega_p})$, $w_p = 0$ на S_p , $w_p(\infty) = 1$, удовлетворяющую условиям $\|w_p\|_{1,\overline{\Omega_p}} \leq A_{11}$ (последнее условие устанавливается с помощью теоремы 1, примененной к функциям $u_i \equiv -1|_{\overline{D_p}}$ и $u_o = w_p - 1$) и

$$\left. \frac{\partial w_p}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^p} \right|_{S_p} \geq A_0^{-1} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in S_p.$$

Здесь $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^p$ является единичной внутренней нормалью к поверхности S_p в точке $\mathbf{x} \in S_p$ по отношению к области Ω_p . При $t > 0$ рассмотрим функцию $F_p^t(\mathbf{x})$ такую, что $F_p^t(\mathbf{x}) = g_p(\mathbf{x})$ на $\overline{D_p}$ и $F_p^t(\mathbf{x}) = h_p(\mathbf{x}) + tw_p(\mathbf{x})$ на $\overline{\Omega_p}$.

Согласно (2.2) имеем

$$\Delta F_p^t = \left(\frac{\partial g_p}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i} + \frac{\partial h_p}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^p} + t \frac{\partial w_p}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^p} \right) \Big|_{S_p} \sigma^p$$

в обобщенном смысле (здесь $\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i = -\mathbf{n}_{\mathbf{x}}^p$ и σ^p есть поверхностная мера на S_p).

Таким образом, при $t = t_* = (1 + A_{10})A_0m_p$ имеем $F_p^* = F_p^{t_*} \in SH(\mathbb{R}^N) \cap \text{Lip}_1(\mathbb{R}^N)$ и $\|F_p^*\|_{\text{Lip}_1} \leq A_{12}m_p$.

Последний шаг – регуляризация функций F_p^* . Фиксируем $\chi_1 \in C_0^\infty(B(\mathbf{0}, 1))$, $\chi_1 \geq 0$, $\chi_1(\mathbf{x}) = \chi_1(|\mathbf{x}|)$, $\int_{B(\mathbf{0}, 1)} \chi_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$, и пусть $\chi_\tau(\mathbf{x}) = \chi_1(\mathbf{x}/\tau)/\tau^N$, $\tau > 0$. Положим $d_p = \text{dist}(S, S_p)$. Тогда при любом $\tau \in (0, d_p)$ можно взять

$$F_p = \chi_\tau * F_p^*.$$

В самом деле, легко видеть, что $F_p \in C^1(\mathbb{R}^N)$ и $\|F_p\|_1 \leq A_N\|F_p^*\|_{\text{Lip}_1} \leq Am_p$. По теореме о среднем для гармонических функций, учитывая, что χ_τ радиальна и $\int \chi_\tau(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$, имеем $F_p = F_p^* = g_p$ на $\overline{G}$. Таким образом, мы получаем (1.4) при $N \geq 3$.

Для случая $N = 2$ отличие в доказательстве состоит в том, что вместо w из теоремы W1, п. (3) мы берем функцию w_* со свойствами $w_* \in H(D_o)$, $w_*|_S = 0$,

$w_*(\mathbf{x})/(\log |\mathbf{x}|) \rightarrow 1$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$. Применяем также теорему 4.9 (см. § 4) и используем свойство сохранения гармоничности при инверсии $z \rightarrow 1/\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Можно найти открытые шары B_j , $j = 1, \dots, J$, и функции $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$ со следующими свойствами: $\sum_{j=1}^J \varphi_j(\mathbf{x}) = 1$ на $\bar{D}$ и для всех j или $\bar{B}_j \subset D$, или найдется $\mathbf{a}_j \in \partial D$ такое, что $\bar{B}_j \subset B_{\mathbf{a}_j}$. Если j таково, что $\bar{B}_j \subset D$, то определим $f_j = \Phi * (\varphi_j \Delta f)$. В случае $B_j \not\subset D$ выберем соответствующие $\mathbf{a}_j$, $B_{\mathbf{a}_j}$, $g_{\mathbf{a}_j}$ и положим $f_j = \Phi * (\varphi_j \Delta g_{\mathbf{a}_j})$. Согласно [8; лемма 4.2] имеем $f_j \in C^1(\mathbb{R}^N)$ ($f_j \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ при $N = 2$) и $\Delta f_j = \varphi_j \Delta f \geq 0$ или $\Delta f_j = \varphi_j \Delta g_{\mathbf{a}_j} \geq 0$ в обобщенном смысле, так что $f_j \in SH(\mathbb{R}^N)$. Возьмем $F_0 = \sum_{j=1}^J f_j \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$ и рассмотрим $u_i = (f - F_0)|_D$. Поскольку $g_{\mathbf{a}_j} = f$ в $B_{\mathbf{a}_j} \cap D$, получаем, что

$$\Delta u_i = \Delta f - \sum_{j=1}^J \varphi_j \Delta f = 0$$

в D , что дает $u_i \in H(D) \cap C^1(\bar{D})$. Продолжим u_i , используя теорему 2, до функции $F_1 \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N) \cap SH(\mathbb{R}^N)$. Функция $F = F_0 + F_1$ дает требуемый результат.

Отметим, что для (Л-Д)-областей D следствие 1 может быть переформулировано для “всего” класса $SH(D) \cap C^1(\bar{D})$ по аналогии с [3; следствие 2.6].

§ 3. Доказательство теоремы 3

Всюду ниже константы $A, A_1, \dots$ (зависящие только от N, ε, d) и A_N (зависящие от N) могут отличаться от одноименных констант, использованных выше, и даже могут меняться от формулы к формуле. Нам необходимо следующее уточнение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть D является (Л-Д)-областью в $\mathbb{R}^N$ с условием $\text{diam } D < d$ и функцией Дини $\varepsilon(\cdot)$, удовлетворяющей логарифмическому условию Дини

$$\int_0^1 \frac{\varepsilon(t)}{t} \log\left(\frac{1}{t}\right) dt < +\infty. \quad (3.1)$$

Пусть $\psi \in C^1(S)$, $S = \partial D$, а функция u_i (соответственно u_o) является решением задачи Дирихле в D (соответственно в $D_o = \mathbb{R}^N \setminus \bar{D}$) с граничными данными ψ . Пусть $\mathbf{a} \in S$ и $\mathbf{z} \in D$ таковы, что $\mathbf{z} - \mathbf{a} = |\mathbf{z} - \mathbf{a}| \mathbf{n}_{\mathbf{a}}^i$ при $|\mathbf{z} - \mathbf{a}| < r_0/2$. Тогда

$$|\nabla u_i(\mathbf{z}) - (\nabla u_o(\mathbf{z}_{\mathbf{a}}^*))_{\mathbf{a}}^*| \leq A \|\psi\|_{1,S}. \quad (3.2)$$

В последней оценке и всюду далее $(\cdot)_{\mathbf{a}}^*$ означает операцию симметрии относительно гиперплоскости $T_{\mathbf{a}}$, касательной к S в точке $\mathbf{a} \in S$, примененную к соответствующей точке или вектору.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Функция $\varepsilon(t) = \varepsilon_p(t) = 1/(\log(1/t))^p$, $0 < t \leq e^{-p-1}$, $\varepsilon(t) = \varepsilon(e^{-p-1})$, $t > e^{-p-1}$, удовлетворяет (3.1) в точности при $p > 2$. Функция $\varepsilon(t) = t^\alpha$ удовлетворяет (3.1) при всех $\alpha \in (0, 1]$.

Сначала докажем следующую лемму. Положим $m = \|\psi\|_{1,S}$.

ЛЕММА 3.3. В условиях теоремы 3.1 пусть $\mathbf{b} \in S$ и $\mathbf{x} \in D$ (соответственно $\mathbf{x} \in D_o$) таковы, что $|\mathbf{x} - \mathbf{b}| < r_0/2$ и угол между $\mathbf{x} - \mathbf{b}$ и $\mathbf{n}_{\mathbf{b}}^i$ (соответственно $\mathbf{n}_{\mathbf{b}}^o$) не превышает $\pi/6$. Тогда

$$|u_{i(o)}(\mathbf{x}) - u_{i(o)}(\mathbf{b})| \leq Am|\mathbf{x} - \mathbf{b}| \log \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|}. \quad (3.3)$$

Пример 4.1 из § 4 показывает, что последняя оценка является “почти” точной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ функцию Грина области D . Напомним, что $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - v_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, где Φ есть упомянутое выше стандартное фундаментальное решение для оператора Лапласа Δ , а функция $v_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ при фиксированном $\mathbf{x}$ есть решение задачи Дирихле в области D с граничными данными $v_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in S$. Всюду далее $\rho(\mathbf{x})$ означает расстояние от $\mathbf{x}$ до S .

ТЕОРЕМА W2. В указанных обозначениях $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^1(\overline{D} \setminus \{\mathbf{x}\})$ ($\mathbf{x}$ фиксирован), причем

$$\left| \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_n} \right| \leq \frac{A\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^N}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (3.4)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial y_l} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| \leq \frac{A}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^N}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad 1 \leq l \leq N, \quad (3.5)$$

где $A = A(N, d, \varepsilon)$.

Аналогичные оценки справедливы для функций Грина ограниченных компонент множества D_o . Для неограниченной компоненты D_* множества D_o последние оценки остаются справедливыми также для функции Грина $G_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ области D_* при всех $\mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, 2d) \cap D_*$ (предполагается, что $\mathbf{0} \in \overline{D}$) и всех $\mathbf{x} \in D_*$.

Отметим, что определение функции Грина $G_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для неограниченной области D_* такое же как и выше для области D , только от соответствующей функции $v_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ нужно как от решения задачи Дирихле в D_* потребовать наличие конечного (нулевого при $N \geq 3$) предела при $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы W2, аналогичное доказательству [7; теорема 2.3], приводится в § 4 (см. теорему 4.5).

Следующая формула хорошо известна [11; теорема 12.1]:

$$u_i(\mathbf{x}) = - \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^i} \psi(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}. \quad (3.6)$$

Она непосредственно вытекает из формулы Гаусса–Остроградского и, следовательно, заведомо справедлива для (Л–Д)-областей. Можно предположить, что

$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{n}_0^i = (0, \dots, 0, 1)$, так что из (3.4) и (3.6) следует, что при $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_N)$

$$\begin{aligned} |u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{0})| &\leq \int_S \left| \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y^i} \right| |\psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{0})| d\sigma_{\mathbf{y}} \leq A_1 \int_S \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^N} m|\mathbf{y}| d\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\leq A_2 \left(\int_{S \setminus Q_0} \frac{x_N}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^N} m|\mathbf{y}| d\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\{|\mathbf{y}'| < r_0\}} \frac{x_N}{(|\mathbf{y}'|^2 + x_N^2)^{N/2}} m|\mathbf{y}'| d\mathbf{y}' \right) \\ &\leq A_3 m x_N + A_3 m \int_0^{r_0} \frac{x_N}{(r^2 + x_N^2)^{N/2}} r^{N-1} dr \leq A m x_N \left(1 + \log \frac{r_0}{x_N} \right). \end{aligned}$$

Мы оценили предпоследний интеграл с помощью сферических координат в гиперплоскости $\mathbb{R}_{\mathbf{y}'}^{N-1}$ (см. доказательство оценки (4.11) ниже).

Если $\mathbf{x}$ принадлежит неограниченной компоненте множества D_o , то следует дополнительно применить преобразование Кельвина (см. (4.22), § 4). Лемма 3.3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Без ограничения общности полагаем $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{n}_0^i = \{0, \dots, 0, 1\}$, $\mathbf{z} = (0, \dots, 0, z_N)$ при $z_N \in (0, r_0/2)$.

Найдется область $D' \subseteq D \cap Q_0$ со следующими свойствами: D' есть выпуклая (Л–Д)-область с функцией Дини $A_N \varepsilon(\cdot)$, D' радиально симметрична по отношению к переменной $\mathbf{y}'$, причем

$$\begin{aligned} D' \cap \left\{ (\mathbf{y}', y_N) \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{y}'| < \frac{r_0}{3} \right\} \\ = \left\{ (\mathbf{y}', y_N) \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{y}'| < \frac{r_0}{3}, 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|) < y_N < r_0 - 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|) \right\}, \end{aligned}$$

где $\varphi_\varepsilon(r) = \int_0^r \varepsilon(t) dt$. Заметим, что $\varepsilon(r_0) \leq 1/8$ (см. также (2.5)) и $4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|) \geq 2|\mathbf{y}'|\varepsilon(|\mathbf{y}'|) \geq \varphi(\mathbf{y}')$, так как $\varepsilon(t)/t \geq \varepsilon(r)/r$ при $t \in (0, r]$. Пусть область D'_* симметрична D' относительно гиперплоскости $T_0 = \{x_N = 0\}$, так что $D'_* \subset D_o \cap Q_0$, и пусть $G'(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $G'_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – функции Грина областей D' и D'_* соответственно. Положим $S' = \{(\mathbf{y}', y_N) \mid |\mathbf{y}'| \leq r_0/3, y_N = 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)\}$, $S' \subset \partial D'$.

Ввиду (1.2) имеем при $\mathbf{b} = (\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}')) \in S$, $|\mathbf{y}'| \leq r_0/3$

$$|\mathbf{n}_0^i - \mathbf{n}_b^i| \leq \varepsilon(|\mathbf{b}|) \leq \varepsilon\left(\sqrt{2} \frac{r_0}{3}\right) \leq \varepsilon(r_0) \leq \frac{1}{8},$$

поэтому угол между $\mathbf{n}_0^i$ и $\mathbf{n}_b^i$ не превосходит $\pi/6$. По лемме 3.3 при $\mathbf{x} = (\mathbf{y}', \pm 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|))$ получаем, что

$$|u_i(\mathbf{y}', 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)) - (\pm \psi(\mathbf{b})) - u_o(\mathbf{y}', -4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|))| \leq A m \varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|) \log \frac{1}{\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)}. \quad (3.7)$$

Положим $\tilde{\varphi}(r) = \varphi_\varepsilon(r) \log(1/\varphi_\varepsilon(r))$, $r \in (0, r_0)$. Используя формулу (3.6) для u_i и u_o в D' и D'_* соответственно, равенство $G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G'_*(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$,

$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0^*$ и $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_0^*$, а также неравенства (3.5) и (3.7), получаем

$$\begin{aligned}
 & |\nabla u_i(\mathbf{z}) - \overline{\nabla u_o(\bar{\mathbf{z}})}| \\
 &= \left| \int_{\partial D'} \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^i} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} u_i(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\partial D'_*} \overline{\nabla_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^i} G'_*(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{z}}} u_o(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \right| \\
 &= \left| \int_{\partial D'} \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^i} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} (u_i(\mathbf{y}) - u_o(\bar{\mathbf{y}})) d\sigma_{\mathbf{y}} \right| \\
 &\leq \int_{\partial D' \setminus S'} \frac{A_1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^N} 2m d\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\{|\mathbf{y}'| < r_0/3\}} \frac{A_1}{|\mathbf{z} - (\mathbf{y}', 0)|^N} m \tilde{\varphi}(|\mathbf{y}'|) d\mathbf{y}' \\
 &\leq A_2 m + A_2 m \int_0^{r_0/3} \frac{1}{r^N} \tilde{\varphi}(r) r^{N-2} dr \leq Am. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

В самой последней оценке используются формула (3.1) и неравенства $t\varepsilon(t)/2 \leq \varphi_\varepsilon(t) \leq t\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \geq t\varepsilon(1)$. Предпоследний интеграл в (3.8) оценивается с помощью сферических координат в T_0 .

Отметим, что в (3.8) и всюду далее через σ обозначается $(N-1)$ -мерная лебегова мера на любой из встречающихся гиперповерхностей, а не только на S , как это было ранее.

Хотя следующий результат не будет использоваться в доказательстве теоремы 3, он представляет самостоятельный интерес. В частности, он дает ясное понимание того, что в оценке (3.2) существенной является только нормальная производная $\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{a}}^i} \Big|_{\mathbf{z}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. В условиях теоремы 3.1 при $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{z} = (0, \dots, z_N)$, $z_N \in (0, r_0/2)$, имеем

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} \right| \leq A \|\psi\|_{1,S}, \quad n \in \{1, \dots, N-1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (3.6) и (3.5) достаточно рассмотреть случай, когда $\psi(\mathbf{x}) = 0$ вне Q_0 и при $|\mathbf{x}'| > r_0/3$. Фиксируем $n \in \{1, \dots, N-1\}$. Для $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)) \subset S'$ определим $\tilde{\psi}(\mathbf{y}) = \psi(\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}'))$ и положим $\tilde{\psi}(\mathbf{y}) = 0$ на $\partial D' \setminus S'$, так что $\tilde{\psi} \in C^1(\partial D')$ и $\|\tilde{\psi}\|_{1, \partial D'} \leq Am$. Пусть $\tilde{u}$ – решение задачи Дирихле в D' с граничными данными $\tilde{\psi}$. Мы утверждаем, что

$$\left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} \right| \leq Am.$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{v}(\mathbf{x}) = \tilde{u}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N) - \tilde{u}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n, x_{n+1}, \dots, x_N),$$

так что

$$\tilde{v} \in H(D'), \quad \tilde{v}|_{\{x_n=0\}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_n} \Big|_{\{x_n=0\}} = 2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \Big|_{\{x_n=0\}}.$$

Поскольку $\tilde{\psi} \in C^1(\partial D')$, мы получаем $|\tilde{v}(\mathbf{x})| \leq Amx_n$ на $\partial D'_+$, где $D'_+ = D' \cap \{x_n > 0\}$, поэтому $|\tilde{v}(\mathbf{x})| \leq Amx_n$ в D'_+ , откуда следует требуемое утверждение.

Наконец, возьмем $w = u_i - \tilde{u}$ в $\overline{D}'$. По лемме 3.3 при $\mathbf{b} = (\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}'))$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} = (\mathbf{y}', 4\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}')) \in S'$ находим

$$|w(\mathbf{y})| \leq A_1 m 8\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}') \log \frac{1}{8\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)} \leq Am\tilde{\varphi}(|\mathbf{y}'|).$$

Ясно также, что $|w(\mathbf{y})| \leq Am$ при $\mathbf{y} \in \partial D' \setminus S'$. Пользуясь формулой (3.6) для функции w в $\overline{D}'$, получаем

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x_n} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} = - \int_{\partial D'} \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y^i} G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} w(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Остается ввиду (3.5) завершить доказательство предложения 3.4 аналогично тому, как это было сделано при доказательстве (3.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим $M = \|f\|_{1,\overline{D}}$ и $\mu = \Delta f|_D$. Мы утверждаем, что для всякой области Ω , $\Omega \subset D$, с кусочно гладкой границей имеет место оценка

$$\mu(\Omega) \leq M\sigma(\partial\Omega). \quad (3.9)$$

Для доказательства достаточно после подходящей регуляризации и последующего перехода к пределу применить формулу Гаусса–Остроградского, т.е.

$$\mu(\Omega) = \int_{\Omega} \Delta f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (\nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{n}_y^o) d\sigma_{\mathbf{y}} \leq M\sigma(\partial\Omega).$$

Поскольку для каждого шара $B = B(\mathbf{b}, \delta) \subset D$ имеем

$$\mu(B) = \int_{\partial B} (\nabla f(\mathbf{y}) - \nabla f(\mathbf{b}), \mathbf{n}_y^o) d\sigma_{\mathbf{y}} \leq \omega_{\overline{D}}(\nabla f, \delta) \sigma(\partial B) = o(\delta^{N-1})$$

(где $\omega_E(g, \cdot)$ – модуль непрерывности скалярно- или векторнозначной функции g на множестве E), то нетрудно убедиться, что, кроме того, $\mu(\partial\Omega \cap D) = 0$ для рассматриваемых Ω .

Идея доказательства (1.5) состоит в следующем. Рассмотрим $u_i \in H(D) \cap C(\overline{D})$, $u_i|_{\partial D} = f|_{\partial D}$. Если $u_i \in C^1(\overline{D})$ и $\|u_i\|_{1,\overline{D}} \leq A_1 M$, то уже не так трудно доказать (1.5) с константой $A = A(A_1, N, \varepsilon, d)$ (см. конец доказательства теоремы 3). Но оказывается (см. пример 4.1 в § 4), что, вообще говоря, не всегда $u_i \in C^1(\overline{D})$.

По теореме 3.1 “отраженная” гармоническая функция u_o удовлетворяет свойству (3.2), поэтому естественно возникает необходимость надлежащим образом “отразить” также и меру μ с области D на D_o . Последнее означает, что мы хотим найти такую положительную меру μ^* в D_o (по поводу обозначений G , $\mathbf{a}$, $T_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{z}$ и $(\cdot)_{\mathbf{a}}^*$ см. теорему 3.1; $G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – функция Грина области D_o), для которой

$$\int_{D_o} G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbf{y}}^* \in C^1(D_o),$$

причем

$$\left| \int_D \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} d\mu_{\mathbf{y}} - \left(\int_{D_o} \nabla_{\mathbf{x}} G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}_{\mathbf{a}}^*} d\mu_{\mathbf{y}}^* \right)_{\mathbf{a}}^* \right| \leq AM \quad (3.10)$$

для всех рассматриваемых $\mathbf{a} \in S$ и $\mathbf{z} \in D$ при $\rho(\mathbf{z}) < r_0/4$. После этого мы будем иметь $f_o(\mathbf{x}) = u_o(\mathbf{x}) + \int_{D_o} G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbf{y}}^* \in C^1(\overline{D_o}) \cap SH(D_o)$, $f_o = f$ на S , и сможем завершить настоящее доказательство так же, как было завершено доказательство теоремы 2.

Переходим к деталям, предполагая, что $N \geq 3$ (при $N = 2$ следует дополнительно использовать уже приведенные выше замечания, касающиеся этого случая).

Пусть $\{B_j, \varphi_j\}_{j \in J}$ – разбиение единицы по Уитни для области D (см. [12; гл. VI, § 1]). Напомним, что J – некоторое счетное множество (чтобы не “перепутать” обозначения, мы предполагаем, что $J \cap \{0, 1, \dots, N\} = \emptyset$), $B_j = B(\mathbf{b}_j, \delta_j)$, $\mathbf{b}_j \in D$ и существует $A_1 \geq 3N$, зависящая только от N , с условием

$$\frac{1}{A_1} \rho(\mathbf{b}_j) \leq \delta_j \leq \frac{1}{6} \rho(\mathbf{b}_j). \quad (3.11)$$

Более того, для каждого $\mathbf{z} \in D$ число $\#(\mathbf{z}, J)$ шаров B_j , $j \in J$, пересекающихся с $B(\mathbf{z}, \rho(\mathbf{z})/2)$, удовлетворяет оценке

$$\#(\mathbf{z}, J) \leq A_1. \quad (3.12)$$

Наконец, функции $\varphi_j \in C_0^\infty(B_j)$, $\varphi_j \geq 0$, обладают свойствами

$$\|\Delta \varphi_j\| \leq \frac{A_1}{\delta_j^2}, \quad \sum_{j \in J} \varphi_j(\mathbf{x}) \equiv 1, \quad \mathbf{x} \in D. \quad (3.13)$$

Положим $\mu_j = \mu \varphi_j$ и определим

$$\widehat{\mu}(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbf{y}}, \quad \widehat{\mu}_j(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{j\mathbf{y}}.$$

Так как $f = u_i + \widehat{\mu}$ в D (см. [13; теорема 1.24']), то $\widehat{\mu} \in C^1(D)$. Мы утверждаем, что, более того, $\widehat{\mu}_j \in C^1(\overline{D})$ и

$$\|\widehat{\mu}_j\|_{1, \overline{D}} \leq AM. \quad (3.14)$$

Действительно, пусть $f_j = \Phi * \mu_j$. Из (3.13) и [8; лемма 4.2] следует, что $f_j \in C^1(\mathbb{R}^N)$ и

$$\|\nabla f_j\| \leq AM, \quad (3.15)$$

а согласно (3.9) и (3.4) при $\mathbf{x} \in D \setminus B(\mathbf{b}_j, (3/2)\delta_j)$ имеем

$$|\nabla \widehat{\mu}_j(\mathbf{x})| \leq \left| \int \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{j\mathbf{y}} \right| \leq \int_{B_j} \frac{A_1 \rho(\mathbf{y}) \varphi_j(\mathbf{y}) d\mu_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^N} \leq A_2 \frac{M \delta_j^N}{(\delta_j/2)^N} \leq AM.$$

Так как $\widehat{\mu_j} - f_j$ гармонична в D , то остается применить принцип максимума в $B(\mathbf{b}_j, (3/2)\delta_j)$ для $\frac{\partial}{\partial x_n}(\widehat{\mu_j} - f_j)$, $n \in \{1, \dots, N\}$, и напомнить, что $\widehat{\mu_j}|_{\partial D} = 0$. Формула (3.14) доказана.

Отметим также, что свойство (3.15) функций f_j позволяет свести доказательство теоремы 3 к случаю, когда носитель $\text{Supp } \mu$ меры μ удовлетворяет условию

$$\text{Supp } \mu \subset \{\mathbf{x} \in D \mid \rho(\mathbf{x}) < r_2\}, \quad (3.16)$$

где некоторое фиксированное $r_2 = r_2(\varepsilon(\cdot)) \in (0, r_0/32)$ будет выбрано чуть позже (см. формулу (3.22)). Действительно, пусть $J_0 = \{j \in J \mid \rho(\mathbf{b}_j) \geq r_2/2\}$. Тогда функция $F_0 = \sum_{j \in J_0} f_j$ субгармонична на $\mathbb{R}^N$, $\|F_0\|_1 \leq AM$ и остается надлежащим образом продолжить $(f - F_0)|_{\overline{D}}$ вместо f .

Таким образом, в дальнейшем мы всегда будем считать (3.16) выполненным. Отражение меры μ через S (при выполнении условий (3.16) и $\rho(\mathbf{b}_j) < r_2/2$) строится следующим образом. Для каждого $j \in J$ ($J_0 = \emptyset$) фиксируем какую-либо точку $\mathbf{a}_j \in S$, ближайшую к точке $\mathbf{b}_j$, $|\mathbf{a}_j - \mathbf{b}_j| = \rho(\mathbf{b}_j)$. Пусть $T_j = T_{\mathbf{a}_j}$ – гиперплоскость, касающаяся S в точке $\mathbf{a}_j$. Пусть μ_j^* – мера, “симметричная” мере μ_j относительно T_j (т.е. $\mu_j(E) = \mu_j^*(E_j^*)$ для всякого борелевского множества E , где E_j^* симметрично E относительно T_j). Мера

$$\mu^* = \sum_{j \in J} \mu_j^*$$

и является требуемым отражением меры μ “через” S .

Для доказательства (3.10) остается установить следующий результат (случай $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ в (3.10)) и воспользоваться принципом максимума. Отметим также, что $\text{Supp } \mu^* \subset B(\mathbf{0}, 2d)$ и можно использовать теорему W2 для оценки $G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при $|\mathbf{y}| < 2d$.

ТЕОРЕМА 3.5. *Положим*

$$\widehat{\mu^*}(\mathbf{x}) = \int G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbf{y}}^*, \quad \widehat{\mu_j^*}(\mathbf{x}) = \int G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_{\mathbf{y},j}^*, \quad \mathbf{x} \in \overline{D}_o.$$

Пусть $\mathbf{0} \in S$, $\mathbf{n}_0^i = \{0, \dots, 0, 1\}$ и $\mathbf{z} = (0, \dots, 0, z_N)$ при $0 < z_N < r_0/4$. Тогда

$$|\nabla \widehat{\mu}(\mathbf{z}) - \overline{\nabla \widehat{\mu^*}(\mathbf{z})}| \leq AM, \quad (3.17)$$

где черта над векторами означает операцию симметрии относительно гиперплоскости $T_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid x_N = 0\}$, касательной к S в точке $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q_0 и $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ означают то же, что и в доказательстве теоремы 3.1. Существует область $\tilde{D}$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \tilde{D} \cap \left\{ \mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_N) \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{y}'| < \frac{r_0}{16} \right\} \\ = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{y}'| < \frac{r_0}{16}, 8\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|) < y_N < \frac{r_0}{2} - 8\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|) \right\}, \end{aligned}$$

$y_N > 8\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)$ для всех $\mathbf{y} \in \tilde{D}$, $\tilde{D}$ – выпуклая и радиально-симметричная относительно переменной $\mathbf{y}'$ область с функцией Дини $A\varepsilon(\cdot)$, причем $\tilde{D} \subset \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{y}'| < r_0/8\}$. Пусть область $\tilde{D}_o$ симметрична $\tilde{D}$ относительно T_0 (напомним, что $\varepsilon(r) \leq 1/8$ при $0 < r \leq r_0$).

ЛЕММА 3.6. Пусть $J_1 = \{j \in J \mid \mathbf{b}_j \in D \setminus \tilde{D}\}$. Тогда

$$\Sigma_1 = \sum_{j \in J_1} (|\nabla \widehat{\mu}_j(z)| + |\nabla \mu_j^*(z)|) \leq AM. \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $j \in J_1$ таковы, что $|\mathbf{b}'_j| \leq r_0/16$. Тогда ввиду неравенств $\rho(\mathbf{b}_j) < r_2/2 < r_0/2$ имеем $|b_{jN}| \leq 8\varphi_\varepsilon(|\mathbf{b}'_j|) \leq 8|\mathbf{b}'_j|\varepsilon(|\mathbf{b}'_j|) \leq |\mathbf{b}'_j|$, так что $\rho(\mathbf{b}_j) \leq |\mathbf{b}_j| \leq \sqrt{2}|\mathbf{b}'_j|$. Откуда ввиду (3.11) при всех $\mathbf{y} \in B_j$ получаем

$$|\mathbf{y} - \mathbf{b}_j| \leq \frac{1}{6}\rho(\mathbf{b}_j) \leq \frac{1}{4}|\mathbf{b}'_j|.$$

Таким образом, $|\mathbf{b}'_j| \leq 4|\mathbf{y}'|/3$, $|\mathbf{y}| \leq 2|\mathbf{y}'|$, а также

$$\rho(\mathbf{y}) \leq \frac{7}{6}\rho(\mathbf{b}_j) \leq 20\varphi_\varepsilon(|\mathbf{b}'_j|) \leq A|\mathbf{y}'|\varepsilon(\mathbf{y}').$$

Для указанных j ввиду (3.4) получаем

$$|\nabla \widehat{\mu}_j(\mathbf{z})| \leq \int |\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}} d\mu_{j\mathbf{y}} \leq \int \frac{A_1 \rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^N} d\mu_{j\mathbf{y}} \leq \int \frac{A_2 |\mathbf{y}'| \varepsilon(|\mathbf{y}'|)}{|\mathbf{y}|^N} d\mu_{j\mathbf{y}}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для $|\nabla \mu_j^*(\mathbf{z})|$ (см. лемму 3.8 ниже). Поскольку оставшаяся часть суммы в (3.18) (по j с условием $|\mathbf{b}'_j| > r_0/16$) оценивается просто, то имеем

$$\Sigma_1 \leq A \left(M + \int_{|\mathbf{y}| \leq r_0} \frac{\varepsilon(|\mathbf{y}|) d\mu_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \right), \quad (3.19)$$

и (3.18) непосредственно вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3.7. Пусть $h(t)$ – неубывающая функция на $[0, +\infty)$ с условием $0 \leq h(t) \leq t^{N-1}$, $t \geq 0$. Тогда для любого $r > 0$ справедлива оценка

$$\int_0^r \frac{\varepsilon(t)}{t^{N-1}} dh(t) \leq (N-1) \int_0^r \frac{\varepsilon(t)}{t} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\delta \in (0, r)$ положим $h_\delta(t) = \varepsilon(t)/\delta^{N-1}$ на $(0, \delta)$ и $h_\delta(t) = \varepsilon(t)/t^{N-1}$ на $[\delta, r]$. Так как $h_\delta > 0$ и не возрастает, то нужное утверждение непосредственно получается применением метода суммирования по Абелю для римановых сумм интеграла $\int_0^r h_\delta(t) dh(t)$, а затем переходом к пределу при $\delta \rightarrow 0$.

Для завершения доказательства (3.18) оценим интеграл в (3.19) с помощью сферических координат в $\mathbb{R}_N^N$. Итак, пусть $h(r) = \mu(B(\mathbf{0}, r))$. Поскольку $\mu = 0$ вне D , то из (3.9) имеем $h(r) \leq A_1 M r^{N-1}$. Поэтому

$$\int_{|\mathbf{y}| \leq r_0} \frac{\varepsilon(|\mathbf{y}|) d\mu_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \leq \int_0^{r_0} \frac{\varepsilon(t)}{t^{N-1}} dh(t) \leq A_1 M \int_0^{r_0} \frac{\varepsilon(r) dr}{r} \leq AM. \quad (3.20)$$

Лемма 3.6 доказана.

ЛЕММА 3.8. Пусть $j \in J$ таково, что $|\mathbf{b}_j| \leq r_0/2$. Тогда для всех $\mathbf{y} \in B_j$ имеем

$$|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_j^*| \leq A_* |\mathbf{y}| \varepsilon(|\mathbf{y}|), \quad (3.21)$$

где точка $\mathbf{y}_j^*$ симметрична $\mathbf{y}$ относительно T_j , причем $A_* \leq 108$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|\mathbf{b}_j| \leq r_0/2$, то по определению $\mathbf{a}_j$ имеем $|\mathbf{a}_j| \leq 2|\mathbf{b}_j| \leq r_0$, откуда $\mathbf{a}_j \in S \cap Q_0$ и $a_{jN} = \varphi(\mathbf{a}_j')$ (напомним, что $|\varphi(r)| \leq 2r\varepsilon(r) \leq r/4$ при $r \leq r_0$). Так как $|\mathbf{y}| \in ((5/6)|\mathbf{b}_j|, (7/6)|\mathbf{b}_j|)$ при $\mathbf{y} \in B_j$, то $|\mathbf{a}_j| \leq 3|\mathbf{y}|$ для этих $\mathbf{y}$. Элементарные выкладки дают

$$\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_j^* = \mathbf{y} - 2(\mathbf{y}, \mathbf{n}_0^i) \mathbf{n}_0^i - (\mathbf{y} - 2(\mathbf{y} - \mathbf{a}_j, \mathbf{n}_j^i) \mathbf{n}_j^i) = 2(\mathbf{y} - \mathbf{a}_j, \mathbf{n}_j^i) \mathbf{n}_j^i - 2(\mathbf{y}, \mathbf{n}_0^i) \mathbf{n}_0^i,$$

где $\mathbf{n}_0^i$ и $\mathbf{n}_j^i$ — внутренние единичные нормали к S в точках $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{a}_j$ соответственно. Откуда

$$|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_j^*| \leq 2|a_{jN}| + 6|\mathbf{y} - \mathbf{a}_j| |\mathbf{n}_j^i - \mathbf{n}_0^i|.$$

Ввиду неравенства $|\mathbf{n}_j^i - \mathbf{n}_0^i| \leq \varepsilon(|\mathbf{a}_j|)$ мы легко получаем (3.21), пользуясь неравенством $\varepsilon(kt) \leq k\varepsilon(t)$ при $k > 1, t > 0$.

Итак, окончательное ограничение на r_2 таково (см. (3.21)):

$$A_* \varepsilon(r_2) < \frac{1}{20}. \quad (3.22)$$

В частности, в лемме 3.8 мы автоматически имеем

$$|\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_j^*| \leq \frac{1}{4} |\mathbf{y}| \quad (3.23)$$

при $|\mathbf{y}| < 5r_2$.

Заметим, что при $|\mathbf{z}| = z_N \geq 2r_2$ доказательство оценки (3.17) проще, поскольку ввиду (3.4) и (3.9) мы даже получаем, что

$$|\nabla \widehat{\mu}(\mathbf{z})| \leq \int |\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}| d\mu_{\mathbf{y}} \leq A_1 \int \frac{\rho(\mathbf{y}) d\mu_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^N} \leq A_2 r_2 \frac{\sigma(\partial D) M}{r_2^N} \leq AM, \quad (3.24)$$

и аналогичная оценка верна также и для $|\nabla \widehat{\mu}^*(\bar{\mathbf{z}})|$. Таким образом, с этого момента мы предполагаем, что $|\mathbf{z}| \leq 2r_2 \leq r_0/16$. Введем множество $\Omega_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{y} \mid |\mathbf{y}|/2 > |\mathbf{y} - \mathbf{z}|\}$ (заметим, что на самом деле $\Omega_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{y} \mid |\mathbf{y} - (4/3)\mathbf{z}| < (2/3)|\mathbf{z}|\}$).

Совокупность $J_2 = \{j \in J \setminus J_1 \mid B_j \cap \Omega_{\mathbf{z}} \neq \emptyset\}$ является “малой” (число ее элементов оценивается с помощью формулы (3.12)). Ввиду (3.14) (аналогичная оценка верна и для $\widehat{\mu}_j^*$) имеем

$$\Sigma_2 = \sum_{j \in J_2} (|\nabla \widehat{\mu}_j(\mathbf{z})| + |\nabla \widehat{\mu}_j^*(\bar{\mathbf{z}})|) \leq AM.$$

Положим $J_3 = \{j \in J \setminus (J_1 \cup J_2) \mid |\mathbf{b}_j| > 4r_2\}$. Тогда аналогично (3.24) получаем

$$\Sigma_3 = \sum_{j \in J_3} (|\nabla \widehat{\mu}_j(\mathbf{z})| + |\nabla \widehat{\mu}_j^*(\bar{\mathbf{z}})|) \leq AM.$$

Введем $J_4 = J \setminus (J_1 \cup J_2 \cup J_3)$ и пусть $\nu_j, j \in J_4$, суть меры, “симметричные” соответствующим μ_j относительно T_0 ($\mu_j(E) = \nu_j(E_0^*)$ для всякого борелевского множества E).

Мы утверждаем, что

$$\sum_{j \in J_4} |\nabla \widehat{\nu}_j(\bar{\mathbf{z}}) - \nabla \widehat{\mu}_j^*(\bar{\mathbf{z}})| \leq AM, \quad (3.25)$$

где $\widehat{\nu}_j(\mathbf{x}) = \int G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\nu_{j\mathbf{y}}$. В самом деле, для $j \in J_4$ имеем

$$\nabla \widehat{\nu}_j(\bar{\mathbf{z}}) - \nabla \widehat{\mu}_j^*(\bar{\mathbf{z}}) = \int \nabla_{\mathbf{x}} G_o(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{z}}} d\mu_{j\mathbf{y}} - \int \nabla_{\mathbf{x}} G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j^*)|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{z}}} d\mu_{j\mathbf{y}},$$

$|\mathbf{b}_j| \leq 4r_2$, а согласно (3.11) $|\mathbf{y}| \leq 5r_2 \leq r_0/6$ при $\mathbf{y} \in B_j$, т.е. (3.23) выполняется для всех $\mathbf{y} \in \Omega_4 = \bigcup_{j \in J_4} B_j$. Поскольку к тому же ввиду условия $j \notin J_2$ имеем $\Omega_4 \cap \Omega_{\mathbf{z}} = \emptyset$, то окончательно получаем для всех $\mathbf{y} \in \Omega_4$ следующие оценки:

$$|\mathbf{y}| \leq 5r_2, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \geq \frac{1}{2}|\mathbf{y}|, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{z}| \geq \frac{|\mathbf{z}|}{3}, \quad |\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_j^*| \leq \frac{1}{4}|\mathbf{y}|. \quad (3.26)$$

Таким образом, при $\mathbf{y} \in \Omega_4$

$$|\nabla_{\mathbf{x}} G_o(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{z}}} - \nabla_{\mathbf{x}} G_o(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j^*)|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{z}}}| \leq \|\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\bar{\mathbf{y}}} G_o(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}})|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{z}}}\|_{\bar{\mathbf{y}} \in [\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{y}_j^*]} |\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_j^*|.$$

Тогда ввиду (3.5), (3.21) и (3.26) получаем

$$\sum_{j \in J_4} |\nabla \widehat{\nu}_j(\bar{\mathbf{z}}) - \nabla \widehat{\mu}_j^*(\bar{\mathbf{z}})| \leq \int_{B(\mathbf{0}, 5r_2)} \frac{A_1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^N} A_* |\mathbf{y}| \varepsilon(|\mathbf{y}|) d\mu_{\mathbf{y}} \leq A \int_{B(\mathbf{0}, r_0)} \frac{\varepsilon(|\mathbf{y}|) d\mu_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^{N-1}},$$

что и дает (3.25) в силу (3.20).

В завершение остается доказать, что

$$\Sigma_4 = \sum_{j \in J_4} |\nabla \widehat{\mu}_j(\mathbf{z}) - \overline{\nabla \widehat{\nu}_j(\bar{\mathbf{z}})}| \leq AM.$$

С помощью (3.12) получаем

$$\Sigma_4 \leq A \int_{\Omega_4} |\nabla_{\mathbf{x}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}| d\mu_{\mathbf{y}}, \quad (3.27)$$

где функция $G_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G_o(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ определена на множестве $((D_o)_0^*)^2$.

Напомним, что при $j \in J_4$ (поскольку $j \notin J_1$) имеем $\mathbf{b}_j \in \bar{D}$, но при этом не обязательно $\mathbf{y} \in \tilde{D}$. Для части интеграла в (3.27), в которой $\mathbf{y} \in \Omega_4 \setminus \tilde{D}$, справедлива следующая оценка:

$$\int_{\Omega_4 \setminus \tilde{D}} |\nabla_{\mathbf{x}} (G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}| d\mu_{\mathbf{y}} \leq AM.$$

Эта оценка может быть получена тем же способом, что и (3.19) (см. лемму 3.6) или (3.24).

Таким образом, остается оценить интеграл

$$I_1 = \int_{\Omega_4 \cap \tilde{D}} |\nabla_{\mathbf{x}}(G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}))|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}| d\mu_{\mathbf{y}}.$$

Заметим, что при $\mathbf{y} \in \tilde{D}$ имеем $y_N > 8\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)$. Таким образом, ввиду соотношений $|\varphi(\mathbf{y}')| \leq 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)$, $\varphi'_\varepsilon(r) = \varepsilon(r) \leq 1/8$ получаем, что

$$|\mathbf{y}| \geq \rho(\mathbf{y}) \geq \frac{2}{\sqrt{5}}(y_N - 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|)) \geq y_N/3, \quad \rho(\mathbf{y}) \leq 2y_N,$$

и аналогичные оценки верны для расстояния от $\mathbf{y}$ до $(S)_0^*$.

Укажем также, что в Ω_4 выполнено неравенство $|\mathbf{y} - \mathbf{z}| \geq |\mathbf{z}|/3$ (так как $\Omega_4 \cap \Omega_{\mathbf{z}} = \emptyset$, см. выше). Оценим I_1 за несколько шагов.

1°. Пусть $\Omega'_4 = \Omega_4 \cap \tilde{D} \cap \{|\mathbf{y}| < 3|\mathbf{z}|\}$. Тогда согласно (3.4) и (3.9)

$$\int_{\Omega'_4} |\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}| d\mu_{\mathbf{y}} \leq A_1 \int_{\Omega'_4} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^N} d\mu_{\mathbf{y}} \leq A_2 \int_{\Omega'_4} \frac{|\mathbf{y}| d\mu(\mathbf{y})}{|\mathbf{z}|^N} \leq AM.$$

Аналогичным образом оценивается $\int_{\Omega'_4} |\nabla_{\mathbf{x}} G_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{z}}| d\mu_{\mathbf{y}}$.

2°. Пусть $\Omega_5 = \Omega_4 \cap \tilde{D} \cap \{|\mathbf{y}| \geq 3|\mathbf{z}|\}$. Рассмотрим $\Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_o^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ как функцию от $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \tilde{D}$, $\mathbf{y} \in \Omega_5$ фиксирован). Требуется оценить $|\nabla \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})|$. Поскольку $\Psi_{\mathbf{y}} \in H(D') \cap C^1(\tilde{D})$, то можно использовать формулу (3.6) для $\Psi_{\mathbf{y}}$ в D' . Сначала оценим $\Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ на $\partial D'$. Если $\mathbf{x} = (\mathbf{x}', 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|)) \in \partial D'$ таково, что $|\mathbf{x}'| < r_0/3$, то имеем

$$|G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}_\varphi, \mathbf{y})| \leq \|\nabla G(\cdot, \mathbf{y})\|_{[\mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}]} |4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|) - \varphi(\mathbf{x}')|,$$

где $\mathbf{x}_\varphi = (\mathbf{x}', \varphi(\mathbf{x}')) \in S$ (так что $G(\mathbf{x}_\varphi, \mathbf{y}) = 0$). Для дальнейшего нам потребуется еще одна элементарная лемма.

ЛЕММА 3.9. *Справедлива следующая оценка:*

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}} \in [\mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}]} |\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}| \geq A_1 |\mathbf{y} - \mathbf{x}'|,$$

где $A_1 > 0$ – абсолютная константа и $(\mathbf{x}', 0)$ и $\mathbf{x}'$ отождествлены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим трапецию с вершинами $\mathbf{y} = (\mathbf{y}', y_N)$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}$ и положим $\mathbf{y}_\varepsilon = (\mathbf{y}', 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{y}'|))$. Тогда $y_N > 2y_\varepsilon$ и нетрудно видеть, что для всякого $\tilde{\mathbf{x}} \in [\mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}]$ угол между векторами $\mathbf{y} - \mathbf{y}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y}_\varepsilon$ составляет не менее $\pi/2 - \arctg(1/2)$, так как $4\varphi'_\varepsilon(r) = 4\varepsilon(r) \leq 1/2$, $r \leq r_0$. Простые тригонометрические вычисления завершают доказательство.

Теперь ввиду (3.4) имеем

$$\begin{aligned} |G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}_\varphi, \mathbf{y})| &\leq \|\nabla G(\cdot, \mathbf{y})\|_{[\mathbf{x}_\varphi, \mathbf{x}]} |2\varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|) - \varphi(\mathbf{x}')| \\ &\leq A_1 \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|^N} 8\varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|) \leq A \frac{y_N \varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|^N}. \end{aligned}$$

Выполняя те же действия с функцией G_o^* и точкой $\mathbf{x}_{-\varphi} = (\mathbf{x}', -\varphi(\mathbf{x}'))$ вместо $\mathbf{x}_\varphi$, окончательно получаем

$$|\Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})| \leq A \frac{y_N \varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|^N}$$

при $\mathbf{x} \in S' = \{(\mathbf{x}', 4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|)), |\mathbf{x}'| < r_0/3\}$. Откуда, используя (3.6) и (3.5), примененные в D' , находим

$$\begin{aligned} |\nabla \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})| &= \left| \int_{\partial D'} \left(\nabla_{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} G'(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \right) \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} \right| \leq \left| \int_{S'} \right| + \left| \int_{\partial D' \setminus S'} \right| \\ &\leq \int_{S'} \frac{A_1 y_N \varphi_\varepsilon(|\mathbf{x}'|) d\sigma_{\mathbf{x}}}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}|^N |\mathbf{y} - \mathbf{x}'|^N} + A_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что предпоследний интеграл не превышает A_2 , так как $|\mathbf{y}'| \leq r_0/8$, $\mathbf{y} \in \tilde{D}$, и $|\mathbf{x}| \geq r_0/3$, поскольку $\mathbf{x} \notin S'$.

Снова используя лемму 3.9 для $\mathbf{z}$ вместо $\mathbf{y}$, мы видим, что для получения оценки $|\nabla \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})|$ остается оценить интеграл

$$I_2 = \int_{\{|\mathbf{x}'| \leq r_0/3\}} K_{\mathbf{zy}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{y} \in \Omega_5,$$

где

$$K_{\mathbf{zy}}(\mathbf{x}') = \frac{y_N |\mathbf{x}'| \varepsilon(|\mathbf{x}'|)}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}'|^N |\mathbf{y} - \mathbf{x}'|^N}.$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Здесь $|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{y}'|/2$. Поэтому, используя сферические координаты в $\mathbb{R}_{\mathbf{x}'}^N$, получаем

$$\int_{\{|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{y}|/2\}} K_{\mathbf{zy}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \leq \frac{A_1}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \int_0^{|\mathbf{y}|/2} \frac{r \varepsilon(r) r^{N-2} dr}{r^N} \leq \frac{A_1}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \lambda_1(|\mathbf{y}|),$$

где $\lambda_1(t) = \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} d\tau$.

ЛЕММА 3.10. В указанных обозначениях для любого $r \in (0, 1]$ имеем

$$\int_0^r \frac{\lambda_1(t)}{t} dt \leq \int_0^r \frac{\varepsilon(t)}{t} \log \frac{1}{t} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить теорему Фубини в следующей ситуации (при естественных ограничениях на f):

$$\int_0^r dt \int_0^t f d\tau = \int_0^r d\tau \int_\tau^r f dt.$$

Случай 2. Здесь $\mathbf{x}' \in E(\mathbf{y})$, где $E(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-1} \mid |\mathbf{y}|/2 \leq |\mathbf{x}'| \leq 2|\mathbf{y}|\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{E(\mathbf{y})} K_{\mathbf{zy}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &\leq A_1 \frac{\varepsilon(|\mathbf{y}|)}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \int_{E(\mathbf{y})} \frac{y_N d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^N} \\ &\leq A_2 \frac{\varepsilon(|\mathbf{y}|)}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \int_0^{3|\mathbf{y}|} \frac{y_N r^{N-2} dr}{(r^2 + y_N^2)^{N/2}} \leq A \frac{\varepsilon(|\mathbf{y}|)}{|\mathbf{y}|^{N-1}}. \end{aligned}$$

Предпоследний интеграл оценен с использованием сферических координат в $\mathbb{R}_{\mathbf{x}' - \mathbf{y}}^{N-1}$.

Случай 3. Здесь $|\mathbf{x}'| > 2|\mathbf{y}'|$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\{|\mathbf{x}'| > 2|\mathbf{y}'|\}} K_{\mathbf{zy}}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' &\leq A|\mathbf{y}| \int_{2|\mathbf{y}|}^{r_0/3} \frac{r\varepsilon(r)r^{N-2} dr}{r^{2N}} \leq A \int_{|\mathbf{y}|}^{r_0} \frac{\varepsilon(r) dr}{r^N} \\ &= \frac{A}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \lambda_2(|\mathbf{y}|), \end{aligned}$$

где

$$\lambda_2(t) = t^{N-1} \int_t^{r_0} \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau^N} d\tau.$$

ЛЕММА 3.11. *Во введенных обозначениях имеем*

$$\int_0^{r_0} \frac{\lambda_2(t)}{t} dt = \frac{1}{N-1} \int_0^{r_0} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 3.10 (при этом следует взять $r = r_0$).

Таким образом, получаем

$$|\nabla \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})| \leq A \frac{\varepsilon(|\mathbf{y}|) + \lambda_1(|\mathbf{y}|) + \lambda_2(|\mathbf{y}|)}{|\mathbf{y}|^{N-1}} = A \frac{\lambda(|\mathbf{y}|)}{|\mathbf{y}|^{N-1}}.$$

Для окончательной оценки I_1 остается проверить следующие неравенства:

$$\int_{\Omega_5} |\nabla \Psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{z})| d\mu_{\mathbf{y}} \leq A_1 \int_{\{|\mathbf{y}| \leq r_0\}} \frac{\lambda(|\mathbf{y}|)}{|\mathbf{y}|^{N-1}} d\mu_{\mathbf{y}} \leq A_2 M \int_0^{r_0} \frac{\lambda(r)}{r} dr \leq AM,$$

которые следуют из оценки (3.9) и лемм 3.7, 3.10 и 3.11 (поскольку очевидно, что $\lambda(\rho)$, взятая вместо $\varepsilon(\rho)$, также удовлетворяет условиям леммы 3.7).

Теорема 3.5 доказана.

Мы завершаем доказательство теоремы 3 так же, как мы завершили доказательство теоремы 2. Пусть $f \in C^1(\overline{D}) \cap SH(D)$ и $M = \|f\|_{1,\overline{D}}$. Для каждого $p \in \{1, 2, \dots\}$ можно найти $g_p \in C^1(\overline{D_p}) \cap SH(D_p)$, гармоническую в $D_p \setminus \overline{D}$ ($D_p = D_{\delta_p}$, $\delta_p \in (0, 1)$ достаточно мало), $\|g_p\|_{1,\overline{D_p}} \leq AM/2^p$, причем $f = \sum_{p=1}^{+\infty} g_p|_{\overline{D}}$. Доказательство этого факта практически такое же как для случая шаров в [2; лемма 5.2]. Остается надлежащим образом продолжить каждую функцию g_p из $\overline{D}$. Пусть $\Omega_p = \mathbb{R}^N \setminus \overline{D_p}$, $S_p = \partial D_p$. Пользуясь теоремами 3.5 и 3.1, находим субгармонические отражения h_p для g_p через S_p (т.е. $h_p \in C^1(\overline{\Omega_p}) \cap SH(\Omega_p)$, $h_p = g_p$ на S_p и $\|h_p\|_{1,\overline{\Omega_p}} \leq A\|g_p\|_{1,\overline{D_p}}$). Из доказательства теоремы 3.5 следует, что $h_p \in H(D_{\delta'} \setminus \overline{D_{\delta_p}})$ при некотором $\delta' > \delta_p$. Остается, учитывая (2.2), прибавить подходящую функцию tw_p и провести регуляризацию без изменения g_p на $\overline{D}$, что возможно ввиду гармоничности g_p на $D_p \setminus \overline{D}$.

§ 4. Примеры. Доказательства теорем W1 и W2

ПРИМЕР 4.1. Пусть D – произвольная ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, такая, что $S = \partial D$ содержит множество $B'_\delta = \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N = 0, |\mathbf{x}'| < \delta\}$ при некотором $\delta > 0$. Тогда найдется $\psi \in C^1(\overline{D}) \cap SH(D)$ такая, что решение Ψ задачи Дирихле в D с граничными данными $\psi|_S$ не принадлежит $C^1(\overline{D})$.

Докажем это. Можно предположить, что $\delta \in (0, 1/4)$ и

$$D \subset \Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0, |\mathbf{x}'| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Зафиксируем $p \in (0, 1)$ и определим

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(|\mathbf{x}'|) = \frac{|\mathbf{x}'|}{|\log |\mathbf{x}'||^p}, \quad |\mathbf{x}'| \in (0, 1), \quad \psi(\mathbf{0}) = 0.$$

Нетрудно проверить, что $\psi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap SH(\Omega)$. Положим $\psi_0(\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}')$ при $|\mathbf{x}'| < 1/2$ и $\psi_0(\mathbf{x}') = \psi(1/2)$ при $|\mathbf{x}'| \geq 1/2$, и пусть Ψ_0 – решение задачи Дирихле в $\mathbb{R}_+^N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}$ с граничными данными ψ_0 . По формуле Пуассона в $\mathbb{R}_+^N$ имеем при $x_N \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\mathbf{0}', x_N) &= \frac{2}{\alpha_N} \int_{\mathbb{R}_+^{N-1}} \frac{x_N \psi_0(\mathbf{y}')}{|(\mathbf{y}', 0) - (\mathbf{0}', x_N)|^N} d\mathbf{y}' \\ &\geq \frac{2\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \int_0^{1/2} \frac{x_N r r^{N-2} dr}{(r^2 + x_N^2)^{N/2} (\log \frac{1}{r})^p} \geq A(N) x_N \int_{x_N}^{1/2} \frac{dr}{r (\log \frac{1}{r})^p} \\ &= \frac{A(N) x_N}{1-p} \left(\left(\log \frac{1}{x_N} \right)^{1-p} - (\log 2)^{1-p} \right), \end{aligned}$$

откуда, как легко видеть, $\frac{\partial \Psi_0}{\partial x_N} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = +\infty$. С другой стороны, можно найти $\delta_0 \in (0, \delta)$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что $B_0^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0, |\mathbf{x}| < \delta_0\} \subset D$ и $\lambda_0 \Psi_0 \leq \Psi$ на ∂B_0^+ .

Следовательно,

$$\Psi(\mathbf{0}', x_N) \geq \lambda_0 A(N) x_N \left(\log \frac{1}{x_N} \right)^{1-p}, \quad x_N \in (0, \delta_0),$$

что завершает доказательство и показывает, что оценка (3.3) является “почти” точной, если $p \rightarrow 0+$. Аналогичным образом нетрудно установить, что функция $-\psi|_{\partial D} \in C^1(S)$ не может быть продолжена на $\overline{D}$ до функции класса $C^1(\overline{D}) \cap SH(D)$.

В следующем примере мы строим C^1 -гладкую выпуклую “почти” (Л–Д)-область D в $\mathbb{R}^2$, для которой свойство C^1 -гармонического отражения (см. теорему 1) не выполняется. Этот пример показывает, что (достаточные) (Л–Д)-условия на D в теореме 1 являются “почти” точными. Соответствующий пример в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, легко получается по аналогии.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $B_+ = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1/e, \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ и $\Sigma' = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \zeta = 0, |\zeta| < 1/e\} \subset \partial B_+$. Функция $k(\zeta) = -\zeta/\log(\zeta)$ конформно отображает B_+ на некоторую область Ω_+ , причем k является гомеоморфизмом $\overline{B_+}$ на $\overline{\Omega_+}$ (мы полагаем $k(0) = 0$). Здесь $\log(\zeta)$ означает главную голоморфную ветвь логарифма, определенную в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\log(1) = 0$. Для проверки конформности функции k на B_+ достаточно воспользоваться классическим обратным принципом соответствия границ. Легко показать, что $S' = k(\Sigma')$ является C^1 -гладкой кривой, выпуклой “вправо”. Более того, на S' при некотором $A > 0$ справедлива оценка

$$0 \leq -x_1 \leq A \frac{x_2}{|\log |x_2||}, \quad |x_2| \leq \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1} e^{-1}.$$

Отметим, что при $p > 1$ кривая $-x_1 = |x_2|/|\log |x_2||^p$, $|x_2| \leq 1/2$, является куском границы некоторой выпуклой (Л–Д)-области.

Следовательно, существует ограниченная выпуклая C^1 -гладкая область $D \subset \{z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} \mid x_1 < 0\}$ такая, что $S' \subset S = \partial D$ и кривая $S \setminus \{0\}$ является C^∞ -гладкой. Рассмотрим $u_i(\mathbf{x}) = -x_1 \in H(D) \cap C^\infty(\overline{D})$. Мы утверждаем, что соответствующая функция u_o (см. обозначения в теореме 1) удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u_o}{\partial x_1} \Big|_0 = \frac{\partial u_o}{\partial \mathbf{n}_0^o} = +\infty. \quad (4.1)$$

Действительно, положим $h(\mathbf{x}) = \operatorname{Re}(k^{-1}(z))$ на $\overline{\Omega_+}$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2)$). Тогда найдется $\lambda > 0$ такое, что $\lambda u_o \geq h$ на $\partial \Omega_+$ и, следовательно, также и в Ω по принципу максимума. Поэтому (4.1) вытекает из равенства $\frac{\partial h}{\partial x_1} \Big|_0 = +\infty$. Этот пример также показывает, что функция Грина (“почти” (Л–Д)-) области Ω_+^* (полученной из Ω_+ “сглаживанием” кривой $\partial \Omega_+$ вблизи ее “угловых” точек) не удовлетворяет свойствам, указанным в [7; теорема 2.3] (см. также теорему 4.5 ниже).

ПРИМЕР 4.3. При $p > 0$ определим C^1 -функцию

$$f_p(t) = -\frac{|t|}{|\log |t||^p}, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad t \neq 0, \quad f_p(0) = 0.$$

Тогда

- (1) при любом $p \in (0, 1]$ не существует числа $\delta > 0$ и функции F , непрерывной и субгармонической в $B_\delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| < \delta\}$, таких, что $F(x_1, 0) = f_p(x_1)$ при $|x_1| < \delta$;
- (2) для каждого $p \in (1, +\infty)$ найдется $F \in C_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2) \cap SH(\mathbb{R}^2)$ с условиями $F(x_1, 0) = f_p(x_1)$ для всех $x_1 \in [-1/2, 1/2]$ и $\|\nabla F\| < +\infty$.

Докажем это. Положим $g_p(t) = f_p(t)$ при $|t| \leq 1/2$ и продолжим ее до некоторой отрицательной ограниченной четной функции класса C^2 при всех $|t| > 0$. Пусть F_p^+ (соответственно F_p^-) есть решение задачи Дирихле в $\mathbb{R}_+^2$ (соответственно в $\mathbb{R}_-^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < 0\}$) с граничными данными g_p . По

формуле Пуассона имеем при всех $\alpha \in (0, \pi)$ и $r \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} F_p^+(r \cos \alpha, r \sin \alpha) &= F_p^-(r \cos \alpha, -r \sin \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \sin \alpha g_p(t) dt}{(t - r \cos \alpha)^2 + r^2 \sin^2 \alpha} \\ &\leq \frac{r \sin \alpha}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{g_p(t) dt}{t^2 + r^2} \leq -\frac{r \sin \alpha}{4\pi} \int_r^{1/2} \frac{dt}{t |\log |t||^p} = -r \sin \alpha h_p(r), \end{aligned}$$

где $h_p(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow 0+$ для каждого $p \in (0, 1]$. Пусть $F_p = F_p^+$, $F_p = F_p^-$ и $F_p = g_p$ соответственно на $\mathbb{R}_+^2$, $\mathbb{R}_-^2$ и $\{x_2 = 0\}$.

Фиксируем $p \in (0, 1]$. Применяя метод доказательства от противного, предположим, что указанная в (1) функция F существует.

Положим $M = \sup_{|\mathbf{x}|=\delta/2} (|F(\mathbf{x})| + |F_p(\mathbf{x})|) < +\infty$ и пусть u_+ (соответственно u_-) есть решение задачи Дирихле в $B_{\delta/2}^+ = B_{\delta/2} \cap \mathbb{R}_+^2$ (соответственно в $B_{\delta/2}^- = B_{\delta/2} \cap \mathbb{R}_-^2$) с нулевыми граничными данными на $\partial B_{\delta/2}^\pm \cap \{x_2 = 0\}$ и граничными данными, равными M на оставшейся части границы. По теореме W1, п. (2) найдется $A > 0$ такое, что

$$|u_+(x_1, x_2)| + |u_-(x_1, -x_2)| \leq Ax_2$$

для всех $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ с условиями $|\mathbf{x}| \leq \delta/4$ и $x_2 \geq 0$.

Следовательно, при $\alpha \in (0, \pi)$ и $r \in (0, \delta/4)$ в силу неравенства $F \leq F_p^\pm + u_\pm$ в $B_{\delta/2}^\pm$ имеем

$$F(r \cos \alpha, \pm r \sin \alpha) \leq -r \sin \alpha (h_p(r) - A), \quad F(\mathbf{0}) = 0,$$

что противоречит условию субгармоничности функции $F(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ по теореме о среднем значении.

Пусть теперь $p > 1$. Нетрудно проверить (см. также теорему 4.9 ниже), что $F_p^- \in C^1(\overline{\mathbb{R}_-^2})$. Для завершения доказательства остается применить теорему 2.

Напомним, что в [3; теорема 3.1] было доказано, что (Л–Д)-условие является в некотором смысле и необходимым в теореме 3. Например, в шкале функций $\varepsilon_p(\cdot)$ (см. замечание 3.2 выше) имеет место отсутствие свойства продолжения (в смысле теоремы 3) при $p \in (0, 1]$. При $p > 1$ области с функцией Дини $\varepsilon_p(\cdot)$ являются (Л–Д)-областями. Случаи $p > 2$ удовлетворяют теореме 3. Случаи $p \in (1, 2]$ до сих пор остаются нерассмотренными.

Автору также неизвестно, является ли (Л–Д)-условие в теореме 2 точным.

Далее мы приведем доказательства теорем W1 и W2, по существу следуя идеям оригинальных доказательств работы [7]. Кроме того, мы проверим, что все возникающие постоянные зависят только от N , $d = \text{diam } D$ и $\varepsilon(\cdot)$. Последнее обстоятельство является важным для доказательств основных результатов настоящей статьи. Заинтересованному читателю может оказаться весьма полезным ознакомиться со всеми деталями приводимых ниже доказательств, которые, по мнению автора, представляются ценными для приложений. Сначала рассмотрим подробное доказательство основного результата работы [7; теоремы 2.2].

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\varepsilon_1(t)$ – функция класса Дини с условием $\varepsilon_1(1) \leq 1/2$. Положим $\varphi_1(r) = \int_0^r \varepsilon_1(t) dt$ (т.е. $t\varepsilon_1(t)/2 \leq \varphi_1(t) \leq t\varepsilon_1(t)$ и функция $-\varphi_1$ является вогнутой). Определим

$$P_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{x}'| < 1, -\varphi_1(|\mathbf{x}'|) < x_N < 1\},$$

$$\Sigma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{x}'| < 1, x_N = -\varphi_1(|\mathbf{x}'|)\}, \quad \Sigma_1^* = \partial P_1 \setminus \overline{\Sigma_1}.$$

Пусть u_1 является решением задачи Дирихле в области P_1 с граничными данными $u_1|_{\Sigma_1} = 0$, $u_1|_{\Sigma_1^*} = 1$ (при условиях $\|u_1\|_{P_1} \leq 1$). Тогда найдется константа $A_1 = A_1(N, \varepsilon(\cdot)) > 0$ такая, что

$$u_1(\mathbf{0}', x_N) \leq A_1 x_N, \quad x_N \in (0, 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$P_2(\mathbf{x}') = \left\{ \frac{\mathbf{z}}{2} + (\mathbf{x}', -2\varphi_1(\mathbf{x}')) \mid \mathbf{z} \in P_1 \right\},$$

$$\Sigma_2(\mathbf{x}') = \left\{ \frac{\mathbf{z}}{2} + (\mathbf{x}', -2\varphi_1(\mathbf{x}')) \mid \mathbf{z} \in \Sigma_1 \right\} \subset \partial P_2(\mathbf{x}').$$

Мы утверждаем, что при каждом $\mathbf{x}'$, $|\mathbf{x}'| < 1/2$, поверхность $\Sigma_2(\mathbf{x}')$ расположена всюду “не выше” Σ_1 . Действительно, для этого достаточно проверить, что

$$\chi_t(s) = 2\varphi_1(t) + \frac{1}{2} \varphi_1(2s) - \varphi_1(t+s) \geq 0$$

при всех $t \geq 0$, $s \geq 0$. Нетрудно видеть, что функция $\chi_t(s)$ (t фиксировано) имеет минимум при $s = t$, так что достаточно установить, что $\lambda(t) = \chi_t(t) \geq 0$, $t \geq 0$. Но $\lambda(0) = 0$ и $\lambda'(t) = 2\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1(2t) \geq 0$, откуда и вытекает приведенное выше утверждение.

Рассмотрим функцию $u'_2(z) = u_1(2(\mathbf{z} - (\mathbf{x}', -2\varphi_1(\mathbf{x}')))) \in H(P_2(\mathbf{x}'))$. Она имеет граничные значения $u'_2 = 0$ на $\Sigma_2(\mathbf{x}')$ и $u'_2 = 1$ на $\partial P_2(\mathbf{x}') \setminus \overline{\Sigma_2(\mathbf{x}')}$, причем $\|u'_2\|_{P_2(\mathbf{x}')} \leq 1$. Поскольку, очевидно, $(\mathbf{x}', 0) \in P_2(\mathbf{x}')$ при $0 < |\mathbf{x}'| < 1/2$, то по принципу максимума для u_1 и u'_2 в $P_1 \cap P_2(\mathbf{x}')$, имеем

$$u_1(\mathbf{x}', 0) \leq u'_2(\mathbf{x}', 0) = u_1(\mathbf{0}', 4\varphi_1(|\mathbf{x}'|))$$

при всех $\mathbf{x}'$, для которых $|\mathbf{x}'| < 1/2$.

Пусть u_ψ – решение задачи Дирихле в $\mathbb{R}_+^N$ с граничными данными $\psi(\mathbf{x}') = u_1(\mathbf{0}, 4\varphi_1(|\mathbf{x}'|))$ при $|\mathbf{x}'| \leq 1/2$, $\psi(\mathbf{x}') = 1$ при $|\mathbf{x}'| \geq 1/2$. По формуле Пуассона

$$u_\psi(\mathbf{x}', x_N) = \frac{2}{\alpha_N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{x_N}{((\mathbf{y}' - \mathbf{x}')^2 + x_N^2)^{N/2}} \psi(\mathbf{y}') d\mathbf{y}'.$$

Ясно, что $u_\psi(\mathbf{x}', x_N) \geq 1/2$ при $|\mathbf{x}'| \geq 1/2$. При $|\mathbf{x}'| \leq 1/2$ имеем

$$u_\psi(\mathbf{x}', 1) \geq \frac{2}{\alpha_N} \int_1^{+\infty} \frac{\alpha_{N-1} r^{N-2} dr}{(r^2 + 1)^{N/2}} \geq \frac{1}{\alpha_N} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha_{N-1} r^{N-2} dr}{(r^2 + 1)^{N/2}} = \frac{1}{2}$$

(для оценки части $\int_0^1$ в последнем интеграле (через предпоследний интеграл) используем замену переменных $t = 1/r$). Отсюда получаем, что $u_1(\mathbf{x}', x_N) \leq 2u_\psi(\mathbf{x}', x_N)$ и, следовательно, при $x_N \in (0, 1)$ находим, что

$$u_1(\mathbf{0}', x_N) \leq \frac{4\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \left(\int_0^\delta \frac{x_N u_1(\mathbf{0}', 4\varphi_1(r)) r^{N-2} dr}{(r^2 + x_N^2)^{N/2}} + \int_\delta^{+\infty} \frac{x_N r^{N-2} dr}{(r^2 + x_N^2)^{N/2}} \right),$$

где $\delta \in (0, 1/2]$ будет выбрана чуть позже.

Предположим, что

$$A_1 = \sup_{x_N \in (0, 1]} \frac{u_1(\mathbf{0}', x_N)}{x_N} < +\infty,$$

и пусть $t \in (0, 1]$ таково, что $u_1(\mathbf{0}', t)/t \geq A_1/2$. Тогда

$$A_1 t \leq 2u_1(\mathbf{0}', t) \leq \frac{8\alpha_{N-1}}{\alpha_N} \left(\int_0^\delta \frac{t A_1 4\varphi_1(r) r^{N-2} dr}{(r^2 + t^2)^{N/2}} + \int_\delta^{+\infty} \frac{tr^{N-2} dr}{(r^2 + t^2)^{N/2}} \right).$$

Таким образом, при $A_2 = 32\alpha_{N-1}/\alpha_N$ имеем

$$A_1 \leq A_2 \left(A_1 \int_0^\delta \frac{\varepsilon_1(r)}{r} dr + \frac{1}{4\delta} \right).$$

Теперь возьмем такое максимальное $\delta = \delta_1 \in (0, 1/2]$, что

$$A_2 \int_0^{\delta_1} \frac{\varepsilon_1(r)}{r} dr \leq \frac{1}{2}.$$

В результате получаем, что $A_1 \leq A_2/(2\delta_1)$.

Для завершения доказательства теоремы 4.4 остается свести общую ситуацию к случаю, когда известно, что $A_1 < +\infty$. Для этого при каждом фиксированном $\theta \in (0, 1/2)$ определим $\varepsilon_\theta(t) = \varepsilon_1(\theta)t/\theta_1$ при $t \in (0, \theta_1)$, $\varepsilon_\theta(t) = \varepsilon_1(\theta)$ при $t \in [\theta_1, \theta]$ и $\varepsilon_\theta(t) = \varepsilon_1(t)$ при $t \geq \theta$, где $\theta_1 \in (0, \theta)$ выбрано так, что

$$\int_0^\theta \varepsilon_\theta(t) dt = \int_0^\theta \varepsilon_1(t) dt,$$

откуда $\theta_1 = 2 \left(\theta - \int_0^\theta \frac{\varepsilon_1(t)}{\varepsilon_1(\theta)} dt \right)$. Напомним, что $\varepsilon_1(kt) \geq k\varepsilon_1(t)$ при $k \in (0, 1]$.

Основной смысл введения функции $\varepsilon_\theta(\cdot)$ состоит в следующем. Каждая $\varepsilon_\theta(\cdot)$ является функцией класса Дини с тем условием, что $\varphi_\theta(t) = \int_0^t \varepsilon_\theta(\tau) d\tau$ равна $\varphi_1(t)$ при $t \geq \theta$ и $\varphi_\theta(t) \leq \varphi_1(t)$ при $t \in [0, \theta]$. Более того,

$$\int_0^r \frac{\varepsilon_\theta(t)}{t} dt \leq \int_0^r \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt \quad \forall r > 0.$$

Действительно, интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\varepsilon_\theta(t)}{t} dt &= \int_0^r \frac{d\varphi_\theta(t)}{t} = \frac{\varphi_\theta(r)}{r} + \int_0^r \frac{\varphi_\theta(t)}{t^2} dt \leq \frac{\varphi_1(r)}{r} + \int_0^r \frac{\varphi_1(t)}{t^2} dt \\ &= \int_0^r \frac{\varepsilon_1(t)}{t} dt. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Пусть P_θ , u_θ , A_θ определены по $\varepsilon_\theta(\cdot)$ аналогично тому, как P_1 , u_1 , A_1 были определены для $\varepsilon_1(\cdot)$ в теореме 4.4 выше. Мы утверждаем, что A_θ конечны для каждого $\theta \in (0, 1/2)$. В самом деле, по данному θ можно найти $\delta_\theta \in (0, 1/4)$ такое, что $B((\mathbf{0}', -\delta_\theta), \delta_\theta) \subset \mathbb{R}^N \setminus P_\theta$ и поэтому сформулированное выше утверждение следует из принципа максимума в $P_\theta \subset P_1$ для u_θ и $v_\theta(\mathbf{x}) = \ell_\theta(\delta_\theta^{2-N} - |\mathbf{x} + (\mathbf{0}', \delta_\theta)|^{2-N})$, $N \geq 3$, где $v_\theta(\mathbf{x}) = \ell_\theta(-\log(\delta_\theta) + \log|\mathbf{x} + (\mathbf{0}', \delta_\theta)|)$, $N = 2$, с подходящим $\ell_\theta > 0$. Остается заметить, что $u_\theta \rightarrow u_1$ при $\theta \rightarrow 0$, и применить (4.2), чтобы убедиться, что A_θ зависит только от $\varepsilon_1(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть D является $(\mathcal{L}-D)$ -областью в $\mathbb{R}^N$ с функцией Дини $\varepsilon(\cdot)$, и пусть $d = \text{diam } D$. Обозначим через $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ функцию Грина области D . Тогда найдется константа $A = A(N, d, \varepsilon) > 0$ такая, что для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в D ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$) имеем

$$(1) |G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq A\rho(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-N}, \quad N \geq 3,$$

$$(2) \left| \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_n} \right| \leq A|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-N},$$

$$(3) \left| \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_n} \right| \leq A\rho(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-N},$$

$$(4) \left| \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{(\partial x_m \partial y_n)} \right| \leq A|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-N}$$

при всех $m, n \in \{1, \dots, N\}$.

Аналогичные оценки справедливы для функций Грина (внутри) ограниченных компонент множества D_o . Для неограниченной компоненты D_* множества D_o оценки (1)–(4) верны также и для функции Грина G_* области D_* (вместо G) при всех $\mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, 2d) \cap D_*$ (при условии $\mathbf{0} \in \bar{D}$) и всех $\mathbf{x} \in D_*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только случай $N \geq 3$. Доказательство оценок (2)–(4) при $N = 2$ может быть получено с помощью конформных отображений [14; теорема 3.5].

(1) Пусть, как и ранее, $r_0 \in (0, 1]$ – максимальное число, удовлетворяющее условию $\varepsilon(r_0) \leq 1/8$. Фиксируем $\mathbf{y} \in D$. Можно предположить, что $\mathbf{x} = (\mathbf{0}', x_N) \in D$, $x_N > 0$, таково, что $\rho(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$, и $\mathbf{0} \in \partial D$ – ближайшая к $\mathbf{x}$ точка на ∂D . Легко установить, что

$$0 \leq -G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{A_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-2}},$$

где $A_2 = A_2(N)$. Если $\rho(\mathbf{x}) \geq r_0$, то

$$|G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{A_2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}} \leq \frac{A_2d}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}} \leq \frac{A_3\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}},$$

где $A_3 = A_2d/r_0$. Кроме того, если $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 8\rho(\mathbf{x})$, то

$$|G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{A_2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}} \leq \frac{8A_2\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}}.$$

Остается рассмотреть случай $\{\rho(\mathbf{x}) < r_0, \rho(\mathbf{x}) < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/8\}$. Положим $r = \min\{r_0, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/8\}$, тогда $0 \leq x_N = \rho(\mathbf{x}) < r \leq r_0$. Пусть, как и ранее, $Q_r = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{z}'| \leq r, |z_N| \leq r\}$. Мы утверждаем, что $\text{dist}(\mathbf{y}, \partial Q_r) \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/2$, что

легко проверяется рассмотрением случаев $r < r_0$ и $r = r_0$. Следовательно,

$$|G(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \leq \frac{2^N A_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-2}} = M_G \quad \forall \mathbf{z} \in \partial Q_r \cap D.$$

Определим $\varepsilon_1(t) = 4\varepsilon(rt)$. Тогда $\varepsilon_1(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4 и ввиду условия $\varepsilon_1(t) \leq 4\varepsilon(t)$ мы имеем

$$\int_0^t \frac{\varepsilon_1(\tau)}{\tau} d\tau \leq 4 \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} d\tau, \quad t > 0. \quad (4.3)$$

Более того, если как и ранее $\varphi_\varepsilon(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$, то

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \varepsilon_1(\tau) d\tau = 4 \int_0^t \varepsilon(r\tau) d\tau = \frac{4}{r} \varphi_\varepsilon(rt),$$

так что множество P_1 (см. доказательство теоремы 4.4) является подобным множеству

$$P_r = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N \mid |\mathbf{z}'| < r, -4\varphi_\varepsilon(|\mathbf{z}'|) < z_N < r\} \supset (Q_r^\circ \cap D)$$

с коэффициентом $1/r$. По принципу максимума в $Q_r^\circ \cap D$ для функций $-G(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ и $M_G u_1(\mathbf{z}/r)$ с помощью теоремы 4.4 и оценки (4.3) получаем

$$|G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq M_G u_1\left(\frac{x_N}{r}\right) \leq A_4 \frac{x_N}{r} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-2}}$$

при $A_4 = A_4(N, \varepsilon(\cdot))$. Наконец, если $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/8$, т.е. $r \leq r_0$, то

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{8A_4\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}}.$$

Если $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/8 > r_0$, т.е. $r = r_0$, то

$$|G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{A_4\rho(\mathbf{x})}{r_0|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-2}} \leq \frac{A_4\rho(\mathbf{x})d}{r_0|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}} \leq \frac{A\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}}$$

при $A = A_4 d/r_0$. Итак, окончательно, $A = A(N, \varepsilon, d)$.

(2) Пусть $\rho(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Рассмотрим шар $B_{\mathbf{x}} = B(\mathbf{x}, \rho)$ при $\rho = \rho(\mathbf{x})/2$ и представим $G(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ в $B_{\mathbf{x}}$ через интеграл Пуассона:

$$G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\alpha_N} \int_{\partial B_{\mathbf{x}}} \frac{\rho^2 - |\mathbf{z} - \mathbf{x}|^2}{\rho|\mathbf{z} - \boldsymbol{\zeta}|^N} G(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{y}) d\sigma_{\boldsymbol{\zeta}}.$$

После взятия производной $\frac{\partial}{\partial z_n} \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}$ под знаком интеграла остается воспользоваться результатом п. (1) для получения подходящей оценки функции $G(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{y})$ при $\boldsymbol{\zeta} \in \partial B_{\mathbf{x}}$.

Если $\rho(\mathbf{x}) > |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, то надо взять шар $B = B(\mathbf{x}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/2)$ и провести аналогичные выкладки в B , используя тривиальную оценку $G(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \leq 2^N A_2 |\mathbf{z} - \mathbf{y}|^{2-N}$, $\mathbf{z} \in \partial B$.

ЛЕММА 4.6. При фиксированном $\mathbf{y} \in D$ имеем $\frac{\partial}{\partial y_n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow 0$ равномерно по $\mathbf{x} \rightarrow \partial D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем достаточно малое $r > 0$ такое, что при $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r$ справедлива оценка $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq |\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})/2| \geq A_5 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-N}$, $A_5 = A_5(N)$. Если $\mathbf{z}$ – такой вектор, что $|\mathbf{z}| \ll r$, то, используя результаты п. (2), при $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = r$ получаем

$$\frac{|G(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|}{|\mathbf{z}|} \leq A |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-N} \leq A_6 r^{-1} |G(\mathbf{x}, \mathbf{y})|. \quad (4.4)$$

Поскольку $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = 0$ при $\mathbf{x} \in \partial D$, то неравенство (4.4) имеет место для всех $\mathbf{x} \in D \setminus \overline{B(\mathbf{y}, r)} = D_r$ (заметим, что функция $|G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = -G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ гармонична в D_r). Фиксируя $\mathbf{x} \in D_r$ и полагая $|\mathbf{z}| \rightarrow 0$, получаем

$$|\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq A_6 r^{-1} |G(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq A_7 r^{-1} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}}, \quad \mathbf{x} \in D_r.$$

Лемма доказана.

Наконец, применяя утверждение п. (2) для функции $\frac{\partial G}{\partial y_n}$ вместо $\frac{\partial G}{\partial x_n}$ и используя лемму 4.6, получаем п. (3) тем же способом, как и при доказательстве п. (1). Аналогично, п. (4) получается из п. (3), как п. (2) из п. (1).

Доказательство заключительной части теоремы 4.5 (касающейся G_*) при $|\mathbf{x}| < 4d$ и $|\mathbf{y}| < 2d$ проходит по той же схеме, что и ранее. В случае $|\mathbf{x}| \geq 4d$ и $|\mathbf{y}| < 2d$ нужно дополнительно воспользоваться принципом максимума.

ТЕОРЕМА 4.7. В условиях теоремы 4.5 имеем $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^1(\overline{D} \setminus \{\mathbf{y}\})$, где $\mathbf{y}$ – фиксирован.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, $\mathbf{y} \in D$ фиксирован. По определению $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - v_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, где $v(\mathbf{x}) = v_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) \in H(D) \cap C(\overline{D})$ и $v|_S = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})|_S \in C^2(S)$. Надо установить, что $v \in C^1(\overline{D})$. По утверждению (2) теоремы 4.5 и принципу максимума функция $|\nabla v|$ ограничена в D . Достаточно доказать существование такой функции ε_* класса Дини (независимой от $\mathbf{x}$), что для всех $n, m \in \{1, \dots, N\}$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} v(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{\varepsilon_*(\rho(\mathbf{x}))}{\rho(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in D. \quad (4.5)$$

Действительно, из (4.5) тогда следует, что функция ∇v равномерно непрерывна в D и поэтому $v \in C^1(\overline{D})$.

Фиксируем также $\mathbf{x} \in D$. Для доказательства (4.5) можно предположить, что $\mathbf{x} = (\mathbf{0}', x_N)$, $x_N \in (0, r_0/2)$, $\rho(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$, $\mathbf{0} \in S$ является ближайшей точкой к $\mathbf{x}$ на S . Мы используем здесь обозначения из доказательства теоремы 3.1 ($r_0, Q_0, \varphi_\varepsilon, D', S'$) и обозначаем через $G_+(\zeta, \eta)$ функцию Грина для области $\mathbb{R}_+^N$.

Пусть $v|_S = \psi|_S$, где $\psi \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Возьмем $u(\mathbf{z}) = v(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{0}) - (\nabla \psi(\mathbf{0}), \mathbf{z})$. Тогда $u \in C(\overline{D}) \cap H(D)$, $\|\nabla u\|_D < +\infty$, $u|_S = \psi_0|_S$, где $\psi_0(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{0}) - (\nabla \psi(\mathbf{0}), \mathbf{z})$. Следовательно,

$$|\psi_0(\mathbf{z})| \leq \omega_1(|\mathbf{z}|)|\mathbf{z}|, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^N, \quad (4.6)$$

для некоторой функции класса Дини $\omega_1(t)$, не зависящей от $\mathbf{x}$. Остается установить (4.5) для u (вместо v). Используя формулу Гаусса–Остроградского или вторую формулу Грина в области $D' \subset \mathbb{R}_+^N$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D'} \left(u(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\eta}}^i} - \frac{\partial u(\boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\eta}}^i} G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) \right) d\sigma_{\boldsymbol{\eta}} \\ &= - \int_{D'} (u(\boldsymbol{\zeta}) \Delta_{\boldsymbol{\zeta}} G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta}) - \Delta u(\boldsymbol{\zeta}) G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})) d\boldsymbol{\zeta} = -u(\mathbf{z}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\eta}}^i$ – внутренняя единичная нормаль к $\partial D'$ в точке $\boldsymbol{\eta}$.

Поскольку $\|\nabla u\|_D = M_u < +\infty$, то мы имеем

$$\begin{aligned} |u(\boldsymbol{\eta})| &\leq |u(\boldsymbol{\eta}) - u(\boldsymbol{\eta}', \varphi(\boldsymbol{\eta}'))| + |u(\boldsymbol{\eta}', \varphi(\boldsymbol{\eta}'))| \\ &\leq M_u 8\varphi_\varepsilon(|\boldsymbol{\eta}'|) + \omega_1(2|\boldsymbol{\eta}'|)|\boldsymbol{\eta}'| \leq \omega_2(|\boldsymbol{\eta}'|)|\boldsymbol{\eta}'| \end{aligned} \quad (4.7)$$

при $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}', 4\varphi_\varepsilon(|\boldsymbol{\eta}'|))$, $|\boldsymbol{\eta}'| < r_0/3$ (т.е. $\boldsymbol{\eta} \in S' \subset \partial D'$), где $\omega_2(\cdot)$ – функция класса Дини и $(\boldsymbol{\eta}', \varphi(\boldsymbol{\eta}')) \in S$. Теперь можно записать, что

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z_n \partial z_m} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \\ &= \int_{\partial D'} \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\eta}}^i} \frac{\partial^2 G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})}{\partial z_n \partial z_m} \right]_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} - u(\boldsymbol{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial z_n \partial z_m} (\nabla_{\boldsymbol{\eta}} G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}), \mathbf{n}_{\boldsymbol{\eta}}^i) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \Big] d\sigma_{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \int_{\partial D'} (H_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) - H_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})) d\sigma_{\boldsymbol{\eta}}. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл, используя следующие элементарные неравенства для функции Грина G_+ :

$$\left| \frac{\partial^2 G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})}{\partial z_n \partial z_m} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \leq \frac{A \eta_N}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^{N+1}}, \quad \left| \frac{\partial^3 G_+(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})}{\partial x_n \partial x_m \partial \zeta_l} \right|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta}} \leq \frac{A}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\eta}|^{N+1}},$$

где $A = A(N)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{S'} |H_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})| d\sigma_{\boldsymbol{\eta}} \leq M_u \int_0^{r_0} \frac{A \varepsilon(r) r r^{N-2} dr}{(r^2 + x_N^2)^{(N+1)/2}} \\ & \leq A M_u \varepsilon(x_N) \int_0^{x_N} \frac{r^{N-1} dr}{x_N^{N+1}} + A M_u \int_{x_N}^{r_0} \frac{\varepsilon(r) dr}{r^2} = A M_u \left(\frac{\varepsilon(x_N)}{N x_N} + \frac{\lambda_2(x_N)}{x_N} \right), \end{aligned}$$

где $\lambda_2(t) = t \int_t^{r_0} \frac{\varepsilon(r)}{r^2} dr$ является функцией класса Дини по лемме 3.11. Кроме того, ввиду (4.7) интеграл

$$\int_{S'} |H_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})| d\sigma_{\boldsymbol{\eta}} \leq \int_0^{r_0} \frac{A}{(r^2 + x_N^2)^{(N+1)/2}} \omega_2(r) r r^{N-2} dr$$

оценивается аналогичным образом. Наконец, соответствующие интегралы по поверхности $\partial D' \setminus S'$ оцениваются тривиально.

Теорема W2 теперь полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть в условиях теоремы 4.5 $\psi_0 \in C^1(S)$ является C^1 -Дини функцией на S . Последнее означает, что найдется функция $\psi \in C^1(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющая условиям $\psi|_S = \psi_0$ и

$$|\nabla\psi(\mathbf{x}) - \nabla\psi(\mathbf{y})| \leq \omega(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad \forall \mathbf{x}, \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N, \quad (4.8)$$

где $\omega(\cdot)$ – функция класса Дини. Пусть u_i есть решение задачи Дирихле в D с граничными данными ψ_0 . Тогда $u_i \in C^1(\overline{D})$ и

$$\|u_i\|_{1,\overline{D}} \leq A \left(\|\nabla\psi\|_{\partial D} + \int_0^{r_0} \frac{\omega(r)}{r} dr + \omega(d) \right). \quad (4.9)$$

Например, если $\psi_0 \in C^2(S)$, то

$$\|u_i\|_{1,\overline{D}} \leq A \|\psi_0\|_{2,S}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим сначала $\|\nabla u_i\|_{\overline{D}}$. Для этого достаточно оценить $|u_i(\mathbf{0}', x_N) - u_i(\mathbf{0})|/x_N$, где $\mathbf{0} \in S$, $x_N \in (0, r_0/2)$ и точка $\mathbf{0}$ является ближайшей к $\mathbf{x} = (\mathbf{0}', x_N) \in D$ на S . Действительно, зафиксируем достаточно малый вектор $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Тогда функция $(u_i(\mathbf{x} + \mathbf{z}) - u_i(\mathbf{x}))/|\mathbf{z}|$ является гармонической в $D \cap \{\mathbf{x} - \mathbf{z} \mid \mathbf{x} \in D\}$ и поэтому достигает своих экстремумов при $\mathbf{x} \in S$ или $\mathbf{x} + \mathbf{z} \in S$. Поэтому достаточно взять $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{0} \in S$ и предположить, что точка $\mathbf{0}$ является ближайшей к $\mathbf{x} = (\mathbf{0}', x_N)$ на S (здесь также используется тот факт, что $u_i \in C^1(S)$). По теореме 4.7 $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^1(\overline{D} \setminus \{\mathbf{y}\})$ и можно воспользоваться формулой (3.6):

$$u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{0}) - (\nabla\psi(\mathbf{0}), \mathbf{x}) = - \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}^i} (\psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{0}) - (\nabla\psi(\mathbf{0}), \mathbf{y})) d\sigma_{\mathbf{y}}.$$

Ввиду (4.8) имеем $|\psi(\mathbf{y}) - \psi(\mathbf{0}) - (\nabla\psi(\mathbf{0}), \mathbf{y})| \leq \omega(|\mathbf{y}|)|\mathbf{y}|$, откуда по теореме 4.5, п. (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{|u_i(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{0})|}{x_N} &\leq |\nabla\psi(\mathbf{0})| + \frac{1}{x_N} \int_S \frac{A_1 x_N \omega(|\mathbf{y}|)|\mathbf{y}| d\sigma_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^N} \\ &\leq |\nabla\psi(\mathbf{0})| + A_2 \int_0^{r_0} \frac{\omega(r)}{r} dr + A_2 \omega(d) \int_{S_{r_0}^*} \frac{d\sigma_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^{N-1}}, \end{aligned}$$

где $S_{r_0}^* = \{\mathbf{y} \in S \mid |\mathbf{y}| \geq r_0\}$.

Мы утверждаем, что

$$\int_{S_{r_0}^*} \frac{d\sigma_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \leq A_N \frac{d}{r_0}. \quad (4.11)$$

Чтобы это доказать, рассмотрим систему равных попарно непересекающихся кубов $\{K_j\}_{j \in \mathbb{Z}^N}$ со сторонами длины $l = r_0/\sqrt{N}$, покрывающих $\mathbb{R}^N$, а именно,

$$K_j = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N \mid j_n l \leq z_n < (j_n + 1)l, n \in \{1, \dots, N\}\}, \quad j = (j_1, \dots, j_N) \in \mathbb{Z}^N.$$

Если $K_j \cap S \ni \mathbf{a} \neq \emptyset$, то $K_j \subset Q_{\mathbf{a}}$ и тогда $\sigma(S \cap K_j) \leq \sigma(S \cap Q_{\mathbf{a}}) \leq A_N r_0^{N-1}$. Пусть $J_m, m = 1, 2, \dots$, есть число кубов Q_j , пересекающих $B(\mathbf{0}, (m+1)r_0) \setminus B(\mathbf{0}, mr_0)$. Ясно, что $J_m \leq A_N m^{N-1}$. Следовательно,

$$\int_{S_{r_0}^*} \frac{d\sigma_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \leq \sum_{m=1}^{d/r_0} \frac{A_N r_0^{N-1} m^{N-1}}{(r_0 m)^{N-1}} \leq A_N \frac{d}{r_0}. \quad (4.12)$$

Тем самым доказано, что функция $\|\nabla u_i\|_D$ ограничена, и как только мы докажем, что $u_i \in C^1(\overline{D})$, мы также немедленно установим (4.9) по теореме Уитни. Для проверки включения $u_i \in C^1(\overline{D})$ достаточно повторить вторую часть доказательства теоремы 4.7, где было использовано свойство (4.6), которое здесь следует заменить свойством (4.8).

Наконец, если $\psi_0 \in C^2(S)$, то можно найти $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ такую, что $\|\psi\|_2 \leq 2\|\psi_0\|_{2,S} = M$. Поэтому для соответствующей функции $\omega(\cdot)$ получим, что $\omega(t) \leq 2Mt$ и $\omega(d) \leq 2M$. Теперь (4.9) сразу дает (4.10).

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть D является $(I\text{-}D)$ -областью в $\mathbb{R}^N$ с функцией Дини $\varepsilon(\cdot)$ и $d = \text{diam } D$. Тогда найдется $A = A(N, d, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\mathbf{y} \in D$ имеем

$$-\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}^i} \geq A(\rho(\mathbf{y}))^{(N-1)p} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial D, \quad p = \log_{5/\sqrt{17}} 2. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{0} \in S = \partial D$, $\{0, \dots, 0, 1\} = \mathbf{n}_{\mathbf{0}}^i$ (для D), а параметры r_0, D', S' определены в доказательстве теоремы 3.1. Пусть G_+ и G' суть функции Грина областей $\mathbb{R}_+^N$ и D' соответственно. Возьмем произвольные $\mathbf{y} = (\mathbf{0}', y_N)$ и $\mathbf{x} = (\mathbf{0}', x_N)$ с условиями $0 < x_N \leq y_N/2 < r_0/4$, так что $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \geq y_N/2$. По второй формуле Грина находим

$$G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\partial D'} G_+(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{z}}^i} G'(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{z}}. \quad (4.14)$$

Нетрудно проверить, что найдутся $A_1 = A_1(N) > 0$ и $A_2 = A_2(N) > 0$ такие, что

$$-G_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq A_1 x_N |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1-N}, \quad (4.15)$$

$$-G_+(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \leq A_2 x_N z_N |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{-N} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^N. \quad (4.16)$$

Фиксируем $\delta \in (0, r_0/3]$ и пусть $S'_\delta = \{\mathbf{z} \in \partial D' \mid |\mathbf{z}'| \leq \delta\}$, $S_\delta^* = \partial D' \setminus S'_\delta$. Согласно (4.16) и утверждению (2) теоремы 4.5 находим

$$\begin{aligned} \left| \int_{S'_\delta} G_+(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{z}}^i} G'(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{z}} \right| &\leq \int_{S'_\delta} \frac{A_2 x_N z_N}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^N} \frac{A_3}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^{N-1}} d\sigma_{\mathbf{z}} \\ &\leq A_4 \frac{x_N}{|\mathbf{y}|^{N-1}} \int_{\{|\mathbf{z}'| < \delta\}} \frac{\varphi_\varepsilon(|\mathbf{z}'|) d\mathbf{z}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^N} \leq A_5 \frac{x_N}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{N-1}} \int_0^\delta \frac{\varepsilon(r)}{r} dr. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Также, пользуясь п. (1) и п. (3) теоремы 4.5, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_\delta^*} G_+(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_z^i} G'(\mathbf{z}, \mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{z}} \right| &\leq \int_{S_\delta^*} \frac{Ax_N}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^{N-1}} \frac{y_N}{|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^N} d\sigma_{\mathbf{z}} \\ &\leq A_6 x_N y_N \int_{S_\delta^*} \frac{d\sigma_{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^{2N-1}} \leq A_7 \frac{x_N y_N}{\delta^N}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где последнее неравенство проверяется так же, как и в (4.12), а именно,

$$\int_{S_\delta^*} \frac{d\sigma_{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^{2N-1}} \leq \sum_{m=1}^{r_0/\delta} \frac{A_N \delta^{N-1} m^{N-1}}{(\delta m)^{2N-1}} \leq \frac{2A_N}{\delta^N}.$$

Фиксируем максимальное $\delta_0 \in (0, r_0/3]$ с условием

$$A_5 \int_0^{\delta_0} \frac{\varepsilon(r)}{r} dr \leq \frac{1}{3} A_1, \quad (4.19)$$

(напоминаем (4.15)) и пусть $\mathbf{y}$ таково, что

$$\frac{A_7 y_N^N}{\delta_0^N} \leq \frac{1}{3} A_1,$$

т.е. $y_N \leq \sqrt[N]{A_1/(3A_7)} \delta_0 = \delta_1$ (без ограничения общности полагаем, что $A_1 \leq A_7$; δ_1 зависит только от N, ε, d). Отсюда получаем

$$\frac{A_7 y_N}{\delta_0^N} \leq \frac{1}{3} A_1 |y_N|^{1-N} \leq \frac{A_1}{3|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^{N-1}}.$$

Таким образом, ввиду (4.14)–(4.19) при $y_N \leq \delta_1$ и всех $x_N \leq y_N/2$ имеем по принципу максимума

$$-G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq -G'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \frac{A_1 x_N}{3|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-1}}, \quad (4.20)$$

откуда

$$\left| \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_N} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \geq \frac{A_1}{3|\mathbf{y}|^{N-1}}.$$

ЛЕММА 4.10. Пусть выполнены условия теоремы 4.9 при $N \geq 3$, и пусть $\mathbf{a} \in D$. Тогда при любом $\mathbf{b} \in B(\mathbf{a}, \rho(\mathbf{a})/4)$ имеет место оценка

$$|G(\mathbf{z}, \mathbf{a})| \geq 2^{-N+1} |G(\mathbf{z}, \mathbf{b})|$$

для любых $\mathbf{z} \in D$, удовлетворяющих условию $|\mathbf{z} - \mathbf{a}| \geq \rho(\mathbf{a})/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующие тривиальные неравенства:

$$|G(\mathbf{z}, \mathbf{b})| \leq |\Phi(\mathbf{z} - \mathbf{b})|, \quad \left(1 - \frac{1}{2^{N-2}}\right) |\Phi(\mathbf{z} - \mathbf{a})| \leq |G(\mathbf{z}, \mathbf{a})|, \quad |\mathbf{z} - \mathbf{a}| \leq \frac{\rho(\mathbf{a})}{2},$$

а также принцип максимума для $-G(\mathbf{z}, \mathbf{a})$ и $-\ell G(\mathbf{z}, \mathbf{b})$ в $D \setminus B(\mathbf{a}, \rho(\mathbf{a})/2)$ с подходящей константой $\ell = \ell(N) > 0$.

Заметим, что в последней лемме можно выбрать $\mathbf{b}$, удовлетворяющее условию $\rho(\mathbf{b}) \geq (5/\sqrt{17})\rho(\mathbf{a})$ (см. (2.5)).

Завершим доказательство теоремы 4.9. Используя (4.20) и лемму 4.10 (не более $A_1(N, \varepsilon)d/\delta_1$ раз), получаем, что для всякого $\zeta \in D$ с условием $\rho(\zeta) \geq \delta_1$ имеет место оценка

$$-G((\mathbf{0}', x_N), \zeta) \geq A_2 x_N \quad (4.21)$$

при всех $x_N \in (0, \rho_1(\zeta)/4)$, что дает (4.13) для этих ζ .

При $\rho(\zeta) < \delta_1$ используем (4.21) и лемму 4.10 не более M раз, где M определяется из условия $(5/\sqrt{17})^M = \delta_1/\rho(\zeta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ W1. Доказательство п. (1) для u_i и u_o в ограниченных компонентах множества D_0 немедленно вытекает из теоремы 4.8. Чтобы установить утверждение п. (2) для u_i , применим (3.6), получив

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_n} = - \int_{S_r^*} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_n \partial \mathbf{n}_y^i} \psi(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}},$$

где $\mathbf{x} \in D \cap \bar{B}(\mathbf{a}, r/2)$, $S_r^* = \{\mathbf{y} \in S \mid |\mathbf{y} - \mathbf{a}| \geq r\}$. Ввиду п. (4) теоремы 4.5, находим

$$|\nabla u_i(\mathbf{x})| \leq A \|\psi\|_S \int_{S_r^*} \frac{d\sigma_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y} - \mathbf{a}|^N} \leq A_{10} \|\psi\|_S \frac{1}{r} \log \frac{d}{r}.$$

Последнее неравенство доказывается так же, как и в (4.12), а именно,

$$\int_{S_r^*} \frac{d\sigma_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y} - \mathbf{a}|^N} \leq \sum_{m=1}^{d/r} \frac{A_N r^{N-1} m^{N-1}}{(rm)^N} \leq \frac{A_N}{r} \sum_{m=1}^{d/r} \frac{1}{m}.$$

При завершении доказательства пп. (1), (2) для u_o в D_* и п. (3) для ω в D_* достаточно применить так называемое преобразование Кельвина (см. (4.22) ниже; для доказательства п. (3) следует дополнительно использовать теорему 4.9).

Предположим, что $\mathbf{0} \in D$ и $\rho(\mathbf{0}) \geq r_0/3$. Инверсия $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|^2$ относительно единичной сферы отображает некоторую (Л-Д)-область $\tilde{D}$ с функцией Дини $A\varepsilon(\cdot)$, $A = A(N, d, \varepsilon)$, на область $D_* \cup \{\infty\}$. Пусть $f_* \in C(D_*)$. Преобразование Кельвина относительно единичной сферы функции f_* определяется так:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{2-N} f_* \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \right), \quad \mathbf{x} \in \tilde{D}. \quad (4.22)$$

Для $f_* \in C^2(D_*)$ дополнительно имеем

$$\Delta \tilde{f}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-2-N} [\Delta f_*] \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \right), \quad \mathbf{x} \in \tilde{D}$$

(см. [11; гл. 13]). Таким образом, преобразование Кельвина сохраняет свойства гладкости, гармоничности и субгармоничности функций.

Список литературы

- [1] P. M. Gauthier, "Subharmonic extensions and approximations", *Canad. Math. Bull.*, **37**:1 (1994), 46–53.
- [2] Дж. Вердера, М. С. Мельников, П. В. Парамонов, " C^1 -аппроксимация и продолжение субгармонических функций", *Матем. сб.*, **192**:4 (2001), 37–58; англ. пер.: J. Verdera, M. S. Mel'nikov, P. V. Paramonov, " C^1 -approximation and extension of subharmonic functions", *Sb. Math.*, **192**:4 (2001), 515–535.
- [3] М. С. Мельников, П. В. Парамонов, " C^1 -продолжение субгармонических функций с замкнутых жордановых областей в $\mathbb{R}^2$ ", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:6 (2004), 105–118; англ. пер.: M. S. Mel'nikov, P. V. Paramonov, " C^1 -extension of subharmonic functions from closed Jordan domains in $\mathbb{R}^2$ ", *Izv. Math.*, **68**:6 (2004), 1165–1178.
- [4] П. В. Парамонов, "О C^m -продолжении субгармонических функций", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 139–152; англ. пер.: P. V. Paramonov, " C^m -extension of subharmonic functions", *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1211–1223.
- [5] St. J. Gardiner, A. Gustafsson, "Smooth potentials with prescribed boundary behaviour", *Publ. Mat.*, **48**:1 (2004), 241–249.
- [6] H. Whitney, "Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**:1 (1934), 63–89.
- [7] К.-О. Видман, "Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations", *Math. Scand.*, **21** (1967), 17–37.
- [8] П. В. Парамонов, "О гармонических аппроксимациях в C^1 -норме", *Матем. сб.*, **181**:10 (1990), 1341–1365; англ. пер.: P. V. Paramonov, "On harmonic approximation in the C^1 -norm", *Math. USSR-Sb.*, **71**:1 (1992), 183–207.
- [9] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1971; англ. пер.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Dekker, New York, 1971.
- [10] А. Г. Витушкин, "Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений", *УМН*, **22**:6 (1967), 141–199; англ. пер.: A. G. Vitushkin, "The analytic capacity of sets in problems of approximation theory", *Russian Math. Surveys*, **22**:6 (1967), 139–200.
- [11] Дж. Уэрмер, *Теория потенциала*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. Wermer, *Potential theory*, Lecture Notes in Math., **408**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974.
- [12] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [13] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [14] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

П. В. Парамонов (P. V. Paramonov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: petr.paramonov@list.ru

Поступила в редакцию

25.05.2008 и 25.08.2008