Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Михайлов, А. М. Райгородский, О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 12, 63–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:55:35

УДК 519.112.4+519.174

К. А. Михайлов, А. М. Райгородский

О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0, 1\}^n$

В работе поставлена новая задача рамсеевского типа для полных дистанционных графов в $\mathbb{R}^n$ с вершинами из булева куба. Эта задача тесно связана с классической проблемой Нельсона–Эрдеша–Хадвигера о хроматическом числе пространства. Получен ряд весьма точных оценок для некоторых числовых характеристик, возникающих в рамках задачи.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: числа Рамсея, дистанционные графы, хроматическое число.

§ 1. Введение

1.1. Числа Рамсея. Одной из классических задач комбинаторики является задача отыскания чисел Рамсея. Для ее аккуратной постановки дадим несколько определений и введем несколько обозначений из теории графов (см. [1]).

Пусть $G = (V, E)$ – некоторый граф. Если $H = (W, F)$ является подграфом в G , то будем писать $H \subseteq G$. Если, кроме того, H – остовный подграф в G (т.е. $W = V$), то, желая подчеркнуть этот факт, напишем $H \preceq G$. Скажем, что H – *индуцированный* или *порожденный* подграф в G , если $F = E|_W$, т.е. пара вершин x, y из W образует ребро $\{x, y\}$, принадлежащее F , тогда и только тогда, когда $\{x, y\} \in E$.

Обозначим через $K_N = (V, E)$ полный граф на N вершинах (у него $|V| = N$, $|E| = C_N^2$). Если $G = (V, F) \preceq K_N$ (т.е. G – произвольный граф на N вершинах), то его *дополнением* (до полного графа) назовем граф $[G] = (V, F') \preceq K_N$, у которого $\{x, y\} \in F'$ тогда и только тогда, когда $\{x, y\} \notin F$.

Зафиксируем произвольные натуральные числа s, t . Назовем *числом Рамсея* (с параметрами s, t) величину $R(s, t)$, равную наименьшему $N \in \mathbb{N}$ такому, что при любой раскраске ребер K_N в красный и синий цвета либо найдется $H \subseteq K_N$, который изоморфен K_s и у которого все ребра красные, либо найдется $H \subseteq K_N$, который изоморфен K_t и у которого все ребра синие. Величину $R(s, s)$ будем называть *диагональным числом Рамсея*.

Можно привести эквивалентное определение числа Рамсея. А именно, $R(s, t)$ – это минимальное $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $G \preceq K_N$ либо G содержит изоморфную копию K_s , либо $[G]$ содержит изоморфную копию K_t .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383), гранта Президента РФ МД-5414.2008.1, Программы поддержки Ведущих научных школ РФ (грант № НШ-691.2008.1), фонда “Династия”.

Поскольку всякий индуцированный подграф графа K_N представляет собой изоморфную копию некоторого K_s , можно сказать еще и так: $R(s, t)$ – это минимальное $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $G \preceq K_N$ либо G содержит некоторый порожденный подграф графа K_N на s вершинах, либо $[G]$ содержит некоторый порожденный подграф графа K_N на t вершинах.

Относительно чисел Рамсея имеется обширная литература (см., например, [2]–[5]). Мы здесь отметим лишь, что эти числа всегда корректно определены и что, в частности,

$$(\sqrt{2} + o(1))^s \leq R(s, s) \leq (4 + o(1))^s.$$

Точнее,

$$\frac{\sqrt{2}}{e}(1 + o(1))s2^{s/2} \leq R(s, s) \leq e^{-\gamma(\ln^2 s)/(\ln \ln s)} \cdot 4^s, \quad \gamma > 0.$$

1.2. Хроматические числа и дистанционные графы. Еще одна классическая задача комбинаторики состоит в отыскании хроматического числа пространства, т.е. величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, равной минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния, равного единице.

Эквивалентная постановка задачи дается опять в терминах теории графов (см. [1]). Напомним, что *хроматическим числом* графа называется минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы любого его ребра были разноцветными. Определим граф $\mathfrak{G}^n = (\mathfrak{V}^n, \mathfrak{E}^n)$, полагая

$$\mathfrak{V}^n = \mathbb{R}^n, \quad \mathfrak{E}^n = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\},$$

где $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ – евклидово расстояние между векторами. Нетрудно видеть, что $\chi(\mathfrak{G}^n) = \chi(\mathbb{R}^n)$. Более того,

$$\chi(\mathfrak{G}^n) = \max_G \chi(G),$$

где максимум берется по всем конечным подграфам графа $\mathfrak{G}^n$. Этот неочевидный факт является следствием из одной теоремы Эрдеша–де Брёйна (см. [6]).

Гораздо более очевидно, что если вместо единицы взять произвольное $a > 0$ в определении множества ребер графа $\mathfrak{G}^n$, то хроматическое число от этого не изменится. Поэтому зачастую для удобства рассматривают не только (конечные) графы $G \subset \mathfrak{G}^n$, но и их гомотетичные копии с положительными коэффициентами гомотетии.

Граф $\mathfrak{G}^n$, а также любые его подграфы и их гомотетичные копии с положительными коэффициентами гомотетии принято называть *дистанционными графами* или *графами расстояний*. Если G – порожденный подграф в $\mathfrak{G}^n$ (или его гомотетичная копия), то будем говорить, что G – *полный дистанционный граф* (на его множестве вершин проведены все ребра фиксированной длины, какие только было возможно провести).

Хроматическому числу пространства и графам расстояний посвящено множество работ (см. [5], [7]–[9]).

Следующая серия полных дистанционных графов имеет особое значение для поиска хроматического числа пространства. Пусть n – произвольное натуральное число вида $n = 4k$. Положим $N = C_n^{n/2}$ и рассмотрим $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$, где

$$\mathcal{V}_N = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 2k = \frac{n}{2} \right\},$$

$$\mathcal{E}_N = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{V}_N \times \mathcal{V}_N : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\frac{n}{2}} \right\}.$$

Таким образом, полный дистанционный граф $\mathcal{G}_N \subset \mathfrak{B}^n$ имеет вершинами точки из $\{0, 1\}^n$ и этих вершин у него ровно N .

Заметим, что если $k = p^\alpha$, где p – простое число, а $\alpha \in \mathbb{N}$, то хроматическое число соответствующего $\mathcal{G}_N$ удастся оценить гораздо лучше, чем в случае произвольного n (см. [5], [7], [8]). Иными словами, разумно отдельно изучать последовательность всех $\mathcal{G}_N$ и отдельно – последовательность $\{\mathcal{G}_N^{\text{prime}}\} \subset \{\mathcal{G}_N\}_{k=1}^\infty$ тех $\mathcal{G}_N$, у которых $k = p^\alpha$ с некоторыми p и α .

Скажем в заключение, что на данный момент самые сильные оценки хроматического числа имеют вид

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$$

(см. [5], [7], [8]).

§ 2. Постановка задачи

Сейчас мы определим аналоги чисел Рамсея $R(s, t)$ для полных дистанционных графов $\mathcal{G}_N$ и $\mathcal{G}_N^{\text{prime}}$. Только прежде введем пару естественных вспомогательных понятий.

Пусть $G \preceq \mathcal{G}_N$. Тогда его *дополнением* (до полного дистанционного графа) назовем граф $[G]_{\text{dist}} \preceq \mathcal{G}_N$, у которого любые две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они не соединены ребром в G , но соединены ребром в $\mathcal{G}_N$. Например, для $G = (\mathcal{V}_N, \emptyset)$ имеем $[G]_{\text{dist}} = \mathcal{G}_N$.

Для данных $s, t \in \mathbb{N}$ положим $R_{\text{dist}}(s, t)$ равным минимальному $N \in \mathbb{N}$ такому, что корректно определен граф $\mathcal{G}_N$ и для любого $G \preceq \mathcal{G}_N$ либо G содержит некоторый порожденный подграф $\mathcal{G}_N$ на s вершинах, либо $[G]_{\text{dist}}$ содержит некоторый порожденный подграф $\mathcal{G}_N$ на t вершинах.

Иначе говоря, величина $R_{\text{dist}}(s, t)$ полностью аналогична величине $R(s, t)$, так как мы K_N и дополнение в нем заменяем на $\mathcal{G}_N$ и дополнение в нем.

Точно так же введем $R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, t)$ как минимум из всех $N \in \mathbb{N}$, при которых корректно определен граф $\mathcal{G}_N \in \{\mathcal{G}_N^{\text{prime}}\}$ и для любого $G \preceq \mathcal{G}_N$ либо G содержит некоторый порожденный подграф $\mathcal{G}_N$ на s вершинах, либо $[G]_{\text{dist}}$ содержит некоторый порожденный подграф $\mathcal{G}_N$ на t вершинах.

При явном сходстве классического и нового определений очевидны и существенные различия между ними. Главное из них состоит в том, что если раньше порожденный подграф полного графа K_N всегда имел ту же структуру, что и сам полный граф (был изоморфен некоторому K_s), то теперь порожденные подграфы “полных” графов $\mathcal{G}_N$ вовсе не обязаны быть изоморфными

какому-либо $\mathcal{G}_s$. В частности, такие подграфы могут оказаться даже “пустыми” (т.е. свободными от ребер), ведь, как мы увидим ниже, в графах $\mathcal{G}_N$ есть весьма большие независимые множества вершин – множества, элементы которых попарно не смежны. В случае K_N подобным свойством обладал исключительно K_1 .

В следующем параграфе мы сформулируем новые результаты относительно величин $R_{\text{dist}}(s, t)$ и $R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, t)$. Они будут существенно отличаться от классических.

§ 3. Формулировки результатов

Прежде всего заметим, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Величины $R_{\text{dist}}(s, t)$ и $R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, t)$ корректно определены при всех натуральных s и t .*

Следующая теорема дает явную верхнюю оценку для диагональных чисел Рамсея.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

$$c = \frac{4}{3^{3/4}}, \quad \xi = \frac{\ln 2}{\ln c}, \quad b = \frac{3^5 \pi}{4^2} = \frac{243}{16} \pi.$$

Тогда для любого $\beta > 0$ при всех достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$R_{\text{dist}}(s, s) \leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\ln c)^{1/2 - \xi} b^\xi s^\xi (\ln s)^{\xi - 1/2} (1 + \beta).$$

Иными словами, если классическое число Рамсея росло экспоненциально, то “дистанционное”, по сути, ограничено сверху полиномом.

С числами $R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s)$ дела обстоят несколько хуже.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такая функция φ , что $\varphi(s) = o(1)$ при $s \rightarrow \infty$ и*

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \leq s^{\xi + \varphi(s)}.$$

Разумеется, вид функции φ из теоремы 2 подлежит конкретизации, но мы дадим более аккуратную формулировку и прокомментируем ее лишь после того, как докажем теорему 2. В любом случае окажется, что выражение $s^{\varphi(s)}$ растет куда быстрее любой степени логарифма, а значит, оценка из теоремы 2 значительно слабее оценки из теоремы 1. Это связано с особенностями расположения простых чисел в натуральном ряде.

Теперь обсудим нижние оценки.

ТЕОРЕМА 3. *Положим*

$$c = \frac{4}{3^{3/4}}, \quad \xi = \frac{\ln 2}{\ln c}, \quad d = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{4}{e \cdot 3^{3/2}},$$

$$\theta_1 = \frac{1}{\xi}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2\xi} - \frac{3}{2}, \quad \theta_3 = \frac{d}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\theta_1/2} (\ln 2)^{\theta_2}}, \quad \theta_4 = \left(\frac{\ln 2}{2\theta_3 \xi^{\theta_2} (\xi - 1)} \right)^\xi.$$

Тогда для любого $\beta > 0$ существует бесконечно много натуральных чисел s таких, что

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \geq \theta_4 s^{\xi} (\ln s)^{(\xi-1)/2} (1 - \beta).$$

Теорема 3 представляет своего рода “омега-результат”. Интересно понять, что будет, если “бесконечно много натуральных s ” заменить, например, на “все достаточно большие s ”. К сожалению, это можно сделать лишь за счет довольно значимых потерь в качестве оценки – потерь, подобных тем, с которыми мы столкнулись при переходе от теоремы 1 к теореме 2. Это также связано с особенностями распределения простых чисел среди натуральных.

ТЕОРЕМА 4. Существует такая функция ψ , что $\psi(s) = o(1)$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \geq s^{\xi + \psi(s)}.$$

Ясно, что функция ψ принимает, скорее, отрицательные значения. Однако конкретизировать ее будет удобнее после доказательства теоремы 4.

Неожиданно слабой выходит следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Положим $\eta = (\ln 2)/\ln 1.99$. Существует такая функция μ , что $\mu(s) = o(1)$ при $s \rightarrow \infty$ и

$$R_{\text{dist}}(s, s) \geq s^{\eta + \mu(s)}.$$

Иными словами, зазор между оценками числа $R_{\text{dist}}(s, s)$ сверху и снизу имеет порядок степени s . В связи с этим нет даже особого смысла в аккуратном выписывании функции μ . Такая неприятность обусловлена тем, что некоторые свойства произвольного графа $\mathcal{G}_N$ гораздо хуже изучены, чем их аналоги для графа из последовательности $\{\mathcal{G}_N^{\text{prime}}\}$.

Теорему 1 мы докажем в § 4. Параграф 5 мы посвятим доказательству теоремы 2 и обсуждению ее уточнений. Теорема 3 будет доказана в § 6. Параграф 7 мы отведем под обоснование теоремы 4 и ее уточнение. В § 8 будет обоснована теорема 5. Наконец, в § 9 мы вкратце суммируем накопленную информацию.

§ 4. Доказательство теоремы 1

4.1. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $N = C_n^{n/2}$, $n = 4k$. Тогда

$$N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_1(n)), \quad \delta_1(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

$$n = \frac{\ln N}{\ln 2} (1 + \delta_2(N)), \quad \delta_2(N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обоснования (1) применим формулу Стирлинга:

$$\begin{aligned} N &= \frac{n!}{(\frac{n}{2}!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{(\sqrt{2\pi \frac{n}{2}} (\frac{n}{2})^{n/2} e^{-n/2})^2} (1 + \delta_1(n)) = \frac{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}{\pi n (\frac{n}{2})^n e^{-n}} (1 + \delta_1(n)) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_1(n)). \end{aligned}$$

Прологарифмировав полученное равенство, имеем

$$\ln \sqrt{\pi n} + \ln N = (\ln \sqrt{2} + n \ln 2)(1 + \delta_3(n)), \quad \delta_3(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда

$$n = \frac{\ln N}{\ln 2}(1 + \delta_2(N)).$$

Асимптотика (2), а вместе с ней и лемма 1, доказана.

Для формулировки очередной леммы нам понадобится еще одно определение из теории графов. Назовем *числом независимости* графа $G = (V, E)$ размер $\alpha(G)$ наибольшего (по мощности) независимого множества его вершин.

ЛЕММА 2. *Имеет место неравенство*

$$\alpha(\mathcal{G}_N) \geq \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{n/4+5}}(1 + \delta(n)), \quad \delta(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$F = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V}_N : \sum_{i=1}^{n/2} x_i = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - 1 \right\}.$$

Очевидно, F – независимое множество вершин графа $\mathcal{G}_N$.

Положим

$$q = \sum_{i=n/2+1}^n x_i = \frac{n}{2} - \left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - 1 \right).$$

Поскольку $[n/8] = n/8 - \varepsilon$, $\varepsilon \in [0, 1)$, то

$$q = \frac{n}{2} - \left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - 1 \right) = \frac{n}{2} - \frac{n}{8} + 1 + \varepsilon = \frac{3n}{8} + 1 + \varepsilon.$$

Имеем

$$|F| = C_{n/2}^{[n/8]-1} C_{n/2}^q = (C_{n/2}^{[n/8]-1})^2.$$

Теперь, применив формулу Стирлинга и обозначив $\varepsilon_1 = 1 + \varepsilon$, получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_N) &\geq |F| = \left(\frac{\frac{n}{2}!}{\left(\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - 1\right)! q!} \right)^2 = \left(\frac{\frac{n}{2}!}{\left(\frac{n}{8} - \varepsilon_1\right)! \left(\frac{3n}{8} + \varepsilon_1\right)!} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-n/2}}{\sqrt{\left(\frac{n}{4} - 2\varepsilon_1\right)\pi} \left(\frac{n}{8} - \varepsilon_1\right)^{n/8 - \varepsilon_1} e^{-n/8 + \varepsilon_1} \sqrt{\left(\frac{3n}{4} + 2\varepsilon_1\right)\pi} \left(\frac{3n}{8} + \varepsilon_1\right)^{3n/8 + \varepsilon_1} e^{-q}} \right)^2 \\ &\quad \times (1 + \delta_4(n)) = \frac{\pi n \left(\frac{n}{2}\right)^n}{\frac{3}{16} n^2 \pi^2 \left(\frac{n}{8} - \varepsilon_1\right)^{n/4 - 2\varepsilon_1} \left(\frac{3n}{8} + \varepsilon_1\right)^{3n/4 + 2\varepsilon_1}} (1 + \delta_5(n)) \\ &= \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{\frac{3}{16} \pi n \left(\frac{n}{8}\right)^{n/4 - 2\varepsilon_1} \left(1 - \frac{8\varepsilon_1}{n}\right)^{n/4 - 2\varepsilon_1} \left(\frac{3n}{8}\right)^{3n/4 + 2\varepsilon_1} \left(1 + \frac{8\varepsilon_1}{3n}\right)^{3n/4 + 2\varepsilon_1}} (1 + \delta_5(n)) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{16} \pi n \left(\frac{1}{8}\right)^{n/4 - 2\varepsilon_1} \left(\frac{3}{8}\right)^{3n/4 + 2\varepsilon_1}} (1 + \delta(n)) = \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{n/4+1+2\varepsilon_1}} (1 + \delta(n)) \\ &\geq \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{n/4+5}} (1 + \delta(n)). \end{aligned}$$

Здесь все величины типа δ стремятся к нулю с ростом n . Лемма доказана.

4.2. Завершение доказательства. Предположим, что для данного натурального s и некоторого N корректно определен граф $\mathcal{G}_N$ и $\alpha(\mathcal{G}_N) \geq s$. Тогда для любого $G = (\mathcal{V}_N, E) \preceq \mathcal{G}_N$ также выполнено $\alpha(G) \geq s$. Пусть W , $|W| = s$, – любое из соответствующих независимых множеств в $\mathcal{V}_N$. Значит, граф $H = (W, E|_W) = (W, \emptyset)$ является порожденным подграфом в $\mathcal{G}_N$ и одновременно подграфом в G . Таким образом, в описанной ситуации и G , и $[G]_{\text{dist}}$ содержат индуцированный подграф графа $\mathcal{G}_N$ на s вершинах, а это даже больше, чем требовалось.

Остается показать, что при всяком достаточно большом s существует $N = C_n^{n/2}$ с $n = 4k$ и

$$N \leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\ln c)^{1/2 - \xi} b^\xi s^\xi (\ln s)^{\xi - 1/2} (1 + \beta), \quad \alpha(\mathcal{G}_N) \geq s.$$

Положим

$$h(s) = \frac{\ln \frac{bs(\ln s)(1+\beta')}{\ln c}}{\ln c}, \quad 0 < \beta' < \beta.$$

Ясно, что при больших s величина $h(s)$ неотрицательна и, следовательно, есть натуральное n вида $n = 4k$, не превосходящее $h(s) + 4$ и большее либо равное $h(s)$. По лемме 2 для соответствующего N имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_N) &\geq \frac{4^{n+2}}{\pi n 3^{3n/4+5}} (1 + \delta(n)) = \frac{1}{b} \cdot \frac{c^n}{n} (1 + \delta(n)) = \frac{1}{b} \cdot \frac{e^{n \ln c}}{n} (1 + \delta(n)) \\ &\geq \frac{1}{b} \cdot \frac{e^{h(s) \ln c}}{h(s) + 4} (1 + \delta(n)). \end{aligned}$$

С ростом s растет и n , а значит, можно написать $\delta(n) = \gamma(s)$, где $\gamma(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_N) &\geq \frac{1}{b} \cdot \frac{e^{h(s) \ln c}}{h(s) + 4} (1 + \gamma(s)) = \frac{1}{b} \cdot \frac{bs(\ln s)(1+\beta')}{(\ln c) \left(\frac{\ln(bs(\ln s)(1+\beta')/\ln c)}{\ln c} + 4 \right)} (1 + \gamma(s)) \\ &= \frac{s(\ln s)(1+\beta')}{\ln \frac{c^4 bs(\ln s)(1+\beta')}{\ln c}} (1 + \gamma(s)) = \frac{s(\ln s)(1+\beta')}{(\ln s)(1+\gamma'(s))} (1 + \gamma(s)), \\ &\quad \gamma'(s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\beta' > 0$, то окончательно получаем (при достаточно больших s), что $\alpha(\mathcal{G}_N) > s$.

Теперь, воспользовавшись леммой 1, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_1(n)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{h(s)+4}}{\sqrt{h(s)}} (1 + \delta_1(n)) \\ &= 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h(s)}} \cdot 2^{(\ln(bs(\ln s)(1+\beta')/(\ln c)))/(\ln c)} (1 + \delta_1(n)) \\ &= 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h(s)}} \cdot \left(\frac{bs(\ln s)(1+\beta')}{\ln c} \right)^\xi (1 + \delta_1(n)). \end{aligned}$$

Заметим, что $h(s) \geq (\ln s)/(\ln c)$ при больших s . Следовательно

$$\begin{aligned} N &\leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln s}{\ln c}}} \cdot \left(\frac{bs(\ln s)(1+\beta')}{\ln c} \right)^\xi (1+\delta_1(n)) \\ &\leq 16 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\ln c)^{1/2-\xi} b^\xi s^\xi (\ln s)^{\xi-1/2} (1+\beta), \end{aligned}$$

когда скоро β' и s таковы, что

$$(1+\beta')^\xi (1+\delta_1(n)) \leq 1+\beta.$$

Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2 и ее уточнение

5.1. Доказательство. Будем действовать практически так же, как в п. 4.2. Сохраняя обозначения, положим

$$h(s) = \frac{\ln \left(\frac{2bs(\ln s)}{\ln c} \right)}{\ln c}.$$

Как и в п. 4.2, мы хотим фактически найти как можно меньшее натуральное $n \geq h(s)$, имеющее вид $n = 4p^\alpha$. Для этого нам потребуется небольшое отступление в область аналитической теории чисел. А именно, пусть f – любая функция такая, что для каждого $x > 0$ на отрезке $[x, x+f(x)]$ есть число, являющееся степенью некоторого простого числа. Пока для нас важно лишь то, что существует f со свойством $f(x) = o(x)$ (см. [10]).

Интересующее нас n не превосходит, очевидно, $h(s) + 4f(h(s)/4)$, причем $f(h(s)/4) = o(\ln s)$. Это обстоятельство и серия выкладок, почти дословно повторяющих те, что были проделаны в п. 4.2, означают, что при достаточно большом s и надлежащем N выполнено неравенство $\alpha(\mathcal{G}_N) \geq s$.

В то же время, как и раньше,

$$N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1+\delta_1(n)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{h(s)+4f(h(s)/4)}}{\sqrt{h(s)}} (1+\delta_1(n)) = s^{\xi+\varphi(s)}$$

с подходящей функцией $\varphi = o(1)$.

При малых s утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

5.2. Уточнения. Теперь уже ясно, как должно выглядеть абсолютно точное утверждение теоремы 2 (ср. п. 4.2).

ТЕОРЕМА 2'. Пусть c, ξ, b, β такие же, как в теореме 1, а $\beta' > 0$ таково, что $(1+\beta')^\xi < 1+\beta$. Положим

$$h(s) = \frac{\ln \left(\frac{bs(\ln s)(1+\beta')}{\ln c} \right)}{\ln c}.$$

Пусть, далее, f – любая функция из п. 5.1. Тогда при всех достаточно больших s выполнено неравенство

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \leq 16^{f(h(s)/4)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\ln c)^{1/2-\xi} b^\xi s^\xi (\ln s)^{\xi-1/2} (1+\beta).$$

В настоящее время известно только, что в качестве f можно взять функцию вида $f(x) = O(x^r)$, где $r \in (0.5, 1)$. Есть и гипотеза: существует f вида $f(x) = O(\ln^2 x)$. К сожалению, даже в случае, когда f имеет гипотетический порядок роста, величина $16^{f(h(s)/4)}$ растет быстрее любой степени логарифма. Таким образом, разница между результатами теорем 1 и 2 принципиальна.

§ 6. Доказательство теоремы 3

6.1. Вспомогательные леммы. В лемме 2 мы установили асимптотическую нижнюю оценку числа независимости графа $\mathcal{G}_N$ при любом N . Оказываются, верхнюю оценку того же числа получить гораздо труднее. Тем не менее, это было сделано в работе [11] с помощью линейно-алгебраического метода (см. [5]). Однако, только для $\mathcal{G}_N \in \{\mathcal{G}_N^{\text{prime}}\}$. А именно, было показано, что $\alpha(\mathcal{G}_N) \leq 2C_{n-1}^{n/4-1}$ при $n = 4p^a$.

ЛЕММА 3. При $n = 4p^a$ справедлива оценка

$$\alpha(\mathcal{G}_N) \leq \frac{\sqrt{2} \cdot 4^{n+1}}{e\sqrt{\pi n^3} \cdot 27^{(n+2)/4}} (1 + \delta_0(n)),$$

где $\delta_0(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом формулы Стирлинга имеем

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{G}_N) &\leq 2C_{n-1}^{n/4-1} = \frac{2(n-1)!}{(\frac{n}{4}-1)! (\frac{3n}{4}+1)!} \\ &= \frac{2\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}}{\sqrt{\pi \frac{n-4}{2}}(\frac{n}{4}-1)^{n/4-1}e^{-n/4+1} \sqrt{\pi \frac{3n+4}{2}}(\frac{3n}{4}+1)^{3n/4+1}e^{-\frac{3n}{4}+1}} (1 + \Delta_1(n)) \\ &= \frac{4\sqrt{2(n-1)}(n-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-4)(3n+4)}(\frac{n}{4}-1)^{n/4-1}(\frac{3n}{4}+1)^{3n/4+1}} (1 + \Delta_1(n)) \\ &= \frac{4\sqrt{2} \cdot 4^n n^{n-1/2}}{e\sqrt{\pi} \cdot n^{n+1} 3^{(3n+6)/4}} (1 + \delta_0(n)) = \frac{\sqrt{2} \cdot 4^{n+1}}{e\sqrt{\pi n^3} \cdot 27^{(n+2)/4}} (1 + \delta_0(n)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Леммы 2 и 3 в совокупности означают, что у графа $\mathcal{G}_N \in \{\mathcal{G}_N^{\text{prime}}\}$ число независимости имеет вид $(4/3^{3/4} + o(1))^n$, и лишь функция $o(1)$ конкретизирована не полностью.

Перепишем результат леммы 3 в терминах N .

ЛЕММА 3'. Пусть

$$c, \quad \xi, \quad d, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3$$

такие же, как в формулировке теоремы 3. Тогда при $n = 4p^a$ справедлива оценка

$$\alpha(\mathcal{G}_N) \leq \theta_3 (\ln N)^{\theta_2} N^{\theta_1} (1 + \delta'_0(N)),$$

где $\delta'_0(N) \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 имеем

$$N = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} (1 + \delta_1(n)).$$

Значит, $\ln N \sim n \ln 2$. Таким образом,

$$\theta_3 (\ln N)^{\theta_2} N^{\theta_1} \sim \theta_3 n^{\theta_2} (\ln 2)^{\theta_2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\theta_1/2} \frac{c^n}{n^{1/(2\xi)}} = \frac{dc^n}{n^{3/2}}.$$

Нетрудно видеть, что, в свою очередь, по лемме 3

$$\alpha(\mathcal{G}_N) \leq \frac{dc^n}{n^{3/2}} (1 + \delta_0(n)).$$

Завершение доказательства очевидно.

Следующая лемма носит менее технический характер, чем леммы 3 и 3'.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{G}_N$ – полный дистанционный граф в последовательности $\{\mathcal{G}_N^{\text{prime}}\}$, а $G = (W, F)$ – произвольный порожденный подграф графа $\mathcal{G}_N$, имеющий s вершин. Положим $\alpha = \alpha(\mathcal{G}_N)$ и допустим, что $s \geq (n+1)\alpha$. Тогда существует такая функция $\sigma(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, что верно следующее неравенство:

$$|F| > \frac{s^2 - ns\alpha + \frac{1}{2}n^2\alpha^2}{\alpha} (1 + \sigma(n)).$$

В силу леммы 3 предположение $s \geq (n+1)\alpha$ имеет смысл при всех достаточно больших n надлежащего вида. Таким образом, лемма 4 формально справедлива лишь при $n \geq n_0$.

Если $s \sim n\alpha$, то оценка из леммы 4 преобразуется в неравенство $|F| \geq (s^2/2\alpha)(1 + \sigma'(n))$. Если же $n\alpha = o(s)$, то оценка, по сути, вдвое уточняется: $|F| \geq (s^2/\alpha)(1 + \sigma''(n))$. В общем случае первый вариант неравенства гораздо проще доказать, но мы докажем сразу второй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Начнем с того, что в W есть независимое множество A вершин графа G , имеющее максимальную мощность. Положим $\beta = |A|$. Поскольку G – индуцированный подграф в $\mathcal{G}_N$, то $\beta \leq \alpha$. Кроме того, ввиду максимальной A , каждая вершина из $W \setminus A$ соединена ребром (принадлежащим F) хотя бы с одной вершиной из A .

Разобьем $W \setminus A$ на две непересекающиеся части L и K . Здесь K – это такое множество вершин, что для любой вершины $x \in K$ существует ровно одна вершина $y \in A$ со свойством $\{x, y\} \in F$. Формально,

$$K = \{x \in W \setminus A : |\{y \in A : \{x, y\} \in F\}| = 1\},$$

$$L = W \setminus A \setminus K = \{x \in W \setminus A : |\{y \in A : \{x, y\} \in F\}| \geq 2\}.$$

Покажем, что $|K| \leq n\beta$. Предположим противное. Тогда по принципу Дирихле найдется такая вершина $x \in A$, что

$$|\{y \in K : \{x, y\} \in F\}| \geq n + 1.$$

Рассмотрим произвольные

$$y_1, \dots, y_{n+1} \in \{y \in K : \{x, y\} \in F\}.$$

Выберем из них любые две различные вершины y_i, y_j . Положим $M = (A \setminus \{x\}) \cup \{y_i, y_j\}$. Поскольку $|M| > |A|$, то в M есть ребра графа G . Наша конструкция устроена так, что с необходимостью $\{y_i, y_j\} \in F$. Значит, вершины $y_1, \dots, y_{n+1}$ дистанционного графа в $\mathbb{R}^n$ попарно соединены ребрами, т.е. образуют правильный n -мерный симплекс. Однако $(0,1)$ -векторы, с которыми мы имеем дело, полномерных симплексов, очевидно, образовывать не могут. Получаем противоречие.

Итак, $|K| \leq n\beta \leq n\alpha$. Ясно, далее, что

$$\begin{aligned} F = & \{\{x, y\} : x \in K, y \in A\} \cup \{\{x, y\} : x \in L, y \in A\} \\ & \cup \{\{x, y\} : x \in W \setminus A, y \in W \setminus A\}. \end{aligned}$$

Иными словами, полагая

$$F_1 = \{\{x, y\} : x \in W \setminus A, y \in W \setminus A\},$$

имеем

$$\begin{aligned} |F| &= |\{\{x, y\} : x \in K, y \in A\}| + |\{\{x, y\} : x \in L, y \in A\}| + |F_1| \\ &\geq 2(s - \beta) - |K| + |F_1| \geq 2(s - \beta) - n\beta + |F_1| \\ &\geq 2(s - \alpha) - n\alpha + |F_1| = 2s - \alpha(n + 2) + |F_1|. \end{aligned}$$

Теперь осуществим ту же схему действий, заменяя W на $W_1 = W \setminus A$, A на A_1 (независимое множество вершин в W_1 , имеющее максимальную мощность), β на $\beta_1 = |A_1| \leq \alpha$, L и K на L_1 и K_1 , так что $W_1 \setminus A_1 = L_1 \cup K_1$, и т.д. Полагая $s_1 = |W_1| \geq s - \alpha$ и

$$F_2 = \{\{x, y\} : x \in W_1 \setminus A_1, y \in W_1 \setminus A_1\},$$

имеем

$$\begin{aligned} |F_1| &= |\{\{x, y\} : x \in K_1, y \in A_1\}| + |\{\{x, y\} : x \in L_1, y \in A_1\}| + |F_2| \\ &\geq 2(s_1 - \beta_1) - |K_1| + |F_2| \geq 2(s_1 - \beta_1) - n\beta_1 + |F_2| \\ &\geq 2(s - 2\alpha) - n\alpha + |F_2| = 2s - \alpha(n + 4) + |F_2|. \end{aligned}$$

Описанную процедуру мы итерируем $k = \lfloor (s - n\alpha)/\alpha \rfloor$ раз. В результате получаем оценку

$$|F| \geq \sum_{i=1}^k (2s - \alpha(n + 2i)) + |F_k|,$$

где

$$F_k = \{\{x, y\} : x \in W_{k-1} \setminus A_{k-1}, y \in W_{k-1} \setminus A_{k-1}\}.$$

Все шаги процедуры корректны, так как для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ выполнено

$$|W_i| = |W_{i-1} \setminus A_{i-1}| \geq s - i\alpha \geq s - k\alpha \geq n\alpha,$$

а значит, всякий раз рассмотрение множества L_i , дающего “удвоенный вклад” в оценку числа ребер графа G , оправдано с учетом неравенства $|K_i| \leq n\beta_i \leq n\alpha$. При этом формально $W_0 = W$, $A_0 = A$ и т.д. Более того, за счет условия $s \geq (n+1)\alpha$ получаем $k \geq 1$, в следствие чего хотя бы один шаг процедуры мы непременно осуществим и тем подтвердим корректность суммирования по i от единицы до k .

Остается оценить величину $|F_k|$. Это, по сути, количество ребер графа G на множестве вершин W_k . Как и прежде, выделим в W_k подмножество A_k , имеющее максимальную мощность среди всех подмножеств в W_k , свободных от ребер G . Ясно, что каждая вершина из $W_k \setminus A_k$ соединена ребром хотя бы с одной вершиной в A_k . Таким образом, рассмотрение A_k дает вклад размера не меньше $|W_k| - |A_k| \geq s - k\alpha - \alpha$ в величину $|F_k|$.

Снова итерируем описанную процедуру. Каждый раз мы удаляем не более α вершин из W_k и каждый раз мы добавляем не менее $s - k\alpha - i\alpha$ (i – номер итерации) в оценку величины $|F_k|$. Учитывая то, что $|W_k| \geq n\alpha$, приходим к выводу, что итераций можно провести, как минимум, n . В итоге

$$|F_k| \geq \sum_{i=1}^n (s - k\alpha - i\alpha).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |F| &\geq \sum_{i=1}^k (2s - \alpha(n + 2i)) + \sum_{i=1}^n (s - k\alpha - i\alpha) \\ &\geq \sum_{i=1}^k (2s - \alpha(n + 2i)) + \sum_{i=1}^n (n\alpha - i\alpha) = k(2s - n\alpha) - k(k+1)\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \\ &\geq \left(\frac{s - n\alpha}{\alpha} - 1\right)(2s - n\alpha) - \frac{s - n\alpha}{\alpha} \left(\frac{s - n\alpha}{\alpha} + 1\right)\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \\ &= \frac{2s^2 - 3sn\alpha + n^2\alpha^2}{\alpha} - (2s - n\alpha) - \frac{(s - n\alpha)^2 + (s - n\alpha)\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha^2(n^2 - n)}{2\alpha} \\ &= \frac{s^2 - ns\alpha + 0,5n^2\alpha^2 + 0,5n\alpha^2 - s\alpha}{\alpha} - (2s - n\alpha) \\ &= \frac{s^2 - ns\alpha + 0,5n^2\alpha^2}{\alpha} (1 + \sigma(n)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

6.2. Завершение доказательства. Зафиксируем все параметры, фигурирующие в формулировке теоремы, и $\beta > 0$ в том числе. Упорядочим по возрастанию величины все числа вида $4p^a$, где p – простое число, $a \in \mathbb{N}$. Положим множество

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, \dots\}.$$

Для каждого $q \in \mathcal{P}$ определим N по известной формуле. Сохраняя порядок чисел, образуем множество

$$\mathcal{N} = \{70, 924, 12870, 184756, \dots\}.$$

Для каждого $N \in \mathcal{N}$ найдем s' из соотношения

$$N = [\theta_4(s')^\xi (\ln s')^{(\xi-1)/2} (1 - \beta')], \quad \beta' = \frac{\beta}{2}.$$

Положим $s = \lceil s' \rceil$. Возникнет бесконечная последовательность $\mathcal{S}$ натуральных чисел s , упорядоченных по возрастанию. При этом всякому $s \in \mathcal{S}$ однозначно отвечает $N = N(s)$ и наоборот. Наконец,

$$N(s) \sim \theta_4 s^\xi (\ln s)^{(\xi-1)/2} (1 - \beta'),$$

т.е. при достаточно больших s выполнено

$$N(s) > \theta_4 s^\xi (\ln s)^{(\xi-1)/2} (1 - \beta).$$

Сейчас мы покажем, что начиная с некоторого s_0 , все $s \in \mathcal{S}$ таковы, что

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) > N = N(s),$$

и этого хватит для завершения доказательства теоремы 3.

Итак, пусть s достаточно велико. Для соответствующего $N = N(s)$ рассмотрим граф $\mathcal{G}_N$. Нам необходимо убедиться в том, что найдется такой $G \preceq \mathcal{G}_N$, для которого ни в нем самом, ни в его дополнении нет порожденных подграфов графа $\mathcal{G}_N$, имеющих s вершин. Воспользуемся вероятностным методом (см. [12]–[14]). А именно, будем строить (случайный) граф $G \preceq \mathcal{G}_N$, “кладя” в него каждое ребро полного дистанционного графа с вероятностью 0,5 независимо от остальных ребер.

Для любого $W \subset \mathcal{V}_N$, $|W| = s$, обозначим через $l(W)$ количество ребер полного дистанционного графа на вершинах из W . Пусть A_W – событие, состоящее в том, что либо в случайном графе G , либо в его дополнении находится индуцированный подграф графа $\mathcal{G}_N$ с множеством вершин W . Ясно, что $P(A_W) = 2(1/2)^{l(W)}$, причем, ввиду упрощенного варианта леммы 4, имеем $l(W) \geq s^2(1 + \sigma'(n))/2\alpha$. Здесь важно, что у нас $s > \alpha = \alpha(\mathcal{G}_N)$.

В результате получаем, что

$$P\left(\bigcup_{W \subset \mathcal{V}_N} A_W\right) \leq 2C_N^s \left(\frac{1}{2}\right)^{s^2(1+\sigma'(n))/2\alpha}.$$

Если мы покажем, что

$$2C_N^s \left(\frac{1}{2}\right)^{s^2(1+\sigma'(n))/2\alpha} < 1, \quad (3)$$

то это будет означать, что

$$P\left(\overline{\bigcup_{W \subset \mathcal{V}_N} A_W}\right) > 0,$$

а нам именно это и нужно.

Поскольку $C_N^s < N^s/s^s e^{-s}$, то для доказательства (3) достаточно проверить справедливость оценки

$$\frac{2N^s}{s^s e^{-s}} \left(\frac{1}{2}\right)^{s^2(1+\sigma'(n))/2\alpha} < 1.$$

Далее, из леммы 3' мы знаем, что

$$\alpha \leq \theta_3 (\ln N)^{\theta_2} N^{\theta_1} (1 + \delta'_0(N)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{2N^s}{s^s e^{-s}} \left(\frac{1}{2}\right)^{s^2(1+\sigma'(n))/2\alpha} &\leq \frac{2N^s}{s^s e^{-s}} \left(\frac{1}{2}\right)^{s^2(1+\sigma^{(2)}(n))/2\theta_3 (\ln N)^{\theta_2} N^{\theta_1}} \\ \sigma^{(2)}(n) &= o(1), \end{aligned}$$

и наша задача сводится к установлению неравенства

$$\frac{2N^s}{s^s e^{-s}} \left(\frac{1}{2}\right)^{s^2(1+\sigma^{(2)}(n))/2\theta_3 (\ln N)^{\theta_2} N^{\theta_1}} < 1.$$

Прологарифмируем левую часть последнего неравенства и убедимся в том, что получится отрицательное число. Заметим сразу, что

$$N \leq \theta_4 s^\xi (\ln s)^{(\xi-1)/2} (1 - \beta'), \quad \ln N \sim \xi \ln s.$$

Итак,

$$\begin{aligned} &\ln 2 + s \ln N - s \ln s + s - \frac{s^2 (\ln 2) (1 + \sigma^{(2)}(n))}{2\theta_3 (\ln N)^{\theta_2} N^{\theta_1}} \\ &\leq \ln 2 + s \ln(\theta_4 (1 - \beta')) + \xi s \ln s + \frac{\xi - 1}{2} s \ln \ln s - s \ln s + s \\ &\quad - \frac{s^2 (\ln 2) (1 + \sigma^{(3)}(n))}{2\theta_3 (\xi \ln s)^{\theta_2} \theta_4^{\theta_1} s^{\xi \theta_1} (\ln s)^{\theta_1 (\xi-1)/2} (1 - \beta_1)^{\theta_1}} \\ &= (\xi - 1) (1 + \sigma^{(4)}(n)) s \ln s \\ &\quad - \left(\frac{\ln 2}{2\theta_3 \xi^{\theta_2} \theta_4^{\theta_1}} \right) \cdot \frac{(1 + \sigma^{(3)}(n))}{(1 - \beta_1)^{\theta_1}} \cdot s (\ln s)^{3/2 - 1/2\xi - 1/2 + 1/2\xi} \\ &= (\xi - 1) s \ln s \left((1 + \sigma^{(4)}(n)) - \frac{(1 + \sigma^{(3)}(n))}{(1 - \beta_1)^{\theta_1}} \right) < 0 \end{aligned}$$

при всех достаточно больших s .

Строго говоря, мы лишь доказали пока, что

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \neq N.$$

Дело в том, что для произвольного $N' < N$, при котором $\mathcal{G}_{N'} \in \{\mathcal{G}_N^{\text{prime}}\}$, описанная вероятностная технология могла не сработать. В сущности, так было бы, если бы лемма 3' была бы справедливой только для N , но не для

других чисел аналогичного вида. Однако, с леммой 3' никаких проблем нет и мы действительно имеем оценку

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) > N.$$

Теорема доказана.

§ 7. Доказательство теоремы 4 и ее уточнение

7.1. Доказательство. Зафиксируем произвольное $\beta > 0$ и любое $s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим максимальное натуральное N , не превосходящее

$$M = \theta_4 s^\xi (\ln s)^{(\xi-1)/2} (1 - \beta)$$

и имеющее вид $N = C_n^{n/2}$ с некоторым $n = 4p^a$. Разумеется, при достаточно больших s такое N существует, и нетрудно видеть, что вся технология предыдущего параграфа к такой паре s, N применима, так что

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) > N$$

и нам лишь остается показать, что $N = s^{\xi+\psi(s)}$ с подходящей $\psi = o(1)$.

Допустим, s достаточно велико (иначе все тривиально). Возьмем наибольшее натуральное n' вида $n' = 4k$ такое, что $N' = C_{n'}^{n'/2} \leq M$. Ясно, что

$$n' \sim \frac{\ln M}{\ln 2} \sim \frac{\xi \ln s}{\ln 2}.$$

Мы знаем, что существует такая функция f' , $f'(x) = o(x)$, с которой для любого $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 2$, на отрезке $[x - f'(x), x]$ есть хотя бы одно простое число (ср. п. 5.1). Пусть p – это какое-нибудь простое число, лежащее на отрезке $[n'/4 - f'(n'/4), n'/4]$. Положим $n = 4p$. Очевидно, что $n \sim n'$, т.е.

$$n = \frac{\xi \ln s}{\ln 2} (1 + \psi_1(s)), \quad \psi_1 = o(1).$$

Значит, для $\tilde{N} = C_n^{n/2}$, с одной стороны, верно $\tilde{N} \leq M$, а с другой стороны, справедливо

$$\tilde{N} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = s^{\xi+\psi_2(s)}, \quad \psi_2 = o(1).$$

Итак, искомое N заключено между $\tilde{N}$ и M , причем

$$N \geq \tilde{N} = s^{\xi+\psi(s)}, \quad \psi = o(1).$$

Теорема доказана.

7.2. Уточнения. Исходя из предыдущего параграфа, можно дать следующую формулировку.

ТЕОРЕМА 4'. Пусть $\beta > 0$ – произвольное число, а n' – максимальное натуральное число, делящееся на 4 и удовлетворяющее соотношению

$$C_{n'}^{n'/2} \leq \theta_4 s^\xi (\ln s)^{(\xi-1)/2} (1 - \beta).$$

Пусть, далее, f' – любая функция из п. 7.1. Тогда выполнено неравенство

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) > \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^{n' - 4f'(n'/4)}}{\sqrt{n'}} (1 + \delta'_1(n')), \quad \delta'_1 = o(1).$$

Оценка из теоремы 4' носит довольно неявный характер. Во-первых, трудно конкретизировать асимптотику $n' \sim (\xi \ln s)/\ln 2$, вид остаточного члена в которой существенно влияет на различие между величинами $2^{n'}$ и s^ξ . Во-вторых, по-прежнему очень плохо обстоят дела с оценкой величины $f'(n'/4)$. Ничего лучшего, нежели гипотетическое (и при современной технике недостижимое)

$$f'\left(\frac{n'}{4}\right) = O(\ln^2 n') = O((\ln \ln s)^2),$$

мы использовать не можем. Но $2^{-(\ln \ln s)^2}$ убывает быстрее любой степени логарифма. Это означает, что зазор между результатами теорем 4' и 3 заведомо весьма велик.

§ 8. Доказательство теоремы 5

На первый взгляд совершенно непонятно, в чем разница между теоремами 4 и 5. Казалось бы, выберем мы точно такое же N , как в п. 7.1, и все будет в порядке: получится оценка

$$R_{\text{dist}}(s, s) > N = s^{\xi + \psi(s)}.$$

Однако тонкость состоит в том же, о чем мы говорили в конце п. 6.2. А именно, в доказательствах теорем 3 и 4 равносильность условий

$$R_{\text{dist}}(s, s) \neq N \text{ и } R_{\text{dist}}(s, s) > N$$

была связана с тем фактом, что лемма 3' верна для всех $n = 4p^a$, с каковыми мы на тот момент и работали.

Теперь же, беря $N' < N$, мы не имеем права утверждать, что

$$\alpha(\mathcal{G}_{N'}) \leq \theta_3(\ln N')^{\theta_2} (N')^{\theta_1} (1 + \delta'_0(N')).$$

Нужна какая-то универсальная оценка для числа независимости графа $\mathcal{G}_N$, которая не апеллировала бы к специфической арифметической природе числа n . Удивительно, но если отбросить странное условие $n = 4p^a$, ничего лучшего, чем

$$\alpha(\mathcal{G}_N) \leq (1.99 + \nu(n))^n, \quad \nu(n) = o(1),$$

до сих пор не придумано (см. [15]). Это связано с тем, что “простота” величины $n/4$ позволяет задействовать мощный линейно-алгебраический метод, который на “сложные” $n/4$ принципиально не распространяется (см. [7]).

Дальнейшие рассуждения стандартны и мы их не проводим. Просто вместо $c = 4/3^{3/4}$ мы берем $\tilde{c} = 1.99$, а вместо $\xi = (\ln 2)/\ln c$ мы рассматриваем $\eta = (\ln 2)/\ln \tilde{c}$.

Теорема доказана.

§ 9. Сопоставление полученных результатов

Таким образом, мы имеем следующие факты.

1. Справедлива асимптотика

$$\ln(R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s)) \sim \xi \ln s = 1.2326229 \dots \cdot \ln s.$$

2. Для бесконечно многих s выполнена оценка

$$R_{\text{dist}}^{\text{prime}}(s, s) \geq 17.735578 \cdot s^{1.2326229 \dots} (\ln s)^{0.1163114 \dots}.$$

3. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} 1.0072842 \dots \cdot (\ln s)(1 + o(1)) &= \eta(\ln s)(1 + o(1)) \leq \ln(R_{\text{dist}}(s, s)) \\ &\leq \xi(\ln s)(1 + o(1)) = 1.2326229 \dots \cdot (\ln s)(1 + o(1)). \end{aligned}$$

4. Имеет место неравенство

$$R_{\text{dist}}(s, s) \leq 2282.1524 \cdot s^{1.2326229 \dots} (\ln s)^{0.7326229 \dots}.$$

Итак, наименьший зазор наблюдается между оценками из п. 2 и п. 4, а худшая ситуация имеет место для величины $R_{\text{dist}}(s, s)$, для которой пока нет даже асимптотики логарифма.

Список литературы

- [1] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, MA–Menlo Park, CA–London, 1969.
- [2] М. Холл мл., *Комбинаторика*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: M. Hall, jr., *Combinatorial theory*, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto, ON–London, 1967.
- [3] Р. Грэхэм, *Начала теории Рамсея*, Мир, Москва, 1984; пер. с англ.: R. L. Graham, *Rudiments of Ramsey theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **45**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1981.
- [4] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 1990.
- [5] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2007.
- [6] N. G. de Bruijn, P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **54**:5 (1951), 371–373.
- [7] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.
- [8] A. M. Raigorodskii, “Some problems in combinatorial geometry, and the linear algebra method in combinatorics”, *Чебышёвский сборник*, **7**, № 3, 2006, 168–189.
- [9] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [10] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967; пер. с нем.: K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Grundlehren Math. Wiss., **91**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.

- [11] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [12] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином: лаборатория знаний, М., 2007; пер. с англ.: N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., Wiley, New York, 2000.
- [13] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [14] А. М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2008.
- [15] P. Frankl, R. Rödl, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **300**:1 (1987), 259–286.

К. А. Михайлов (К. А. Mikhailov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: airdesign@mail.ru

Поступила в редакцию

04.06.2008

А. М. Райгородский (А. М. Raigorodskii)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mraigor@yandex.ru