Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, О T -пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 9, 41–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:49:48

УДК 512.552

А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля

О T -пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана

В работе изучается T -пространственное и мультипликативное строение относительно свободной алгебры $F^{(3)}$ с единицей, соответствующей тождеству $[[x_1, x_2], x_3] = 0$, над бесконечным полем характеристики $p > 0$. Одним из основных результатов является разложение фактор- T -пространств, связанных с $F^{(3)}$, в прямую сумму простых компонент. Кроме того, рассматриваемые T -пространства оказываются коммутативными подалгебрами в $F^{(3)}$, что позволяет описать алгебру $F^{(3)}$ и некоторые ее подалгебры как модули над этими коммутативными алгебрами. Рассматриваются особенности случая $p = 2$.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: T -пространство, T -идеал, n -слово, канонический базис, относительно свободная алгебра Грассмана.

Введение

Теория T -пространств – сравнительно новая ветвь комбинаторной алгебры, возникшая первоначально как средство для решения вопросов о конечной базирруемости T -идеалов. После ряда положительных результатов в нулевой характеристике (см. [1]–[5]), а также серии контрпримеров в характеристике $p > 0$ (см. [4], [6]–[9]) естественно возник вопрос о построении структурной теории T -пространств. При этом наиболее содержательная теория возникает, если рассматривать T -пространства, удовлетворяющие некоторым специальным условиям. Например, можно рассмотреть все T -пространства, лежащие в конкретной относительно свободной алгебре, и связанные с ними теоретико-модульные конструкции. Одной из наиболее важных и интересных алгебр, дающей по существу все основные известные контрпримеры, является относительно свободная алгебра Грассмана над полем характеристики $p > 0$. Исследованию T -пространственной и мультипликативной структуры этой алгебры и посвящена настоящая работа. Как будет видно из дальнейшего, между этими двумя структурами имеется интересная взаимосвязь.

Напомним основные определения (см. [3]). Пусть $F = k\langle 1, x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ – свободная счетнопорожденная ассоциативная алгебра с единицей над бесконечным полем k характеристики $p > 0$, $T^{(3)}$ – T -идеал (унитарно замкнутый), порожденный многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$, $F^{(3)} = F/T^{(3)}$ – относительно свободная алгебра Грассмана. Название объясняется тем, что многообразие k -алгебр, заданное тождеством $[[x_1, x_2], x_3] = 0$, в случае $p \neq 2$ порождается алгеброй Грассмана (см. [10]), а в случае $p = 2$ – алгеброй Φ_2 , являющейся аналогом алгебры Грассмана (см. [4], [6], [11], а также § 6). Образы свободных переменных

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00625).

алгебры F в $F^{(3)}$ обозначаются теми же буквами. Кроме того, часть переменных иногда для удобства обозначается y_i или z_i . На алгебре $F^{(3)}$ действует (справа) полугрупповая алгебра kT , где T – полугруппа всех эндоморфизмов алгебры F , превращая $F^{(3)}$ в kT -модуль. Действие элемента $\tau \in kT$ на многочлен $f \in F^{(3)}$ обозначается через f^τ . T -пространством в $F^{(3)}$ называется любой kT -подмодуль (см. [2]). Вообще, T -пространство – это унитарный правый kT -модуль, что позволяет рассматривать факторпространства, прямые суммы T -пространств и т.д. Образы многочленов из $F^{(3)}$ при факторизации по T -пространствам также будем называть многочленами. В силу бесконечности поля k , если многочлен принадлежит T -пространству, то и любая полиоднородная компонента данного многочлена принадлежит этому T -пространству. Через S^T обозначается T -пространство, порожденное подмножеством S некоторого T -пространства (см. [4]).

В настоящей работе рассматриваются только унитарно замкнутые T -пространства (общее определение можно найти в [4]).

Работа состоит из шести параграфов. Везде, кроме § 6, предполагается, что $p > 2$. Это связано с тем, что соотношения Фробениуса (см. § 1) при $p = 2$ выполняются только со степени 4.

В § 1 и § 2 приводятся основные соотношения в $F^{(3)}$ и доказываются так называемые теоремы о выравнивании и о мономиальности. Эти результаты используются в дальнейшем для изучения структурных вопросов.

В § 3 и § 4 исследуется T -пространственная структура алгебры $F^{(3)}$ (диаграммы включений, разложения в прямую сумму простых T -пространств и т.д.).

В § 5 приведен ряд результатов, связанных с мультипликативной структурой алгебры $F^{(3)}$. Весьма важную роль играет то обстоятельство, что основные T -пространства в $F^{(3)}$ оказываются к тому же ее коммутативными подалгебрами или даже идеалами в этих подалгебрах. Это позволяет рассматривать $F^{(3)}$ и некоторые ее подалгебры как модули над коммутативными алгебрами.

В § 6 исследуется вопрос о возможности перенесения полученных результатов на случай $p = 2$. Обсуждается специфика этого случая.

§ 1. Соотношения в алгебре $F^{(3)}$ и теоремы о выравнивании

Отметим основные соотношения, применяемые при вычислениях в алгебре $F^{(3)}$ (см. [4]).

I. Коммутаторные соотношения:

$$\begin{aligned} [x_1, x_2][x_1, x_3] &= 0, & [x_1, x_2][x_3, x_4] &= -[x_1, x_3][x_2, x_4], \\ [x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}, y] &= n_1 x_1^{n_1-1} [x_1, y] x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} + n_2 x_2^{n_2-1} [x_2, y] x_1^{n_1} x_3^{n_3} \cdots x_r^{n_r} \\ &\quad + \cdots + n_r x_r^{n_r-1} [x_r, y] x_1^{n_1} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}}, & n_i \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

В частности, из последнего соотношения следует, что

$$[xy^n, y] = y^n [x, y], \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad [x^n, y] = nx^{n-1} [x, y], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, p -я степень переменной коммутирует с любым элементом алгебры $F^{(3)}$, т.е. $[x^p, y] = 0$.

II. Соотношения Фробениуса:

$$(x_1 + \cdots + x_r)^{p^l} = x_1^{p^l} + \cdots + x_r^{p^l}, \quad (x_1 \cdots x_r)^{p^l} = x_1^{p^l} \cdots x_r^{p^l},$$

где $r, l \in \mathbb{N}$.

Под одночленом в алгебре $F^{(3)}$ и во всех ее факторобъектах мы подразумеваем произвольное произведение переменных x_i (возможно, с кратностями). Всякий многочлен из $F^{(3)}$ является линейной комбинацией своих одночленов, и это представление, вообще говоря, не однозначно. Так, например, одночлен может быть равен линейной комбинации некоторых других одночленов с теми же кратностями вхождения переменных.

Нам понадобится следующая (см. [4])

ЛЕММА 1.1. В алгебре $F^{(3)}$ $[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_m, y_m] \neq 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

С помощью коммутаторных соотношений нетрудно проверить, что любой элемент $f \in F^{(3)}$ можно представить с точностью до переобозначения переменных в виде линейной комбинации многочленов следующего вида:

$$h_{a,b} = x_1^{a_1-1} y_1^{a'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{a_m-1} y_m^{a'_m-1} [x_m, y_m] z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s},$$

где $a = (a_1, a'_1, \dots, a_m, a'_m)$ – набор произвольных натуральных чисел, а $b = (b_1, \dots, b_s)$ – набор произвольных целых неотрицательных чисел, переменные y_i, z_j отличны от переменных $x_1, \dots, x_m$, $m, s \in \mathbb{N}$. В том случае, когда в многочленах $h_{a,b}$ отсутствуют коммутаторы, будем считать, что $m = 0$, и для таких многочленов будем использовать обозначение d_b . Если $b_j = 0$ для любого $j = \overline{1, s}$, то для многочлена $h_{a,b}$ используется обозначение c_a . Таким образом, $h_{a,b} = c_a d_b$. При $m = 0$ и $b_j = 0$ для любого $j = \overline{1, s}$ многочлен $h_{a,b}$ по определению равен 1. В дальнейшем считаем, что если задана пара наборов a и b , то многочлен $h_{a,b}$ и числа m и s по этой паре определяются однозначно.

С многочленами $h_{a,b}$ связан канонический базис k -алгебры $F^{(3)}$ (см. [4])

$$x_{j_1}^{n_{j_1}-1} x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \cdots x_{j_{2t-1}}^{n_{j_{2t-1}}-1} x_{j_{2t}}^{n_{j_{2t}}-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2t-1}}, x_{j_{2t}}] x_{i_1}^{m_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{m_{i_s}}, \quad (1)$$

где $j_1 < \cdots < j_{2t}$, $i_1 < \cdots < i_s$, $n_{j_\beta}, m_{i_\alpha}$ – произвольные натуральные числа, множества индексов $\{j_\beta \in \mathbb{N} \mid \beta = \overline{1, 2t}\}$, $\{i_\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha = \overline{1, s}\}$ не пересекаются, $t, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При $t = s = 0$ многочлен (1) равен 1.

Кратностью многочлена $h_{a,b}$ назовем число входящих в него коммутаторов.

Будем говорить, что переменная в произвольном полиоднородном многочлене из $F^{(3)}$ имеет уровень l , $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если кратность ее вхождения в этот многочлен равна $p^l q$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$, не делящегося на p ($l = 0$ означает, что переменная входит с кратностью, не делящейся на p). В этом случае будем говорить о переменной уровня l .

Многочлен $h_{a,b}$ будем называть p -многочленом, если кратности вхождения всех его переменных делятся на p , и 1-многочленом, если кратность вхождения хотя бы одной из его переменных не делится на p .

Если $a_1 = \cdots = a_m = a'_1 = \cdots = a'_m = p^l$, $b_1 = \cdots = b_s = 0$, то для многочлена $h_{a,b}$ используется обозначение

$$c_{m,l} = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]$$

и название коммутаторный многочлен кратности m уровня l . Пусть $g_{m,l} = c_{m,l} z_1^{p^l}$.

Введем следующую систему обозначений. Положим для любых $r, t \in \mathbb{N}$

$$c_{(r,t)}(x, y) = x^{r-1} y^{t-1} [x, y]. \quad (2)$$

Таким образом,

$$c_a = c_{(a_1, a'_1)}(x_1, y_1) \cdots c_{(a_m, a'_m)}(x_m, y_m).$$

Многочлен $c_{(a_i, a'_i)}(x_i, y_i)$ будем называть i -м *блоком* многочлена c_a , $i = \overline{1, m}$.

Рассмотрим следующие T -подпространства в алгебре $F^{(3)}$:

$$D_b = \{d_b\}^T, \quad C_a = \{c_a\}^T, \quad CD_{a,b} = \{c_a d_b\}^T;$$

W_n – T -пространство, порожденное всеми одночленами, содержащими каждую переменную с кратностью n , $n \in \mathbb{N}$ (так называемыми n -словами).

Известно (см. [12]), что $W_n = F^{(3)}$ при $(n, p) = 1$ и $W_n = W_{p^l}$ при $n = p^l n_1$, где $(n_1, p) = 1$, $n_1, l \in \mathbb{N}$. Существенную роль в алгебре $F^{(3)}$ играют именно T -пространства W_{p^l} . К изучению таких T -пространств сводятся многие структурные вопросы алгебры $F^{(3)}$. В тех случаях, когда b_j делится на p для любого $j = \overline{1, s}$, как будет следовать из приведенных ниже теорем о выравнивании, многочлен $h_{a,b}$ принадлежит T -пространству W_{p^l} .

В работе [12] было выяснено, что $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$ и $C_{p^l} \subsetneq CD_{p^l}$, где

$$D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T, \quad C_{p^l} = \{c_{m,l} \mid m \in \mathbb{N}\}^T, \quad CD_{p^l} = \{g_{m,l} \mid m \in \mathbb{N}\}^T.$$

Отметим, что все рассматриваемые бесконечные системы порождающих неприводимы (см. [4], [12], [13]). Введенные таким образом T -пространства C_{p^l} и CD_{p^l} раскладываются в бесконечные суммы циклических kT -модулей $C_{p^l}^{(m)} = \{c_{m,l}\}^T$ и $CD_{p^l}^{(m)} = \{g_{m,l}\}^T$, которые будем называть *элементарными составляющими* T -пространств C_{p^l} и CD_{p^l} соответственно.

Заметим, что коммутаторный многочлен $c_{m,0}$ кратности m уровня 0 – многочлен $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$, и соответствующее T -пространство $C_{p^0}^{(m)} = \{c_{m,0}\}^T$ обозначается через $C_1^{(m)}$. Ясно, что T -пространство $CD_{p^0}^{(m)} = \{c_{m,0} z_1\}^T$ является T -идеалом в $F^{(3)}$, порожденным $c_{m,0}$. Этот T -идеал будем обозначать через $C^{(m)} = (c_{m,0})^T$. Положим $C_1^{(1)} = C_1$ и $C^{(1)} = C$. Очевидно, что $C_1^{(m)} \subset C_1$, $C^{(m)} \subset C$ для любого $m \in \mathbb{N}$. T -пространства $C_1^{(m)}$ и $C^{(m)}$ также будем называть *элементарными составляющими* C_1 и C соответственно.

В § 3 будет сконструирована диаграмма 1, отражающая взаимосвязи между введенными выше T -пространствами. Для ее построения ниже рассматриваются соотношения на элементарные составляющие.

Справедлива следующая достаточно очевидная лемма.

ЛЕММА 1.2. *Имеют место следующие цепочки включений:*

$$C_1 = C_1^{(1)} \supsetneq C_1^{(2)} \supsetneq \cdots \supsetneq C_1^{(m)} \supsetneq \cdots, \quad C = C^{(1)} \supsetneq C^{(2)} \supsetneq \cdots \supsetneq C^{(m)} \supsetneq \cdots.$$

Ниже нам понадобится следующая техническая

ЛЕММА 1.3. 1) Число $\binom{p^l n - 1}{p^l - 1}$ не делится на p для любого $n \in \mathbb{N}$.

2) Если $(n, p) = 1$, то число $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для $l = 0$ получаем $\binom{p^l n - 1}{p^l - 1} = 1$, откуда следует утверждение 1) данной леммы. Для $l > 0$

$$\binom{p^l n - 1}{p^l - 1} = \frac{p^l n - 1}{p^l - 1} \frac{p^l n - 2}{p^l - 2} \cdots \frac{p^l n - 1 - (p^l - 2)}{p^l - 1 - (p^l - 2)}.$$

Это число содержит как дроби, числитель и знаменатель которых не делятся ни на какую степень числа p , так и дроби с противоположным свойством. Рассмотрим последние. Легко видеть, что такие дроби имеют вид $\frac{p^l n - p^s n_1}{p^l - p^s n_1}$, где $p^l > p^s n_1$, $(n_1, p) = 1$, т.е. содержат в числителе и знаменателе одну и ту же степень числа p , равную p^s , $s \in \mathbb{N}$. Сокращая на p^s , получаем, что числитель и знаменатель этих дробей не делятся на p . Отсюда следует, что $\binom{p^l n - 1}{p^l - 1}$ не делится на p .

2) Для $l = 0$ имеем $\binom{p^l n}{p^l} = n$, откуда в силу $(n, p) = 1$ следует утверждение 2) данной леммы. Для $l > 0$

$$\binom{p^l n}{p^l} = \frac{p^l n}{p^l} \frac{p^l n - 1}{p^l - 1} \cdots \frac{p^l n - (p^l - 1)}{p^l - (p^l - 1)}.$$

Аналогично предыдущему среди дробей в правой части этого равенства рассмотрим дроби, числитель и знаменатель которых делятся на некоторую степень числа p . Такие дроби, очевидно, имеют вид $\frac{p^l n - p^s n_1}{p^l - p^s n_1}$, где $p^l > p^s n_1$, $(n_1, p) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, и, сокращая на p^s , получаем, что числитель и знаменатель этих дробей не делятся на p . Отсюда и из $(n, p) = 1$ следует, что $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на p .

Всюду ниже выражение “выделим из данного многочлена полиоднородный многочлен” означает, что из любого многочлена с помощью подстановок и k -линейных действий (в силу бесконечности поля k) можно получить любую его полиоднородную составляющую.

Также часто будет использоваться следующее достаточно очевидное утверждение: если $f \in \{g\}^T$ и многочлены g и $h_1 h_2$ зависят от непересекающихся множеств переменных, то $h_1 f h_2 \in \{h_1 g h_2\}^T$.

Рассмотрим многочлен

$$c_{(p^l n_1, p^l n'_1)}(x_1, y_1) = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1],$$

где $n_1, n'_1 \in \mathbb{N}$ (см. обозначение (2)). Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.1. 1) Многочлен $c_{1,l}$ принадлежит T -пространству

$$\{c_{(p^l n_1, p^l n'_1)}(x_1, y_1)\}^T.$$

2) Если $(n, p) = 1$, то $x^{p^l} \in \{x^{p^l n}\}^T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Применим подстановку $x \mapsto x + 1$ к каждой из входящих в многочлен $c_{(p^l n_1, p^l n'_1)}(x_1, y_1)$ переменных и выделим полиоднородный многочлен степени p^l по всем переменным. Таким образом, получим многочлен,

равный $\alpha c_{1,l}$, где $\alpha = \binom{p^l n_1 - 1}{p^l - 1} \binom{p^l n'_1 - 1}{p^l - 1}$. Из утверждения 1) леммы 1.3 следует, что α не делится на p . Отсюда получаем утверждение 1) теоремы.

2) Как и выше, применим подстановку $x \mapsto x+1$ к одночлену $x^{p^l n}$ и выделим полиоднородный многочлен степени p^l по переменной x . Получим одночлен $\binom{p^l n}{p^l} x^{p^l}$. Согласно утверждению 2) леммы 1.3 $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на p . Отсюда следует, что $x^{p^l} \in \{x^{p^l n}\}^T$.

Метод, с помощью которого было проведено доказательство теоремы 1.1, в дальнейшем будет часто использоваться. Поэтому для удобства назовем его *методом спуска*. Такое название естественно, так как в результате применения этого метода из многочлена с определенными кратностями вхождения его переменных получается многочлен с уменьшенными кратностями вхождения этих переменных.

Следующая теорема говорит о взаимосвязи элементарных составляющих.

ТЕОРЕМА 1.2. 1) Пусть $r > l$. Тогда $C_{p^l}^{(m)} \subsetneq C_{p^r}^{(m)}$ и $CD_{p^r}^{(m)} \subsetneq CD_{p^l}^{(m)}$.

2) $C_{p^l}^{(m)} \subsetneq CD_{p^r}^{(m)}$ для любых l и r .

Доказательство включений, указанных в этой теореме, почти дословно повторяет доказательства аналогичных утверждений из работы [13] (см. теоремы 3 и 4). Отметим только, что основным из инструментов доказательства является метод спуска. Строгость всех включений элементарных составляющих будет доказана в теореме 3.1.

Напомним, что

$$c_a = x_1^{a-1} y_1^{a'-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{a-1} y_m^{a'-1} [x_m, y_m], \quad C_a = \{c_a\}^T, \\ h_{a,b} = c_a d_b = c_a z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s}, \quad CD_{a,b} = \{h_{a,b}\}^T = \{c_a d_b\}^T,$$

где $a = (a_1, a'_1, \dots, a_m, a'_m)$ – набор натуральных чисел и $b = (b_1, \dots, b_s)$ – набор целых неотрицательных чисел.

ТЕОРЕМА 1.3 (первая теорема о выравнивании). 1) Пусть в многочлене c_a одна из его переменных имеет уровень l , а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный l . Тогда

$$C_a = C_{p^l}^{(m)}.$$

2) Пусть в многочлене $h_{a,b}$ одна из его переменных $x_i, y_i, i = \overline{1, m}$, имеет уровень l , а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный l , причем переменные z_j имеют уровень, больший l , для любого $j = \overline{1, s}$. Тогда

$$CD_{a,b} = C_{p^l}^{(m)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу коммутаторных соотношений все переменные в многочлене c_a абсолютно равноправны, поэтому без ограничения общности можно считать, что переменная x_1 имеет уровень l , т.е. кратность ее вхождения равна $p^l n_1$, где n_1 не делится на p .

1) Поскольку все переменные в многочлене c_a по условию имеют уровень, больший либо равный l , то этот многочлен можно записать в следующем виде:

$$c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n'_m - 1} [x_m, y_m],$$

где $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, m}$, $(n_1, p) = 1$.

Применяя метод спуска к многочлену c_a аналогично тому, как это было проделано в доказательстве утверждения 1) теоремы 1.1, получим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\{c_{m,l}\}^T \subset \{c_a\}^T$.

Теперь докажем, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\{c_a\}^T \subset \{c_{m,l}\}^T. \quad (3)$$

Для доказательства включения (3) при $m = 1$ покажем, что многочлен $c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1]$ получается с помощью некоторых подстановок из многочлена $c_{1,l} = x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l - 1} [x_1, y_1]$. Сначала повысим степень переменной y_1 . Для этого в многочлен $c_{1,l}$ осуществим подстановку $x_1 \mapsto x_1 y_1^{n'_1 - 1}$. После этой подстановки, пользуясь коммутаторными соотношениями, получим многочлен

$$x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - n'_1 - p^l + 1 + p^l - 1 + n'_1 - 1} [x_1, y_1],$$

который после упрощения равен

$$x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1].$$

Остается повысить степень переменной x_1 . Для этого к полученному многочлену применим подстановку $x_1 \mapsto x_1^{n_1}$ и воспользуемся коммутаторными соотношениями. В результате получим

$$(x_1^{n_1})^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1^{n_1}, y_1] = n_1 x_1^{p^l n_1 - n_1 + n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1].$$

Правая часть равенства есть многочлен $n_1 c_a$, где $(n_1, p) = 1$. Таким образом, получаем, что $c_a \in \{c_{1,l}\}^T$.

Теперь покажем, что при $m = 2$ включение (3) также имеет место. Для этого опишем способ получения многочлена

$$c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1] x_2^{p^l n_2 - 1} y_2^{p^l n'_2 - 1} [x_2, y_2]$$

с помощью некоторых подстановок из многочлена

$$c_{2,l} = x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l - 1} [x_1, y_1] x_2^{p^l - 1} y_2^{p^l - 1} [x_2, y_2].$$

Шаг 1. Повышение степеней переменных y_1, y_2 . Для этого в многочлен $c_{2,l}$ осуществим подстановки $x_1 \mapsto x_1 y_1^{n'_1 - 1}$, $x_2 \mapsto x_2 y_2^{n'_2 - 1}$. После этих подстановок, пользуясь коммутаторными соотношениями, получим многочлен

$$x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - n'_1 - p^l + 1 + p^l - 1 + n'_1 - 1} [x_1, y_1] x_2^{p^l - 1} y_2^{p^l n'_2 - n'_2 - p^l + 1 + p^l - 1 + n'_2 - 1} [x_2, y_2],$$

который после упрощения равен

$$x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1] x_2^{p^l - 1} y_2^{p^l n'_2 - 1} [x_2, y_2].$$

Шаг 2. Повышение степени переменной x_2 . Из коммутаторных соотношений следует, что полученный многочлен равен

$$-x_1^{p^l-1}x_2^{p^l-1}[x_1, x_2]y_1^{p^l n'_1-1}y_2^{p^l n'_2-1}[y_1, y_2].$$

В этом многочлене сделаем замену $x_1 \mapsto x_1 x_2^{n_2-1}$ и воспользуемся коммутаторными соотношениями. После всех преобразований в результате получится многочлен

$$-x_1^{p^l-1}x_2^{p^l n_2-1}[x_1, x_2]y_1^{p^l n'_1-1}y_2^{p^l n'_2-1}[y_1, y_2].$$

Снова применим к последнему многочлену коммутаторные соотношения, в итоге получим многочлен $c_{(p^l, p^l n'_1)}(x_1, y_1)c_{(p^l n_2, p^l n'_2)}(x_2, y_2)$ (см. обозначение (2)).

Шаг 3. Повышение степени переменной x_1 . Осуществим в многочлен

$$c_{(p^l, p^l n'_1)}(x_1, y_1)c_{(p^l n_2, p^l n'_2)}(x_2, y_2)$$

ту же подстановку, которая применялась для повышения степени переменной x_1 у многочлена $x_1^{p^l-1}y_1^{p^l n'_1-1}[x_1, y_1]$. В результате получится многочлен $n_1 c_a$, где $(n_1, p) = 1$. Отсюда следует, что $c_a \in \{c_{2,l}\}^T$.

Пусть теперь $m > 2$. Докажем включение (3). Чтобы получить нужные степени переменных y_i , применим указанные в шаге 1 подстановки ко всем переменным x_i , $i = \overline{1, m}$, многочлена $c_{m,l}$. В результате получим многочлен $c_{(p^l, p^l n'_1)}(x_1, y_1)c_{(p^l, p^l n'_2)}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l, p^l n'_m)}(x_m, y_m)$. Далее, чтобы у последнего многочлена повысить степени переменных x_i , $i = \overline{2, m}$, нужно последовательно повышать их для каждого его i -го блока $c_{(p^l, p^l n'_i)}(x_i, y_i)$, $i = \overline{2, m}$, используя первый блок $c_{(p^l, p^l n'_1)}(x_1, y_1)$, как это было описано в шаге 2. В итоге мы получим многочлен $c_{(p^l, p^l n'_1)}(x_1, y_1)c_{(p^l n_2, p^l n'_2)}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l n_m, p^l n'_m)}(x_m, y_m)$. У этого многочлена повысим степень переменной x_1 (см. шаг 3). В результате получим многочлен $n_1 c_a$, где $(n_1, p) = 1$, значит, $c_a \in \{c_{m,l}\}^T$. Таким образом, включение (3) выполняется для любого $m \in \mathbb{N}$. Из доказанных включений следует равенство $C_a = C_{p^l}^{(m)}$.

Может случиться так, что среди переменных x_i, y_i , $i = \overline{1, m}$, имеется несколько переменных уровня l . На подстановках, указанных в шагах 1 и 2, это никак не отражается, и утверждение остается справедливым.

2) Рассмотрим T -пространство $CD_{a,b} = \{h_{a,b}\}^T = \{c_a d_b\}^T$. Подставляя 1 вместо всех переменных одночлена d_b , получим, что $c_a \in \{c_a d_b\}^T$. Согласно только что доказанному $\{c_{m,l}\}^T = \{c_a\}^T$, значит, $\{c_{m,l}\}^T \subset \{c_a d_b\}^T$. Обратное включение также выполняется. В самом деле, по условию все переменные z_j имеют уровень, больший l , поэтому $d_b = z_1^{p^l q_1} \cdots z_s^{p^l q_s}$, где q_j делится на p для любого $j = \overline{1, s}$. Осуществим в $c_{m,l}$ подстановку $x_1 \mapsto x_1 z_1^{q_1} \cdots z_s^{q_s}$. Получим следующий многочлен:

$$(x_1 z_1^{q_1} \cdots z_s^{q_s})^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1 z_1^{q_1} \cdots z_s^{q_s}, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m].$$

Учитывая, что q_j делится на p , применим коммутаторные соотношения к этому многочлену. В результате всех преобразований придем к многочлену $c_{m,l} z_1^{p^l q_1} \cdots z_s^{p^l q_s}$, равному $c_{m,l} d_b$. Таким образом, $c_{m,l} d_b \in \{c_{m,l}\}^T$. Согласно доказанному утверждению 1) этой теоремы $c_a \in \{c_{m,l}\}^T$. Поэтому $c_a d_b \in \{c_{m,l} d_b\}^T$. Значит, $c_a d_b \in \{c_{m,l}\}^T$. Следовательно, $\{c_a d_b\}^T \subset \{c_{m,l}\}^T$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если действовать на каждый блок коммутаторного многочлена $c_{2,l}$ подстановками, аналогичными приведенным выше для доказательства (3) при $m = 1$, то, в частности, в многочлен $c_{2,l}$ осуществляются подстановки $x_1 \mapsto x_1^{n_1}$ и $x_2 \mapsto x_2^{n_2}$. Первая подстановка не превратит $c_{2,l}$ в 0, так как по условию x_1 в многочлене c_a имеет уровень l , т.е. $(n_1, p) = 1$. А вторая подстановка может обратить $c_{2,l}$ в 0, поскольку в общем случае переменная x_2 в многочлене c_a может иметь уровень, больший l , т.е. n_2 делится на p . Поэтому для $m = 2$ в доказательстве теоремы 1.3 был предложен другой способ получения многочлена c_a из $c_{2,l}$ с помощью некоторых подстановок, который позволил избежать обращения многочлена $c_{2,l}$ в 0.

Также отметим, что в предложенном способе повышение степени переменной x_1 выполняется в последнюю очередь, а шаги 1 и 2 можно выполнять в любом порядке. Это связано с тем, что повышение степеней остальных переменных (см. шаги 1 и 2) осуществляется с помощью переменной x_1 . При этом нет необходимости повышать сначала степени переменных y_1 и y_2 , а затем переменной x_2 . Например, можно было бы повысить степени переменных x_2 и y_1 , используя подстановки, аналогичные указанным в шаге 1, а затем повысить степень оставшейся переменной y_2 , пользуясь способом, описанным в шаге 2.

ТЕОРЕМА 1.4 (вторая теорема о выравнивании). Пусть в многочлене $h_{a,b}$ одна из его переменных z_j , $j = \overline{1, s}$, имеет уровень l , а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный l . Тогда

$$CD_{a,b} = CD_{p^l}^{(m)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу коммутаторных соотношений все переменные z_i в многочлене $h_{a,b}$ абсолютно равноправны, поэтому без ограничения общности можно считать, что переменная z_1 имеет уровень l . Из условия следует, что числа в наборах a и b можно представить в следующем виде: $a_i = p^l n_i$, $a'_i = p^l n'_i$, $b_j = p^l q_j$, n_i, n'_i, q_j – произвольные натуральные числа, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s}$, причем $(q_1, p) = 1$. Применим к многочлену $c_a d_b \in CD_{a,b}$ подстановки $z_j \mapsto 1$, $j = \overline{2, s}$. Далее, с помощью метода спуска (см. доказательство теоремы 1.1) нетрудно показать, что $CD_{p^l}^{(m)} \subset CD_{a,b}$. Для доказательства обратного включения осуществим в $g_{m,l}$ подстановку

$$z_1 \mapsto z_1^{q_1} z_2^{q_2} \dots z_s^{q_s} x_1^{n_1-1} y_1^{n'_1-1} \dots x_m^{n_m-1} y_m^{n'_m-1}.$$

Воспользовавшись коммутаторными соотношениями и соотношениями Фробениуса, в результате из многочлена $g_{m,l}$ получим многочлен

$$\begin{aligned} & x_1^{p^l-1+p^l n_1-p^l} y_1^{p^l-1+p^l n'_1-p^l} [x_1, y_1] \dots x_m^{p^l-1+p^l n_m-p^l} y_m^{p^l-1+p^l n'_m-p^l} [x_m, y_m] \\ & \times z_1^{p^l q_1} z_2^{p^l q_2} \dots z_s^{p^l q_s}. \end{aligned}$$

Этот многочлен после упрощения станет равным $c_a d_b$. Значит, выполняется обратное включение $CD_{a,b} \subset CD_{p^l}^{(m)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В утверждении 2) первой теоремы о выравнивании существенно, что все переменные z_j , $j = \overline{1, s}$, имеют уровень, больший l . Иначе из второй теоремы о выравнивании следовало бы равенство $C_{p^l}^{(m)} = CD_{p^l}^{(m)}$, что невозможно в силу утверждения 2) теоремы 1.2.

Непосредственно из теорем о выравнивании и теоремы 1.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если $h_{a,b}$ – p -многочлен кратности $m \in \mathbb{N}$, то $h_{a,b}$ лежит в $CD_p^{(m)}$.

Следующие утверждения потребуются для доказательства простоты фактор- T -пространства $CD_p^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ и некоторых других T -пространств.

ЛЕММА 1.4. Пусть $n'_i, q_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, r}$. Тогда

$$\begin{aligned} q_1 z_1^{p^l q_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_1, y_1] z_2^{p^l q_2} \dots z_r^{p^l q_r} + q_2 z_2^{p^l q_2 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_2, y_1] z_1^{p^l q_1} z_3^{p^l q_3} \dots z_r^{p^l q_r} \\ + \dots + q_r z_r^{p^l q_r - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_r, y_1] z_1^{p^l q_1} \dots z_{r-1}^{p^l q_{r-1}} \equiv 0 \pmod{C_p^{(1)}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что левая часть доказываемого сравнения получается некоторыми подстановками и k -линейными действиями из многочлена $c_{1,l} = x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l - 1} [x_1, y_1]$, порождающего $C_p^{(1)}$. Из утверждения 1) первой теоремы о выравнивании следует, что многочлен $x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1]$ лежит в $C_p^{(1)}$.

Покажем теперь, что, осуществляя в многочлен $x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1]$ подстановку $x_1 \mapsto z_1^{q_1} \dots z_r^{q_r}$, мы получим левую часть сравнения из данной леммы. Итак, рассмотрим многочлен

$$(z_1^{q_1} \dots z_r^{q_r})^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_1^{q_1} \dots z_r^{q_r}, y_1]. \quad (4)$$

Используя коммутаторные соотношения, многочлен (4) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_1 (z_1^{q_1} \dots z_r^{q_r})^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} z_1^{q_1 - 1} [z_1, y_1] z_2^{q_2} \dots z_r^{q_r} \\ + q_2 (z_1^{q_1} \dots z_r^{q_r})^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} z_2^{q_2 - 1} [z_2, y_1] z_1^{q_1} z_3^{q_3} \dots z_r^{q_r} \\ + \dots + q_r (z_1^{q_1} \dots z_r^{q_r})^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} z_r^{q_r - 1} [z_r, y_1] z_1^{q_1} \dots z_{r-1}^{q_{r-1}}. \end{aligned}$$

В силу коммутаторных соотношений в каждом из слагаемых этой суммы переменные, стоящие в коммутаторах, коммутируют с любыми элементами из алгебры $F^{(3)}$. Поэтому эта сумма преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} q_1 z_1^{q_1 - 1 + p^l q_1 - q_1} (z_2^{q_2} \dots z_r^{q_r})^{p^l - 1} (z_2^{q_2} \dots z_r^{q_r}) y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_1, y_1] \\ + q_2 z_2^{q_2 - 1 + p^l q_2 - q_2} (z_1^{q_1} z_3^{q_3} \dots z_r^{q_r})^{p^l - 1} (z_1^{q_1} z_3^{q_3} \dots z_r^{q_r}) y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_2, y_1] \\ + \dots + q_r z_r^{q_r - 1 + p^l q_r - q_r} (z_1^{q_1} \dots z_{r-1}^{q_{r-1}})^{p^l - 1} (z_1^{q_1} \dots z_{r-1}^{q_{r-1}}) y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_r, y_1]. \end{aligned}$$

Упрощая последнее выражение, получаем

$$\begin{aligned} q_1 z_1^{p^l q_1 - 1} (z_2^{q_2} \dots z_r^{q_r})^{p^l} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_1, y_1] + q_2 z_2^{p^l q_2 - 1} (z_1^{q_1} z_3^{q_3} \dots z_r^{q_r})^{p^l} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_2, y_1] \\ + \dots + q_r z_r^{p^l q_r - 1} (z_1^{q_1} \dots z_{r-1}^{q_{r-1}})^{p^l} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_r, y_1]. \end{aligned}$$

Применяя к этому многочлену коммутаторные соотношения и соотношения Фробениуса, в итоге получим левую часть доказываемого сравнения.

Рассмотрим многочлены вида (см. обозначение (2))

$$c_{(p^l n_2, p^l n'_2)}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l n_m, p^l n'_m)}(x_m, y_m) \prod_{j=r+1}^s z_j^{p^l q_j},$$

где $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{2, m}$, а q_j делится на p для всех $j = \overline{r+1, s}$. Если отсутствуют коммутаторы ($m = 0$), то получаем, что этот многочлен есть одночлен $\prod_{j=r+1}^s z_j^{p^l q_j}$. Если при этом $q_j = 0$ для любого $j = \overline{r+1, s}$, то рассматриваемый многочлен по определению равен 1.

ЛЕММА 1.5. Пусть $(q_1, p) = 1$ и $q_{r+1}, \dots, q_s$ делятся на p . Тогда

$$\begin{aligned} & z_1^{p^l q_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_1, y_1] z_2^{p^l q_2} \cdots z_r^{p^l q_r} c_{(p^l n_2, p^l n'_2)}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l n_m, p^l n'_m)}(x_m, y_m) \\ & \times \prod_{j=r+1}^s z_j^{p^l q_j} \equiv z_1^{p^l q_1} g \pmod{C_{p^l}^{(m)}}, \end{aligned}$$

где g – линейная комбинация p -многочленов или 1-многочленов, не зависящих от переменной z_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы покажем сначала, что выполняется следующее сравнение:

$$\begin{aligned} & (q_1 z_1^{p^l q_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_1, y_1] z_2^{p^l q_2} \cdots z_r^{p^l q_r} + q_2 z_2^{p^l q_2 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_2, y_1] z_1^{p^l q_1} z_3^{p^l q_3} \cdots z_r^{p^l q_r} \\ & + \cdots + q_r z_r^{p^l q_r - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [z_r, y_1] z_1^{p^l q_1} \cdots z_{r-1}^{p^l q_{r-1}}) \\ & \times c_{(p^l n_2, p^l n'_2)}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l n_m, p^l n'_m)}(x_m, y_m) \prod_{j=r+1}^s z_j^{p^l q_j} \equiv 0 \pmod{C_{p^l}^{(m)}}. \end{aligned}$$

Действительно, по лемме 1.4 многочлен, стоящий в скобках в левой части этого сравнения, принадлежит T -пространству $C_{p^l}^{(1)} = \{c_{1,l}\}^T$. Отметим, что $c_{1,l} = c_{(a_1, a'_1)}(x_1, y_1)$, где $a_1 = a'_1 = p^l$. По первой теореме о выравнивании

$$c_{1,l} c_{(p^l n_2, p^l n'_2)}(x_2, y_2) \cdots c_{(p^l n_m, p^l n'_m)}(x_m, y_m) \prod_{j=r+1}^s z_j^{p^l q_j} \in C_{p^l}^{(m)}$$

(произведение $\prod_{j=r+1}^s z_j^{p^l q_j}$ согласно утверждению 2) этой теоремы может быть внесено в любой из блоков коммутаторного многочлена $c_{m,l}$. Так как $(q_1, p) = 1$, то из доказанного сравнения следует утверждение леммы.

С помощью леммы 1.5 покажем, что имеют место следующие две леммы.

ЛЕММА 1.6. Пусть f – произвольный p -многочлен, лежащий в $CD_{p^l}^{(m)}$. Тогда в многочлене f существует такая переменная z_i , что f представляется в следующем виде:

$$f \equiv z_i^{p^l q_i} g \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}},$$

где $(q_i, p) = 1$, g – линейная комбинация p -многочленов, не зависящих от переменной z_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Среди всех переменных p -многочлена f , имеющих наименьший уровень n , выберем одну. Для определенности положим, что выбранной переменной является z_1 . Если при этом выполняются условия первой теоремы о выравнивании, то $\{f\}^T = C_{p^n}^{(m)}$. Тогда из утверждения 2) теоремы 1.2 следует, что $f \equiv 0 \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$.

Если же выполняются условия второй теоремы о выравнивании, то

$$\{f\}^T = CD_{p^n}^{(m)}.$$

При этом $n \geq l$, иначе (т.е. при $n < l$) выполняется включение $CD_{p^n}^{(m)} \subset CD_{p^l}^{(m)}$, так как $f \in CD_{p^l}^{(m)}$. Полученное включение противоречит утверждению 1) теоремы 1.2. При $n > l$ из теоремы 1.2 следует, что $f \equiv 0 \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$. Если теперь $n = l$, то $(q_1, p) = 1$. Если z_1 не входит ни в один из коммутаторов многочлена f , то отсюда сразу следует утверждение леммы. Если переменная z_1 вошла в один из коммутаторов f , то с помощью леммы 1.5 получаем, что $f \equiv z_1^{p^l q_1} g \pmod{C_{p^l}^{(m)}}$, где g – линейная комбинация p -многочленов (так как f – p -многочлен), не зависящих от переменной z_1 . В силу $C_{p^l}^{(m)} \subset CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ получаем, что $f \equiv z_1^{p^l q_1} g \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$.

ЛЕММА 1.7. Пусть f – произвольный 1-многочлен, лежащий в $C^{(m)}$. Тогда в многочлене f существует такая переменная z_i уровня 0, что f представляется в следующем виде:

$$f \equiv z_i^{q_i} g \pmod{CD_p^{(m)}},$$

где $(q_i, p) = 1$, g – линейная комбинация многочленов, являющихся p -многочленами или 1-многочленами, не зависящими от переменной z_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для удобства переменной уровня 0 в многочлене f является z_1 . Если z_1 не входит ни в один из коммутаторов многочлена f , то отсюда сразу следует утверждение леммы. Если переменная z_1 вошла в один из коммутаторов f , то с помощью леммы 1.5 многочлен f представим в виде $f \equiv z_1^{q_1} g \pmod{C_1^{(m)}}$, где g – линейная комбинация многочленов, являющихся p -многочленами или 1-многочленами, не зависящими от переменной z_1 . В силу включения $C_1^{(m)} \subset CD_p^{(m)}$ получаем, что $f \equiv z_1^{q_1} g \pmod{CD_p^{(m)}}$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in F^{(3)}$ – произвольный многочлен и $u_1, \dots, u_n \in F^{(3)}$ – произвольные одночлены. Будем говорить, что многочлен $f(u_1, \dots, u_n)$ получен мономиальной подстановкой из многочлена $f(x_1, \dots, x_n)$. Докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 1.8. Если к p -многочлену кратности t применить мономиальную подстановку, то получится линейная комбинация p -многочленов кратности t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению p -многочлен можно записать в следующем виде:

$$x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m] z_1^{pq_1} \cdots z_s^{pq_s},$$

где $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Применим мономиальную подстановку к этому многочлену. В силу соотношений Фробениуса мономиальная подстановка

в p -одночлен $z_1^{pq_1} \dots z_s^{pq_s}$ переводит его снова в некоторый p -одночлен. Поэтому рассмотрим действие мономиальной подстановки на

$$x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \dots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m].$$

Достаточно понять, как мономиальная подстановка действует на один из блоков этого многочлена, например на первый блок $x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1]$.

Итак, рассмотрим многочлен $u^{pn_1-1} v^{pn'_1-1} [u, v]$, где u, v – произвольные одночлены из алгебры $F^{(3)}$. Одночлены u и v представим в виде $u = x_1 \dots x_r$, $v = y_1 \dots y_n$. При этом будем считать, что все переменные x_α, y_β попарно различны, $\alpha = \overline{1, r}$, $\beta = \overline{1, n}$. Аналогично тому, как это было проделано для многочлена (4) в доказательстве леммы 1.4, многочлен $(x_1 \dots x_r)^{pn_1-1} v^{pn'_1-1} [x_1 \dots x_r, v]$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & x_1^{pn_1-1} v^{pn'_1-1} [x_1, v] x_2^{pn_1} \dots x_r^{pn_1} + x_2^{pn_1-1} v^{pn'_1-1} [x_2, v] x_1^{pn_1} x_3^{pn_1} \dots x_r^{pn_1} \\ & + \dots + x_r^{pn_1-1} v^{pn'_1-1} [x_r, v] x_1^{pn_1} \dots x_{r-1}^{pn_1}. \end{aligned}$$

В каждом из слагаемых этого многочлена содержится в качестве сомножителя многочлен вида $v^{pn'_1-1} [x_\alpha, v]$, $\alpha = \overline{1, r}$. Этот многочлен аналогично тому, как это было проделано для многочлена (4) в доказательстве леммы 1.4, представим следующим образом:

$$\begin{aligned} & y_1^{pn'_1-1} [x_\alpha, y_1] y_2^{pn'_1} \dots y_n^{pn'_1} + y_2^{pn'_1-1} [x_\alpha, y_2] y_1^{pn'_1} y_3^{pn'_1} \dots y_n^{pn'_1} \\ & + \dots + y_n^{pn'_1-1} [x_\alpha, y_n] y_1^{pn'_1} \dots y_{n-1}^{pn'_1}. \end{aligned}$$

Подставляя полученный многочлен в соответствующее слагаемое предыдущего многочлена и используя коммутаторные соотношения, мы представим многочлен $u^{pn_1-1} v^{pn'_1-1} [u, v]$ в виде линейной комбинации p -многочленов, причем их кратность равна 1. Отсюда следует, что остальные блоки $u_i^{pn_i-1} v_i^{pn'_i-1} [u_i, v_i]$ также являются линейными комбинациями p -многочленов кратности 1, где u_i, v_i – произвольные одночлены из $F^{(3)}$, $i = \overline{2, m}$, а значит, произведение всех блоков является линейной комбинацией p -многочленов кратности m .

В § 2 будет доказано следующее: по модулю T -пространства $C_{p^l}^{(m)}$ действие алгебры kT на $g_{m,l}$ сводится к мономиальным подстановкам в этот многочлен. С помощью этого утверждения, а также с помощью лемм 1.6 и 1.8 доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть f – полиоднородный многочлен из $CD_{p^l}^{(m)}$. Тогда в многочлене f существует такая переменная z_i , что f представляется в следующем виде:

$$f \equiv z_i^{p^l q_i} f_1 \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}},$$

где $(q_i, p) = 1$, f_1 – линейная комбинация p -многочленов, не зависящих от переменной z_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in CD_{p^l}^{(m)}$, то по модулю T -пространства $C_{p^l}^{(m)}$ и, следовательно, по модулю T -пространства $CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ многочлен f – линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}$. Из леммы 1.8 следует, что все

многочлены линейной комбинации, дающие f , являются p -многочленами. А по лемме 1.6 каждый p -многочлен из линейной комбинации, дающий f , равен по модулю $CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ многочлену вида $z_i^{p^l q_i} g$, где $(q_i, p) = 1$, g – линейная комбинация p -многочленов, не зависящих от переменной z_i . Отсюда следует утверждение теоремы.

В случае $l = 0$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть f – полиоднородный многочлен из $C^{(m)}$. Тогда в многочлене f существует такая переменная z_i , что f представляется в следующем виде:

$$f \equiv z_i^{q_i} f_1 \pmod{(CD_p^{(m)} + C^{(m+1)})},$$

где $(q_i, p) = 1$, f_1 – линейная комбинация многочленов, являющихся либо p -многочленами, либо 1-многочленами, не зависящими от переменной z_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in C^{(m)}$ – полиоднородный многочлен, то f – линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных некоторыми подстановками и k -линейными действиями из $c_{m,0}z_1$. В силу перестановочности всех переменных по модулю $C^{(m+1)}$ и полиоднородности многочлена f получаем, что f по модулю $CD_p^{(m)} + C^{(m+1)}$ является линейной комбинацией 1-многочленов. В свою очередь, по лемме 1.7 каждый 1-многочлен линейной комбинации, дающий f , равен по модулю $CD_p^{(m)}$ и, следовательно, по модулю $CD_p^{(m)} + C^{(m+1)}$ многочлену вида $z_i^{q_i} g$, где $(q_i, p) = 1$, g – линейная комбинация многочленов, являющихся либо p -многочленами, либо 1-многочленами, не зависящими от переменной z_i .

§ 2. Теорема о мономиальности

В этом параграфе будет доказано утверждение, о котором говорилось в § 1, и даже больше того: по модулю T -пространств $C_{p^l}^{(m)}$ и $C_{p^{l-1}}^{(m)}$ действие алгебры kT на $g_{m,l}$ и $c_{m,l}$ сводится к мономиальным подстановкам в эти многочлены.

Для доказательства основного результата нам потребуется следующая

ЛЕММА 2.1. Имеет место сравнение

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1 + x_2, y_1] z^{p^l} \\ \equiv x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] z^{p^l} + x_2^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_2, y_1] z^{p^l} \pmod{C_{p^{l-1}}^{(1)}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу коммутаторных соотношений левую часть доказываемого сравнения запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1 + x_2, y_1] z^{p^l} \\ = \left(x_1^{p^l-1} + \binom{p^l-1}{1} x_1^{p^l-2} x_2 + \dots + \binom{p^l-1}{n-1} x_1^{p^l-n} x_2^{n-1} + \binom{p^l-1}{n} x_1^{p^l-n-1} x_2^n \right. \\ \left. + \dots + \binom{p^l-1}{p^l-2} x_1 x_2^{p^l-2} + x_2^{p^l-1} \right) ([x_1, y_1] + [x_2, y_1]) y_1^{p^l-1} z^{p^l}. \end{aligned}$$

Поэтому, как нетрудно видеть, однородный многочлен

$$f = (x_1 + x_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1 + x_2, y_1] z^{p^l}$$

представляется в виде суммы

$$f = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] z^{p^l} + \sum_n f_n z^{p^l} + x_2^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_2, y_1] z^{p^l},$$

где

$$f_n = \binom{p^l-1}{n-1} x_1^{p^l-n} x_2^{n-1} y_1^{p^l-1} [x_2, y_1] + \binom{p^l-1}{n} x_1^{p^l-n-1} x_2^n y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \quad (5)$$

есть полиоднородный многочлен типа $(p^l - n, n, p^l)$, $n \in \{1, \dots, p^l - 1\}$, выделенный из однородного многочлена $(x_1 + x_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1 + x_2, y_1]$. Для доказательства леммы нужно показать, что $f_n z^{p^l} \in C_{p^l-1}^{(1)}$ для любого $n = \overline{1, p^l - 1}$.

Заметим, что коэффициенты в правой части равенства (5) связаны соотношением

$$\binom{p^l-1}{n-1} + \binom{p^l-1}{n} = \binom{p^l}{n}$$

при $n = \overline{1, p^l - 1}$, причем $\binom{p^l}{n} \equiv 0 \pmod{p}$. Поэтому многочлен f_n примет вид $f_n = \binom{p^l-1}{n} \varphi_n$, где

$$\varphi_n = x_1^{p^l-n-1} x_2^n y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] - x_1^{p^l-n} x_2^{n-1} y_1^{p^l-1} [x_2, y_1].$$

Достаточно теперь показать, что $\varphi_n z^{p^l} \in C_{p^l-1}^{(1)}$ для любого $n = \overline{1, p^l - 1}$.

Рассмотрим произвольное n из множества $\{1, \dots, p^l - 1\}$; тогда n можно представить в виде $p^{l_1} n_1$, где $(n_1, p) = 1$, причем $p^{l_1} n_1 < p^l$. Отсюда следует, что l_1 — это некоторое число из множества $\{0, \dots, l - 1\}$. Сначала покажем, что φ_n получается некоторыми подстановками из многочлена $x_1^{p^{l_1}-1} y_1^{p^{l_1}-1} [x_1, y_1] \in C_{p^{l_1}}^{(1)}$ для указанного n . Действительно, из этого многочлена подстановкой $x_1 \mapsto x_1 y_1^{p^{l_1-1}-1}$ и применением коммутаторных соотношений получим многочлен $x_1^{p^{l_1}-1} y_1^{p^{l_1}-1} [x_1, y_1]$. Такая подстановка возможна, поскольку $l_1 < l$. Подставим теперь $x_1 x_2$ вместо переменной x_1 полученного многочлена. Используя очевидное равенство $[x_1 x_2, y_1] = x_1 [x_2, y_1] + x_2 [x_1, y_1]$, после такой подстановки мы приходим к многочлену

$$x_1^{p^{l_1}} x_2^{p^{l_1}-1} y_1^{p^{l_1}-1} [x_2, y_1] + x_2^{p^{l_1}} x_1^{p^{l_1}-1} y_1^{p^{l_1}-1} [x_1, y_1].$$

Осуществим подстановки $x_1 \mapsto x_1^{p^{l-l_1}-n_1}$, $x_2 \mapsto x_2^{n_1}$ в последний многочлен. Они корректны, так как $n_1 > 0$ и $p^{l-l_1} - n_1 = p^l/p^{l_1} - n/p^{l_1} = (p^l - n)/p^{l_1} > 0$ в силу условия $n \in \{1, \dots, p^l - 1\}$.

В результате указанных подстановок получим

$$(x_1^{p^{l-l_1}-n_1})^{p^{l_1}} (x_2^{n_1})^{p^{l_1}-1} y_1^{p^{l_1}-1} [x_2^{n_1}, y_1] + (x_2^{n_1})^{p^{l_1}} (x_1^{p^{l-l_1}-n_1})^{p^{l_1}-1} y_1^{p^{l_1}-1} [x_1^{p^{l-l_1}-n_1}, y_1].$$

Согласно коммутаторным соотношениям этот многочлен приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} & n_1 x_1^{p^l-n} x_2^{n-n_1+n_1-1} y_1^{p^l-1} [x_2, y_1] \\ & + (p^{l-l_1} - n_1) x_2^n x_1^{p^l-n-p^{l-l_1}+n_1+p^{l-l_1}-n_1-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $p^{l-l_1} - n_1 \equiv -n_1 \pmod{p}$ при $l_1 < l$, этот многочлен после упрощения станет равным многочлену $n_1 \varphi_n$. Поскольку $(n_1, p) = 1$, то $\varphi_n \in \{c_{m,l_1}\}^T$. Отсюда получаем, что $\varphi_n z^{p^l} \in \{z^{p^l} c_{m,l_1}\}^T$. Из утверждения 2) первой теоремы о выравнивании получаем, что $c_{m,l_1} z^{p^l} \in \{c_{m,l_1}\}^T$, поэтому $\varphi_n z^{p^l} \in \{c_{m,l_1}\}^T = C_{p^{l_1}}^{(1)}$. Из неравенства $l_1 \leq l-1$ согласно утверждению 1) теоремы 1.2 следует, что $C_{p^{l_1}}^{(1)} \subseteq C_{p^{l-1}}^{(1)}$. Значит, $\varphi_n z^{p^l} \in C_{p^{l-1}}^{(1)}$. Последнее утверждение верно для любого $n = 1, p^l - 1$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2.1 (о мономиальности). *По модулю T -пространства $C_{p^l}^{(m)}$ (соответственно $C_{p^{l-1}}^{(m)}$) для произвольного $\tau \in kT$ многочлен $(g_{m,l})^\tau$ (соответственно $(c_{m,l})^\tau$) есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из многочлена $g_{m,l}$ (соответственно $c_{m,l}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношений Фробениуса действие алгебры kT на сомножитель z^{p^l} многочлена $g_{m,l} = c_{m,l} z^{p^l}$ сводится к мономиальным подстановкам, поэтому рассмотрим действие kT на сомножитель $c_{m,l}$. Легко видеть, что для доказательства теоремы достаточно показать выполнение следующих сравнений:

$$\begin{aligned} g_{m,l}(z_1 + z_2, y_1, \dots, x_m, y_m, z) \\ \equiv g_{m,l}(z_1, y_1, \dots, x_m, y_m, z) + g_{m,l}(z_2, y_1, \dots, x_m, y_m, z) \pmod{C_{p^l}^{(m)}}, \\ c_{m,l}(z_1 + z_2, y_1, \dots, x_m, y_m) \\ \equiv c_{m,l}(z_1, y_1, \dots, x_m, y_m) + c_{m,l}(z_2, y_1, \dots, x_m, y_m) \pmod{C_{p^{l-1}}^{(m)}}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что многочлен

$$\begin{aligned} g_{m,l}(z_1 + z_2, y_1, \dots, x_m, y_m, z) \\ = (z_1 + z_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [z_1 + z_2, y_1] x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] z^{p^l} \end{aligned}$$

равен

$$\begin{aligned} g_{m,l}(z_1, y_1, \dots, x_m, y_m, z) + g_{m,l}(z_2, y_1, \dots, x_m, y_m, z) \\ + \sum_{n=1}^{p^l-1} f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] z^{p^l}, \end{aligned}$$

где f_n – полиоднородный многочлен типа $(p^l - n, n, p^l)$, $n \in \{1, \dots, p^l - 1\}$, выделенный из однородного многочлена $(z_1 + z_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [z_1 + z_2, y_1]$ (см. формулу (5)). Остается показать, что для любого $n = 1, p^l - 1$ многочлен

$$f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] z^{p^l}$$

принадлежит T -пространству $C_{p^l}^{(m)}$. Действительно, $f_n z^{p^l} \in C_{p^{l-1}}^{(1)}$ по лемме 2.1, в свою очередь, $C_{p^{l-1}}^{(1)} \subset C_{p^l}^{(1)}$ согласно утверждению 1) теоремы 1.2, значит, $f_n z^{p^l} \in C_{p^l}^{(1)}$. По определению

$$x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] \in C_{p^l}^{(m-1)}.$$

Значит, произведение f_n на предыдущий многочлен лежит в $C_{p^l}^{(m)}$. Следовательно, выполняется первое из указанных выше соотношений.

Многочлен $c_{m,l}(z_1 + z_2, y_1, \dots, x_m, y_m)$ представляется в виде суммы

$$c_{m,l}(z_1, y_1, \dots, x_m, y_m) + c_{m,l}(z_2, y_1, \dots, x_m, y_m) \\ + \sum_{n=1}^{p^l-1} f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m],$$

где f_n – многочлен, определенный так же, как в начале доказательства. Согласно лемме 2.1 для любого $n = \overline{1, p^l - 1}$ имеем $f_n \in \{c_{1,l-1}\}^T$. Тогда

$$f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] \\ \in \{c_{1,l-1} x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]\}^T.$$

Из утверждения 1) первой теоремы о выравнивании получаем, что T -пространство $\{c_{1,l-1} x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]\}^T$ совпадает с $C_{p^{l-1}}^{(m)}$. Следовательно,

$$f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] \in C_{p^{l-1}}^{(m)}.$$

Значит, выполняется второе из указанных выше соотношений.

Напомним, что коммутаторный многочлен кратности m уровня 0 имеет вид $c_{m,0} = [x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$. Из теоремы 2.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Любой многочлен из T -пространства $C_{p^l}^{(m)}$ (соответственно из $CD_{p^l}^{(m)}$) есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \dots, c_{m,1}, c_{m,0}$ (соответственно из $g_{m,l}, c_{m,l}, \dots, c_{m,1}, c_{m,0}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен $f \in C_{p^l}^{(m)}$. По теореме 2.1 он представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}$, и некоторого многочлена $f_1 \in C_{p^{l-1}}^{(m)}$. По этой же теореме f_1 также представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l-1}$, и некоторого многочлена $f_2 \in C_{p^{l-2}}^{(m)}$. Продолжая таким образом представлять на каждом шаге многочлены $f_i \in C_{p^{l-i}}^{(m)}$ с помощью теоремы 2.1 в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l-i}$, и некоторого многочлена $f_{i+1} \in C_{p^{l-(i+1)}}^{(m)}$, $i = \overline{3, l-1}$, в конце концов многочлен f представим в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \dots, c_{m,1}$, и некоторого многочлена f_l , принадлежащего T -пространству $C_1^{(m)} = \{c_{m,0}\}^T$. Из полилинейности $c_{m,0}$ следует, что f_l есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,0}$. Таким образом, f есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \dots, c_{m,1}, c_{m,0}$.

Рассмотрим теперь многочлен $f \in CD_{p^l}^{(m)}$. По теореме 2.1 он представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}$, и некоторого многочлена $f_1 \in C_{p^l}^{(m)}$. Согласно доказанному

выше f_1 есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \dots, c_{m,1}, c_{m,0}$. Значит, f представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}, c_{m,l}, \dots, c_{m,1}, c_{m,0}$.

Исследуем линейную структуру T -пространства W_p . Для этого рассмотрим канонический базис (1) алгебры $F^{(3)}$. Выделим в нем подсистему Δ , состоящую из многочленов, у которых m_i делятся на p . Эта система, очевидно, лежит в W_p и состоит из двух непересекающихся подсистем: Δ_p (p -многочлены) и Δ_1 (такие 1-многочлены, которые лежат в Δ). По первой теореме о выравнивании $\Delta_1 \subset C_1$.

Согласно следствию 2.1 и лемме 1.8 линейное пространство W_p можно представить в виде суммы его подпространств $k\Delta_p$ (линейная оболочка Δ_p) и C_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Линейное пространство W_p раскладывается в прямую сумму $k\Delta_p \oplus C_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $k\Delta_p \cap C_1 = 0$. Пусть f – некоторая нетривиальная линейная комбинация p -многочленов, лежащая в C_1 . Очевидно, можно считать, что многочлен f полиоднороден. Рассмотрим p -многочлен h с наименьшим числом коммутаторов, входящий в f . Если h – одночлен (т.е. $m = 0$), то, полагая все переменные равными 1, получаем $1 = 0$, что невозможно. Если $m > 0$ и X – множество переменных, входящих в коммутаторы многочлена h , то любой другой p -многочлен из разложения f имеет в своих коммутаторах хотя бы одну переменную, не лежащую в X .

Положим все переменные, не лежащие в X , равными 1. Тогда все слагаемые из разложения f перейдут в некоторый ненулевой p -многочлен h_1 , лежащий по предположению в C_1 . Но тогда для некоторых m и l по первой теореме о выравнивании $C_{p^l}^{(m)} \subset \{h_1\}^T \subset C_1$, что противоречит теореме о независимости (см. § 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Система Δ_1 является только частью базиса C_1 . Так, например, многочлен $[x_1x_2, x_3] = x_1[x_2, x_3] + x_2[x_1, x_3]$ не может быть выражен через Δ_1 . Следовательно, система Δ не образует базис пространства W_p . Поиск хорошего базиса T -пространства C_1 – отдельная задача, которая здесь не рассматривается.

§ 3. Теорема о независимости элементарных составляющих

Связь между введенными в § 1 T -пространствами C_{p^l} и CD_{p^l} , а также T -пространствами $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (элементарными составляющими), согласно теореме 1.2 и лемме 1.2 выражается диаграммой 1, в которой, как будет видно из теоремы 3.1, все включения строгие (см. также [12], [13]).

Далее нам потребуются следующие определения. Подстановки вида

$$x \mapsto x_1 + \dots + x_r + \alpha,$$

где r – произвольное натуральное число и α – произвольный элемент из поля k , будем называть *линейными*. Применим к каждой переменной многочлена $c_{m,l} = x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1}y_m^{p^l-1}[x_m, y_m]$ линейные подстановки. Через c_i

ДИАГРАММА 1

$$\begin{array}{ccccccc}
C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \cdots \supset C^{(m-1)} \supset C^{(m)} \supset \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
CD_p & = & CD_p^{(1)} & + & CD_p^{(2)} & + & \cdots + CD_p^{(m-1)} + CD_p^{(m)} + \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
CD_{p^2} & = & CD_{p^2}^{(1)} & + & CD_{p^2}^{(2)} & + & \cdots + CD_{p^2}^{(m-1)} + CD_{p^2}^{(m)} + \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
CD_{p^l} & = & CD_{p^l}^{(1)} & + & CD_{p^l}^{(2)} & + & \cdots + CD_{p^l}^{(m-1)} + CD_{p^l}^{(m)} + \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
C_{p^l} & = & C_{p^l}^{(1)} & + & C_{p^l}^{(2)} & + & \cdots + C_{p^l}^{(m-1)} + C_{p^l}^{(m)} + \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
C_p & = & C_p^{(1)} & + & C_p^{(2)} & + & \cdots + C_p^{(m-1)} + C_p^{(m)} + \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \cdots \supset C_1^{(m-1)} \supset C_1^{(m)} \supset \cdots
\end{array}$$

обозначим полиоднородные многочлены фиксированных типов, выделенные соответственно из сомножителей $x_i^{p^l-1}y_i^{p^l-1}[x_i, y_i]$ многочлена $c_{m,l}$ после действия на них линейных подстановок. Будем считать, что $c_1, \dots, c_m$ зависят от непересекающихся наборов переменных и $\{x_1, \dots, x_t\}$ – объединение этих наборов. Обозначим через c произведение многочленов $c_1 \cdots c_m$. Таким образом, из многочлена $c_{m,l}$ с помощью линейных подстановок и k -линейных действий выделен (с учетом бесконечности поля k) некоторый многочлен $c(x_1, \dots, x_t)$.

Имеет место следующее утверждение (см. [4]).

ЛЕММА 3.1. Пусть $u_1, \dots, u_t$ – такие одночлены из алгебры $F^{(3)}$, что в многочлен $c(u_1, \dots, u_t)$ все переменные входят с кратностью p^{l+1} . Тогда

$$c(u_1, \dots, u_t) = 0.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующее важное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Если к p -многочленам $c_{m,l}$ и $g_{m,l}$ применить подстановку, для которой кратность вхождения всех переменных в результат подстановки равна p^l , то получится линейная комбинация p -многочленов кратности m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2.1 любое действие алгебры kT на p -многочлен $c_{m,l}$ переводит его в линейную комбинацию многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \dots, c_{m,1}, c_{m,0}$, а действие на p -многочлен $g_{m,l}$ переводит в линейную комбинацию многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}, c_{m,l}, \dots, c_{m,1}, c_{m,0}$. По лемме 1.8 многочлены, полученные мономиальными подстановками из $g_{m,l}, c_{m,l}, \dots, c_{m,1}$, являются линейными комбинациями p -многочленов кратности m . А многочлены, полученные мономиальными подстановками из $c_{m,0}$, по лемме 3.1 равны нулю.

Положим

$$\begin{aligned}\Omega(CD_{p^l}^{(m)}) &= CD_{p^{l+1}}^{(m)} + \sum_{i < m} CD_p^{(i)} + C^{(m+1)}, \\ \Omega(C_{p^l}^{(m)}) &= C_{p^l}^{(m)} + \sum_{i < m} CD_p^{(i)} + C^{(m+1)}.\end{aligned}$$

Другими словами, если $\mathcal{M}$ равно $C_{p^{l+1}}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$, то $\Omega(\mathcal{M})$ – T -пространство, порожденное всеми T -пространствами, находящимися в диаграмме 1 ниже $\mathcal{M}$ (достаточно взять ближайшее снизу), а также находящимися левее $\mathcal{M}$ (достаточно взять вторые сверху) и правее $\mathcal{M}$ (достаточно взять ближайший справа элемент самой верхней строки диаграммы 1).

Некоторую независимость любого элемента $C_{p^{l+1}}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$ из диаграммы 1 от всех остальных, кроме тех, что находятся выше по столбцу, показывает следующая

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\mathcal{M}$ равно $C_{p^{l+1}}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$. Тогда $(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M}))/\Omega(\mathcal{M})$ – ненулевое T -пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M} = C_{p^{l+1}}^{(m)}$. Докажем, что $(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M}))/\Omega(\mathcal{M})$ – ненулевое T -пространство. Предположим, что $c_{m,l+1} \in \Omega(C_{p^{l+1}}^{(m)})$, т.е. многочлен $c_{m,l+1}$ является линейной комбинацией многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из многочленов, порождающих T -пространства, входящие в $\Omega(C_{p^{l+1}}^{(m)})$.

В частности, среди слагаемых линейной комбинации могут иметься всевозможные многочлены $s(u_1, \dots, u_t)$, где s – многочлен, выделенный из многочлена $c_{m,l}$ с помощью линейных подстановок так, как это было описано выше, $u_1, \dots, u_t$ – некоторые одночлены из алгебры $F^{(3)}$. В силу того, что в многочлен $c_{m,l+1}$ все переменные входят с кратностью p^{l+1} , в многочлены $s(u_1, \dots, u_t)$ каждая переменная входит с этой же кратностью. Отсюда по лемме 3.1 получаем, что все такие многочлены $s(u_1, \dots, u_t)$ равны нулю. Следовательно, элементы из $C_{p^l}^{(m)}$ могут давать только нулевой вклад в представление $c_{m,l+1}$ в виде многочленов из $\Omega(C_{p^{l+1}}^{(m)})$.

Поскольку кратность вхождения всех переменных в $c_{m,l+1}$ равна p^{l+1} , то согласно предложению 3.1 многочлены из $\sum_{i < m} CD_p^{(i)}$ являются линейными комбинациями p -многочленов с кратностями, не превосходящими $m - 1$, которые имеют сомножитель вида $x_r^{p^{l+1}}$ (хотя бы одна переменная не попадает в коммутатор). Применяя подстановку $x \mapsto x+1$ к каждой из входящих в $c_{m,l+1}$ переменных и линеаризуя, из многочлена $c_{m,l+1}$ получим произведение коммутаторов $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$. При этом в многочленах из $\sum_{i < m} CD_p^{(i)}$ сомножители вида $x_r^{p^{l+1}}$ перейдут в одночлены $p^{l+1}x_r$, и, следовательно, многочлены из $\sum_{i < m} CD_p^{(i)}$ переходят в нуль. А многочлены из $C^{(m+1)}$ также перейдут в нуль после указанных подстановок и линеаризаций, так как хотя бы в одном из коммутаторов вместо одной из его переменных появится 1. Таким образом, $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m] = 0$ в $F^{(3)}$, что противоречит лемме 1.1.

Пусть теперь $\mathcal{M} = CD_{p^l}^{(m)}$. Докажем, что T -пространство $(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M}))/\Omega(\mathcal{M})$ ненулевое. Предположим противное, т.е. пусть $g_{m,l} = c_{m,l}z_1^{p^l}$ является линейной комбинацией многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из многочленов, порождающих T -пространства, входящие в $\Omega(CD_{p^l}^{(m)})$.

Среди слагаемых линейной комбинации могут встретиться многочлены, получающиеся некоторыми подстановками из многочлена $g_{m,l+1} = c_{m,l+1}z_1^{p^{l+1}}$. Проследим за подстановками в $z_1^{p^{l+1}}$. Согласно соотношениям Фробениуса достаточно рассмотреть либо только мономальные подстановки, либо только подстановки элементов поля k вместо переменной z_1 многочлена $g_{m,l+1}$. Если вместо переменной z_1 подставить некоторый одночлен $u \in F^{(3)}$, то это даст не менее p^{l+1} вхождений каждой из входящих в одночлен u переменных. С другой стороны, в многочлен $g_{m,l}$ каждая его переменная входит с кратностью p^l . Поэтому остаются только подстановки некоторых элементов поля k вместо переменной z_1 . Тогда все слагаемые линейной комбинации, дающие $g_{m,l}$ и появляющиеся в результате некоторых подстановок в многочлен $g_{m,l+1}$, на самом деле получаются из многочлена $c_{m,l+1}$, т.е. принадлежат T -пространству $C_{p^{l+1}}^{(m)}$.

Заметим, что при подстановке $z_1 \mapsto x_1^{p^2-1}y_1^{p^2-1} \cdots x_m^{p^2-1}y_m^{p^2-1}$ в $g_{m,l}$ этот многочлен перейдет в многочлен

$$c_{m,l+2} = x_1^{p^{l+2}-1}y_1^{p^{l+2}-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^{l+2}-1}y_m^{p^{l+2}-1}[x_m, y_m].$$

Из сделанного предположения следует, что $c_{m,l+2} \in \Omega(C_{p^{l+2}}^{(m)})$. А это противоречит доказанному выше утверждению, согласно которому при $\mathcal{M} = C_{p^{l+2}}^{(m)}$ T -пространство $(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M}))/\Omega(\mathcal{M})$ ненулевое. Отсюда получаем, что для $\mathcal{M} = CD_{p^l}^{(m)}$ T -пространство $(\mathcal{M} + \Omega(\mathcal{M}))/\Omega(\mathcal{M})$ ненулевое.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *T -пространства*

$$(C_{p^{l+1}}^{(m)} + C^{(m+1)})/(C_{p^l}^{(m)} + C^{(m+1)}), \quad (CD_{p^l}^{(m)} + C^{(m+1)})/(CD_{p^{l+1}}^{(m)} + C^{(m+1)})$$

ненулевые.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *T -пространства $C_{p^{l+1}}^{(m)}/C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ ненулевые.*

ДИАГРАММА 2

$$\begin{array}{cccccc}
\widehat{C} & = & \widehat{C^{(1)}} & \supset & \widehat{C^{(2)}} & \supset \cdots \supset & \widehat{C^{(m-1)}} & \supset & \widehat{C^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\widehat{CD_p} & = & \widehat{CD_p^{(1)}} & + & \widehat{CD_p^{(2)}} & + \cdots + & \widehat{CD_p^{(m-1)}} & + & \widehat{CD_p^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\widehat{CD_{p^l}} & = & \widehat{CD_{p^l}^{(1)}} & + & \widehat{CD_{p^l}^{(2)}} & + \cdots + & \widehat{CD_{p^l}^{(m-1)}} & + & \widehat{CD_{p^l}^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\widehat{C_{p^l}} & = & \widehat{C_{p^l}^{(1)}} & + & \widehat{C_{p^l}^{(2)}} & + \cdots + & \widehat{C_{p^l}^{(m-1)}} & + & \widehat{C_{p^l}^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\widehat{C_p} & = & \widehat{C_p^{(1)}} & + & \widehat{C_p^{(2)}} & + \cdots + & \widehat{C_p^{(m-1)}} & + & \widehat{C_p^{(m)}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\widehat{C_1} & = & \widehat{C_1^{(1)}} & \supset & \widehat{C_1^{(2)}} & \supset \cdots \supset & \widehat{C_1^{(m-1)}} & \supset & \widehat{C_1^{(m)}}
\end{array}$$

Рассмотрим теперь T -пространство $\widehat{C} = C/C^{(m+1)}$. Если $\mathcal{M}$ – произвольный элемент диаграммы 1, то его образ в $\widehat{C}$ обозначим через $\widehat{\mathcal{M}}$. Тогда по модулю $C^{(m+1)}$ диаграмма 1 примет вид диаграммы 2.

Из теоремы 3.1 следует, что в диаграмме 2 все включения строгие и все элементы ненулевые. Кроме того, для этих элементов имеют место аналогии теоремы 3.1 и следствий 3.1 и 3.2.

§ 4. Простота элементарных факторов и прямые суммы

Всюду ниже в этом параграфе мы предполагаем, что $l > 0$. Выше отмечалось, что T -пространство W_{p^l} распадается в прямую сумму $D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$. Пространства CD_{p^l} описываются диаграммой 1. В работе [13] доказано, что

$D_{p^l}/D_{p^{l+1}}$ – простой kT -модуль. На самом деле имеет место более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Любой ненулевой подмодуль Q в kT -модуле D_p , отличный от $k \cdot 1$, совпадает с одним из его kT -подмодулей D_{p^l} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T$, причем имеет место следующая бесконечная строго убывающая цепочка kT -подмодулей:

$$D_p \supset D_{p^2} \supset \dots \supset D_{p^l} \supset \dots$$

Пусть Q – произвольный ненулевой подмодуль в D_p , $Q \neq k \cdot 1$, и для некоторого l выполнено включение $Q \subset D_{p^l}$, но $Q \not\subset D_{p^{l+1}}$. Тогда существует ненулевой полиоднородный многочлен $f \in Q$, который в силу соотношений Фробениуса и коммутаторных соотношений равен одночлену $\alpha x_{i_1}^{p^l m_{i_1}} \dots x_{i_s}^{p^l m_{i_s}}$, где $\alpha \in k$ отлично от нуля, а среди чисел $m_{i_1}, \dots, m_{i_s} \in \mathbb{N}$ хотя бы одно не делится на p . Для определенности положим $(m_{i_1}, p) = 1$. Тогда, подставляя 1 в одночлен f вместо всех его переменных, кроме x_{i_1} , получаем, что $\alpha x_{i_1}^{p^l m_{i_1}} \in Q$. Применяя метод спуска к одночлену $x_{i_1}^{p^l m_{i_1}}$ аналогично тому, как это было сделано в доказательстве утверждения 2) теоремы 1.1, получим, что $x_{i_1}^{p^l} \in Q$. Отсюда получаем, что $D_{p^l} \subset Q$. Следовательно, $D_{p^l} = Q$ для некоторого l .

Естественным образом возникает вопрос о простоте следующих T -пространств: $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$, которые назовем *элементарными факторами*.

Введем обозначения. Пусть $\overline{CD_{p^l}} = CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$ и $\overline{C_{p^l}} = C_{p^l}/C_{p^{l-1}}$. Тогда $\overline{CD_{p^l}} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{CD_{p^l}^{(m)}}$ и $\overline{C_{p^l}} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{C_{p^l}^{(m)}}$, где $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$ и $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ – образы $CD_{p^l}^{(m)}$ и $C_{p^l}^{(m)}$ в T -пространствах $\overline{CD_{p^l}}$ и $\overline{C_{p^l}}$ соответственно. Весьма важным структурным фактом является то, что указанные суммы прямые. Мы покажем, что T -пространство $\overline{C_{p^l}}$ (соответственно $\overline{CD_{p^l}}$) раскладывается в прямую сумму своих простых T -подпространств $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ (соответственно $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$).

Образ произвольного многочлена $f \in F^{(3)}$ в T -пространствах $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ будем обозначать через $\bar{f}$, а в T -пространствах $\overline{CD_{p^l}}$, $\overline{C_{p^l}}$ – через $\tilde{f}$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4.2. *T -пространство $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ является простым kT -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует ненулевой подмодуль

$$U \subsetneq C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}.$$

Тогда существует ненулевой многочлен $\bar{f} \in U$. Будем считать, что f – полиоднородный многочлен фиксированного типа. По теореме 2.1 многочлен f по модулю $C_{p^{l-1}}^{(m)}$ – линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных мономиальными подстановками из многочлена $c_{m,l}$. Воспользуемся тем, что коммутатор $[u, v]$ любых двух одночленов в $F^{(3)}$

можно расписать как линейную комбинацию коммутаторов от переменных вида $[x_i, x_j]$, умноженных на одночлены. Тогда получаем, что многочлен f – линейная комбинация многочленов, совпадающих с точностью до обозначения переменных с многочленом

$$[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m] w, \quad (6)$$

где одночлен $w \in F^{(3)}$ зависит от переменных x_i, y_i , $i = \overline{1, m}$, и, возможно, от некоторых переменных $z_1, \dots, z_s$.

Коммутаторным типом вхождения переменных назовем набор переменных, входящих в произведение коммутаторов (6). По лемме 1.8 получаем, что многочлен f на самом деле является линейной комбинацией p -многочленов. Приводя подобные слагаемые, получаем, что f – линейная комбинация p -многочленов, отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Поскольку $\bar{f} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении f существует ненулевой p -многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу следующего вида:

$$\alpha x_1^{p^{l_1} n_1 - 1} y_1^{p^{l_1} n'_1 - 1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^{l_m} n_m - 1} y_m^{p^{l_m} n'_m - 1} [x_m, y_m] z_1^{p^{l_1} q_1} \cdots z_s^{p^{l_s} q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При подстановке 1 во все переменные одночлена $z_1^{p^{l_1} q_1} \cdots z_s^{p^{l_s} q_s}$ все многочлены линейной комбинации, дающие f , становятся равными нулю (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1), кроме выбранного, который перейдет в многочлен

$$\alpha x_1^{p^{l_1} n_1 - 1} y_1^{p^{l_1} n'_1 - 1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^{l_m} n_m - 1} y_m^{p^{l_m} n'_m - 1} [x_m, y_m].$$

К каждой переменной этого многочлена применим метод спуска (см. доказательство утверждения 1) теоремы 1.1). Получим многочлен $\beta c_{m,l}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Таким образом, $\overline{c_{m,l}} \in \{\bar{f}\}^T$, следовательно, выполняется равенство $U = C_{p^l}^{(m)} / C_{p^{l-1}}^{(m)}$, что противоречит строгому включению $U \subsetneq C_{p^l}^{(m)} / C_{p^{l-1}}^{(m)}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. T -пространства $C_{p^l}^{(m)} / C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение $\varphi: C_{p^l}^{(m)} / C_{p^{l-1}}^{(m)} \rightarrow \overline{C_{p^l}^{(m)}}$ по формуле $\varphi(\overline{c_{m,l}}) = \widetilde{c_{m,l}}$. Нетрудно убедиться, что отображение задано корректно и является эпиморфизмом. Отметим, что $\text{Ker } \varphi = 0$. В противном случае из теоремы 4.2 следует, что $\text{Ker } \varphi = C_{p^l}^{(m)} / C_{p^{l-1}}^{(m)}$. Тогда $\text{Im } \varphi = 0$. Следовательно, $\overline{C_{p^l}^{(m)}} = 0$, что противоречит теореме 3.1. Отсюда получаем, что отображение φ – мономорфизм. Таким образом, построенное отображение – изоморфизм.

ТЕОРЕМА 4.3. T -пространство $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ раскладывается в бесконечную прямую сумму простых T -пространств $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$, изоморфных T -пространствам $C_{p^l}^{(m)} / C_{p^{l-1}}^{(m)}$, т.е.

$$\overline{C_{p^l}^{(m)}} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \overline{C_{p^l}^{(m)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, $\overline{C_{p^l}} = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{C_{p^l}^{(m)}}$, где по следствию 4.1 T -пространства $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ изоморфны простым T -пространствам $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$. Отсюда получаем, что T -пространства $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$ являются простыми. То, что

$$\overline{C_{p^l}^{(m)}} \cap \sum_{j \neq m} \overline{C_{p^l}^{(j)}} = \{0\},$$

прямо следует из теоремы о независимости элементарных составляющих (см. теорему 3.1).

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Имеет место изоморфизм*

$$C_{p^l}/C_{p^{l-1}} \cong \bigoplus_{m=1}^{\infty} C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)},$$

где $C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)}$ – ненулевой простой kT -модуль. Изоморфное отображение $\bigoplus_{m=1}^{\infty} C_{p^l}^{(m)}/C_{p^{l-1}}^{(m)} \rightarrow C_{p^l}/C_{p^{l-1}}$ определяется соответствием

$$\sum_{m=1}^{\infty} \overline{f_m} \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{f_m}.$$

Докажем теперь следующее утверждение, из которого будет следовать разложение $\overline{CD_{p^l}}$ в прямую сумму.

ТЕОРЕМА 4.4. *T -пространство $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ является простым kT -модулем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует ненулевой подмодуль

$$U \subsetneq CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}.$$

Тогда существует ненулевой многочлен $\overline{f} \in U$. Будем считать, что f – однородный многочлен фиксированного типа. По теореме 1.5 в многочлене f найдется такая переменная, например z_1 , что $f \equiv z_1^{p^l q_1} f_1 \pmod{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$, где $(q_1, p) = 1$, f_1 – линейная комбинация p -многочленов, не зависящих от переменной z_1 и отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Поскольку $\overline{f} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении f существует ненулевой p -многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу следующего вида:

$$\alpha x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n'_m - 1} [x_m, y_m] z_1^{p^l q_1} \cdots z_s^{p^l q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, z_1 – переменная уровня l , $q_1, n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{2, s}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$, $j = \overline{2, s}$, в многочлен f . В результате все p -многочлены линейной комбинации, дающие f , станут равными нулю (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1), кроме выбранного, который перейдет в многочлен

$$\alpha x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n'_m - 1} [x_m, y_m] z_1^{p^l q_1}.$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полиоднородный многочлен степени p^l по всем переменным (см. теорему 1.1), получим многочлен $\beta g_{m,l}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Таким образом, $\overline{g_{m,l}} \in \{\bar{f}\}^T$, значит,

$$CD_{p^l}^{(m)} / CD_{p^{l+1}}^{(m)} = U,$$

что противоречит строгому включению $U \subsetneq CD_{p^l}^{(m)} / CD_{p^{l+1}}^{(m)}$.

Доказательство следующих трех утверждений дословно повторяет доказательства аналогичных утверждений для T -пространств $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$, $C_{p^l}^{(m)} / C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $\overline{C_{p^l}^{(m)}}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. T -пространства $CD_{p^l}^{(m)} / CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ и $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$ изоморфны.

ТЕОРЕМА 4.5. T -пространство $\overline{CD_{p^l}^{(m)}}$ раскладывается в бесконечную прямую сумму простых T -пространств $CD_{p^l}^{(m)}$, изоморфных T -пространствам $CD_{p^l}^{(m)} / CD_{p^{l+1}}^{(m)}$, т.е.

$$\overline{CD_{p^l}^{(m)}} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \overline{CD_{p^l}^{(m)}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Имеет место изоморфизм

$$CD_{p^l} / CD_{p^{l+1}} \cong \bigoplus_{m=1}^{\infty} CD_{p^l}^{(m)} / CD_{p^{l+1}}^{(m)},$$

где $CD_{p^l}^{(m)} / CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ – ненулевой простой kT -модуль. Изоморфное отображение $\bigoplus_{m=1}^{\infty} CD_{p^l}^{(m)} / CD_{p^{l+1}}^{(m)} \rightarrow CD_{p^l} / CD_{p^{l+1}}$ определяется соответствием

$$\sum_{m=1}^{\infty} \bar{f}_m \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{f}_m.$$

Приведенные выше теоремы ничего не говорят о T -пространствах $C_1^{(m)}$ и T -идеалах $C^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$. В силу цепочек строгих включений (см. лемму 1.2) они, очевидно, не просты. Связь между $C_1^{(m)}$ и $C^{(m)}$ следующая (см. также диаграмму 1):

$$\begin{array}{ccc} C^{(m)} & \supset & C^{(m+1)} \\ \cup & & \cup \\ C_1^{(m)} & \supset & C_1^{(m+1)} \end{array}$$

В § 3 была показана взаимосвязь между элементами диаграммы 2, являющимися образами соответствующих им элементов диаграммы 1 в T -пространстве $\widehat{C} = C / C^{(m+1)}$. Образ произвольного многочлена $f \in F^{(3)}$ в T -пространстве $\widehat{C}$ будем обозначать через $\widehat{f}$.

Если вопрос о простоте фактор- T -пространства $C_1^{(m)} / C_1^{(m+1)}$ пока открыт, то для $\widehat{C_1^{(m)}}$ он решается положительно, а для $\widehat{C^{(m)}}$ – отрицательно.

Из диаграммы 2 следует, что kT -модуль $\widehat{C^{(m)}}$ не является простым. Имеет место

ТЕОРЕМА 4.6. $\widehat{C_1^{(m)}}$ – единственный минимальный подмодуль в $\widehat{C^{(m)}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы нужно показать, что любой ненулевой подмодуль в $\widehat{C^{(m)}}$ содержит $\widehat{C_1^{(m)}}$. Пусть U – ненулевой подмодуль в $\widehat{C^{(m)}}$. Тогда существует ненулевой многочлен $\hat{f} \in U$. Будем считать, что f – полиоднородный многочлен фиксированного типа. Тогда f – линейная комбинация полиоднородных многочленов одного и того же типа, полученных некоторыми подстановками и k -линейными действиями из многочлена $c_{m,0}z_1$. Воспользуемся тем, что коммутатор $[u, v]$ любых двух одночленов в $F^{(3)}$ можно расписать как линейную комбинацию коммутаторов от переменных $[x_i, x_j]$, умноженных на одночлены. Отсюда получаем, что многочлен f – линейная комбинация многочленов, каждый из которых является произведением m коммутаторов от переменных вида $[x_i, x_j]$ и некоторого одночлена. В силу того, что все переменные, стоящие вне произведения коммутаторов, перестановочны по модулю $C^{(m+1)}$, можно привести подобные слагаемые, отвечающие фиксированным коммутаторным типам. Таким образом, многочлен f – линейная комбинация многочленов, отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных.

Поскольку $\hat{f} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении f существует ненулевой многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, следующего вида:

$$\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n'_1-1} \dots x_m^{n_m-1} y_m^{n'_m-1} [x_1, y_1] \dots [x_m, y_m] z_1^{q_1} \dots z_s^{q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Подставляя 1 вместо всех переменных z_j , получим тогда, что все многочлены линейной комбинации, дающие f , обращаются в 0, кроме выбранного, который перейдет в многочлен $\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n'_1-1} \dots x_m^{n_m-1} y_m^{n'_m-1} [x_1, y_1] \dots [x_m, y_m]$. Применим к каждой переменной полученного многочлена метод спуска и выделим из него полилинейный многочлен. Очевидно, он равен $\alpha c_{m,0}$. Отсюда получаем, что $\widehat{C_1^{(m)}} \subset U$.

Из теоремы 4.6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. $\widehat{C_1^{(m)}}$ – простой kT -модуль.

Рассмотрим строение T -пространств $\widehat{C_{p^l}^{(m)}}/\widehat{C_{p^{l-1}}^{(m)}}$ и $\widehat{CD_{p^l}^{(m)}}/\widehat{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$, а также $\widehat{C_{p^l}^{(m)}}/\widehat{C_{p^{l-1}}^{(m)}}$ и $\widehat{CD_{p^l}^{(m)}}/\widehat{CD_{p^{l+1}}^{(m)}}$, где $\widehat{C_{p^l}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{p^l}^{(m)}}$, $\widehat{C_{p^l}}$, $\widehat{CD_{p^l}}$ – образы $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$, C_{p^l} , CD_{p^l} в $\widehat{C}$ соответственно.

Из предыдущих результатов этого параграфа получается следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. 1) Имеет место изоморфизм

$$\widehat{C_{p^l}^{(m)}}/\widehat{C_{p^{l-1}}^{(m)}} \cong \bigoplus_{i=1}^m \widehat{C_{p^l}^{(i)}}/\widehat{C_{p^{l-1}}^{(i)}},$$

где $\widehat{C_{p^l}^{(i)}}/\widehat{C_{p^{l-1}}^{(i)}} \cong \widehat{C_{p^l}^{(i)}}/\widehat{C_{p^{l-1}}^{(i)}}$ – ненулевой простой kT -модуль.

2) Имеет место изоморфизм

$$\widehat{CD_{p^l}} / \widehat{CD_{p^{l+1}}} \cong \bigoplus_{i=1}^m \widehat{CD_{p^l}^{(i)}} / \widehat{CD_{p^{l+1}}^{(i)}},$$

где $\widehat{CD_{p^l}^{(i)}} / \widehat{CD_{p^{l+1}}^{(i)}} \cong \widehat{CD_{p^l}^{(i)}} / \widehat{CD_{p^{l+1}}^{(i)}}$ – ненулевой простой kT -модуль.

Для $l = 0$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4.7. T -пространство $\widehat{C^{(m)}} / \widehat{CD_p^{(m)}}$ является простым kT -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \subsetneq \widehat{C^{(m)}} / \widehat{CD_p^{(m)}}$ – ненулевой подмодуль. Значит, существует ненулевой многочлен $\hat{f} \in U$. Будем считать, что f – полиоднородный многочлен фиксированного типа. По теореме 1.6 в многочлене f найдется такая переменная, например z_1 , что $f \equiv z_1^{q_1} f_1 \pmod{(CD_p^{(m)} + C^{(m+1)})}$, где $(q_1, p) = 1$, f_1 – линейная комбинация либо 1-многочленов, либо p -многочленов, не зависящих от переменной z_1 и отвечающих различным коммутаторным типам. Поскольку $\hat{f} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении f существует ненулевой 1-многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу следующего вида:

$$\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{n_m-1} y_m^{n'_m-1} [x_m, y_m] z_1^{q_1} \cdots z_s^{q_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n'_i, q_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{2, s}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$, $j = \overline{2, s}$, в многочлен f . Такие подстановки обращают в нуль все многочлены линейной комбинации (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1), дающие f , кроме выбранного, который перейдет в многочлен

$$\alpha x_1^{n_1-1} y_1^{n'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{n_m-1} y_m^{n'_m-1} [x_m, y_m] z_1^{q_1}.$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полилинейный многочлен (см. теорему 1.1), получим многочлен $\alpha q_1 c_{m,0} z_1$, где αq_1 отлично от нуля. Значит,

$$\widehat{C^{(m)}} / \widehat{CD_p^{(m)}} = U,$$

что противоречит строгому включению $U \subsetneq \widehat{C^{(m)}} / \widehat{CD_p^{(m)}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из теоремы 4.1 следует, что $D_{p^{l+1}}$ – единственный максимальный подмодуль в D_{p^l} . Естественно возникает вопрос об аналоге этого утверждения для всех рассмотренных в диаграммах 1 и 2 вертикальных бесконечных убывающих и возрастающих цепочек включений T -пространств.

§ 5. О мультипликативной структуре

Как уже было отмечено в § 1, T -пространство W_{p^l} раскладывается в прямую сумму T -подпространств D_{p^l} и CD_{p^l} , т.е. $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$, $l > 0$. Более того, W_{p^l} – подалгебра k -алгебры $F^{(3)}$, лежащая в ее центре, причем CD_{p^l} – радикал алгебры W_{p^l} , являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса p ,

а $W_{p^l}/CD_{p^l} \cong D_{p^l}$ – алгебра коммутативных многочленов $k[x_1^{p^l}, \dots, x_i^{p^l}, \dots]$ (см. [13], [14]). Можно показать, что W_p – центр алгебры $F^{(3)}$ (см. [15]).

Для описания $F^{(3)}$ и W_p как W_p -модулей и как D_p -модулей нам понадобятся многочлены канонического базиса алгебры $F^{(3)}$. Для удобства напомним их вид:

$$x_{j_1}^{n_{j_1}-1} x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \dots x_{j_{2t-1}}^{n_{j_{2t-1}}-1} x_{j_{2t}}^{n_{j_{2t}}-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2t-1}}, x_{j_{2t}}] x_{i_1}^{m_{i_1}} \dots x_{i_s}^{m_{i_s}},$$

где $j_1 < \dots < j_{2t}$, $i_1 < \dots < i_s$, $n_{j_\beta}, m_{i_\alpha}$ – натуральные числа и $\{j_\beta\} \cap \{i_\alpha\} = \emptyset$.

Ясно, что T -пространство CD_p замкнуто относительно умножения на элементы из W_p , т.е. обладает структурой W_p -модуля. Строение W_p -модулей $F^{(3)}$ и CD_p в некоторой степени проясняет следующая

ТЕОРЕМА 5.1. а) Пусть $u(r_{i_1}, \dots, r_{i_l}) = x_{i_1}^{r_{i_1}} \dots x_{i_l}^{r_{i_l}}$, где $i_1 < \dots < i_l$, $1 \leq r_{i_\alpha} \leq p-1$, S – множество, состоящее из 1 и всех одночленов $u(r_{i_1}, \dots, r_{i_l})$. Тогда

$$F^{(3)} = W_p \cdot S = W_p \cdot 1 + \sum_{(r_{i_1}, \dots, r_{i_l})} W_p u(r_{i_1}, \dots, r_{i_l}),$$

причем S – бесконечная неприводимая система порождающих W_p -модуля $F^{(3)}$.

б) Пусть L – множество многочленов, получающихся из многочлена $c_{1,1}$ с помощью линейных подстановок, k -линейных действий и подстановок вместо переменных элементов из системы S . Тогда $CD_p = W_p \cdot L$ – бесконечно порожденный W_p -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Рассмотрим многочлен из канонического базиса (1). Поделим m_{i_α} на p с остатком: $m_{i_\alpha} = pq_{i_\alpha} + r_{i_\alpha}$, где $q_{i_\alpha} \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_{i_\alpha} \leq p-1$, $\alpha = \overline{1, s}$. Если $r_{i_\alpha} = 0$ для любого $\alpha = \overline{1, s}$, то многочлен из канонического базиса лежит в Δ и, следовательно, принадлежит W_p . Если это не так, то среди m_{i_α} найдутся такие (возможно, все), которые делятся на p , т.е. $1 \leq r_{i_\alpha} \leq p-1$ для некоторых $\alpha \in \{1, \dots, s\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = \overline{1, l}$, $l \leq s$. Одночлен $x_{i_1}^{m_{i_1}} \dots x_{i_s}^{m_{i_s}}$ с помощью коммутаторных соотношений представим в виде $x_{i_1}^{pq_{i_1}} \dots x_{i_s}^{pq_{i_s}} \cdot x_{i_1}^{r_{i_1}} \dots x_{i_l}^{r_{i_l}}$, где $i_1 < \dots < i_l$, $1 \leq r_{i_\alpha} \leq p-1$. Положим $u(r_{i_1}, \dots, r_{i_l}) = x_{i_1}^{r_{i_1}} \dots x_{i_l}^{r_{i_l}}$. Таким образом, многочлен из канонического базиса записывается в виде $f \cdot u(r_{i_1}, \dots, r_{i_l})$, где $f \in W_p$. Из сказанного выше получаем, что любой многочлен алгебры $F^{(3)}$ лежит в $W_p \cdot S = W_p \cdot 1 + \sum_{(r_{i_1}, \dots, r_{i_l})} W_p u(r_{i_1}, \dots, r_{i_l})$.

Покажем, что S – неприводимая система порождающих для W_p -модуля $F^{(3)}$. Предположим, что это не так, т.е. некоторый одночлен $u \in S$ есть линейная комбинация над W_p одночленов $u_i \in S$:

$$u = f_1 u_1 + \dots + f_r u_r,$$

где $f_i \in W_p$, $i = \overline{1, r}$. Поскольку $f_i \in W_p$, то по предложению 2.1 для любого $i = \overline{1, r}$ выполняется равенство $f_i = h_i + g_i$, где h_i – линейная комбинация над k p -многочленов, g_i – некоторый многочлен из C_1 . Тогда $u = \sum_{i=1}^r (h_i u_i + g_i u_i)$. Но каждое слагаемое $h_i u_i$ обладает набором переменных, кратности вхождения которых в $h_i u_i$ не сравнимы по модулю p с кратностями вхождения этих переменных в одночлен u . Поэтому в представлении u в виде линейной комбинации одночленов u_i над W_p выражение $\sum_{i=1}^r h_i u_i$ равно нулю. Отсюда получаем, что

$u = \sum_{i=1}^r g_i u_i$. Подставляя 1 во все переменные одночлена u , получим $1 = 0$, что невозможно. Таким образом, S – бесконечная неприводимая система порождающих W_p -модуля $F^{(3)}$.

б) Покажем, что L – система порождающих для W_p -модуля CD_p . Пусть $\sigma \in T$. Тогда $(g_{m,1})^\sigma = (c_{1,1})^\sigma (x_2^{p-1} y_2^{p-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p-1} y_m^{p-1} [x_m, y_m] z_1^p)^\sigma$, где $(x_2^{p-1} y_2^{p-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p-1} y_m^{p-1} [x_m, y_m] z_1^p)^\sigma \in W_p$, $(c_{1,1})^\sigma = c_{1,1}(h_1, h_2)$, $h_1, h_2 \in F^{(3)}$ – произвольные многочлены. Согласно утверждению а) получаем

$$h_i = f_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{r_i} f_i^{(j)} u_i^{(j)},$$

где $f_i^{(0)}, f_i^{(j)} \in W_p$, $u_i^{(j)} \in S$, $j = \overline{1, r_i}$, $r_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Поскольку W_p совпадает с центром алгебры $F^{(3)}$, то все $f_i^{(0)}, f_i^{(j)}$ коммутируют с любыми элементами из алгебры $F^{(3)}$. Отсюда следует, что $c_{1,1}(h_1, h_2)$ – линейная комбинация над W_p всевозможных многочленов $c(u_1, \dots, u_t)$, где $c(x_1, \dots, x_t)$ – полиоднородный многочлен, выделенный из $c_{1,1}$ с помощью линейных подстановок и k -линейных действий (см. обозначения в § 3), а $u_1, \dots, u_t$ – одночлены из множества $\{u_1^{(1)}, \dots, u_1^{(r_1)}, u_2^{(1)}, \dots, u_2^{(r_2)}\}$. Таким образом, получаем, что L – система порождающих W_p -модуля CD_p , т.е. $CD_p = W_p \cdot L$.

Докажем, что CD_p – бесконечно порожденный W_p -модуль. Допустим, что в L существует такая конечная подсистема L_1 , через которую выражаются все многочлены системы L . Ясно, что любой элемент системы L_1 не содержит свободного члена и, кроме того, множество всех переменных, от которых зависят все элементы системы L_1 , конечно. Обозначим это множество через X .

Для любого $i \in \mathbb{N}$ через $c_{1,1}^{(i)}$ обозначим многочлен $x_i^{p-1} y_i^{p-1} [x_i, y_i]$. Рассмотрим следующую бесконечную подсистему в L многочленов от непересекающихся наборов переменных:

$$L_0 = \{c_{1,1}^{(1)}, c_{1,1}^{(2)}, \dots, c_{1,1}^{(i)}, \dots\}.$$

Выберем среди элементов системы L_0 многочлен, который не зависит от переменных из множества X . Пусть это будет многочлен $c_{1,1}^{(i)}$. Поскольку L_0 – подсистема в L , то $c_{1,1}^{(i)}$ выражается через элементы системы L_1 . Положив все переменные из X равными нулю, мы получим противоречие $c_{1,1}^{(i)} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. $F^{(3)}$ не является свободным W_p -модулем. Например, рассмотрим $x_1 x_3 \in S$. Очевидно, многочлен $x_1 x_3 \cdot [x_1, x_2] [x_3, x_4]$ лежит в W_p . Таким образом, для любого $u \in S$ можно подобрать такой многочлен $f \in W_p$, что $uf \in W_p$, т.е. $uf = 1 \cdot g$, где $g \in W_p$.

Однако если рассматривать $F^{(3)}$ как D_p -модуль, то (как будет показано в следующей ниже теореме) этот модуль свободный. Напомним, что любой элемент T -пространства D_p есть линейная комбинация над полем k одночленов вида

$$x_{s_1}^{pq_{s_1}} \cdots x_{s_l}^{pq_{s_l}}. \quad (7)$$

Пусть G – множество всех таких многочленов канонического базиса, что $1 \leq n_{j\beta} \leq p-1$, $1 \leq m_{i\alpha} \leq p-1$. Отметим, что множество G содержит 1.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. $F^{(3)}$ – свободный D_p -модуль бесконечного ранга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что G порождает $F^{(3)}$ как D_p -модуль. Покажем, что G – множество свободных порождающих. Допустим, что для некоторого набора попарно различных $g_1, \dots, g_r$ из G и некоторого ненулевого набора элементов $h_1, \dots, h_r$ из D_p имеет место равенство

$$h_1 g_1 + h_2 g_2 + \dots + h_r g_r = 0. \quad (8)$$

Легко видеть, что h_i можно считать одночленами вида (7), причем полиоднородные многочлены $h_i g_i$ имеют один и тот же тип вхождения переменных. При этом каждая переменная входит во все g_i с одной и той же по модулю p кратностью.

В выражении (8) выберем слагаемое, содержащее наименьшее число коммутаторов (выбор, вообще говоря, неоднозначен, кроме случая, когда наименьшее число коммутаторов равно нулю, т.е. соответствующее слагаемое – одночлен). Пусть этим слагаемым будет $h_1 g_1$ и X – множество переменных (может быть, и пустое), входящих в коммутаторы многочлена g_1 . В силу сравнимостей кратностей переменных из g_i по модулю p каждый из остальных многочленов g_i содержит в своих коммутаторах хотя бы одну переменную, не входящую в X . Положим все переменные, кроме тех, что входят в X , равными 1. Тогда все слагаемые выражения (8), кроме $h_1 g_1$, перейдут в нуль. Полученное противоречие и доказывает теорему.

В начале этого параграфа мы отмечали, что W_p как T -пространство раскладывается в прямую сумму T -подпространств: $W_p = D_p \oplus CD_p$. Очевидно, каждое из прямых слагаемых – D_p -модуль. Таким образом, W_p как прямая сумма D_p -модулей является D_p -модулем, содержащим свободный D_p -подмодуль D_p ранга 1. Поэтому вопрос о строении D_p -модуля W_p сводится к изучению строения D_p -подмодуля CD_p . По предложению 2.1 любой элемент из CD_p есть линейная комбинация некоторого многочлена из T -пространства C_1 и p -многочленов из Δ_p , причем с ненулевой кратностью, т.е. следующих многочленов:

$$x_{j_1}^{pn_{j_1}-1} x_{j_2}^{pn_{j_2}-1} \dots x_{j_{2m-1}}^{pn_{j_{2m-1}}-1} x_{j_{2m}}^{pn_{j_{2m}}-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] x_{i_1}^{pq_{i_1}} \dots x_{i_s}^{pq_{i_s}},$$

где $m > 0$.

Каждый сомножитель $x_{j_\beta}^{pn_{j_\beta}-1}$ в этих многочленах можно записать в виде $x_{j_\beta}^{p-1} x_{j_\beta}^{pn_{j_\beta}-p}$. Используя коммутаторные соотношения, получим

$$x_{j_1}^{p-1} x_{j_2}^{p-1} \dots x_{j_{2m-1}}^{p-1} x_{j_{2m}}^{p-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] x_{j_1}^{pn_{j_1}-p} \dots x_{j_{2m}}^{pn_{j_{2m}}-p} x_{i_1}^{pq_{i_1}} \dots x_{i_s}^{pq_{i_s}}.$$

Из коммутаторных соотношений следует, что C_1 замкнуто относительно умножения на элементы из D_p , отсюда получаем, что C_1 – D_p -подмодуль в CD_p .

Таким образом, любой элемент из CD_p является линейной комбинацией над D_p многочленов вида

$$x_{j_1}^{p-1} x_{j_2}^{p-1} \dots x_{j_{2m-1}}^{p-1} x_{j_{2m}}^{p-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \quad (9)$$

$m \in \mathbb{N}$, и некоторого многочлена из D_p -подмодуля C_1 .

Пусть M – D_p -подмодуль в CD_p , порожденный системой многочленов (9). Из независимости системы G над D_p , показанной в доказательстве теоремы 5.2, и из того, что система (9) – подсистема в G , следует, что система многочленов (9) также независима над D_p . Значит, D_p -модуль M свободен.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.3. *D_p -модуль CD_p раскладывается в прямую сумму D_p -подмодулей $M \oplus C_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сказанного выше следует, что $CD_p = M + C_1$. Остается доказать, что $M \cap C_1 = \{0\}$. Допустим, что h – некоторая ненулевая линейная комбинация над D_p многочленов (9), которая принадлежит C_1 . Можно считать, что h – полиоднородный многочлен фиксированного типа. Отсюда получаем, что h представляется в виде линейной комбинации p -многочленов над D_p из системы (9), отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Очевидно, произведение любого элемента из D_p на p -многочлен из системы (9) является p -многочленом. Значит, h представляется в виде линейной комбинации над k p -многочленов с различными коммутаторными типами вхождения переменных.

Поскольку $h \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении h существует ненулевой p -многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу следующего вида:

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m] z_1^{pq_1} \cdots z_s^{pq_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$ во все переменные z_j многочлена h . После таких подстановок все p -многочлены линейной комбинации, дающие h , равны нулю (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1), кроме выбранного, который перейдет в многочлен

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m].$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полиоднородный многочлен степени p по всем переменным, получим многочлен $\beta c_{m,1}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Значит, $c_{m,1}$ лежит в C_1 , т.е. $C_p^{(m)} \subset C_1$. Последнее утверждение противоречит теореме 3.1 о независимости элементарных составляющих.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *D_p -модуль W_p является прямой суммой D_p -подмодулей $D_p \oplus M \oplus C_1$.*

Исследование мультипликативной структуры W_p приводит к изучению идеалов этой алгебры, являющихся одновременно T -пространствами. Такие идеалы в W_p согласно общему определению (см. [13]) мы называем *T -идеалами*. Через (S) обозначается идеал в W_p , порожденный подмножеством S в W_p . Отметим, что все рассматриваемые идеалы являются двусторонними, так как W_p – коммутативная алгебра (ее порождающие в силу коммутаторных соотношений коммутируют с любым многочленом из алгебры $F^{(3)}$). Рассмотрим элементарные составляющие $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$ T -подпространств C_{p^l} , CD_{p^l} в W_p для любого $l > 0$ из диаграммы 1. Естественным образом возникает вопрос об идеалах, порожденных элементами диаграммы 1. Имеет место следующая

ЛЕММА 5.1. T -идеал в W_p , порожденный любым из элементарных составляющих $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$, совпадает с T -идеалом

$$(CD_p^{(m)}) = CD_p^{(m)} + CD_p^{(m+1)} + \dots$$

Кроме того, $(C_1^{(m)}) = C_1^{(m)}$ и выполняется строгое включение $C_1^{(m)} \subset (CD_p^{(m)})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совпадение T -идеала в W_p , порожденного любым из элементарных составляющих $C_{p^l}^{(m)}$, $CD_{p^l}^{(m)}$, с T -идеалом $(CD_p^{(m)})$ очевидно. Любой элемент f из W_p есть сумма $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in D_p$, $f_2 \in CD_p$. Для удобства положим, что $g_{m,1}$ и f_2 зависят от непересекающихся наборов переменных. Рассмотрим произведение $g_{m,1}f$. Получим $g_{m,1}f = g_{m,1}f_1 + g_{m,1}f_2$. Ясно, что $g_{m,1}f_1 \in CD_p^{(m)}$, а многочлен $g_{m,1}f_2$ лежит в T -пространстве $CD_p^{(m+1)} + CD_p^{(m+2)} + \dots$. Отсюда получаем, что $(CD_p^{(m)}) = CD_p^{(m)} + CD_p^{(m+1)} + \dots$. Равенство $(C_1^{(m)}) = C_1^{(m)}$ следует из того, что произведение $c_{m,0}$ и произвольного элемента из W_p согласно первой теореме о выравнивании лежит в $C_1^{(m)}$. Применяя метод спуска к $g_{m,1} \in (CD_p^{(m)})$ и выделяя полилинейный многочлен (см. теорему 1.1), получим многочлен $c_{m,0}$, порождающий T -идеал $C_1^{(m)}$. Отсюда получаем, что $C_1^{(m)} \subset (CD_p^{(m)})$. Из теоремы 3.1 следует, что это включение строгое.

Из этой леммы непосредственно следует строгое включение $C_1 \subset (CD_p)$, где $C_1 = C_1^{(1)}$, $(CD_p) = (CD_p^{(1)})$.

Лемма 5.1 ничего не говорит об элементарных составляющих $C^{(m)}$ самой верхней строки диаграммы 1, которые, напомним, являются T -идеалами в $F^{(3)}$, порожденными произведением m коммутаторов. Тем не менее они также являются W_p -модулями, и естественно ставить вопрос о строении этих W_p -модулей. Очевидно, что выполнены следующие включения: $C_1^{(m)} \subset (CD_p^{(m)}) \subset C^{(m)}$, причем, как следует из теоремы 3.1, все включения строгие.

Резюмируя сказанное выше, можно построить диаграмму 3 строгих включений W_p -модулей.

ДИАГРАММА 3

$$\begin{array}{ccccccc} C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \dots \supset C^{(m)} \supset \dots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ (CD_p) & = & (CD_p^{(1)}) & \supset & (CD_p^{(2)}) & \supset & \dots \supset (CD_p^{(m)}) \supset \dots \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \dots \supset C_1^{(m)} \supset \dots \end{array}$$

Рассмотрим W_p -модуль $C^{(m)}/C^{(m+1)} = \overline{C^{(m)}}$. Через $\bar{V}$ и $\bar{h}$ будем обозначать соответственно образы подмножества V и элемента h из $C^{(m)}$ в $\overline{C^{(m)}}$. Очевидно, $\overline{C^{(m)}}$ аннулируется W_p -модулем CD_p , поэтому имеет смысл рассматривать $C^{(m)}$ как D_p -модуль.

Ясно, что $F^{(3)}/C - D_p$ -модуль со свободными порождающими, являющимися образами одночленов $x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{r_{i_s}}$, где $1 \leq r_{i_\alpha} \leq p-1$, в $F^{(3)}/C$.

Любой элемент из $\overline{C^{(m)}}$ при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ является линейной комбинацией произведений m коммутаторов, умноженных на одночлены. Теперь несложно проверяется, что D_p -модуль $\overline{C^{(m)}}$ порождается множеством многочленов вида

$$\overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] x_{i_1}^{r_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{r_{i_s}}}, \quad (10)$$

где $0 \leq r_{i_\alpha} \leq p-1$, $\alpha = \overline{1, s}$. Отметим, что среди переменных x_{i_α} могут встретиться некоторые из переменных x_{j_β} , $\beta = \overline{1, 2m}$.

Легко видеть, что $\overline{C^{(m)}}$ является прямой суммой D_p -модулей

$$\overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] F^{(3)}}.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.4. $\overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] F^{(3)}}$ – свободный D_p -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нужно показать, что система попарно различных многочленов g_i вида (10) с фиксированным коммутаторным типом независима над D_p , $i = \overline{1, r}$. Пусть $h_i \in D_p$ – одночлены вида (7). Поскольку $g_i \neq g_j$ при $i \neq j$, то среди переменных в g_i найдутся такие, кратности вхождения которых будут не сравнимы по модулю p с кратностями вхождения этих же переменных в g_j . Заметим, что кратности вхождения переменных в $h_i g_i$ и $h_j g_j$ сравнимы по модулю p с кратностями вхождения этих же переменных в g_i и g_j соответственно. Отсюда следует, что любая нетривиальная линейная комбинация $h_1 g_1 + h_2 g_2 + \cdots + h_r g_r$ над D_p не может быть равна нулю.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Имеет место следующее разложение:*

$$\overline{C^{(m)}} = \bigoplus_{(x_{j_1}, \dots, x_{j_{2m}})} \overline{[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] F^{(3)}}$$

– свободный D_p -модуль бесконечного ранга.

Рассмотрим T -идеалы $\overline{C_1^{(m)}}$, $\overline{(CD_p^{(m)})}$ в $\overline{C^{(m)}}$. Ясно, что $\overline{C_1^{(m)}}$, $\overline{(CD_p^{(m)})}$ – D_p -подмодули в $\overline{C^{(m)}}$, причем имеют место следующие включения:

$$\overline{C_1^{(m)}} \subset \overline{(CD_p^{(m)})} \subset \overline{C^{(m)}},$$

где, как следует из теоремы 3.1, все они строгие.

По теореме 5.3 D_p -модуль CD_p раскладывается в прямую сумму D_p -подмодулей M и C_1 , порожденных множеством многочленов вида (9) и многочленом $c_{1,0}$ соответственно. Аналог теоремы 5.3 имеет место и для D_p -модуля $\overline{(CD_p^{(m)})}$. Нетрудно проверить, что $\overline{(CD_p^{(m)})} = (M_1) + \overline{C_1^{(m)}}$, где (M_1) – D_p -подмодуль, порожденный множеством многочленов M_1 вида

$$\overline{x_{j_1}^{p-1} x_{j_2}^{p-1} \cdots x_{j_{2m-1}}^{p-1} x_{j_{2m}}^{p-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}]}, \quad (11)$$

а $\overline{C_1^{(m)}}$ – D_p -подмодуль, порожденный многочленом $\overline{c_{m,0}}$. Как вытекает из следствия 5.2, система многочленов (10) независима над D_p . А система многочленов M_1 является подсистемой системы (10). Отсюда следует, что (M_1) – свободный D_p -модуль.

Строение D_p -модуля $(\overline{CD_p^{(m)}})$ описывает следующая

ТЕОРЕМА 5.5. *D_p -модуль $(\overline{CD_p^{(m)}})$ раскладывается в прямую сумму свободного D_p -модуля (M_1) и D_p -модуля $\overline{C^{(m)}}$, т.е.*

$$(\overline{CD_p^{(m)}}) = (M_1) \oplus \overline{C_1^{(m)}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сказанного выше следует, что $(\overline{CD_p^{(m)}}) = (M_1) + \overline{C_1^{(m)}}$. Остается показать, что $(M_1) \cap \overline{C_1^{(m)}} = \{0\}$. Допустим, что $\bar{h}$ – некоторая ненулевая линейная комбинация над D_p многочленов (11), лежащая в $\overline{C_1^{(m)}}$. Можно считать, что h – полиоднородный многочлен фиксированного типа. Отсюда получаем, что h представляется в виде линейной комбинации над D_p p -многочленов из множества многочленов (11), отвечающих различным коммутаторным типам вхождения переменных. Очевидно, произведение любого элемента из D_p на p -многочлен является p -многочленом. Значит, h представляется в виде линейной комбинации над k p -многочленов с различными коммутаторными типами вхождения переменных.

Поскольку $\bar{h} \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что в разложении h существует ненулевой p -многочлен, отвечающий фиксированному коммутаторному типу, следующего вида:

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m] z_1^{pq_1} \cdots z_s^{pq_s},$$

где $\alpha \in k$ отлично от нуля, $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Осуществим подстановки $z_j \mapsto 1$ во все переменные z_j многочлена h . После таких подстановок все p -многочлены линейной комбинации, дающие h , равны нулю (хотя бы в одном из коммутаторов этих многочленов вместо переменной появится 1), кроме выбранного, который перейдет в многочлен

$$\alpha x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m].$$

Применяя метод спуска к этому многочлену и выделяя полиоднородный многочлен степени p по всем переменным, получим многочлен $\beta c_{m,1}$, где $\beta \in k$ отлично от нуля. Значит, $\overline{c_{m,1}}$ лежит в $\overline{C_1^{(m)}}$, т.е. $(\overline{C_p^{(m)}}) \subset \overline{C_1^{(m)}}$. В свою очередь из леммы 5.1 следует, что $(\overline{C_p^{(m)}}) = (\overline{CD_p^{(m)}})$, значит, $(\overline{CD_p^{(m)}}) \subset \overline{C_1^{(m)}}$. Последнее утверждение противоречит теореме 3.1 о независимости элементарных составляющих.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Открытыми пока остаются вопросы о строении D_p -модуля $\overline{C_1^{(m)}}$ и следующих фактор- T -идеалов:

$$C_1^{(m)}/C_1^{(m+1)}, \quad C^{(m)}/(\overline{CD_p^{(m)}}), \quad (\overline{CD_p^{(m)}})/\overline{C_1^{(m)}}.$$

§ 6. Случай $p = 2$

Как отмечалось во введении, аналогом алгебры Грассмана в характеристике $p = 2$ является алгебра Φ_2 (см. [4], [6], [11]). Эта алгебра строится следующим образом. Пусть $A = k[\dots \alpha_{ij} \dots]$ – коммутативная k -алгебра, порожденная элементами α_{ij} , где $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, $(1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{il}) = 0$, $(1 + \alpha_{ij})(1 + \alpha_{mn}) = (1 + \alpha_{im})(1 + \alpha_{jn})$. Тогда $\Phi_2 = A\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle / J$, где J – идеал свободной A -алгебры $A\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$, порожденный элементами $x_i x_j + \alpha_{ij} x_j x_i$. Алгебра $F^{(3)}$ является относительно свободной алгеброй многообразия, порожденного алгеброй Φ_2 . В ней остаются верными все коммутаторные соотношения, а также имеет место лемма 1.1. Однако соотношения Фробениуса выполняются, только начиная со степени 4, т.е. когда $p = 2$, $l \geq 2$. Поэтому все результаты, полученные в предыдущих параграфах, без труда переносятся на элементарные составляющие $C_{2^l}^{(m)}$ и $CD_{2^l}^{(m)}$ T -пространств C_{2^l} и CD_{2^l} соответственно для всех $m \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$ и на связанные с ними теоретико-модульные конструкции.

В случае же $p = 2$, $l = 1$ выполняются следующие соотношения:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + [x_1, x_2], \quad (x_1 x_2)^2 = x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 [x_1, x_2].$$

По аналогии с § 1 рассмотрим T -пространство W_2 . В работе [13] показано, что $W_2 = D_2$, причем, как следует из работы [6], это T -пространство бесконечно базирuемо и имеет следующую неприводимую систему (в том смысле, что из предыдущих элементов системы нельзя получить следующие ее элементы) порождающих:

$$\{x_1^2 x_2^2 \cdots x_s^2 \mid s \in \mathbb{N}\}.$$

Однако T -пространство D_{2^l} при $l \geq 2$ является нётеровым kT -модулем (см. [13]).

Также в работе [13] было выяснено, что T -пространство D_2 содержит собственное T -подпространство CD_2 , которое (в силу того, что в случае $p = 2$, $l = 1$ соотношений Фробениуса нет, в отличие от CD_p в характеристике $p > 2$) порождается следующей системой многочленов:

$$\{c_{m,1} z_1^2 \cdots z_s^2 \mid m, s \in \mathbb{N}\}.$$

Эта система не является неприводимой, в ней существует бесконечная неприводимая подсистема (в том же смысле, что и неприводимая система для D_2), порождающая все T -пространство CD_2 ,

$$\{c_{1,1} z_1^2 z_2^2 \cdots z_s^2 \mid s \in \mathbb{N}\}.$$

В свою очередь CD_2 содержит собственное T -подпространство $C_2 = \{c_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T$, причем система порождающих для C_2 неприводима.

С помощью соотношений, приведенных для случая $p = 2$, $l = 1$, нетрудно показать, что через многочлены $c_{1,1} z_1^2 \cdots z_s^2$, $s \in \mathbb{N}$, можно выразить все многочлены $g_{m,1}$, т.е. $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T \subset CD_2$. Отметим, что бесконечная система многочленов $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}$ неприводима. Но, как показывает следующее предложение, она не порождает все T -пространство CD_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Имеет место строгое включение*

$$\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T \subsetneq CD_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что многочлен

$$c_{1,1}z_1^2z_2^2 = x_1y_1[x_1, y_1]z_1^2z_2^2$$

не лежит в T -пространстве $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T$. Предположим, что это не так. Отметим, что коммутатор $[u, v]$ любых двух одночленов есть линейная комбинация коммутаторов от переменных вида $[x_i, x_j]$, умноженных на одночлены. Тогда многочлены линейной комбинации, дающие $x_1y_1[x_1, y_1]z_1^2z_2^2$ и получающиеся из $g_{m,1}$ некоторыми подстановками и k -линейными действиями, являются линейными комбинациями произведений m коммутаторов, умноженных на одночлены. Поскольку многочлен $x_1y_1[x_1, y_1]z_1^2z_2^2$ зависит от четырех переменных, то многочлены линейной комбинации, дающие $x_1y_1[x_1, y_1]z_1^2z_2^2$ и являющиеся произведениями числа коммутаторов, большего 2, умноженных на одночлены, содержат произведение вида $[x, y][x, z]$. Значит, все такие многочлены равны нулю. Отсюда следует, что многочлен $x_1y_1[x_1, y_1]z_1^2z_2^2$ является линейной комбинацией многочленов, полученных некоторыми подстановками и k -линейными действиями из многочлена $g_{1,1}$. Последнее утверждение противоречит неприводимости системы порождающих для CD_2 .

Положим $CD_2^{(1,s)} = \{c_{1,1}z_1^2 \cdots z_s^2\}^T$. Тогда CD_2 раскладывается в бесконечную сумму T -пространств $CD_2^{(1,s)}$. По аналогии с § 1 циклические kT -модули $CD_2^{(1,s)}$ назовем *элементарными составляющими* T -пространства CD_2 . Вопрос о связи между введенными таким образом элементарными составляющими $CD_2^{(1,s)}$ T -пространства CD_2 и элементарными составляющими остальных T -пространств C_{2^l} , CD_{2^l} в этой работе не исследуется. Тем не менее можно рассмотреть взаимосвязь T -пространств $CD_2^{(m)}$ с элементарными составляющими T -пространств C_{2^l} , $l \geq 0$, CD_{2^l} , $l \geq 2$, и C . Она выражается диаграммой, аналогичной диаграмме 1, без левого столбца. Естественно возникает вопрос о независимости T -пространств $C_{2^l}^{(m)}$, $CD_{2^l}^{(m)}$. Заметим, что доказательство теоремы 3.1 о независимости элементарных составляющих опирается на соотношения Фробениуса, поэтому вопрос о справедливости этой теоремы для $p = 2$ пока открыт. Однако вместо $\Omega(C_{2^{l+1}}^{(m)})$ и $\Omega(CD_{2^l}^{(m)})$ можно рассмотреть T -пространства $\Lambda(C_{2^{l+1}}^{(m)}) = C_{2^l}^{(m)} + \sum_{i < m} CD_4^{(i)} + C^{(m+1)}$ и $\Lambda(CD_{2^l}^{(m)}) = CD_{2^{l+1}}^{(m)} + \sum_{i < m} CD_4^{(i)} + C^{(m+1)}$ соответственно. Имеет место следующий аналог теоремы 3.1 о независимости для случая $p = 2$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $\mathcal{M}$ равно $C_{2^{l+1}}^{(m)}$ или $CD_{2^l}^{(m)}$. Тогда $(\mathcal{M} + \Lambda(\mathcal{M}))/\Lambda(\mathcal{M})$ – ненулевое T -пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для этой теоремы доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.1, за исключением случая $\mathcal{M} = C^{(m)}$. Покажем, что теорема верна и для $\mathcal{M} = C^{(m)}$. Предположим противное, т.е. пусть $g_{m,0} = c_{m,0}z_1$ – линейная комбинация многочленов, каждый из которых получается некоторыми подстановками из многочленов, порождающих T -пространства, входящие в $\Lambda(C^{(m)})$.

Среди слагаемых линейной комбинации могут встретиться многочлены, получающиеся некоторыми подстановками из многочлена $g_{m,1} = c_{m,1}z_1^2$. Проследим за подстановками в z_1^2 . С помощью соотношений, указанных в начале этого параграфа для $p = 2$, $l = 1$, нетрудно проверить, что любое действие алгебры kT на z_1^2 переводит $g_{m,1}$ по модулю $C^{(m+1)}$ в многочлен $c_{m,1}h$, где h – линейная

комбинация одночленов вида $x_1^{2n_1} \cdots x_s^{2n_s}$, $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому достаточно рассмотреть либо только мономиальные подстановки, в результате которых по модулю $C^{(m+1)}$ получаются произведения вида $c_{m,1} z_1^{2n_1} \cdots z_1^{2n_s}$, либо только подстановки элементов поля k вместо переменной z_1 . Поскольку в многочлен $g_{m,0}$ каждая его переменная входит с кратностью 1, то, очевидно, вместо переменной z_1 могут подставляться только элементы поля k . Тогда все слагаемые линейной комбинации, дающие $g_{m,0}$ и появляющиеся в результате некоторых подстановок в многочлен $g_{m,1}$, на самом деле получаются из многочлена $c_{m,1}$, т.е. принадлежат T -пространству $C_2^{(m)}$.

Заметим, что при подстановке $z_1 \mapsto x_1^3 y_1^3 \cdots x_m^3 y_m^3$ в $g_{m,0}$ этот многочлен перейдет в многочлен

$$c_{m,2} = x_1^3 y_1^3 [x_1, y_1] \cdots x_m^3 y_m^3 [x_m, y_m].$$

Из сделанного предположения следует, что $c_{m,2} \in \Lambda(C_4^{(m)})$. А это противоречит утверждению, отмеченному в начале доказательства, из которого следует, что при $\mathcal{M} = C_4^{(m)}$ T -пространство $(\mathcal{M} + \Lambda(\mathcal{M}))/\Lambda(\mathcal{M})$ ненулевое.

Нетрудно показать, что имеют место аналоги следствий 3.1 и 3.2. Таким образом, возникают вопросы о строении фактор- T -пространств $C_2^{(m)}/C_1^{(m)}$, $CD_2^{(m)}/CD_4^{(m)}$, $C^{(m)}/CD_2^{(m)}$ и связанных с ними конструкций. Прежде чем приступить к рассмотрению этих вопросов, отметим, что первая теорема о выравнивании (см. теорему 1.3) имеет место для $C_2^{(m)}$ и $CD_2^{(m)}$. Если бы для $CD_2^{(m)}$ была справедлива вторая теорема о выравнивании (см. теорему 1.4), то из нее следовало бы, что CD_2 порождается всеми $CD_2^{(m)}$, но, как показывает предложение 6.1, это неверно. Однако имеет место аналог следствия 1.1. Нетрудно проверить, что теорема о мономиальности (см. теорему 2.1) справедлива для элементов $c_{m,1}$. Остается под вопросом справедливость этой теоремы для $g_{m,1}$. Возвращаясь к фактор- T -пространствам, можно сказать следующее. Доказательство простоты элементарных факторов (см. теоремы 4.2 и 4.4) существенно опирается на лемму 1.8, которая в свою очередь доказывается с использованием соотношений Фробениуса. Поэтому вопрос о простоте $C_2^{(m)}/C_1^{(m)}$, $CD_2^{(m)}/CD_4^{(m)}$ и T -пространства $C^{(m)}/CD_2^{(m)}$ пока открыт. Однако можно рассмотреть образы $\widehat{C_{2^{l'}}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{2^{l'}}^{(m)}}$ в $\widehat{C} = C/C^{(m+1)}$ T -пространств $\widehat{C_{2^{l'}}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{2^{l'}}^{(m)}}$ соответственно. Взаимосвязь между T -пространствами $\widehat{C_{2^{l'}}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{2^{l'}}^{(m)}}$ выражается диаграммой 2 без левого столбца. Также для этих T -пространств остается справедливым аналог теоремы 3.1. Для T -пространства $\widehat{C_1^{(m)}}$ имеют место утверждения теоремы 4.6 и следствия 4.5 из нее. Поэтому интерес вызывают вопросы о строении фактор- T -пространств $\widehat{C_{2^{l'}}^{(m)}/C_{2^{l-1}}^{(m)}}$, $\widehat{CD_{2^{l'}}^{(m)}/CD_{2^{l+1}}^{(m)}}$ и $\widehat{C^{(m)}/CD_2^{(m)}}$. Очевидно, для $l \geq 2$ имеет место следствие 4.6. Весьма вероятно, что T -пространства $\widehat{C_2^{(m)}/C_1^{(m)}}$, $\widehat{CD_2^{(m)}/CD_4^{(m)}}$ и $\widehat{C^{(m)}/CD_2^{(m)}}$ простые.

Кроме того, что в T -пространстве D_2 содержатся T -подпространства C_2 , CD_2 , в нем также имеется следующая бесконечная строго убывающая цепочка подмодулей:

$$D_2 \supsetneq D_{2^2} \supsetneq \cdots \supsetneq D_{2^l} \supsetneq \cdots,$$

причем, как нетрудно проверить, $D_{2^l} \neq CD_2$ для любого $l > 0$. Отсюда следует, что для D_2 теорема 4.1 места не имеет (она имеет место начиная со степени 4).

Мы рассмотрели T -пространственное строение алгебры $F^{(3)}$ при $p = 2$. Оно заметно отличается от строения в случае $p > 2$. Однако мультипликативные строения алгебры $F^{(3)}$ для любого p почти одинаковы. Так же, как и в случае $p > 2$, алгебра W_n при четных n лежит в центре алгебры $F^{(3)}$. В частности, коммутативная алгебра W_{2^l} – это прямая сумма алгебры коммутативных многочленов D_{2^l} и радикала CD_{2^l} , являющегося ненильпотентной ниль-алгеброй индекса 2, для любого $l > 1$ (см. [13]). Но при $l = 1$ коммутативная алгебра W_{2^l} совпадает с D_2 . Несложно проверяется, что $D_2 \cap C = CD_2$ – радикал алгебры D_2 , являющийся ненильпотентной ниль-алгеброй индекса 2, причем $D_2/CD_2 \cong k[x_1^2, x_2^2, \dots]$ – алгебра коммутативных многочленов. Можно показать, что $F^{(3)}$ как D_2 -модуль порождается единицей и всеми одночленами, в которых кратности вхождения всех их переменных равны 1, т.е. системой S (см. утверждение а) теоремы 5.1). Кроме того, эта система неприводима, что легко проверяется из очевидных соображений для степени. Аналогично замечанию 5.1 получаем, что для любого $u \in S$ можно подобрать такой многочлен $f \in D_2$, что $uf \in D_2$, т.е. $uf = 1 \cdot g$, где $g \in D_2$. Таким образом, D_2 -модуль $F^{(3)}$ не является свободным, в отличие от D_p -модуля $F^{(3)}$ при $p > 2$. Однако $F^{(3)}$ как $k[x_1^2, x_2^2, \dots]$ -модуль является свободным бесконечного ранга. Для того чтобы изучить мультипликативное строение CD_2 аналогично тому, как это было сделано для CD_p при $p > 2$, нужно исследовать структуру его элементарных составляющих $CD_2^{(1,s)}$ и связанных с ними конструкций.

Мультипликативное строение $F^{(3)}$ и CD_{2^l} как W_{2^l} -модулей при $l > 1$ описывается аналогично тому, как это было сделано для W_p -модулей $F^{(3)}$ и CD_p при $p > 2$ (см. теорему 5.1).

Более детальному изучению вопросов, связанных с различными структурами относительно свободной алгебры Грассмана при $p = 2$, авторы планируют посвятить свои дальнейшие исследования.

Список литературы

- [1] А. Р. Кемер, “Конечная базированность тождеств ассоциативных алгебр”, *Алгебра и логика*, **26:5** (1987), 597–641; англ. пер.: A. R. Kemer, “Finite basis property of identities of associative algebras”, *Algebra and Logic*, **26:5** (1987), 362–397.
- [2] А. В. Гришин, “О конечной базированности систем обобщенных многочленов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54:5** (1990), 899–927; англ. пер.: A. V. Grishin, “On finitely based systems of generalized polynomials”, *Math. USSR-Izv.*, **37:2** (1991), 243–272.
- [3] А. В. Гришин, “О конечной базированности абстрактных T -пространств”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1:3** (1995), 669–700.
- [4] A. V. Grishin, V. V. Shchigolev, “ T -spaces and their applications”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **134:1** (2006), 1799–1878.
- [5] В. В. Щиголев, “Конечная базированность T -пространств над полями нулевой характеристики”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65:5** (2001), 191–224; англ. пер.: V. V. Shchigolev, “The finite basis property of T -spaces over fields of characteristic zero”, *Izv. Math.*, **65:5** (2001), 1041–1071.
- [6] А. В. Гришин, “Примеры не конечной базированности T -пространств и T -идеалов в характеристике 2”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5:1** (1999), 101–118.
- [7] В. В. Щиголев, “Примеры бесконечно базированных T -идеалов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5:1** (1999), 307–312.

- [8] А. Я. Белов, “О нешпехтовых многообразиях”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **5**:1 (1999), 47–66.
- [9] С. К. Gupta, А. Н. Krasilnikov, “A non-finitely based system of polynomial identities which contains the identity $x^6 = 0$ ”, *Q. J. Math.*, **53**:2 (2002), 173–183.
- [10] П. Ж. Чирипов, П. Н. Сидеров, “О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр”, *PLISKA Stud. Math. Bulgar.*, **2** (1981), 103–115.
- [11] А. В. Grishin, “The variety of associative rings, which satisfy the identity $x^{32} = 0$, is not Specht”, *Formal power series and algebraic combinatorics* (Moscow, 2000), Springer-Verlag, Berlin, 686–691.
- [12] А. В. Гришин, Л. М. Сурмина, “О T -пространствах n -слов над полем характеристики $p > 0$ ”, *УМН*, **62**:4 (2007), 145–146; англ. пер.: А. В. Grishin, L. М. Surmina, “On T -spaces of n -words over a field of characteristic $p > 0$ ”, *Russian Math. Surveys*, **62**:4 (2007), 802–803.
- [13] А. В. Гришин, Л. М. Цыбуля, “О (p, n) -проблеме”, *Вестн. СамГУ. Естеств. сер. Матем.*, **7**:57 (2007), 35–55.
- [14] А. В. Гришин, Л. М. Сурмина, “О T -алгебре n -слов”, *Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В. Е. Воскресенского. Тезисы докладов* (Самара, 2007), Универс групп, Самара, 2007, 15–16.
- [15] А. В. Гришин, “On center of a relatively free Grassmann algebra”, *Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложения”, посвященная 70-летию ректора МГУ академику В. А. Садовничему. Тезисы докладов* (Москва, 2009), Университетская книга, М., 2009, 406–407.

А. В. Гришин (A. V. Grishin)
Московский педагогический
государственный университет
E-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

Поступила в редакцию
10.06.2008 и 13.04.2009

Л. М. Цыбуля (L. M. Tsybulya)
Московский педагогический
государственный университет
E-mail: liliya-kinder@mail.ru