Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Карасёв, Теоремы типа Борсука–Улама для плоскостей и плоские трансверсали семейств выпуклых компактов, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 10, 39–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:33:21

УДК 514.17+514.172

Р. Н. Карасёв

Теоремы типа Борсука–Улама для плоскостей и плоские трансверсали семейств выпуклых компактов

Доказан ряд теорем о топологии пространства k -плоскостей в $\mathbb{R}^n$, близких к теореме Борсука–Улама о покрытиях сферы и шара. Из этих теорем в качестве следствий получен ряд результатов о существовании плоских трансверсали для семейств подмножеств $\mathbb{R}^n$ и делении мер гиперплоскостями.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: теорема Борсука–Улама, плоские трансверсали, теоремы типа Хелли.

§ 1. Введение

Приведем формулировки классических результатов, аналоги которых будут доказаны в настоящей работе. Сформулируем сначала теорему Борсука–Улама о покрытиях сферы [1].

ТЕОРЕМА (Борсука–Улама). *Если сфера S^n покрыта $(n+1)$ -м замкнутым множеством $X_1, \dots, X_{n+1}$, то по крайней мере одно из X_i содержит пару диаметрально противоположных точек на сфере.*

Приведем теперь вариант этой теоремы для покрытий шара.

ТЕОРЕМА (Борсука–Улама для покрытий шара). *Пусть шар B^n покрыт замкнутыми множествами $X_1, \dots, X_{n+1}$, причем пересечения каждого X_i с границей ∂B^n не содержат диаметрально противоположных точек. Тогда пересечение множеств X_i непусто.*

В настоящей работе теорема Борсука–Улама для покрытий будет обобщена и применена к конкретным конфигурационным пространствам k -плоскостей.

Сформулируем другую известную теорему о пересечении выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ – теорему Хелли [2].

ТЕОРЕМА (Хелли). *Пусть $\mathcal{F}$ – конечное семейство выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Тогда семейство $\mathcal{F}$ имеет общую точку тогда и только тогда, когда всякое подсемейство $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ размера $|\mathcal{G}| \leq n+1$ имеет общую точку.*

Имеется следующее обобщение теоремы Хелли (см. [3]).

ТЕОРЕМА (“цветная” теорема Хелли). *Пусть $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n+1}$ – семейства выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$. Пусть также для всякой системы представителей $\{X_i \in \mathcal{F}_i\}_{i=1}^{n+1}$ пересечение $\bigcap_{i=1}^{n+1} X_i$ непусто. Тогда для некоторого i пересечение $\bigcap \mathcal{F}_i$ (т.е. пересечение всех множеств семейства $\mathcal{F}_i$) непусто.*

Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект № 2.1.1/500) и фонда “Династия”.

Теорема Хелли дает критерий существования общей точки семейства выпуклых множеств в терминах существования общей точки всех подсемейств фиксированного размера. В настоящей работе в основном рассматривается вопрос построения плоскости заданной размерности, пересекающей заданное семейство множеств. Введем следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем k -плоскостью в $\mathbb{R}^n$ аффинное многообразие размерности k в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если k -плоскость L пересекает каждое множество из семейства $\mathcal{F}$, то L называется (плоской) k -трансверсалью семейства $\mathcal{F}$.

При рассмотрении вопроса о существовании k -трансверсали оказывается, что прямого аналога теоремы Хелли нет, поэтому приходится разными способами модифицировать исходные условия и вывод в теоремах типа теоремы Хелли (см., например, работы [4], [5], в которых обсуждаются такие теоремы).

Сформулируем один из результатов (см. [6], [7]) о плоских трансверсалиях, который обобщает теорему Хелли.

ТЕОРЕМА (Хорна–Кли). Для натурального числа k , $1 \leq k \leq d$, и семейства $\mathcal{F}$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^d$ следующие три условия эквивалентны:

- 1) *каждые k множеств из $\mathcal{F}$ имеют общую точку;*
- 2) *каждая плоскость коразмерности $k - 1$ в $\mathbb{R}^d$ имеет транслят, пересекающий все множества $\mathcal{F}$;*
- 3) *каждая плоскость коразмерности k в $\mathbb{R}^d$ принадлежит плоскости коразмерности $k - 1$, пересекающей все множества $\mathcal{F}$.*

В § 8 настоящей работы доказаны некоторые теоремы об общих трансверсалиях, близкие к цветной теореме Хелли и теореме Хорна–Кли. Также в § 7 доказаны теоремы типа Борсука–Улама, дающие достаточные условия существования трансверсали семейства из $(n + 1)$ -го множества в $\mathbb{R}^n$.

Сформулируем результат о делении мер (см. [8], [9]), являющийся следствием теоремы Борсука–Улама.

ТЕОРЕМА (“о бутерброде”). Пусть на $\mathbb{R}^d$ заданы d абсолютно непрерывных вероятностных мер $\mu_1, \dots, \mu_d$. Тогда найдется полупространство $H \subseteq \mathbb{R}^d$ такое, что для любого $i = 1, \dots, d$

$$\mu_i(H) = \frac{1}{2}.$$

Естественно поставить вопрос: можно ли поделить меры не пополам, т.е., иначе говоря, найти для заданного $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in [0, 1]^d$ такое полупространство $H \subseteq \mathbb{R}^d$, что $\mu_i(H) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, d$. В работах [5], [10], [11] показано, что для этого достаточно, чтобы носители мер были вполне отделимы, т.е. для всякого выбора по одной точке x_i в носителе μ_i набор $(x_1, \dots, x_d)$ был аффинно независимым.

В § 6 изучаются вопросы деления мер гиперплоскостями, доказывается усиление указанного выше результата и другие результаты.

§ 2. Теоремы о каноническом расслоении над грассманианом

В этом параграфе сформулированы теоремы о конфигурационном пространстве k -плоскостей в $\mathbb{R}^n$, являющиеся основными инструментами для получения следствий о трансверсалиях и делении мер. Обозначим $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подмножества X и Y линейного пространства L называются *отделимыми*, если найдется линейная функция (многочлен степени не более единицы) $l: L \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $l(X) < 0$ и $l(Y) > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ подмножеств линейного пространства L называются *отделимыми*, если найдется линейная функция $l: L \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $l(X) < 0$ для любого $X \in \mathcal{F}$ и $l(Y) > 0$ для любого $Y \in \mathcal{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два семейства отрезков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ на прямой назовем *выравненными*, если выполняется одна из следующих альтернатив:

- 1) все правые концы $\mathcal{A}$ попали в одну и ту же точку a , все левые концы $\mathcal{B}$ попали в одну и ту же точку b и либо a левее b , либо все отрезки семейства $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ содержат отрезок $[b, a]$;
- 2) все правые концы $\mathcal{B}$ попали в одну и ту же точку b , все левые концы $\mathcal{A}$ попали в одну и ту же точку a и либо b левее a , либо все отрезки семейства $\mathcal{B} \cup \mathcal{A}$ содержат отрезок $[a, b]$.

Обозначим через γ_n^k каноническое расслоение над грассманианом G_n^k , т.е. множеством k -мерных линейных подпространств в $\mathbb{R}^n$.

Непрерывная зависимость выпуклого компакта от параметра далее понимается в смысле метрики Хаусдорфа.

ТЕОРЕМА 1. Рассмотрим $n + 1$ замкнутых подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^1 . Предположим, что пересечение V_i с любым слоем L является непустым отрезком (возможно, точкой), непрерывно зависящим от L . Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

- 1) найдется такой слой L и индекс $i \in [n + 1]$, что $V_i \cap L$ содержится в остальных $V_j \cap L$;
- 2) для всякого разбиения семейства $\{V_i\}$ на два семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдется такой слой L , что семейства

$$\mathcal{F}_1(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_1\}, \quad \mathcal{F}_2(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_2\}$$

выравнены в L .

Очевидно, что пара выравненных семейств либо отделима, либо имеет общую точку. Поэтому из теоремы 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Рассмотрим $n+1$ замкнутых подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^1 . Предположим, что пересечение V_i с любым слоем L является непустым отрезком (возможно, точкой), непрерывно зависящим от L . Тогда либо множества V_i имеют общую точку, либо для всякого разбиения семейства $\{V_i\}$ на два семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдется такой слой L , что семейства

$$\mathcal{F}_1(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_1\}, \quad \mathcal{F}_2(L) = \{U \cap L : U \in \mathcal{F}_2\}$$

отделимы в L .

Теперь сформулируем утверждения для произвольного k и канонического расслоения $\gamma_n^k \rightarrow G_n^k$. Сначала введем несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пару точек на границе выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ назовем *антиподальной* по отношению к K , если их можно заключить в пару опорных гиперплоскостей к K с противоположными нормальными.

Заметим, что точки x и y антиподальны относительно K тогда и только тогда, когда они являются концами аффинного диаметра K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство компактов $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^n$ назовем *неантиподальным*, если никакое $V \in \mathcal{F}$ не содержит пары антиподальных точек по отношению к $\text{conv} \bigcup \mathcal{F}$.

Далее при рассмотрении векторных расслоений будем считать, что на каждом слое задана норма с гладким единичным шаром и эта норма непрерывно зависит от слоя. В частности, на γ_n^k расстояние может быть стандартным евклидовым.

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим $n+1$ компактных множеств $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^k . Предположим, что при любом $i = 1, \dots, n+1$ пересечение $V_i \cap L$ непусто и непрерывно зависит от L в метрике Хаусдорфа. Предположим, что для всякого слоя $L \in G_n^k$ семейство $\{V_i \cap L\}_{i=1}^{n+1}$ неантиподально как семейство компактов в L . Тогда найдется точка x в некотором слое L , которая находится на одинаковом расстоянии от всех $V_i \cap L$.*

ТЕОРЕМА 4. *Рассмотрим $n+1$ компактных множеств $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ в γ_n^k . Предположим, что при любом $i = 1, \dots, n+1$ пересечение $V_i \cap L$ непусто и непрерывно зависит от L в метрике Хаусдорфа. Предположим, что для всякого слоя $L \in G_n^k$ семейство $\{V_i \cap L\}_{i=1}^{n+1}$ неантиподально как семейство компактов в L и множество $(\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i) \cap L$ выпукло. Тогда множества V_i имеют общую точку.*

Следующая теорема доказывает частный случай гипотезы о полях многогранников в расслоении γ_n^k (см. [12; гипотеза 1 и теорема 12]).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть в расслоении γ_n^k даны m непрерывных сечений $s_1, \dots, s_m$, причем для всякого $L \in G_n^k$ многогранник $P(L) = \text{conv}\{s_1(L), \dots, s_m(L)\}$ имеет непустую внутренность. Тогда найдется такой слой $L \in G_n^k$ и пара пересекающихся опорных к $P(L)$ полупространств $H_1, H_2 \subset L$, что множество $H_1 \cup H_2$ содержит не менее $n+1$ точки из $\{s_1(L), \dots, s_m(L)\}$.*

В §§ 6–8 содержатся формулировки следствий из вышеприведенных теорем и некоторые другие результаты, полученные применением аналогичной техники.

§ 3. Вспомогательные топологические утверждения

Напомним пару определений из эквивариантной топологии; более подробное обсуждение этих вопросов можно найти в книге [13].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – компактная топологическая группа или конечная группа с дискретной топологией. Пространство, на котором задано

непрерывное действие группы G , называется G -пространством. Непрерывное отображение между G -пространствами, перестановочное с действием группы G , называется G -отображением или *эквивариантным отображением*. Если действие G на G -пространстве свободно, то оно называется *свободным*.

Напомним, что существует универсальное свободное G пространство E_G , т.е. любое другое свободное G -пространство можно эквивариантно отобразить в него. При этом само пространство E_G гомотопически тривиально, а фактор E_G/G обозначается через B_G . Также для всякого G -пространства X и абелевой группы A можно определить группы эквивариантных когомологий

$$H_G^*(X, A) = H^*(X \times_G E_G, A).$$

Для свободных пространств имеем равенство $H_G^*(X, A) = H^*(X/G, A)$.

Далее мы будем работать с группой $G = Z_2$. Напомним, что

$$H_G^*(\text{pt}, Z_2) = H^*(\mathbb{R}P^\infty, Z_2) = Z_2[w] = \Lambda, \quad \dim w = 1.$$

Наличие естественного эквивариантного отображения $X \rightarrow \text{pt}$ для любого Z_2 -пространства X дает естественное отображение $\Lambda \rightarrow H_G^*(X, Z_2)$. Образ w при этом отображении мы будем также обозначать через w , если это не вызывает путаницы. Образующую группы Z_2 будем обозначать через σ .

В следующем определении используются когомологии Чеха, так как в некоторых приложениях нам потребуется их свойство непрерывности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Когомологическим индексом* Z_2 -пространства X называется максимальное n такое, что в $H_G^*(X, Z_2)$ степень $w^n \neq 0$; если такого n не существует, то индекс считаем равным ∞ . Обозначим индекс X через $\text{hind } X$.

Очевидно, что индекс несвободного Z_2 -пространства равен ∞ . Из строения когомологий $\mathbb{R}P^n$ следует, что индекс n -мерной сферы с действием Z_2 $x \mapsto -x$ равен n .

Напомним известную лемму (обобщенная теорема Борсука–Улама):

ЛЕММА 1. *Если существует эквивариантное отображение $f: X \rightarrow Y$, то $\text{hind } X \leq \text{hind } Y$.*

Доказательство леммы следует из определения индекса и естественности класса когомологий w . Это свойство также называется *монотонностью индекса*.

Введем еще одну геометрическую конструкцию для Z_2 -пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для свободного Z_2 -пространства X рассмотрим произведение X на отрезок $I = [0, 1]$ и определим в нем действие Z_2 по формуле $\sigma(x, t) = (\sigma(x), 1 - t)$. Тогда пространство $X \times I$ свободно. Пусть $B(X) = (X \times I)/Z_2$. Заметим, что $B(x)$ получено из X приклеиванием отрезка к каждой паре точек $\{x, \sigma(x)\}$ и введением соответствующей топологии на этом множестве. Естественное отображение $B(X) \rightarrow X/Z_2$, является расслоением со слоем I (а значит, и гомотопической эквивалентностью).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Зададим отображение $i_X: X \rightarrow B(X)$ формулой $i_X(x) \mapsto (x, 0)$. Оно отождествляет X с пространством сфер расслоения $B(X) \rightarrow X/Z_2$. Далее под вложением X в $B(X)$ всегда будет подразумеваться отображение i_X .

Заметим, что пространство $B(X)$ обладает действием Z_2 , определяемым формулой $(x, t) \mapsto (\sigma(x), t)$, и у этого действия есть множество неподвижных точек $X \times \{1/2\}$.

Следующая теорема усиливает лемму 5.5 из [14].

ТЕОРЕМА 6. Пусть для Z_2 -пространств X и Y выполняется $\text{hind } X = \text{hind } Y = n$. Тогда для любого эквивариантного отображения $f: X \rightarrow Y$ отображение $f^*: H^n(Y, Z_2) \rightarrow H^n(X, Z_2)$ нетривиально. Кроме того, не существует такого (не эквивариантного, а просто непрерывного) отображения $h: B(X) \rightarrow Y$, что $f = h \circ i_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия теоремы следует, что действие Z_2 на X и Y свободно. Запишем точную последовательность Тома

$$\begin{aligned} \dots \xleftarrow{\delta_X} H^k(X, Z_2) \xleftarrow{i_X^*} H^k(B(X), Z_2) \xleftarrow{\pi_X^*} H^k(B(X), X, Z_2) \xleftarrow{\delta_X} H^{k-1}(X, Z_2) \dots, \\ \dots \xleftarrow{\delta_Y} H^k(Y, Z_2) \xleftarrow{i_Y^*} H^k(B(Y), Z_2) \xleftarrow{\pi_Y^*} H^k(B(Y), Y, Z_2) \xleftarrow{\delta_Y} H^{k-1}(Y, Z_2) \dots \end{aligned}$$

и заметим, что f порождает естественный гомоморфизм $B(X) \rightarrow B(Y)$. Значит, между этими точными последовательностями есть гомоморфизм f^* , перестановочный с гомоморфизмами последовательностей. Пусть фундаментальные классы Тома в $H^1(B(X), X, Z_2)$ и $H^1(B(Y), Y, Z_2)$ – это u_X и u_Y , а образы $w \in H_G^*(\text{pt}, Z_2)$ в $H^*(B(X), Z_2)$ и $H^*(B(Y), Z_2)$ – это w_X и w_Y , при этом $f^*(u_Y) = u_X$, $f^*(w_Y) = w_X$. Тогда по определению индекса

$$\pi_Y^*(u_X w_X^n) = w_X^{n+1} = 0, \quad \pi_X^*(u_Y w_Y^n) = w_Y^{n+1} = 0.$$

Значит, есть класс $v \in H^n(Y, Z_2)$, для которого $\delta_Y(v) = u_Y w_Y^n$. При этом $\delta_X(f^*(v)) = f^*(\delta_Y(v)) = u_X w_X^n \neq 0$ и, следовательно, $f^*(v) \neq 0$. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, заметим, что если найдется искоемое h , то $f^*(v) \in \text{Im } i_X^*$ и из точности последовательности Тома получим $\delta_X(f^*(v)) = 0$, что противоречит тому, что изложено в предыдущем абзаце.

Теперь сформулируем следствие из теоремы 6 о покрытиях Z_2 -пространства. Сначала введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точки x и $\sigma(x)$ некоторого Z_2 -пространства X назовем *антиподальными*.

Термин “антиподальный” уже использовался для пар точек на границе выпуклого компакта. Тем не менее, далее из контекста всегда понятно, в каком смысле это слово употребляется.

ТЕОРЕМА 7. Пусть компактное метрическое Z_2 -пространство X , для которого $\text{hind } X = n$, покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+2}\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда для всякого разбиения семейства $\{U_i\}$ на два непустых семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдется точка $x \in X$ такая, что $x \in \bigcap \mathcal{F}_1$ и $\sigma(x) \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Кроме того, если покрытие $\mathcal{F}$ индуцировано из некоторого замкнутого покрытия $\mathcal{G} = \{V_1, V_2, \dots, V_{n+2}\}$ пространства $B(X)$, то семейство $\mathcal{G}$ имеет общую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для подмножества W некоторого метрического пространства M положим

$$W(\varepsilon) = \{x \in M : \text{dist}(x, W) \leq \varepsilon\}.$$

Из соображений компактности можно считать, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\text{dist}(U_i, \sigma(U_i)) > 2\varepsilon, \quad i = 1, \dots, n+2.$$

Тогда для каждого $i = 1, \dots, n+2$ возьмем функцию f_i , которая обращается в единицу на U_i и обращается в нуль за пределами $U_i(\varepsilon)$. Далее нормируем эти функции, чтобы их сумма была равна единице.

Возьмем теперь функции $g_i(x) = f_i(x) - f_i(\sigma(x))$. Вместе функции g_i дают эквивариантное отображение $g: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, причем образ этого отображения лежит в гиперплоскости H с уравнением $y_1 + \dots + y_{n+2} = 0$ и не содержит начало координат. Тогда рассмотрим отображение $h: X \rightarrow S^n$ в единичную сферу гиперплоскости H , заданное формулой $h(x) = g(x)/|g(x)|$.

Отображение $h: X \rightarrow S^n$ эквивариантно и по теореме 6 отображение $h^*: H^n(S^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(X, \mathbb{Z}_2)$ нетривиально. Отсюда следует, что h сюръективно.

Возьмем разбиение $\{1, 2, \dots, n+2\} = I_1 \cup I_2$ и соответствующее ему разбиение $\{U_i(\varepsilon)\}_{i=1}^{n+2} = \mathcal{F}_1(\varepsilon) \cup \mathcal{F}_2(\varepsilon)$. Возьмем $c = \sqrt{|I_1||I_2|(n+2)}$ и точку $y \in S^n$ с координатами

$$y_i = \frac{|I_2|}{c}, \quad i \in I_1, \quad y_i = -\frac{|I_1|}{c}, \quad i \in I_2.$$

Найдется $x \in X$ такая, что $y = h(x)$, поэтому $x \in \bigcap \mathcal{F}_1(\varepsilon)$, $\sigma(x) \in \bigcap \mathcal{F}_2(\varepsilon)$. Отсюда, устремляя ε к нулю и используя соображения компактности, получаем утверждение первой части теоремы.

Пусть теперь покрытие продолжено до покрытия $B(X)$. Тогда функции f_i соответственно продолжаются на $B(X)$ так, что их сумму можно считать единичной, т.е. f можно считать отображением из X в гиперплоскость H_1 , заданную условием $y_1 + \dots + y_{n+2} = 1$. Если образ f содержит точку $(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})$, то, как и при доказательстве первой части теоремы, мы доказываем, что множества $\{V_i\}$ имеют общую точку.

В противном случае из f можно получить отображение $h_1: B(X) \rightarrow S^n$ в единичную сферу плоскости H_1 . Покажем, что отображения h и $h_1|_X$ гомотопны. Действительно, для $t \in [0, 1]$ можно положить

$$g_t(x) = f(x) - (1-t)f(\sigma(x)), \quad h_t(x) = \frac{g_t(x) - t(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})}{|g_t(x) - t(\frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{n+2})|}.$$

Тогда h_t – искомая гомотопия. По второй части теоремы 6 отображение h (а значит, и гомотопное ему h_1) нельзя продолжить с X на $B(X)$. Получаем противоречие.

Докажем еще одну теорему о покрытиях.

ТЕОРЕМА 8. Пусть компактное метрическое $\mathbb{Z}_2$ -пространство X , для которого $\text{hind } X = n$, покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$. Пусть никакое U_i не содержит антиподальных точек. Тогда найдется точка $x \in X$ такая, что количество множеств U_i , содержащих x или $\sigma(x)$, не менее $n+2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, заменим покрытие на набор функций $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Рассмотрим отображение $g(x) = f(x) - f(\sigma(x))$ и предположим противное. Это означает, что для любого $x \in X$ не более $n + 1$ координаты $g(x)$ отличны от нуля.

Тогда с учетом условий, что сумма положительных координат $g(x)$ равна единице, а сумма отрицательных равна минус единице, g дает эквивариантное отображение X в некоторый $(n - 1)$ -мерный симплицальный комплекс. Индекс $(n - 1)$ -мерного комплекса со свободным Z_2 -действием по определению не превосходит $n - 1$. Следовательно, получаем противоречие утверждению леммы 1.

Сформулируем еще одну теорему, уточняющую теорему Люстерника–Шнирельмана о категории проективного пространства $\mathbb{R}P^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Инвариантное подмножество $U \subseteq X$ Z_2 -пространства X назовем *несущественным*, если $\text{hind } U = 0$.

Заметим, что индекс Z_2 -пространства равен нулю (при использовании когомологий Чеха) тогда и только тогда, когда существует эквивариантное отображение этого пространства в нульмерную сферу.

ТЕОРЕМА 9. Пусть компактное метрическое Z_2 -пространство X , для которого $\text{hind } X = n$, покрыто семейством замкнутых несущественных инвариантных множеств

$$\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}.$$

Тогда $N \geq n + 1$ и некоторые $n + 1$ множеств из семейства $\mathcal{F}$ имеют общую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого U_i имеем Z_2 -эквивариантное отображение $f_i: U_i \rightarrow \{-1, +1\}$. Продолжим f_i эквивариантно на X так, чтобы оно было отлично от нуля только в ε -окрестности U_i . В итоге все функции задают эквивариантное отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ и можно определить эквивариантное отображение $h: X \rightarrow S^{N-1}$ по формуле $h(x) = f(x)/|f(x)|$. По лемме 1 имеем $n \leq N - 1$. Таким образом, первое утверждение доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, предположим противное: для достаточно малого ε это будет означать, что не более n координат любой точки $h(x)$ ненулевые. Тогда образ h содержится в некотором $(n - 1)$ -мерном подмножестве S^{N-1} , что противоречит утверждению леммы 1.

Сформулируем также аналог теоремы 7 для произведения пространств (см. также теорему 2 из [15]).

ТЕОРЕМА 10. Пусть компактные метрические Z_2 -пространства X и Y имеют индексы $\text{hind } X = n$, $\text{hind } Y = m$, $m \geq n$. Пусть $B(X) \times B(Y)$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{V_{ij}\}_{i \in [n+2], j \in [m+2]}$. Обозначим проекции

$$\pi_X: B(X) \times B(Y) \rightarrow B(X), \quad \pi_Y: B(X) \times B(Y) \rightarrow B(Y).$$

Пусть для любого $i \in [n+2]$ пересечение $\pi_X(\bigcup_{j \in [m+2]} V_{ij}) \cap X$ не содержит антиподальных точек и для любого $j \in [m+2]$ пересечение $\pi_Y(\bigcup_{i \in [n+2]} V_{ij}) \cap Y$

также не содержит антиподальных точек. Пусть $\{a_i\}_{i \in [n+2]}$ – положительные целые числа, сумма которых равна $m + 2$.

Тогда найдется такое отображение $\sigma: [m + 2] \rightarrow [n + 2]$, что

$$|\sigma^{-1}(i)| = a_i, \quad i \in [n + 2], \quad \bigcap_{j \in [m+2]} U_{\sigma(j)j} \neq \emptyset.$$

Для доказательства этой теоремы понадобится обобщенная лемма Холла [16] о паросочетаниях.

ЛЕММА 2. Пусть в двудольном графе с множеством вершин $V \cup W$, где $|V| = n$, $|W| = m$, $m \geq n$, дано отображение $a: V \mapsto \mathbb{N}$, где $\sum_{v \in V} a(v) = m$. Пусть для любого непустого подмножества $V' \subseteq V$ множество вершин из W , соединенных хотя бы с одной вершиной из V' , имеет мощность не менее $\sum_{v \in V'} a(v)$. Тогда найдется отображение $\sigma: W \mapsto V$ такое, что для любого $w \in W$ пара $(w, \sigma(w))$ является ребром и для любого $v \in V$ $|\sigma^{-1}(v)| = a(v)$.

Лемма является следствием обычной леммы Холла, если каждую вершину $v \in V$ превратить в $a(v)$ ее клонов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Как и при доказательстве теоремы 7, перейдем от покрытий к функциям $\varphi_{ij}: B(X) \times B(Y) \rightarrow \mathbb{R}^+$ с единичной суммой.

Рассмотрим функции $f_i = \sum_{j \in [m+2]} \varphi_{ij}$ и $g_j = \sum_{i \in [n+2]} \varphi_{ij}$. Как и в доказательстве теоремы 7, отображения f и g можно считать отображениями $B(X) \times B(Y)$ в $(n + 1)$ - и $(m + 1)$ -мерные симплексы соответственно. Обозначим отображения

$$\begin{aligned} i_X: B(X) &\rightarrow B(X) \times B(Y), & i_X(x) &= x \times y_0, \\ i_Y: B(Y) &\rightarrow B(X) \times B(Y), & i_Y(y) &= x_0 \times y. \end{aligned}$$

Тогда из доказательства леммы 6 следует, что отображения

$$\begin{aligned} i_X^* \circ f^*: H^{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial \Delta^{n+1}, Z_2) &\rightarrow H^{n+1}(B(X), X, Z_2), \\ i_Y^* \circ g^*: H^{m+1}(\Delta^{m+1}, \partial \Delta^{m+1}, Z_2) &\rightarrow H^{m+1}(B(Y), Y, Z_2) \end{aligned}$$

нетривиальны. Следовательно, по формуле Кюннета нетривиально и отображение

$$\begin{aligned} (f \times g)^*: H^{n+m+2}(\Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1}, \partial(\Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1}), Z_2) \\ \rightarrow H^{n+m+2}(B(X) \times B(Y), X \times B(Y) \cup B(X) \times Y, Z_2). \end{aligned}$$

Как и в доказательстве теоремы 7, отсюда следует, что $f \times g$ сюръективно. Рассмотрим тогда прообраз точки

$$\left(\frac{a_1}{m+2}, \dots, \frac{a_{n+2}}{m+2} \right) \times \left(\frac{1}{m+2}, \dots, \frac{1}{m+2} \right) \in \Delta^{n+1} \times \Delta^{m+1}.$$

Пусть это – точка p . Для матрицы $\{\varphi_{ij}(p)\}$ выполняются условия теоремы Холла, что, аналогично [17], дает нам искомое отображение σ .

§ 4. Геометрия и топология пространства k -плоскостей

Рассмотрим пространство всех k -плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Каждой такой плоскости α можно сопоставить единственное ортогональное ей $(n - k)$ -мерное линейное подпространство $g(\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ и единственную точку пересечения $\alpha \cap g(\alpha)$. Таким образом, пространство k -мерных аффинных плоскостей отождествляется с пространством γ_n^{n-k} канонического расслоения над грассманианом G_n^{n-k} . В дальнейшем мы будем считать пространство плоскостей наделенным топологией γ_n^{n-k} .

В векторном расслоении действует Z_2 отображением $x \mapsto -x$ в каждом слое. Рассмотрим пространство сфер $S(\gamma_n^{n-k})$ и вычислим его индекс.

ТЕОРЕМА 11. *Имеет место следующее равенство: $\text{hind } S(\gamma_n^{n-k}) = n - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство $S(\gamma_n^{n-k})$ можно представить как пространство пар (n, L) , где n – единичный вектор, а L – ортогональное ему k -мерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Отсюда видно, что существует эквивариантное отображение $S(\gamma_n^{n-k})$ в $(n - 1)$ -мерную сферу и $\text{hind } S(\gamma_n^{n-k}) \leq n - 1$.

Когомологии $H_G^*(S(\gamma_n^{n-k}), Z_2)$ вычислим как когомологии пространства $G_n^{1,k} = S(\gamma_n^{n-k})/Z_2$, которое можно отождествить с пространством пар (l, L) , где l – одномерное подпространство $\mathbb{R}^n$, а L – ортогональное ему k -мерное подпространство.

Сопоставление $\pi: (l, L) \mapsto l$ проецирует $G_n^{1,k}$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$. Легко видеть, что одномерная образующая w когомологий $H^*(\mathbb{R}P^{n-1}, Z_2)$ как раз и даст при отображении π^* элемент $w \in H^*(G_n^{1,k}, Z_2)$, для которого мы должны доказать, что $w^{n-1} \neq 0$. При проекции π пространство $G_n^{1,k}$ отождествляется с пространством k -мерных подпространств в слоях дополнительного к каноническому векторного расслоения $\eta \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$.

Заметим, что пространство флагов $F(\eta)$ расслоения η отождествляется с пространством флагов $F(\mathbb{R}^n)$, при этом естественная проекция $\pi_F: F(\eta) \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ отображает флаг

$$0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = \mathbb{R}^n$$

в прямую L_1 , рассматриваемую как элемент $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Определим отображение пространства флагов $\rho: F(\eta) \rightarrow G_n^{1,k}$, которое отображает флаг $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n$ в пару из одномерного пространства L_1 и ортогонального дополнения к L_1 в L_{k+1} . Очевидно, что $\pi_F = \pi \circ \rho$. Известно, что соответствующее отображение π_F^* когомологий с коэффициентами Z_2 инъективно. Значит, и отображение Z_2 -когомологий π^* инъективно и $w^{n-1} \neq 0$ в когомологиях $G_n^{1,k}$.

Используя обозначения предыдущего параграфа, сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 3. *Существует отображение $B(S(\gamma_n^{n-k}))$ в пространство шаров расслоения $B(\gamma_n^{n-k})$, тождественное на $S(\gamma_n^{n-k})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если пара (s, t) представляет элемент $B(S(\gamma_n^{n-k}))$, то отобразим ее в $(1 - t)s - ts \in B(\gamma_n^{n-k})$. Заметим, что пара $(-s, 1 - t)$ перейдет в ту же точку, и таким образом задается отображение $B(S(\gamma_n^{n-k})) \rightarrow B(\gamma_n^{n-k})$.

Из утверждений этого и предыдущего параграфов следует

ТЕОРЕМА 12. Пусть $S(\gamma_n^{n-k})$ покрыто семейством замкнутых множеств $\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_{n+1}\}$ и никакое U_i не содержит антиподальных точек.

Тогда для всякого разбиения семейства $\{U_i\}$ на два непустых семейства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ найдется точка $s \in S(\gamma_n^{n-k})$ такая, что $s \in \bigcap \mathcal{F}_1$ и $\sigma(s) \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Кроме того, если покрытие $\mathcal{F}$ индуцировано из некоторого замкнутого покрытия $\mathcal{G} = \{V_1, V_2, \dots, V_{n+1}\}$ пространства $B(\gamma_n^{n-k})$, то семейство $\mathcal{G}$ имеет общую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть тривиально следует из теорем 7 и 11. Для доказательства второй части надо применить лемму 3 и из покрытия $B(\gamma_n^{n-k})$ получить покрытие $B(S(\gamma_n^{n-k}))$.

Рассмотрим также ориентированный грассманиан G_n^{k+} . На нем Z_2 действует сменой ориентации. Заметим, что $G_n^{k+} \sim G_n^{n-k+}$, поэтому для вычисления Z_2 -индекса ориентированного грассманиана достаточно рассмотреть случаи $2k \leq n$. В следующей теореме сведены воедино сведения об индексе ориентированного грассманиана из работ [18], [19].

ТЕОРЕМА 13. Пусть $2k \leq n$ и 2^s – минимальная степень двойки $2^s \geq n$.

- 1) Если $k = 1$, то $\text{hind } G_n^{1+} = \text{hind } S^{n-1} = n - 1$.
- 2) Если $k = 2$, то $\text{hind } G_n^{k+} = 2^s - 2$.
- 3) Если $k > 2$, то при $n = 2k = 2^s$ имеем $2^{s-1} \leq \text{hind } G_n^{k+} \leq 2^s - 1$, а в остальных случаях $2^s - 2 \leq \text{hind } G_n^{k+} \leq 2^s - 1$.

Во всех случаях $\text{hind } G_n^{k+} \geq n - k$ и равенство достигается только при $k = 1$ или $k = 2$ и $n = 2^s$.

§ 5. Доказательства теорем о каноническом расслоении

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Можно выбрать такие размеры шара в каждом слое расслоения γ_n^1 , что все рассматриваемые множества будут лежать в пространстве шаров $B(\gamma_n^1)$.

Теперь определим подмножества U_i пространства сфер следующим образом. Возьмем некоторую точку $s \in S(\gamma_n^1)$, лежащую в слое L . На каждом отрезке $V_i \cap L$ выберем самую дальнюю от s точку $f_i(s)$. Эти точки, очевидно, зависят от s непрерывно. Обозначим ближайшую к s из этих точек через $f(s)$. Эта функция также непрерывно зависит от s . Положим

$$U_i = \{s \in S(\gamma_n^1) : f(s) = f_i(s)\}.$$

Эти множества замкнуты. Если какое-то U_i содержит пару антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, то отрезок $V_i \cap L$ удовлетворяет первой альтернативе теоремы.

В противном случае применим теорему 12. Для всякого разбиения множеств индексов $\{1, 2, \dots, n+1\} = I_1 \cup I_2$ найдется такая пара антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, что

$$s \in \bigcap_{i \in I_1} U_i, \quad s' \in \bigcap_{i \in I_2} U_i.$$

Рассмотрим семейства отрезков

$$\mathcal{A} = \{V_i \cap L\}_{i \in I_1}, \quad \mathcal{B} = \{V_i \cap L\}_{i \in I_2}$$

и будем считать, что s лежит левее s' . Тогда все правые концы $\mathcal{A}$ совпадают с точкой a , все левые концы $\mathcal{B}$ совпадают с точкой b и либо a левее b , либо все отрезки обоих семейств содержат $[b, a]$, т.е. семейства отрезков выравнены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Обозначим

$$U_i = \{x \in \gamma_n^k : x \text{ лежит в слое } L, \text{dist}(x, V_i \cap L) = \min_{j=1, \dots, n+1} \text{dist}(x, V_j \cap L)\}.$$

Из непрерывной зависимости $V_i \cap L$ от слоя следует замкнутость множеств U_i . Будем рассматривать сферы радиуса R в расслоении γ_n^k . Обозначим расслоение сфер через $S(\gamma_n^k)$. Покажем, что для достаточно большого R множества $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ не содержат антиподальных точек.

Предположим противное. Тогда можно считать, что множество $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ содержит пару антиподальных точек $R_m x_m$ и $-R_m x_m$ для некоторой последовательности радиусов $R_m \rightarrow +\infty$. Это значит, что ближайшие к $R_m x_m$ и $-R_m x_m$ точки объединения $\bigcup V_i$ принадлежат одному и тому же V_i . Обозначим эти точки через y_m и z_m . Из соображений компактности можно считать, что точки x_m, y_m, z_m стремятся к некоторым точкам x, y, z в слое L . Тогда получим, что семейство множеств $\{V_i \cap L\}$ имеет на границе своей выпуклой оболочки пару точек y, z , принадлежащую одному и тому же V_i . Кроме того, рассматривая пределы соответствующих сфер с центрами $R_m x_m, -R_m x_m$ и радиусами $|R_m x_m - y_m|, |-R_m x_m - z_m|$, которые являются полупространствами, получим противоречие с неантиподальностью семейства $\{V_i \cap L\}$. Значит, для достаточно большого R множества $U_i \cap S(\gamma_n^k)$ не содержат антиподальных точек.

Применяя теорему 12, находим общую точку семейства $\{U_i\}$, что в точности дает утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Применим теорему 3 и найдем точку $x \in L$, находящуюся на равных расстояниях от всех $V_i \cap L$.

Предположим, что это расстояние положительно. Обозначим множество ближайших к x точек $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$ через K . Очевидно, K пересекается со всеми V_i . Кроме того, оно выпукло. Следовательно оно содержится в некотором опорном к $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$ полупространстве H . Но тогда противоположное к H опорное полупространство не может содержать точек никакого из множеств V_i из-за неантиподальности семейства $\{V_i \cap L\}$, т.е. не может быть опорным к $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i \cap L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Рассмотрим пространство $S(\gamma_n^k)$ и определим в нем замкнутые подмножества

$$U_i = \{(n, L) : L \in G_n^k, n \in S(L), (n, s_i(L)) = \max_{j \in [m]} (n, s_j(L))\}.$$

Из непустоты внутренности $P(L)$ следует неантиподальность этих подмножеств. Теперь применим теоремы 11 и 8 и получим в точности утверждение теоремы 5.

§ 6. Разбиение мер гиперплоскостями

Сначала сформулируем обобщение известной теоремы (см. [5], [10], [11]) о том, что всякие $n + 1$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ либо могут быть пересечены гиперплоскостью, либо каждые два непересекающихся подсемейства этого семейства отделимы гиперплоскостью. Дадим несколько определений. Основные сведения о мерах можно найти в книге [20].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Меру μ на $\mathbb{R}^n$ назовем *вероятностной*, если $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.

Будем рассматривать такие меры, для которых мера полупространства непрерывно зависит от полупространства. Кратко будем называть такие меры непрерывными. Для непрерывности меры в вышеуказанном смысле достаточно, чтобы мера была абсолютно непрерывной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пару из непрерывной вероятностной меры с компактным носителем μ и числа $\varepsilon \in [0, 1/2)$ назовем *мерой с допуском*. Для краткости при рассмотрении нескольких мер μ_i допуск каждой будем обозначать через $\varepsilon(\mu_i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана мера с допуском μ . Будем говорить, что гиперплоскость h пересекает (с допуском) меру μ , если h делит $\mathbb{R}^n$ на два полупространства H_1 и H_2 и

$$\mu(H_1), \mu(H_2) \geq \varepsilon(\mu).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дана мера с допуском μ . Будем говорить, что полупространство H содержит (с допуском) меру μ , если

$$\mu(H) > 1 - \varepsilon(\mu).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны два семейства мер с допусками $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Будем говорить, что гиперплоскость h разделяет (с допуском) семейства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, если h делит $\mathbb{R}^n$ на два полупространства H_1 и H_2 так, что для любой $\mu \in \mathcal{M}_1$ полупространство H_1 содержит с допуском μ и для любой $\mu \in \mathcal{M}_2$ полупространство H_2 содержит с допуском μ .

Из следствия 2 выведем такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 14. Пусть в $\mathbb{R}^n$ дано семейство $\mathcal{M}$, состоящее из $n + 1$ меры с допуском. Тогда либо найдется гиперплоскость, которая пересекает с допуском все меры из $\mathcal{M}$, или для всякого разбиения $\mathcal{M}$ на два непустых семейства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ найдется гиперплоскость, которая разделяет с допуском $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{M} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}\}$, то обозначим через V_i множество гиперплоскостей, пересекающих μ_i с допуском. Применяя к этим множествам следствие 2, получаем требуемое утверждение.

Докажем еще одну теорему, обобщающую результат работы [21].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим семейство n мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $X \subseteq \gamma_n^1$ множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском все эти меры и рассмотрим естественную проекцию $p: X \rightarrow G_n^1$. Назовем семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ *плоским*, если отображение p пропускается через отображение универсального накрытия $\pi: S^{n-1} \rightarrow G_n^1$, т.е. $p = \pi \circ \tilde{p}$.

ТЕОРЕМА 15. Рассмотрим плоское семейство мер с допуском $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и числа $\{\alpha_i\}$ такие, что либо $\alpha_i = \varepsilon(\mu_i)$, либо $\alpha_i = 1 - \varepsilon(\mu_i)$. В таком случае существует полупространство $H \subset \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\mu_i(H) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Условие на отображение p здесь обобщает условие отделимости носителей мер из теоремы 1 работы [21], так как семейство мер, носители которых отделимы, является плоским при любых допусках. В формулировке участвуют допуски, не равные $1/2$, но предельным переходом можно убедиться в том, что для допусков, некоторые из которых равны $1/2$, она тоже верна. Если все допуски равны $1/2$, то мы получаем “теорему о бутерброде”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через V_i множество гиперплоскостей, пересекающих с допуском меру μ_i . Далее будем действовать, как и в доказательстве теоремы 1.

Рассмотрим пространство достаточно больших шаров $B(\gamma_n^1)$, содержащее все V_i , и определим отображения $f_i: S(\gamma_n^1) \rightarrow B(\gamma_n^1)$, $i = 1, \dots, n$, и $f: S(\gamma_n^1) \rightarrow B(\gamma_n^1)$ как в доказательстве теоремы 1. Теперь определим замкнутые подмножества $U_0, U_1, \dots, U_n \subseteq S(\gamma_n^1)$.

Возьмем проекцию множества X на γ_n^1 и обозначим ее через Y . Определим множество

$$Z = p^{-1}(Y) \cap S(\gamma_n^1).$$

Множество Z является двукратным накрытием Y и по условию на отображение p накрытие $Z \rightarrow Y$ тривиально, т.е. $Z = Z_1 \cup Z_2$, причем $p: Z_1 \rightarrow Y$ и $p: Z_2 \rightarrow Y$ — биекции.

Положим теперь

$$U_0 = Z_1, \quad U_i = \{s \in S(\gamma_n^1) \setminus \text{int } U_0 : f(s) = f_i(s)\}.$$

Множество U_0 не содержит антиподальных точек по построению. Предположим, что U_i содержит антиподальные точки $s, s' \in S(\gamma_n^1)$ в слое L . Тогда пересечение $V_i \cap L$ содержится во всех пересечениях $V_j \cap L$. Заметим, что длина $V_i \cap L$ больше нуля, так как $\varepsilon(\mu_i) < 1/2$. Тогда $p(s) = p(s') \in \text{int } Y$, т.е. одна из точек s, s' лежит внутри U_0 . Получаем противоречие.

Теперь положим

$$I = \{0, 1, \dots, n\}, \quad I_1 = \{i = 1, \dots, n : \alpha_i = 1 - \varepsilon(\mu_i)\}, \quad I_2 = I \setminus I_1.$$

Применив теорему 12, видим, что найдется пара антиподальных точек $s, s' \in S(\gamma_n^1)$, для которых

$$f(s) = f_i(s), \quad i \in I_1, \quad f(s') = f_i(s'), \quad i \in I_2 \setminus \{0\}, \quad s' \in \text{bd } U_0.$$

Значит, отрезки $V_i \cap L$ пересекаются по одной точке, которая является правой для $i \in I_1$ и левой для $i \in I_2 \setminus \{0\}$. Легко видеть, что эта точка определяет соответствующее полупространство, требуемое в условии.

§ 7. Теоремы типа Борсука–Улама для плоскостей

Введем ряд определений и выведем следствие из теорем 3 и 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *l-выпуклым*, если его проекция на любое l -мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ выпукла.

СЛЕДСТВИЕ 16. Если в $\mathbb{R}^n$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = n + 1$, то найдется k -плоскость, находящаяся от всех множеств семейства на равном расстоянии. Если, кроме того, объединение $\bigcup \mathcal{F}$ $(n - k)$ -выпукло, то у $\mathcal{F}$ существует k -трансвераль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F} = \{K_i\}_{i=1}^{n+1}$. Обозначим через V_i множество k -плоскостей, пересекающих K_i . Тогда пересечения $V_i \cap L$ – это просто проекции K_i на L . Следовательно, они образуют неантиподальное семейство. Применив к V_i теорему 3 или 4, получим требуемое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть даны два множества $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Уклоном X от Y называется величина

$$\delta(X, Y) = \sup_{x \in X} \text{dist}(x, Y).$$

СЛЕДСТВИЕ 17. Если в $\mathbb{R}^n$ дано неантиподальное семейство компактов $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = n + 1$, то найдется такая k -плоскость M , что уклоны всех множеств семейства $\mathcal{F}$ от M одинаковы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F} = \{K_i\}_{i=1}^{n+1}$. Обозначим

$$V_i = \left\{ M \in \gamma_n^{n-k} : \delta\left(\bigcup \mathcal{F}, M\right) = \delta(K_i, M) \right\}.$$

Тогда как и в доказательстве теоремы 3, заметим, что при достаточно большом радиусе шара в расслоении шаров $B(\gamma_n^{n-k})$ никакое V_i не содержит антиподальных точек в соответствующем расслоении сфер $S(\gamma_n^{n-k})$. Отсюда следует существование непустого пересечения $\bigcap_{i=1}^{n+1} V_i$, что и требовалось доказать.

Заметим, что в следствиях 16 и 17 расстояние можно брать в любой норме с гладким единичным шаром.

Из того, что $\text{hind } S(\gamma_n^k) = n - 1$, можно вывести еще одно обобщение теоремы Борсука–Улама. Сначала дадим пару определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ назовем *k-подсферой* всякое пересечение k -мерного линейного подпространства $L \subseteq \mathbb{R}^n$ с S^{n-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для единичной сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ назовем *k-полусферой* половину некоторой k -подсферы.

ТЕОРЕМА 18. Пусть на сфере S^{n-1} даны n открытых подмножеств $V_1, \dots, V_n$, причем всякое V_i пересекает всякую k -подсферу. Тогда найдется k -полусфера, пересекающая все множества V_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество k -подсфер параметризуется грассманианом G_n^k , а множество k -полусфер параметризуется полупространствами в слоях γ_n^k , границы которых содержат начало координат, т.е. оно параметризуется $S(\gamma_n^k)$.

Обозначим через U_i множество k -полусфер, не пересекающих V_i . Это множество компактно и из условия теоремы следует, что оно не содержит антиподальных точек. Так как по теореме 11 имеем $\text{hind } S(\gamma_n^k) = n - 1$, то по обобщенной теореме Борсука–Улама множества U_i не могут покрыть $S(\gamma_n^k)$, из чего следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 19. Пусть на сфере S^{n-1} даны $n + 1$ открытых подмножеств $V_1, \dots, V_{n+1}$, причем всякое V_i пересекает всякую k -подсферу. Тогда либо найдется k -полусфера, пересекающая все множества V_i , либо для всякого разбиения $[n + 1] = I_1 \cup I_2$ найдется пара k -полусфер H_1 и H_2 , являющихся дополнительными половинками одной k -подсферы, такая, что $V_i \cap H_1 = \emptyset$, $i \in I_1$, и $V_i \cap H_2 = \emptyset$, $i \in I_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в предыдущей теореме, обозначим через U_i множество k -полусфер, не пересекающих V_i . Теперь утверждение теоремы следует из теорем 7 и 11.

§ 8. Теоремы типа Хелли для общих трансверсалей

Приведем несколько теорем, близких к теореме Хорна–Кли и ее обобщениям из [22]. В личных беседах В. Л. Дольниковым были сообщены автору и другие, пока не опубликованные, аналогичные результаты.

ТЕОРЕМА 20. Пусть в $\mathbb{R}^n$ даны $n + 1$ семейств 1-выпуклых компактов $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in [n+1]}$. Пусть в каждом семействе любые два компакта пересекаются. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

- 1) семейство $\bigcup_{i \in [n+1]} \mathcal{F}_i$ имеет $(n - 1)$ -трансверсаль;
- 2) для всякого разбиения множества индексов $[n + 1]$ на два множества I_1 и I_2 найдется такая гиперплоскость h и набор представителей $C_i \in \mathcal{F}_i$, $i \in [n + 1]$, что множества $\{C_i\}_{i \in I_1}$ лежат с одной стороны от h , а $\{C_i\}_{i \in I_2}$ лежат с другой стороны от нее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для всякой прямой $l \in G_n^1$ через π_l ортогональную проекцию на эту прямую и пусть

$$V_i(l) = \bigcap_{C \in \mathcal{F}_i} \pi_l(C).$$

Эти множества непусты, так как в каждом семействе отрезков $\{\pi_l(C)\}_{C \in \mathcal{F}_i}$ любые два пересекаются. Также ясно, что они непрерывно зависят от l . Обозначим $V_i = \bigcup_{l \in G_n^1} V_i(l)$.

Применим к $\{V_i\}$ следствие 2. Тогда первая альтернатива следствия 2 в точности соответствует первой альтернативе данной теоремы.

В противном случае для всякого разбиения $[n + 1] = I_1 \cup I_2$ будем иметь гиперплоскость h , разделяющую $\{V_i\}_{i \in I_1}$ и $\{V_i\}_{i \in I_2}$. Рассмотрим проекции на прямую $l \perp h$, введем на ней направления “слева” и “справа”. Тогда можно считать, что на l множества $\{V_i\}_{i \in I_1}$ лежат слева от $\pi_l(h)$, а $\{V_i\}_{i \in I_2}$ лежат справа от $\pi_l(h)$. Тогда каждый правый конец V_i ($i \in I_1$) является правым концом некоторого $\pi_l(C_i)$, $C_i \in \mathcal{F}_i$, и каждый левый конец V_i , $i \in I_2$, является левым концом некоторого $\pi_l(C_i)$, $C_i \in \mathcal{F}_i$. Тогда $\{C_i\}_{i \in [n+1]}$ дают искомую систему представителей для разбиения $[n + 1] = I_1 \cup I_2$.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $0 < k < n$ и в $\mathbb{R}^n$ дано $n-k+1$ семейство $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in [n-k+1]}$ выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

- 1) найдется система представителей $K_i \in \mathcal{F}_i$ такая, что

$$\bigcap_{i \in [n-k+1]} K_i = \emptyset;$$

- 2) в некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $k+1$ или менее множеств имеют $(k-1)$ -трансверсаль;
- 3) найдется семейство параллельных k -плоскостей $\{\alpha_i\}_{i \in [n-k+1]}$ такое, что $\alpha_i, i \in [n-k+1]$, является k -трансверсалью $\mathcal{F}_i$.

При этом третья альтернатива возможна только, если $2k \leq n$, $k = 1$ или $k = 2$ и $n = 2^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что первая альтернатива не выполняется. Тогда возьмем любое $L \in G_n^{n-k}$ и спроецируем на него всю нашу систему множеств. По цветной теореме Хелли некоторое семейство $\pi_L(\mathcal{F}_i)$ имеет общую точку. Такой точке соответствует некоторая перпендикулярная L k -трансверсаль для $\mathcal{F}_i$. Обозначим

$$U_i = \left\{ L \in G_n^{k+} : \bigcap \pi_L(\mathcal{F}_i) \neq \emptyset \right\}.$$

Пусть условие 2) не выполнено. Тогда возьмем соответствующий набор множеств без $(k-1)$ -трансверсали (их должно быть ровно $k+1$) $K_1, K_2, \dots, K_{k+1} \in \mathcal{F}_i$. Для всякой $L \in U_i$ можно взять соответствующую L k -трансверсаль α для $\mathcal{F}_i$ и сравнить ориентацию на α , задаваемую любым набором точек $x_i \in K_i \cap \alpha, i \in [k+1]$, с ориентацией α , соответствующей ориентации L . По отрицанию условия 2) все такие наборы $(x_1, \dots, x_{k+1})$ задают одну и ту же ориентацию, так как они не лежат ни в какой $(k-1)$ -плоскости. Если ориентации совпали, припишем L знак $+$, иначе припишем знак $-$.

Таким образом, показано, что при невыполнении условия 2) все множества U_i несущественны. Теперь по теореме 13 и теореме 9 все U_i должны иметь общую точку, что равносильно условию 3). По теореме 13 такое возможно только при $k = 1$ или при $k = 2$ и $n = 2^l$.

В случае, когда количество семейств невелико по сравнению с n , утверждение теоремы 21 можно уточнить.

ТЕОРЕМА 22. Пусть $n = 2k + 1 \geq 3$ и в $\mathbb{R}^n$ даны два семейства $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ выпуклых компактов. Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

- 1) найдутся два представителя $K_1 \in \mathcal{F}_1, K_2 \in \mathcal{F}_2$ такие, что $K_1 \cap K_2 = \emptyset$;
- 2) в некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $k+2$ или менее множеств имеют k -трансверсаль.

ТЕОРЕМА 23. Пусть $k > 2, 2k < n + 2$ и в $\mathbb{R}^n$ дано k семейств $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ выпуклых компактов. Пусть для некоторого $m \leq n - k + 1$ выполняется неравенство

$$2^{\lceil \log_2 n \rceil} \geq k 2^{\lceil \log_2 (n-m) \rceil} + 2.$$

Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

- 1) найдется система представителей $K_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, K_k \in \mathcal{F}_k$, для которых $\bigcap_{i=1}^k K_i = \emptyset$;
- 2) В некотором из семейств $\mathcal{F}_i$ любые $m+1$ или менее множеств имеют $(m-1)$ -трансверсаль.

Неравенство в условии теоремы 23 выглядит достаточно сложно, но будет заведомо выполнено, если, например, $n \geq k(2n - 2m - 1) + 2$.

Для доказательства этих теорем нам понадобится известная лемма (лемма 5.4 из [14]).

ЛЕММА 4. Для компактных Z_2 -инвариантных подмножеств X и Y некоторого свободного Z_2 -пространства имеет место неравенство

$$\text{hind}(X \cup Y) \leq \text{hind } X + \text{hind } Y + 1.$$

Следующая лемма обобщает рассуждения из доказательства теоремы 21.

ЛЕММА 5. Пусть $k+1 \leq m \leq n-1$ и семейство строго выпуклых компактов $\mathcal{F} = \{K_1, K_2, \dots, K_{k+1}\}$ в $\mathbb{R}^n$ не имеет $(k-1)$ -трансверсали. Тогда множество ориентированных m -трансверсалей $\mathcal{F}$ можно Z_2 -эквивариантно отобразить в G_{n-k}^{m-k+} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим векторное расслоение $\eta \rightarrow K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ следующим образом. У всякого набора точек $(x_1, \dots, x_{k+1}) \in K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ аффинная оболочка $L(x_1, \dots, x_{k+1})$ имеет размерность ровно k , так как иначе у $\mathcal{F}$ нашлась бы $(k-1)$ -трансверсаль. Факторпространство $M(x_1, \dots, x_{k+1}) = \mathbb{R}^n / L(x_1, \dots, x_{k+1})$ является $(n-k)$ -мерным векторным пространством и объединение всех таких пространств дает расслоение η .

Пространство $K_1 \times \dots \times K_{k+1}$ стягиваемо, поэтому любое векторное расслоение над ним тривиально, т.е. мы можем зафиксировать изоморфизм векторных расслоений

$$\varphi: \eta \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times K_1 \times \dots \times K_{k+1}$$

и его композицию с проекцией на первое слагаемое

$$\psi: \eta \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}.$$

Обозначим теперь множество ориентированных m -трансверсалей для $\mathcal{F}$ через $T \subseteq \gamma_n^{n-m+}$. Для каждой $\tau \in T$ мы можем непрерывно (из строгой выпуклости) по τ выбрать $k+1$ точек в пересечениях

$$x_1(\tau) \in \tau \cap K_1, \quad x_2(\tau) \in \tau \cap K_2, \quad \dots, \quad x_{k+1}(\tau) \in \tau \cap K_{k+1}.$$

Образ τ в естественной проекции $\mathbb{R}^n \rightarrow M(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t))$ является ориентированным $(m-k)$ -мерным подпространством $M(x_1(t), \dots, x_{k+1}(t))$, а после отображения $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ является ориентированным $(m-k)$ -мерным подпространством в $\mathbb{R}^{n-k}$, что дает искомое отображение T в G_{n-k}^{m-k+} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 22. Из соображений компактности ясно, что достаточно доказать теорему для семейств строго выпуклых компактов.

Обозначим множество ориентированных гиперплоских трансверсалей семейства $\mathcal{F}_i$ через $Y_i \subseteq \gamma_n^{1+}$. Обозначим естественную проекцию этого множества на $G_n^{1+} = S^{n-1}$ через $X_i = \pi_\gamma(Y_i)$.

Тогда если первая альтернатива не выполняется, то $X_1 \cup X_2 = S^{n-1}$ и по лемме 4 для одного из X_i имеем

$$\text{hind } X_i \geq k.$$

В дальнейших рассуждениях фиксируем i и предполагаем противное. Пусть в $\mathcal{F}_i$ найдутся $k+2$ множества $K_1, \dots, K_{k+2}$ без k -трансверсали.

По лемме 5 множество Y_i эквивариантно отображается в $G_k^{1+} = S^{k-1}$ некоторым отображением f_i . Естественная проекция $\pi_\gamma: Y_i \rightarrow X_i$ в качестве слоев имеет отрезки, непрерывно зависящие от слоя. Следовательно, $\pi_\gamma|_{Y_i}$ имеет (очевидно, эквивариантное) сечение $\tau_i: X_i \rightarrow Y_i$. Таким образом, получаем эквивариантное отображение $f_i \circ \tau_i: X_i \rightarrow S^{k-1}$, что невозможно по свойствам индекса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 23. Из соображений компактности ясно, что достаточно доказать теорему для семейств строго выпуклых компактов.

Обозначим через $Y_i \subseteq \gamma_n^{k-1+}$ множество $(n-k+1)$ -трансверсалей для $\mathcal{F}_i$, через $X_i = \pi_\gamma(Y_i) \subseteq G_n^{k-1+}$ – множество соответствующих направлений. Заметим, что проекция $\pi_\gamma: Y_i \rightarrow X_i$ имеет слоем выпуклое множество, непрерывно (из строгой выпуклости) зависящее от слоя, и эта проекция имеет сечение $\tau_i: X_i \rightarrow Y_i$.

Тогда если первая альтернатива не выполняется, то по цветной теореме Хелли для проекций наших семейств на $(k-1)$ -мерные плоскости $\bigcup_{i=1}^k X_i = G_n^{n-k+1+}$.

Если же не выполняется вторая альтернатива, то по лемме 5 каждое Y_i (а значит, и X_i) можно эквивариантно отобразить в $G_{n-m}^{n-k-m+1+}$. По монотонности индекса и теореме 13 имеем

$$\text{hind } X_i \leq 2^{\lceil \log_2(n-m) \rceil} - 1.$$

Тогда по лемме 4 получаем

$$\text{hind } G_n^{n-k+1+} \leq k 2^{\lceil \log_2(n-m) \rceil} - 1.$$

Но теорема 13 дает оценку $\text{hind } G_n^{n-k+1+} \geq 2^{\lceil \log_2 n \rceil} - 2$, что противоречит неравенству из условия теоремы.

Автор признателен В. Л. Дольникову за содержательное обсуждение результатов работы и значительную помощь при редактировании текста.

Список литературы

- [1] K. Borsuk, “Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre”, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.
- [2] E. Helly, “Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **32** (1923), 175–176.

- [3] I. Bárány, “A generalization of Carathéodory’s theorem”, *Discrete Math.*, **40**:2–3 (1982), 141–152.
- [4] В. Л. Дольников, “Обобщенные трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связи между теоремами Хелли и Борсука”, *Докл. АН СССР*, **297**:4 (1987), 777–780; англ. пер.: V. L. Dol’nikov, “Generalized transversals of families of sets in $\mathbb{R}^n$ and connections between the Helly and Borsuk theorems”, *Soviet Math. Dokl.*, **36**:3 (1988), 519–522.
- [5] S. E. Cappell, J. E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir, R. Wenger, “Common tangents and common transversals”, *Adv. Math.*, **106**:2 (1994), 198–215.
- [6] A. Horn, “Some generalizations of Helly’s theorem on convex sets”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949), 923–929.
- [7] V. L. Klee, jr., “On certain intersection properties of convex sets”, *Canadian J. Math.*, **3** (1951), 272–275.
- [8] A. H. Stone, J. W. Tukey, “Generalized “sandwich” theorems”, *Duke Math. J.*, **9**:2 (1942), 356–359.
- [9] H. Steinhaus, “Sur la division des ensembles de l’espace par les plans et des ensembles plans par les cercles”, *Fund. Math.*, **33** (1945), 245–263.
- [10] T. Bisztriczky, “On separated families of convex bodies”, *Arch. Math. (Basel)*, **54**:2 (1990), 193–199.
- [11] V. Klee, T. Lewis, B. Von Hohenbalken, “Appollonius revisited: supporting spheres for sundered systems”, *Discrete Comput. Geom.*, **18**:4 (1997), 385–395.
- [12] В. В. Makeev, “Некоторые экстремальные задачи для векторных расслоений”, *Алгебра и анализ*, **19**:2 (2007), 131–155; англ. пер.: V. V. Makeev, “Some extremal problems for vector bundles”, *St. Petersburg Math. J.*, **19**:2 (2007), 261–277.
- [13] W.-Y. Hsiang, *Cohomology theory of topological transformation groups*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 1975.
- [14] А. Ю. Воловиков, Е. В. Щепин, “Антиподы и вложения”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 3–32; англ. пер.: A. Yu. Volovikov, E. V. Shchepin, “Antipodes and embeddings”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 1–28.
- [15] R. N. Karasev, “Colored versions of the Sperner theorem and the KKM theorem”, *Third Russian–German geometry meeting dedicated to 95th birthday of A. D. Alexandrov* (St. Petersburg, 2007), St. Petersburg, 2007, 17–18.
- [16] М. Холл мл., *Комбинаторика*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: M. Hall, jr., *Combinatorial theory*, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto, ON–London, 1967.
- [17] Р. Н. Карасёв, “Раскрашенная версия леммы Кнастера–Куратовского–Мазуркевича”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **13**:2 (2006), 66–70.
- [18] H. L. Hiller, “On the cohomology of real Grassmanians”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **257**:2 (1980), 521–533.
- [19] H. L. Hiller, “On the height of the first Stiefel–Whitney class”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **79**:3 (1980), 495–498.
- [20] Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич, *Интеграл, мера и производная*, Наука, М., 1964; англ. пер.: G. E. Shilov, B. L. Gurevich, *Integral, measure and derivative: a unified approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [21] I. Bárány, A. Hubard, J. Jerónimo, “Slicing convex sets and measures by a hyperplane”, *Discrete Comput. Geom.*, **39**:1–3 (2008), 67–75.
- [22] В. Л. Дольников, *Теоремы типа Хелли для трансверсалией семейств множеств и их приложения*, Дис. . . . докт. физ.-матем. наук, Изд-во ЯГУ, Ярославль, 2001.

Р. Н. Карасёв (R. N. Karasev)

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: r_n_karasev@mail.ru

Поступила в редакцию

05.06.2008 и 30.06.2009