Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Воротников, О повторяющейся концентрации и периодических режимах при аномальной диффузии в полимерах, *Матем. сб.*, 2010, том 201, номер 1, 59–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:15:30

УДК 517.958:[536.2+539.219.3]

Д. А. Воротников

О повторяющейся концентрации и периодических режимах при аномальной диффузии в полимерах

Распространение проникающей жидкости в полимерном материале часто не удовлетворяет классическим уравнениям диффузии и требует учета релаксационных (вязкоупругих) свойств полимера. Мы изучаем краевую задачу на ограниченной области в пространстве для системы уравнений, моделирующих такую аномальную диффузию. Доказано, что для любого достаточно короткого отрезка времени и заданного напряжения в начале этого отрезка существует такое глобальное по времени слабое решение краевой задачи (пара концентрация–напряжение), что концентрация в начале и в конце отрезка одинаковая. При дополнительном условии на коэффициенты показано также существование периодических по времени слабых решений (без ограничений на длину периода).

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: нефиковская диффузия, полимер, проникающая жидкость, топологическая степень, слабое решение, периодичность.

§ 1. Введение

Благодаря своим разнообразным и многосторонним свойствам полимеры находят широкое применение во многих отраслях промышленности. В то же время строгое научное изучение (в том числе с математической точки зрения) их свойств отстает от темпов внедрения этих материалов, хотя и ведется достаточно широко.

Полимеры часто используются в комбинации с жидкостью, проникающей внутрь их структуры. При этом меняются свойства самого полимера. Например, в фармацевтической промышленности жидкое действующее вещество может применяться в сочетании с полимерным носителем. Оказывается, что в такой ситуации процесс распространения жидкости в полимере противоречит законам классической теории диффузии. По всей видимости это объясняется (см. [1]) сложной комбинированной вязкоупругой природой полимеров.

Напомним классический общий закон сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} J, \quad (1.1)$$

который, в частности, подходит для описания диффузии в сплошных средах: в этом случае $u = u(t, x)$ обозначает концентрацию, а $J = J(t, x)$ обозначает

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00137) и программы BRHE Минобрнауки РФ и Американского фонда гражданских исследований (грант № Y3-M-10-05).

поток концентрации (они зависят от времени t и пространственной точки x). Закон Фика гласит, что поток концентрации пропорционален ее градиенту:

$$J = -D(u)\nabla u, \quad (1.2)$$

где $D(u)$ есть коэффициент диффузии (в общей постановке это положительно определенный тензор; в более простой он вырождается в скаляр и/или перестает зависеть от концентрации). Из (1.1) и (1.2) следует классическое уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D(u)\nabla u). \quad (1.3)$$

При распространении жидкости в полимере возникает ряд явлений (например, называемых в англоязычной литературе *case II diffusion* [2], [3], *sorption overshoot* [4], *literal skinning*, *trapping skinning* [5], [6] и *desorption overshoot* [7]), которые показывают, что поведение концентрации жидкости не вписывается в ограничения, налагаемые уравнением (1.2) или (1.3). Как и ньютоновское реологическое соотношение (см. [8]), подходящее для описания жидкостей, но слишком простое для описания полимеров, закон Фика также должен быть значительно изменен для описания этих (и других потенциально возможных при распространении жидкости в полимере) феноменов. Используя аналогии с реологией вязкоупругих сред и результаты исследований и опытов многих специалистов, Д. С. Коэн и др. (см. [1], [4], [9]) предложили следующий определяющий закон (кстати, учитывающий и конвекцию):

$$J = -D(u)\nabla u - E(u)\nabla \sigma + M(u, \sigma)u, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \beta(u)\sigma = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right). \quad (1.5)$$

Здесь σ — вспомогательная переменная, связанная с напряжением (см. [10]), вследствие чего ее саму называют этим термином (англ. *stress*). Известными (определяемыми свойствами материалов и внешними условиями) считаются коэффициенты: скаляр β (по физическому смыслу обратно пропорциональный времени релаксации и зависящий от концентрации), положительно определенные тензоры D и E (зависящие от концентрации), скаляр f и отвечающий за конвекцию вектор M (зависящие от двух аргументов). Вот типичный вид функции β (см. [4]):

$$\beta(u) = \frac{1}{2}(\beta_R + \beta_G) + \frac{1}{2}(\beta_R - \beta_G) \operatorname{th}\left(\frac{u - u_{RG}}{\delta}\right),$$

где β_R , β_G , δ , u_{RG} — положительные константы, $\beta_R > \beta_G$; D обычно имеет подобную (т.е. монотонную с областью резкого возрастания) зависимость от u (см. [7]).

Согласно [9], [10] хороший пример функции E — линейная зависимость от u . Впрочем, E часто считают константой — это считается допустимым упрощением модели (см. [9]). В то же время еще в [11] (численно) было показано,

что E не должно быть ненулевой константой ($E \equiv 0$ – это фактически закон Фика), так как при $E(0) \neq 0$ концентрация u может становиться отрицательной (что не имеет физического смысла). С другой стороны, строго доказано (см. [12], а также [13]), что при $E(0) = 0$ концентрация u остается неотрицательной, если она была таковой в каждой точке в начальный момент времени и граничные условия неотрицательны. В настоящей работе (конец § 3) приводятся соображения в пользу целесообразности условия $E(1) = 0$, и тогда типичным примером E будет функция вида

$$E(u) = \frac{\alpha_1 u(u-1)^2}{\alpha_2 + (u-1)^2} \quad (1.6)$$

с малым α_2 и α_1 порядка 1.

Другие примеры β , D и E можно найти в [9], [7]. А для функции f типичен следующий вид (см. [9]):

$$f(u, u') = \mu(u)u + \nu(u)u', \quad (1.7)$$

где функции μ и ν принимают значения в ограниченном отрезке $[0, a]$.

Из (1.4) и (1.1) следует уравнение аномальной диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D\nabla u + E\nabla \sigma - Mu). \quad (1.8)$$

С более общей точки зрения (см. [12]) векторный коэффициент M , скаляр β и тензоры D , E могут зависеть от t , x , u и σ (см. также [6]).

Начально-краевые задачи для системы (1.8), (1.5) изучались несколькими авторами. В [12] показано существование максимального (не глобального по времени) решения. Глобальная разрешимость задачи представлена в [14] при $f = \mu u$, $M \equiv 0$ и не зависящих от концентрации скалярах $D = E$. В упомянутой работе рассмотрен одномерный случай ($0 < x < 1$), но по всей видимости он обобщается на случай $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (ограниченная область с гладкой границей). В [13] же доказано глобальное существование решений при непостоянном E (удовлетворяющем указанному выше условию $E(0) = 0$ и ряду других условий, исключающих, кстати, возможность того, что $E(1) = 0$). При этом предполагается ограниченность снизу положительной константой начальных и граничных условий на концентрацию, что влечет строгую положительность решений и не дает возможности рассмотреть наличие “сухих” участков. Большая часть статьи [13] рассматривает одномерную ситуацию $0 < x < 1$, но в конце приведена схема переноса результатов на многомерные области. Наличие слабых решений начально-краевой задачи в многомерной ограниченной области изучалось в [15], [16]. Для неограниченной области $\Omega = \mathbb{R}^n$ известно глобальное существование диссипативных (по сути очень слабых) решений с постоянными скалярными D и E и с $M \equiv 0$ (см. [17]; использованная там техника применима и для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Несколько отличная от (1.8), (1.5) модель изучалась в [18].

Настоящая статья посвящена проблеме нахождения периодических по времени решений краевой задачи для системы (1.8), (1.5) и сходной с ней задачи поиска решений с повторяющейся концентрацией при заданном начальном

напряжении. Идея поиска решений эволюционных уравнений в частных производных, повторяющихся в два заданных момента времени (т.е. обладающих так называемым *reproductive property*, в формульной записи $y(t_1) = y(t_2)$), идет от работы [19]. В отличие от задачи о периодических решениях, при этом не требуется периодичность коэффициентов и правых частей уравнений. У задачи с одной неизвестной функцией как раз при периодичности коэффициентов и правых частей решение с *reproductive property* порождает периодическое решение. В § 3 настоящей работы мы ищем решение, обладающее *reproductive property* по концентрации и начальному условию по напряжению (что, однако, не влечет автоматически наличие периодических решений). В § 4 мы докажем основной результат из § 3 (теорему 3.1) о существовании слабого решения этой задачи. В § 5 исследуем задачу о периодических решениях, но слабая разрешимость (теорема 5.1) получается при дополнительных условиях на коэффициенты.

§ 2. Обозначения

Мы используем стандартную запись $L_p(\Omega)$, $W_p^m(\Omega)$, $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq p \leq \infty$), $H_0^m(\Omega) = \dot{W}_2^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$) для пространств Лебега и Соболева на открытом множестве (области) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Скалярное произведение и евклидова норма в $L_2(\Omega)^k = L_2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ обозначаются (u, v) и $\|u\|$ соответственно ($k = 1$ или $k = n$). В пространстве $H_0^1(\Omega)$ используются следующие скалярное произведение и норма: $(u, v)_1 = (\nabla u, \nabla v)$, $\|u\|_1 = \|\nabla u\|$. Напомним неравенство Фридрихса:

$$\|u\| \leq K_\Omega \|u\|_1. \quad (2.1)$$

Аналогично, в пространстве $H_0^2(\Omega)$ используются скалярное произведение $(u, v)_2 = (\Delta u, \Delta v)$ и норма $\|u\|_2 = \|\Delta u\|$.

Как обычно, пространство $H^{-m}(\Omega)$, $m = 1, 2$, отождествляется с сопряженным к $H_0^m(\Omega)$. Действие функционала из $H^{-m}(\Omega)$ на элемент из $H_0^m(\Omega)$ обозначается $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Напомним, что $\|\varphi\|_{-m} = \sup_{\|w\|_m=1} |\langle \varphi, w \rangle|$.

Иногда будем писать просто L_p , H^m вместо $L_p(\Omega)^k$, $H^m(\Omega)^k$, $k = 1, n$.

Оператор Лапласа $\Delta: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ является изоморфизмом. Поэтому оператор

$$\Delta^{-1}: H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \quad (2.2)$$

тоже является изоморфизмом. Обозначим $X = X(\Omega) = \Delta^{-1}(H_0^1(\Omega))$. Скалярное произведение и норму в X зададим по формулам $(u, v)_X = (\Delta u, \Delta v)_1$, $\|u\|_X = \|\Delta u\|_1$. Обратим внимание на то, что между $H^{-1}(\Omega)$ и $X(\Omega)$ имеется следующая двойственность:

$$\langle u, v \rangle_1 = -\langle u, \Delta v \rangle, \quad u \in H^{-1}, \quad v \in X, \quad (2.3)$$

причем $\langle u, v \rangle_1 = (u, v)_1$ для $u \in H_0^1$, $v \in X$.

Записи типа $C(\mathcal{J}; E)$, $C_w(\mathcal{J}; E)$, $L_2(\mathcal{J}; E)$, $L_{2,\text{loc}}(\mathcal{J}; E)$ и т.п. используются для обозначения пространств функций на интервале $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ со значениями

в банаховом пространстве E (в данном случае соответственно непрерывных, слабо непрерывных, суммируемых с квадратом, локально суммируемых с квадратом). Напомним, что функция $u: \mathcal{J} \rightarrow E$ называется *слабо непрерывной*, если для любого непрерывного линейного функционала g на E функция $g(u(\cdot))$: $\mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

В случае, когда E является функциональным пространством (например, $L_2(\Omega)$, $H^m(\Omega)$), мы отождествляем элементы $C(\mathcal{J}; E)$, $L_2(\mathcal{J}; E)$ и др. с числовыми функциями, определенными на $\mathcal{J} \times \Omega$, по формуле

$$u(t)(x) = u(t, x), \quad t \in \mathcal{J}, \quad x \in \Omega.$$

Ниже используются также следующие пространства ($T > 0$ – число):

$$W = W(\Omega, T) = \{ \tau \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)), \tau' \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \},$$

$$\|\tau\|_W = \|\tau\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|\tau'\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))};$$

$$W_1 = W_1(\Omega, T) = \{ \tau \in L_2(0, T; X(\Omega)), \tau' \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \},$$

$$\|\tau\|_{W_1} = \|\tau\|_{L_2(0, T; X(\Omega))} + \|\tau'\|_{L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))};$$

$$W_2 = W_2(\Omega, T) = \{ \tau \in L_2(0, T; H_0^2(\Omega)), \tau' \in L_2(0, T; H^{-2}(\Omega)) \},$$

$$\|\tau\|_{W_2} = \|\tau\|_{L_2(0, T; H_0^2(\Omega))} + \|\tau'\|_{L_2(0, T; H^{-2}(\Omega))}.$$

Лемма III.1.2 из [20] показывает, что вложения $W, W_2 \subset C([0, T]; L_2(\Omega))$, $W_1 \subset C([0, T]; H_0^1(\Omega))$ непрерывны (см. также [21], [8]).

Обозначение $|\cdot|$ используется для модуля числа, евклидовой нормы в $\mathbb{R}^n$ и для следующего случая. Пусть $\mathbb{R}^{n \times n}$ – пространство матриц порядка $n \times n$ с нормой

$$|A| = \max_{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1} |A\xi|.$$

Через $\mathbb{R}_+^{n \times n}$ обозначим множество таких матриц $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, что

$$(A\xi, \xi)_{\mathbb{R}^n} \geq d(A)(\xi, \xi)_{\mathbb{R}^n}$$

для некоторого $d(A) \geq 0$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

§ 3. Задача о повторяемости концентрации

Пусть полимер заполняет область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Наиболее важны частные случаи $n = 2$ (диффузия в пленках) и $n = 3$. Рассмотрим краевую задачу для системы уравнений, описывающей распространение проникающей жидкости в этом полимере:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} [D_0(t, x, u, \sigma) \nabla u + E_0(t, x, u, \sigma) \nabla \sigma - M_0(t, x, u, \sigma) u], \quad (3.1)$$

$$(t, x) \in [0, T] \times \Omega,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \beta_0(t, x, u, \sigma) \sigma = \mu_0(u) u + \nu_0(u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \quad (3.2)$$

$$u(t, x) = \varphi(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Здесь $u = u(t, x): [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ – это неизвестная концентрация жидкости (в точке x в момент времени t); $\sigma = \sigma(t, x): [0, \infty) \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ – неизвестное напряжение; $\varphi: [0, \infty) \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – заданное граничное условие; $\mu_0, \nu_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D_0, E_0: \mathbb{R}^{n+3} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $\beta_0: \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}$, $M_0: \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – известные функции, $\nu_0(\cdot) \geq 0$.

Будем искать решения, имеющие одинаковые распределения концентрации в моменты 0 и $T > 0$, т.е.

$$u(0, x) = u(T, x), \quad x \in \Omega \quad (3.4)$$

(без ограничения общности мы считаем начальным нулевой момент времени).

Предположим на время, что область Ω и участвующие в уравнениях функции достаточно “хорошие”¹. Функцию φ будем считать определенной на $[0, \infty) \times \Omega$. При этом, разумеется, необходимо считать, что

$$\varphi|_{t=0} = \varphi|_{t=T}. \quad (3.5)$$

Введем новую переменную

$$\varsigma(\cdot) = \sigma(\cdot) - \int_0^{u(\cdot)} \nu_0(y) dy.$$

По сути это “чисто нефиковская” составляющая напряжения. При $\nu_0 \equiv 0$ она совпадает с напряжением.

Введем еще новые функции

$$\begin{aligned} \gamma(\cdot, \cdot, u, \varsigma) &= \mu_0(u) - \frac{\beta_0\left(\cdot, \cdot, u, \varsigma + \int_0^u \nu_0(y) dy\right) \int_0^{u(\cdot)} \nu_0(y) dy}{u(\cdot)}, \\ D_1(t, x, u, \varsigma) &= D_0\left(t, x, u, \varsigma + \int_0^u \nu_0(y) dy\right) \\ &\quad + \nu_0(u) E_0\left(t, x, u, \varsigma + \int_0^u \nu_0(y) dy\right) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \\ E_1(\cdot, \cdot, u, \varsigma) &= E_0\left(\cdot, \cdot, u, \varsigma + \int_0^u \nu_0(y) dy\right), \\ M_1(\cdot, \cdot, u, \varsigma) &= -M_0\left(\cdot, \cdot, u, \varsigma + \int_0^u \nu_0(y) dy\right), \\ \beta_1(\cdot, \cdot, u, \varsigma) &= -\beta_0\left(\cdot, \cdot, u, \varsigma + \int_0^u \nu_0(y) dy\right). \end{aligned}$$

Перепишем (3.1) и (3.2) в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} [D_1(t, x, u, \varsigma) \nabla u + E_1(t, x, u, \varsigma) \nabla \varsigma + M_1(t, x, u, \varsigma) u], \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} = \beta_1(t, x, u, \varsigma) \varsigma + \gamma(t, x, u, \varsigma) u. \quad (3.7)$$

¹Например, $\varphi, \mu_0, \nu_0, D_0, E_0, \beta_0, M_0$ – C^2 -гладкие и ограниченные функции, граница области также C^2 -гладкая, а область локально расположена по одну сторону своей границы. Хотя данные предположения достаточно естественны для изучаемой модели (см. [9; введение], а также конец § 3 по поводу ограниченности E_0 и M_0), ниже мы их существенно ослабим.

Нам не хватает еще одного “временного” условия. Пусть начальное “чисто нефиковское” напряжение также известно:

$$\varsigma(0, x) = \varsigma_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (3.8)$$

При каждом фиксированном $x \in \bar{\Omega}$ рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta_1(t, x, \varphi(t, x), \psi) \psi + \gamma(t, x, \varphi(t, x), \psi) \varphi(t, x), \quad (3.9)$$

$$\psi|_{t=0} = \varsigma_0. \quad (3.10)$$

Если ς_0 , φ , β_1 и γ ограничены, то ее решение $\psi(t, x)$ также априори ограничено на конечных отрезках (ср. [15], [16]), и потому существует и единственно на всей положительной полуоси. Заметим, что $\varsigma|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega}$.

Воздействуем оператором Лапласа на обе части уравнения (3.7):

$$\Delta \varsigma' = \operatorname{div} [\nabla(\beta_1(t, x, u, \varsigma) \varsigma) + \nabla(\gamma(t, x, u, \varsigma) u)]. \quad (3.11)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta \varsigma' = \operatorname{div} & \left[\beta_1(t, x, u, \varsigma) \nabla \varsigma + \frac{\partial \beta_1}{\partial x}(t, x, u, \varsigma) \varsigma + \frac{\partial \beta_1}{\partial u}(t, x, u, \varsigma) \varsigma \nabla u \right. \\ & + \frac{\partial \beta_1}{\partial \varsigma}(t, x, u, \varsigma) \varsigma \nabla \varsigma + \gamma(t, x, u, \varsigma) \nabla u + \frac{\partial \gamma}{\partial x}(t, x, u, \varsigma) u \\ & \left. + \frac{\partial \gamma}{\partial u}(t, x, u, \varsigma) u \nabla u + \frac{\partial \gamma}{\partial \varsigma}(t, x, u, \varsigma) u \nabla \varsigma \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Обозначим

$$v = u - \varphi, \quad \tau = \varsigma - \psi,$$

$$\begin{aligned} \beta(t, x, v, \tau) &= \frac{\partial \beta_1}{\partial u}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(\tau + \psi) + \gamma(t, x, v + \varphi, \tau + \psi) \\ &+ \frac{\partial \gamma}{\partial u}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(v + \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(t, x, v, \tau) &= \beta_1(t, x, v + \varphi, \tau + \psi) + \frac{\partial \beta_1}{\partial \varsigma}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(\tau + \psi) \\ &+ \frac{\partial \gamma}{\partial \varsigma}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(v + \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t, x, v, \tau) &= -\nabla \psi' + \frac{\partial \beta_1}{\partial u}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(\tau + \psi) \nabla \varphi + \gamma(t, x, v + \varphi, \tau + \psi) \nabla \varphi \\ &+ \frac{\partial \gamma}{\partial u}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(v + \varphi) \nabla \varphi + \beta_1(t, x, v + \varphi, \tau + \psi) \nabla \psi \\ &+ \frac{\partial \beta_1}{\partial \varsigma}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(\tau + \psi) \nabla \psi + \frac{\partial \gamma}{\partial \varsigma}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(v + \varphi) \nabla \psi \\ &+ \frac{\partial \beta_1}{\partial x}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(\tau + \psi) + \frac{\partial \gamma}{\partial x}(t, x, v + \varphi, \tau + \psi)(v + \varphi). \end{aligned}$$

Тогда можно переписать (3.12) в следующем виде:

$$\Delta \tau' = \operatorname{div} [\beta(t, x, v, \tau) \nabla v + \mu(t, x, v, \tau) \nabla \tau + g(t, x, v, \tau)]. \quad (3.13)$$

Аналогично, вводя обозначения

$$\begin{aligned} D(t, x, v, \tau) &= D_1(t, x, v + \varphi, \tau + \psi), \\ E(t, x, v, \tau) &= E_1(t, x, v + \varphi, \tau + \psi), \\ f(t, x, v, \tau) &= -\nabla \Delta^{-1} \varphi' + D_1(t, x, v + \varphi, \tau + \psi) \nabla \varphi + E_1(t, x, v + \varphi, \tau + \psi) \nabla \psi \\ &\quad + (v + \varphi) M_1(t, x, v + \varphi, \tau + \psi), \end{aligned}$$

перепишем уравнение (3.6) в форме

$$v' = \operatorname{div} [D(t, x, v, \tau) \nabla v + E(t, x, v, \tau) \nabla \tau + f(t, x, v, \tau)]. \quad (3.14)$$

Заметим, что граничные и начальные условия на v и τ получаются следующими:

$$v|_{t=0} = v|_{t=T}, \quad (3.15)$$

$$\tau|_{t=0} = 0, \quad (3.16)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad \tau|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.17)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пара функций (v, τ) из класса

$$v \in W(\Omega, T), \quad \tau \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.18)$$

называется *слабым* решением задачи (3.13)–(3.17), если они удовлетворяют (3.15), (3.16), а равенства (3.13), (3.14) выполняются в пространстве $H^{-1}(\Omega)$ п.в. на $(0, T)$.

Условия (3.15), (3.16) имеют смысл благодаря вложениям

$$W \subset C([0, T]; L_2(\Omega)), \quad H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset C([0, T]; H_0^1(\Omega)).$$

Условие (3.17) “спрятано” в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Как видим, всякое “хорошее” регулярное решение (u, ς) задачи (3.3)–(3.8) порождает пару (v, τ) , которая, в частности, является слабым решением задачи (3.13)–(3.17). Обратно, пусть некая пара (v, τ) является слабым решением задачи (3.13)–(3.17). Пусть функции v, τ, ψ, φ достаточно регулярны и имеют место соотношения (3.5), (3.9) и (3.10). Тогда соответствующая пара $(u = v + \varphi, \varsigma = \tau + \psi)$ удовлетворяет (3.6) и (3.11); последнее влечет (3.7) в силу (3.9). Более того, имеют место (3.3), (3.4) и (3.8). А тогда пара

$$\left(u, \sigma = \varsigma + \int_0^u \nu_0(y) dy \right)$$

удовлетворяет (3.1) и (3.2).

При работе со слабыми решениями не обязательно считать, что все известные функции и область Ω регулярны. Достаточно условий, которые мы сейчас опишем.

Ради общности будем считать β и μ матричными функциями.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, является произвольным ограниченным открытым множеством, удовлетворяющим условию

$$X(\Omega) \subset W_{p_0}^1(\Omega) \quad (3.19)$$

с каким-нибудь $p_0 > 2$ (это условие выполнено при минимальных требованиях регулярности области).

Ниже мы предполагаем также, что:

- i) $D, E, \mu, \beta: \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $f, g: \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- ii) каждая из этих шести функций (например, $D(t, x, v, \tau)$) измерима по (t, x) при фиксированных (v, τ) ;
- iii) каждая из этих функций непрерывна по (v, τ) при фиксированных (t, x) ;
- iv) имеют место оценки

$$|D(t, x, v, \tau)| \leq K_D, \quad (3.20)$$

$$|E(t, x, v, \tau)| \leq K_E, \quad (3.21)$$

$$|\beta(t, x, v, \tau)| \leq K_\beta, \quad (3.22)$$

$$|\mu(t, x, v, \tau)| \leq K_\mu, \quad (3.23)$$

$$|f(t, x, v, \tau)| \leq K_f|\tau| + \tilde{f}(t, x), \quad (3.24)$$

$$|g(t, x, v, \tau)| \leq K_g(|v| + |\tau|) + \tilde{g}(t, x) \quad (3.25)$$

с некоторыми константами $K_D, \dots, K_g$ и известными функциями $\tilde{f}, \tilde{g} \in L_2((0, T) \times \Omega)$;

v) справедливо

$$(D(t, x, v, \tau)\xi, \xi)_{\mathbb{R}^n} \geq d(\xi, \xi)_{\mathbb{R}^n}, \quad (3.26)$$

где $d > 0$ не зависит от $(t, x, v, \tau) \in \mathbb{R}^{n+3}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Найдется такое $T_0 > 0$, что при любом $T \leq T_0$ существует слабое решение задачи (3.13)–(3.17) в классе (3.18).*

Доказательству этой теоремы будет посвящен § 4.

Так как краевая задача (3.13), (3.14), (3.17) на отрезках любой (например, единичной) длины имеет решение, удовлетворяющее заданному условию

$$v|_{t=t_0} = v_{t_0} \in L_2, \quad \tau|_{t=t_0} = \tau_{t_0} \in H_0^1$$

в начале отрезка (см. [16]), то полученное в теореме 3.1 решение можно шаг за шагом продлить на весь положительный луч. И мы получим

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Найдется такое $T_0 > 0$, что при любом $T \leq T_0$ существует пара функций*

$$v \in L_{2,\text{loc}}(0, \infty; H_0^1(\Omega)) \cap H_{\text{loc}}^1(0, \infty; H^{-1}(\Omega)), \quad \tau \in H_{\text{loc}}^1(0, \infty; H_0^1(\Omega)), \quad (3.27)$$

которые удовлетворяют (3.15), (3.16), а также (3.13), (3.14) в $H^{-1}(\Omega)$ п.в. на $(0, \infty)$.

Отметим также, что при моделировании реальных диффузионных процессов в полимерах всегда можно считать условия iv) выполненными². В самом деле, по физическому смыслу

$$0 \leq u(t, x) \leq 1 \quad (3.28)$$

(ведь u – это концентрация, так что она не менее 0% и не более 100%). Кроме того, время релаксации в реальности положительно и ограничено, поэтому можно считать, что его обратное β_0 не менее некоего $\beta_G > 0$ (как в § 1), а потому $\beta_1 \leq -\beta_G$. Равенства (3.7) и (3.8) дают представление

$$\begin{aligned} \varsigma(t, x) = & \varsigma_0(x) \exp\left(\int_0^t \beta_1(\xi, x, u(\xi, x), \varsigma(\xi, x)) d\xi\right) \\ & + \int_0^t \exp\left(\int_s^t \beta_1(\xi, x, u(\xi, x), \varsigma(\xi, x)) d\xi\right) \gamma(s, x, u(s, x), \varsigma(s, x)) u(s, x) ds. \end{aligned}$$

Если $|\varsigma_0(x)|$ и γ равномерно ограничены, то ς также равномерно ограничено:

$$|\varsigma(t, x)| \leq e^{-t\beta_G} |\varsigma_0(x)| + C(\gamma) \int_0^t e^{(s-t)\beta_G} ds \leq e^{-t\beta_G} |\varsigma_0(x)| + \frac{C(\gamma)}{\beta_G}. \quad (3.29)$$

Поэтому коэффициенты системы (3.1), (3.2) (и эквивалентной ей (3.6), (3.7)) можно определить из эксперимента лишь на ограниченных u и ς , а “на бесконечности” мы их можем фактически выбрать по своему усмотрению (например, ограниченными или даже имеющими достаточно быстро убывающие на бесконечности частные производные) так, чтобы выполнялись условия iv) на преобразованные коэффициенты.

Однако вопрос о том, при каких ограничениях на коэффициенты условие (3.28), будучи заданным для граничной функции φ и для некоего начального данного u_0 , будет выполнено во все последующие моменты времени для решения u задачи (3.1)–(3.3) с $u|_{t=0} = u_0$, с математической точки зрения изучен не до конца (а ведь только такие решения, а потому и коэффициенты, имеют физический смысл). Если E_0 не зависит³ от σ , а зависит только от t, x, u , и $E_0(t, x, 0) \equiv 0$, то (см. [12; теорема 7.4]) решение сохраняет неотрицательность. Сделав замену $\tilde{u} = 1 - u$, $\tilde{\sigma} = -\sigma$, можно аналогичным образом доказать (при предположениях $E_0(t, x, 1) \equiv 0$ и $M_0(t, x, 1, \sigma) = \text{const}$), что условие $u \leq 1$ также сохраняется с течением времени. Вместе с тем нельзя наверняка утверждать, что другие E_0 не имеют смысла. Поэтому мы рассматриваем модель в общем виде, ограничиваясь лишь требованиями i)–v).

§ 4. Доказательство теоремы 3.1

Нам понадобится один абстрактный результат. Пусть даны два гильбертовых пространства Z и Y с непрерывным вложением $i: Z \rightarrow Y$ и $i(Z)$ плотно в Y . Стандартная схема (см. [20], [8]) отождествления Y со своим сопряженным пространством влечет

$$Z \subset Y \equiv Y^* \subset Z^*, \quad (4.1)$$

²Естественность остальных наложенных нами условий ясна и не требует подробного обсуждения.

³Как правило, считают, что E_0 вообще зависит только от концентрации (см. § 1).

где оба вложения плотны и непрерывны. При этом скалярное произведение любых $f \in Y$ и $u \in Z$ в Y совпадает со значением функционала f из Z^* на элементе $u \in Z$:

$$(f, u)_Y = \langle f, u \rangle. \quad (4.2)$$

ЛЕММА 4.1. Пусть Z сепарабельно и дан непрерывный линейный оператор $A: Z \rightarrow Z^*$, для которого найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|_Z^2 \quad \forall u \in Z. \quad (4.3)$$

Тогда для любых $a \in Y$ и $f \in L_2(0, T; Z^*)$, $T > 0$, задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad (4.4)$$

$$u(T) + a = u(0) \quad (4.5)$$

имеет единственное решение в классе

$$u \in L_2(0, T; Z) \cap C([0, T]; Y), \quad u' \in L_2(0, T; Z^*). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $b \in Y$ и $f \in L_2(0, T; Z^*)$ задача Коши (4.4), $u(0) = b$ однозначно разрешима в классе (4.6) по теореме 1.1 из [21; гл. VI] или по лемме 3.1.3 из [8]. Обозначим ее решение через u_b . Рассмотрим оператор

$$\mathcal{G}: b \mapsto u_b(T) + a.$$

Неподвижные точки этого оператора соответствуют решениям задачи (4.4), (4.5). Поэтому достаточно проверить, что $\mathcal{G}$ является сжатием на Y (и применить принцип Банаха).

Пусть $b_1, b_2 \in Y$. Обозначим

$$w = u_{b_1} - u_{b_2}.$$

Тогда $w' + Aw = 0$. Следовательно, для функции $\bar{w}(t) = e^{kt}w(t)$, $k > 0$, выполнено равенство

$$\bar{w}' - k\bar{w} + A\bar{w} = 0. \quad (4.7)$$

Умножим (4.7) на $\bar{w}(t)$ при п.в. $t \in (0, T)$ (в смысле двойственности Z^* и Z):

$$\langle \bar{w}', \bar{w} \rangle - k \langle \bar{w}, \bar{w} \rangle + \langle A\bar{w}, \bar{w} \rangle = 0. \quad (4.8)$$

При малом k в силу (4.2), (4.3) и непрерывности вложения i уравнение (4.8) влечет

$$\langle \bar{w}', \bar{w} \rangle \leq 0. \quad (4.9)$$

Лемма III.1.2 из [20] показывает, что функция $\|\bar{w}(t)\|_Y^2$ является невозрастающей. Таким образом,

$$\|\bar{w}(T)\|_Y \leq \|\bar{w}(0)\|_Y,$$

т.е. $\|w(T)\|_Y \leq e^{-kT} \|w(0)\|_Y$ и $\mathcal{G}$ является сжатием.

Рассмотрим теперь следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon \Delta^2 v = \lambda \operatorname{div} [D(t, x, v, \tau) \nabla v + E(t, x, v, \tau) \nabla \tau + f(t, x, v, \tau)], \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \varepsilon \Delta^2 \tau = \lambda \Delta^{-1} \operatorname{div} [\beta(t, x, v, \tau) \nabla v + \mu(t, x, v, \tau) \nabla \tau + g(t, x, v, \tau)], \quad (4.11)$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=T}, \quad (4.12)$$

$$\tau|_{t=0} = 0. \quad (4.13)$$

Здесь $\varepsilon > 0$, $\lambda \in [0, 1]$ – параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пара функций (v, τ) из класса

$$v \in W_2(\Omega, T), \quad \tau \in W_1(\Omega, T) \quad (4.14)$$

называется *слабым решением* задачи (4.10)–(4.13), если равенство (4.10) имеет место в пространстве $H^{-2}(\Omega)$ п.в. на $(0, T)$, (4.11) выполнено в $H^{-1}(\Omega)$ п.в. на $(0, T)$, (4.12) верно в $L_2(\Omega)$, а (4.13) – в $H_0^1(\Omega)$.

Последние два условия имеют смысл, так как

$$W_1 \subset C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad W_2 \subset C([0, T]; L_2(\Omega)).$$

ЛЕММА 4.2. *Найдется такое $T_0 > 0$, что при любом $T \leq T_0$ для всякого слабого решения (v, τ) задачи (4.10)–(4.13) выполнена априорная оценка*

$$\varepsilon \|v\|_{L_2(0, T; H_0^2(\Omega))}^2 + \varepsilon \|\tau\|_{L_2(0, T; X)}^2 + \lambda \|v\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \|\tau\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq C, \quad (4.15)$$

где C не зависит от λ и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произведения слагаемых (4.11) с $-\Delta \tau(t) \in H_0^1(\Omega)$ при п.в. $t \in [0, T]$ (в смысле двойственности $H^{-1}(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$):

$$\begin{aligned} & -\langle \tau', \Delta \tau \rangle - \langle \varepsilon \Delta^2 \tau, \Delta \tau \rangle \\ & = -\lambda \langle \Delta^{-1} \operatorname{div} [\beta(t, x, v, \tau) \nabla v + \mu(t, x, v, \tau) \nabla \tau + g(t, x, v, \tau)], \Delta \tau \rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Но

$$-\langle \tau', \Delta \tau \rangle = \langle \tau', \tau \rangle_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tau\|_1^2 \quad (4.17)$$

(см. [20; лемма III.1.2]). Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tau\|_1^2 + \varepsilon (\nabla \Delta \tau, \nabla \Delta \tau) \\ & = -\lambda \langle \operatorname{div} [\beta(t, x, v, \tau) \nabla v + \mu(t, x, v, \tau) \nabla \tau + g(t, x, v, \tau)], \tau \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Обозначим $\bar{v}(t) = e^{-kt} v(t)$, $\bar{\tau}(t) = e^{-kt} \tau(t)$, где $k > 0$ будет определено позднее. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e^{kt} \bar{\tau}\|_1^2 + e^{2kt} \varepsilon (\nabla \Delta \bar{\tau}, \nabla \Delta \bar{\tau}) \\ & = \lambda (\beta(t, x, e^{kt} \bar{v}(t), e^{kt} \bar{\tau}(t)) \nabla \bar{v} e^{kt} + \mu(t, x, e^{kt} \bar{v}(t), e^{kt} \bar{\tau}(t)) \nabla \bar{\tau} e^{kt} \\ & \quad + g(t, x, e^{kt} \bar{v}(t), e^{kt} \bar{\tau}(t)), \nabla \bar{\tau}(t) e^{kt}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Теперь обозначим

$$\begin{aligned}\beta_k(t, x, \bar{v}(t), \bar{\tau}(t)) &= \beta(t, x, e^{kt}\bar{v}(t), e^{kt}\bar{\tau}(t)), \\ \mu_k(t, x, \bar{v}(t), \bar{\tau}(t)) &= \mu(t, x, e^{kt}\bar{v}(t), e^{kt}\bar{\tau}(t)), \\ g_k(t, x, \bar{v}(t), \bar{\tau}(t)) &= e^{-kt}g(t, x, e^{kt}\bar{v}(t), e^{kt}\bar{\tau}(t)).\end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют оценкам типа (3.22), (3.23), (3.25) соответственно с теми же константами.

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\bar{\tau}\|_1^2 + k \|\bar{\tau}\|_1^2 + \varepsilon(\bar{\tau}, \bar{\tau})_X &= \lambda(\beta_k(t, x, \bar{v}(t), \bar{\tau}(t)) \nabla \bar{v} + \mu_k(t, x, \bar{v}(t), \bar{\tau}(t)) \nabla \bar{\tau} \\ &+ g_k(t, x, \bar{v}(t), \bar{\tau}(t)), \nabla \bar{\tau}(t)).\end{aligned}\quad (4.20)$$

Интегрируя по интервалу $(0, T)$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|\bar{\tau}(T)\|_1^2 + k \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds + \varepsilon \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_X^2 ds &= \lambda \int_0^T (\beta_k(s, x, \bar{v}(s), \bar{\tau}(s)) \nabla \bar{v}(s) \\ &+ \mu_k(s, x, \bar{v}(s), \bar{\tau}(s)) \nabla \bar{\tau}(s) + g_k(s, x, \bar{v}(s), \bar{\tau}(s)), \nabla \bar{\tau}(s)) ds.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, неравенство Коши $ab \leq ca^2 + \frac{1}{4c}b^2$ и отбрасывая первое слагаемое, придем к неравенству

$$\begin{aligned}k \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds + \varepsilon \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_X^2 ds \\ \leq \frac{\lambda K_\beta^2}{4} \int_0^T \|\bar{v}(s)\|_1^2 ds + \lambda \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds + \lambda K_\mu \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds \\ + \frac{\lambda}{4} \int_0^T \|g_k(s, \cdot, \bar{v}(s, \cdot), \bar{\tau}(s, \cdot))\|^2 ds + \lambda \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds.\end{aligned}\quad (4.22)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\int_0^T \|g_k(s, \cdot, \bar{v}(s, \cdot), \bar{\tau}(s, \cdot))\|^2 ds &\leq \int_0^T \|K_g[|\bar{v}(s, \cdot)| + |\bar{\tau}(s, \cdot)|] + \tilde{g}(s, \cdot)\|^2 ds \\ &\leq 3K_g^2 \int_0^T \|\bar{v}(s, \cdot)\|^2 ds + 3K_g^2 \int_0^T \|\bar{\tau}(s, \cdot)\|^2 ds + 3 \int_0^T \|\tilde{g}(s, \cdot)\|^2 ds \\ &\leq 3K_g^2 K_\Omega^2 \int_0^T \|\bar{v}(s)\|_1^2 ds + 3K_g^2 K_\Omega^2 \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds + 3\|\tilde{g}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left(k - 2 - K_\mu - \frac{3}{4}K_g^2 K_\Omega^2\right) \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds + \varepsilon \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_X^2 ds \\ \leq \lambda \left(\frac{K_\beta^2}{4} + \frac{3}{4}K_g^2 K_\Omega^2\right) \int_0^T \|\bar{v}(s)\|_1^2 ds + \frac{3}{4} \|\tilde{g}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Возьмем $k \geq 4 + 2K_\mu + \frac{3}{2}K_g^2K_\Omega^2$. Тогда (4.23) влечет неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\bar{\tau}(s)\|_1^2 ds &\leq \frac{C_1}{k} \left(1 + \lambda \int_0^T \|\bar{v}(s)\|_1^2 ds \right), \\ C_1 &= \frac{K_\beta^2}{2} + \frac{3}{2}K_g^2K_\Omega^2 + \frac{3}{2}\|\tilde{g}\|_{L_2((0,T)\times\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Положим $T_0 = 1/k$. Тогда $\|\tau(t)\|_1 \leq e\|\bar{\tau}(t)\|_1$ при $0 \leq t \leq T \leq T_0$ и из (4.24) следует, что

$$\int_0^T \|\tau(s)\|_1^2 ds \leq \frac{C_1 e}{k} \left(1 + \lambda \int_0^T \|v(s)\|_1^2 ds \right). \quad (4.25)$$

Рассмотрим теперь произведения слагаемых (4.10) с $v(t) \in H_0^2(\Omega)$ при п.в. $t \in [0, T]$ (в смысле двойственности $H^{-2}(\Omega)$ и $H_0^2(\Omega)$):

$$\langle v', v \rangle + \langle \varepsilon \Delta^2 v, v \rangle = \lambda \langle \operatorname{div}[D(t, x, v, \tau) \nabla v + E(t, x, v, \tau) \nabla \tau + f(t, x, v, \tau)], v \rangle. \quad (4.26)$$

Опять в силу [20; лемма III.1.2] имеем

$$\langle v', v \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2, \quad (4.27)$$

и поэтому

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \varepsilon \langle \Delta v, \Delta v \rangle = -\lambda \langle D(t, x, v, \tau) \nabla v + E(t, x, v, \tau) \nabla \tau + f(t, x, v, \tau), \nabla v \rangle. \quad (4.28)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T \|v(s)\|_2^2 ds &= -\lambda \int_0^T (D(s, x, v(s), \tau(s)) \nabla v(s) + E(s, x, v(s), \tau(s)) \nabla \tau(s) \\ &\quad + f(s, x, v(s), \tau(s)), \nabla v(s)) ds. \end{aligned} \quad (4.29)$$

С помощью неравенства Коши, неравенств (3.21) и (3.26) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^T \|v(s)\|_2^2 ds + \lambda d \int_0^T (\nabla v(s), \nabla v(s)) ds \\ \leq \frac{3\lambda K_E^2}{4d} \int_0^T \|\tau(s)\|_1^2 ds + \frac{\lambda d}{3} \int_0^T \|v(s)\|_1^2 ds \\ + \frac{3\lambda}{4d} \int_0^T \|f(s, \cdot, v(s, \cdot), \tau(s, \cdot))\|^2 ds + \frac{\lambda d}{3} \int_0^T \|v(s)\|_1^2 ds. \end{aligned} \quad (4.30)$$

По тем же соображениям, как для g_k выше, получаем

$$\int_0^T \|f(s, \cdot, v(s, \cdot), \tau(s, \cdot))\|^2 ds \leq 3K_f^2K_\Omega^2 \int_0^T \|\tau(s)\|_1^2 ds + 3\|\tilde{f}\|_{L_2((0,T)\times\Omega)}^2.$$

Итак, из (4.30) и (4.25) получаем

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \int_0^T \|v(s)\|_2^2 ds + \frac{\lambda d}{3} \int_0^T \|v(s)\|_1^2 ds \\
& \leq \left(\frac{3K_E^2}{4d} + \frac{9}{4d} K_f^2 K_\Omega^2 \right) \int_0^T \|\tau(s)\|_1^2 ds + \frac{9}{4d} \|\tilde{f}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2 \\
& \leq \frac{C_2}{k} \left(1 + \lambda \int_0^T \|v(s)\|_1^2 ds \right) + C, \\
& C_2 = C_1 e \left(\frac{3K_E^2}{4d} + \frac{9}{4d} K_f^2 K_\Omega^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Без ограничения общности можно считать, что $k \geq 6C_2/d$. Тогда (4.31) влечет

$$\frac{\lambda d}{6} \int_0^T \|v(s)\|_1^2 ds \leq C.$$

Таким образом, правые части (4.23) и (4.31) ограничены, и мы приходим к оценке (4.15).

ЛЕММА 4.3. Пусть слабое решение (v, τ) задачи (4.10)–(4.13) удовлетворяет оценке (4.15). Тогда имеет место следующая оценка производных по времени:

$$\|v'\|_{L_2(0,T;H^{-2}(\Omega))} + \|\tau'\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C(1 + \sqrt{\varepsilon}), \tag{4.32}$$

где C не зависит от λ и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $H^{-1}(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega)$ непрерывным образом, то (4.10) и (4.15) влекут

$$\begin{aligned}
& \|v'\|_{L_2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \leq \varepsilon \|\Delta^2 v\|_{L_2(0,T;H^{-2}(\Omega))} \\
& \quad + \lambda C \|\operatorname{div}[D(t, x, v, \tau) \nabla v + E(t, x, v, \tau) \nabla \tau + f(t, x, v, \tau)]\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
& \leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{L_2(0,T;H_0^2(\Omega))} \\
& \quad + \sqrt{\lambda} C \|D(t, x, v, \tau) \nabla v + E(t, x, v, \tau) \nabla \tau + f(t, x, v, \tau)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \\
& \leq C \sqrt{\varepsilon} + C \sqrt{\lambda} [K_D \|v\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + K_E \|\tau\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
& \quad + \|f(t, x, v, \tau)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}] \\
& \leq C \sqrt{\varepsilon} + C \sqrt{\lambda} [K_D \|v\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + K_E \|\tau\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
& \quad + K_f \|\tau\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|\tilde{f}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}] \\
& \leq C \sqrt{\varepsilon} + C \sqrt{\lambda} [\|v\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\tau\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 1] \leq C(1 + \sqrt{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Аналогично, $H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, (4.11) и (4.15) дают

$$\begin{aligned}
& \|\tau'\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \varepsilon \|\Delta^2 \tau\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\
& \quad + \lambda C \|\Delta^{-1} \operatorname{div}[\beta(t, x, v, \tau) \nabla v + \mu(t, x, v, \tau) \nabla \tau + g(t, x, v, \tau)]\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon}\|\tau\|_{L_2(0,T;X)} \\
&\quad + C\sqrt{\lambda}\|\beta(t,x,v,\tau)\nabla v + \mu(t,x,v,\tau)\nabla\tau + g(t,x,v,\tau)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \\
&\leq C\sqrt{\varepsilon} + C\sqrt{\lambda}[K_\beta\|v\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + K_\mu\|\tau\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\quad + \|g(t,x,v,\tau)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}] \\
&\leq C\sqrt{\varepsilon} + C\sqrt{\lambda}[K_\beta\|v\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + K_\mu\|\tau\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&\quad + K_g\|v\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + K_g\|\tau\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|\tilde{g}\|_{L_2((0,T)\times\Omega)}] \\
&\leq C\sqrt{\varepsilon} + C\sqrt{\lambda}[\|v\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\tau\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 1] \leq C(1 + \sqrt{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

ЛЕММА 4.4. При любом $T \leq T_0$ имеется слабое решение (v, τ) задачи (4.10)–(4.13) в классе (4.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем вспомогательные операторы по формулам:

$$\begin{aligned}
Q_1: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-2}(\Omega)), & Q_1(v, \tau) &= \operatorname{div}[D(\cdot, \cdot, v, \tau)\nabla v], \\
Q_2: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-2}(\Omega)), & Q_2(v, \tau) &= \operatorname{div}[E(\cdot, \cdot, v, \tau)\nabla\tau], \\
Q_3: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-2}(\Omega)), & Q_3(v, \tau) &= \operatorname{div}[f(\cdot, \cdot, v, \tau)], \\
Q_4: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)), & Q_4(v, \tau) &= \Delta^{-1} \operatorname{div}[\beta(\cdot, \cdot, v, \tau)\nabla v], \\
Q_5: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)), & Q_5(v, \tau) &= \Delta^{-1} \operatorname{div}[\mu(\cdot, \cdot, v, \tau)\nabla\tau], \\
Q_6: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)), & Q_6(v, \tau) &= \Delta^{-1} \operatorname{div}[g(\cdot, \cdot, v, \tau)], \\
Q: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-2}(\Omega)) \times L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \\
Q(v, \tau) &= (-Q_1(v, \tau) - Q_2(v, \tau) - Q_3(v, \tau), -Q_4(v, \tau) - Q_5(v, \tau) - Q_6(v, \tau), 0, 0), \\
\tilde{A}_1: W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times H_0^1(\Omega), & \tilde{A}_1(u) &= (u' + \varepsilon\Delta^2 u, u|_{t=0}), \\
\tilde{A}_2: W_2 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-2}(\Omega)) \times L_2(\Omega), & \tilde{A}_2(u) &= (u' + \varepsilon\Delta^2 u, u|_{t=0} - u|_{t=T}), \\
\tilde{A}: W_2 \times W_1 &\rightarrow L_2(0, T; H^{-2}(\Omega)) \times L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \times L_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \\
\tilde{A}(v, \tau) &= (v' + \varepsilon\Delta^2 v, \tau' + \varepsilon\Delta^2 \tau, v|_{t=0} - v|_{t=T}, \tau|_{t=0}).
\end{aligned}$$

Слабая постановка задачи (4.10)–(4.13) эквивалентна операторному уравнению

$$\tilde{A}(v, \tau) + \lambda Q(v, \tau) = (0, 0, 0, 0). \quad (4.33)$$

При условии (3.19) оператор Q вполне непрерывен (см. [16]).

Заметим, что

$$\langle \Delta^2 u, u \rangle = (\Delta u, \Delta u) = \|u\|_2^2$$

для $u \in H_0^2(\Omega)$ и

$$\langle \Delta^2 u, u \rangle_1 = -\langle \Delta^2 u, \Delta u \rangle = (\nabla \Delta u, \nabla \Delta u) = \|u\|_X^2$$

для $u \in X$. Поэтому оператор $\tilde{A}_1$ непрерывно обратим (по теореме 1.1 из [21; гл. VI] или по лемме 3.1.3 из [8]). А оператор $\tilde{A}_2$ непрерывно обратим по доказанной выше лемме 4.1. Поэтому $\tilde{A}$ также обратим.

Перепишем (4.33) в виде

$$(u, \tau) + \lambda \tilde{A}^{-1}Q(u, \tau) = (0, 0). \quad (4.34)$$

Априорные оценки лемм 4.2 и 4.3 не позволяют уравнению (4.34) иметь решения на границе достаточно большого шара B в $W_2 \times W_1$, не зависящего от λ . Рассмотрим степень Лере–Шаудера (см., например, [22]–[24]) вполне непрерывного векторного поля $I + \lambda \tilde{A}^{-1}Q$ (I – тождественное отображение) на шаре B

$$\deg_{\text{LS}}(I + \lambda \tilde{A}^{-1}Q, B, 0).$$

В силу гомотопической инвариантности степени

$$\deg_{\text{LS}}(I + \lambda \tilde{A}^{-1}Q, B, 0) = \deg_{\text{LS}}(I, B, 0) = 1 \neq 0.$$

Итак, уравнение (4.34) (а потому и задача (4.10)–(4.13)) имеет решение в шаре B при всяком λ (ср. с подобными рассуждениями в [8], [25]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Возьмем какую-нибудь убывающую последовательность положительных чисел $\varepsilon_m \rightarrow 0$. По лемме 4.4 найдутся пары (v_m, τ_m) , которые являются слабым решением задачи (4.10)–(4.13) с $\lambda = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_m$. Заметим, что из (4.11) следует, что

$$\Delta \tau'_m + \varepsilon_m \Delta^3 \tau_m = \operatorname{div} [\beta(t, x, v_m, \tau_m) \nabla v_m + \mu(t, x, v_m, \tau_m) \nabla \tau_m + g(t, x, v_m, \tau_m)] \quad (4.35)$$

в $H^{-3}(\Omega)$ п.в. на $(0, T)$. Благодаря априорной оценке (4.15) без потери общности (переходя к подпоследовательности, если необходимо) можно предположить, что существуют пределы

$$v_* = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m, \quad \tau_* = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m,$$

которые являются слабыми в $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Кроме того, в силу леммы 4.3 без ограничения общности можно считать, что $v'_m \rightarrow v'_*$ слабо в $L_2(0, T; H^{-2})$, $\tau'_m \rightarrow \tau'_*$ слабо в $L_2(0, T; H^{-1})$. Следовательно, $v_m \rightarrow v_*$ слабо в $C([0, T]; H^{-2})$, $\tau_m \rightarrow \tau_*$ слабо в $C([0, T]; H^{-1})$. Тогда (см. [26; следствие 4]) $v_m \rightarrow v_*$ сильно в $C([0, T]; H^{-3})$, $\tau_m \rightarrow \tau_*$ сильно в $C([0, T]; H^{-2})$. Поэтому v_* и τ_* удовлетворяют (3.15), (3.16). Кроме того (см. [26; следствие 4]), $v_m \rightarrow v_*$, $\tau_m \rightarrow \tau_*$ сильно в $L_2(0, T; L_2)$. По теореме Красносельского (см. [22], [27]) о непрерывности оператора суперпозиции мы имеем

$$\begin{aligned} D(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) &\rightarrow D(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*), & E(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) &\rightarrow E(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*), \\ \beta(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) &\rightarrow \beta(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*), & \mu(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) &\rightarrow \mu(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*) \end{aligned}$$

сильно в $L_p((0, T) \times \Omega)^{n \times n}$ для любого $p < \infty$,

$$f(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) \rightarrow f(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*), \quad g(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) \rightarrow u(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*)$$

сильно в $L_2((0, T) \times \Omega)^n$.

Если последовательность функций y_m сходится слабо в $L_2((0, T) \times \Omega)$ и другая последовательность z_m сходится сильно в $L_p((0, T) \times \Omega)$, то их поточечные

произведения $y_m z_m$ сходятся слабо к произведению их пределов в $L_q((0, T) \times \Omega)$, $1/p + 1/2 = 1/q$. Поэтому

$$\begin{aligned} D(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) \nabla v_m &\rightarrow D(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*) \nabla v_*, \\ E(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) \nabla \tau_m &\rightarrow E(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*) \nabla \tau_*, \\ \beta(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) \nabla v_m &\rightarrow \beta(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*) \nabla v_*, \\ \mu(\cdot, \cdot, v_m, \tau_m) \nabla \tau_m &\rightarrow \mu(\cdot, \cdot, v_*, \tau_*) \nabla \tau_* \end{aligned}$$

слабо в $L_q(0, T; L_q(\Omega)^n)$ для $1 \leq q < 2$.

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (4.1) с $\lambda = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_m$, $v = v_m$, $\tau = \tau_m$ и в (4.35) (например, в смысле распределений на $(0, T)$ со значениями в W_q^{-6}), мы заключаем, что (v_*, τ_*) есть слабое решение задачи (3.13)–(3.17). Остается заметить, что правые части (и, следовательно, левые части) (3.13), (3.14) принадлежат $L_2(0, T; H^{-1})$. Тогда $v_* \in W(\Omega, T)$. Так как $\tau'_* \in H^{-1}(0, T; H_0^1)$ и $\Delta \tau'_* \in L_2(0, T; H^{-1})$, то мы имеем $\tau'_* \in L_2(0, T; H_0^1)$.

§ 5. Задача о периодических решениях

В этом параграфе исследуется периодическая задача для системы (3.1)–(3.3), т.е. “временные” условия берутся в виде

$$u(0, x) = u(T, x), \quad \sigma(0, x) = \sigma(T, x), \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

с некоторым $T > 0$. Предполагается, что функции β_0, M_0, D_0, E_0 периодичны с периодом T по переменной t . Как и в § 3, после замены переменной σ на ς мы приходим к системе (3.6), (3.7). Будем предполагать, что граничное условие на ς известно:

$$\varsigma(t, x) = \psi(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (5.2)$$

и обе функции φ и ψ определены и периодичны с периодом T по переменной t на $[0, T] \times \bar{\Omega}$; при этом предполагается, что справедливо условие согласования (3.9) (на самом деле ψ можно определить, зная φ , как периодическое решение уравнения (3.9) при фиксированном x ; вопросы периодической разрешимости таких уравнений см., например, в [28], [23], но может возникнуть проблема с единственностью такого решения и зависимостью от x ; чтобы не задерживаться на этом, мы считаем ψ известным). После второй замены переменных и тех же преобразований, что и в § 3, мы приходим к системе (3.13), (3.14). При этом имеем граничное условие (3.17) и условия периодичности

$$v|_{t=0} = v|_{t=T}, \quad \tau|_{t=0} = \tau|_{t=T}. \quad (5.3)$$

Определение слабого решения задачи (3.13), (3.14), (3.17), (5.3) в классе (3.18) аналогично определению 3.1. При работе со слабыми решениями будем предполагать выполненными условия § 3, за исключением (3.24)–(3.26). Вместо них ниже мы введем более жесткие условия, а именно:

v) имеет место

$$|f(t, x, v, \tau)| \leq \tilde{f}(t, x), \quad |g(t, x, v, \tau)| \leq \tilde{g}(t, x) \quad (5.4)$$

с некоторыми известными функциями $\tilde{f}, \tilde{g} \in L_2((0, T) \times \Omega)$;

vi) существуют положительные числа Γ и Γ_0 такие, что

$$(D(\cdot)\xi, \xi)_{\mathbb{R}^n} - (\mu(\cdot)\eta, \eta)_{\mathbb{R}^n} + (E(\cdot)\Gamma\eta, \xi)_{\mathbb{R}^n} - \frac{1}{\Gamma}(\beta(\cdot)\xi, \eta)_{\mathbb{R}^n} \geq \Gamma_0(|\xi|^2 + |\eta|^2) \quad (5.5)$$

для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Добиться выполнения условия v) можно, применив рассуждения из конца § 3. Условие vi) уже существенно ограничивает общность модели. Тем не менее следующие неформальные аргументы показывают, что оно может быть выполнено для реальных ситуаций, причем надо брать достаточно большое Γ . Во-первых (см. § 3), μ – это по сути скаляр, причем, считая γ малым, можно считать его близким к $-\beta_0$, т.е. $-\mu \approx \beta_0$. При больших концентрациях β_0 и D велики (см. § 1), и можно считать (5.5) выполненным. А при малых концентрациях уже мало E , что при большом Γ должно способствовать справедливости (5.5).

ТЕОРЕМА 5.1. *В описанных условиях при любом $T > 0$ существует слабое решение задачи (3.13), (3.14), (3.17), (5.3) в классе (3.18).*

При доказательстве используются вспомогательная система (4.10)–(4.11) и следующая априорная оценка.

ЛЕММА 5.1. *Для всякого решения (v, τ) задачи (4.10), (4.11), (5.3) в классе (4.14) выполнена априорная оценка*

$$\varepsilon \|v\|_{L_2(0,T;H_0^2(\Omega))}^2 + \varepsilon \|\tau\|_{L_2(0,T;X)}^2 + \lambda \|v\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \lambda \|\tau\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C, \quad (5.6)$$

где C не зависит от λ и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (5.5) можно переписать в виде

$$(D(\cdot)\Gamma^2\xi, \xi)_{\mathbb{R}^n} - (\mu(\cdot)\eta, \eta)_{\mathbb{R}^n} + (E(\cdot)\Gamma^2\eta, \xi)_{\mathbb{R}^n} - (\beta(\cdot)\xi, \eta)_{\mathbb{R}^n} \geq \Gamma_0(\Gamma^2|\xi|^2 + |\eta|^2) \quad (5.7)$$

для любых $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ (для этого достаточно подставить в (5.5) $\Gamma\xi$ вместо ξ).

Как и в доказательстве леммы 4.2, мы имеем (4.28). Кроме того, мы имеем (4.18); следовательно,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tau\|_1^2 + \varepsilon(\tau, \tau)_X = \lambda(\beta(t, x, v, \tau)\nabla v + \mu(t, x, v, \tau)\nabla\tau, \nabla\tau) + \lambda(g(t, x, v, \tau), \nabla\tau). \quad (5.8)$$

Сложим это с (4.28), умноженным на Γ^2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma^2}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \Gamma^2 \varepsilon(\Delta v, \Delta v) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tau\|_1^2 + \varepsilon(\tau, \tau)_X \\ &= -\lambda(D(t, x, v, \tau)\Gamma^2\nabla v + E(t, x, v, \tau)\Gamma^2\nabla\tau, \nabla v) \\ & \quad + \lambda(\beta(t, x, v, \tau)\nabla v + \mu(t, x, v, \tau)\nabla\tau, \nabla\tau) \\ & \quad + \lambda(g(t, x, v, \tau), \nabla\tau) - \lambda\Gamma^2(f(t, x, v, \tau), \nabla v). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Используя (5.7), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma^2}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + \Gamma^2 \varepsilon (\Delta v, \Delta v) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tau\|_1^2 + \varepsilon(\tau, \tau)_X + \lambda \Gamma_0 (\Gamma^2 \|\nabla v\|^2 + \|\nabla \tau\|^2) \\ & \leq \lambda (g(t, x, v, \tau), \nabla \tau) - \lambda \Gamma^2 (f(t, x, v, \tau), \nabla v). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Интегрируя по интервалу $(0, T)$, получим

$$\begin{aligned} & \Gamma^2 \varepsilon \int_0^T \|v(s)\|_2^2 ds + \varepsilon \int_0^T \|\tau(s)\|_X^2 ds + \lambda \Gamma_0 \Gamma^2 \int_0^T \|\nabla v(s)\|^2 ds + \lambda \Gamma_0 \int_0^T \|\nabla \tau(s)\|^2 ds \\ & \leq \lambda \int_0^T (g(s, x, v(s), \tau(s)), \nabla \tau(s)) ds - \lambda \Gamma^2 \int_0^T (f(s, x, v(s), \tau(s)), \nabla v(s)) ds. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, неравенство Коши и (5.4), мы получим

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (f(s, x, v(s), \tau(s)), \nabla v(s)) ds \right| \leq \|\tilde{f}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)} \|\nabla v\|_{L_2((0,T) \times \Omega)} \\ & \leq \frac{1}{2\Gamma_0} \|\tilde{f}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2 + \frac{\Gamma_0}{2} \|\nabla v\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Аналогично,

$$\left| \int_0^T (g(s, x, v(s), \tau(s)), \nabla \tau(s)) ds \right| \leq \frac{1}{2\Gamma_0} \|\tilde{g}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2 + \frac{\Gamma_0}{2} \|\nabla \tau\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2. \quad (5.13)$$

Неравенства (5.11)–(5.13) влекут

$$\begin{aligned} & \Gamma^2 \varepsilon \int_0^T \|v(s)\|_2^2 ds + \varepsilon \int_0^T \|\tau(s)\|_X^2 ds + \frac{\lambda \Gamma_0 \Gamma^2}{2} \int_0^T \|\nabla v(s)\|^2 ds + \frac{\lambda \Gamma_0}{2} \int_0^T \|\nabla \tau(s)\|^2 ds \\ & \leq \frac{\Gamma^2}{2\Gamma_0} \|\tilde{f}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2 + \frac{1}{2\Gamma_0} \|\tilde{g}\|_{L_2((0,T) \times \Omega)}^2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

а потому и (5.6).

Дальнейшее доказательство теоремы (5.1) (оценка производных, разрешимость вспомогательной задачи и предельный переход) проводится по аналогии с соответствующими рассуждениями из § 4.

Список литературы

- [1] D. A. Edwards, D. S. Cohen, “A mathematical model for a dissolving polymer”, *AIChE J.*, **41**:11 (1995), 2345–2355.
- [2] N. Thomas, A. H. Windle, “Transport of methanol in poly(methyl methacrylate)”, *Polymer*, **19**:3 (1978), 255–265.
- [3] N. L. Thomas, A. H. Windle, “A theory of case II diffusion”, *Polymer*, **23**:4 (1982), 529–542.
- [4] D. S. Cohen, A. B. White, jr., Th. P. Witelski, “Shock formation in a multidimensional viscoelastic diffusive system”, *SIAM J. Appl. Math.*, **55**:2 (1995), 348–368.

- [5] D. A. Edwards, “A mathematical model for trapping skinning in polymers”, *Stud. Appl. Math.*, **99**:1 (1997), 49–80.
- [6] D. A. Edwards, “A spatially nonlocal model for polymer desorption”, *J. Engrg. Math.*, **53**:3–4 (2005), 221–238.
- [7] D. A. Edwards, R. A. Cairncross, “Desorption overshoot in polymer-penetrant systems: asymptotic and computational results”, *SIAM J. Appl. Math.*, **63**:1 (2002), 98–115.
- [8] V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov, *Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics*, de Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **12**, de Gruyter, Berlin, 2008.
- [9] D. S. Cohen, A. B. White, jr., “Sharp fronts due to diffusion and viscoelastic relaxation in polymers”, *SIAM J. Appl. Math.*, **51**:2 (1991), 472–483.
- [10] S. Swaminathan, D. A. Edwards, “Traveling waves for anomalous diffusion in polymers”, *Appl. Math. Lett.*, **17**:1 (2004), 7–12.
- [11] R. W. Cox, *A model for stress-driven diffusion in polymers*, Ph. D. thesis, California Institute of Technology, 1988.
- [12] H. Amann, “Highly degenerate quasilinear parabolic systems”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **18**:1 (1991), 135–166.
- [13] B. Hu, J. Zhang, “Global existence for a class of non-Fickian polymer-penetrant systems”, *J. Partial Differential Equations*, **9**:3 (1996), 193–208.
- [14] H. Amann, “Global existence for a class of highly degenerate parabolic systems”, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **8**:1 (1991), 143–151.
- [15] D. A. Vorotnikov, “On the initial-boundary value problem for equations of anomalous diffusion in polymers”, *Vestnik VSU, Ser. phys.-math.*, 2008, № 1, 157–161.
- [16] D. A. Vorotnikov, “Weak solvability for equations of viscoelastic diffusion in polymers with variable coefficients”, *J. Differential Equations*, **246**:3 (2009), 1038–1056.
- [17] D. A. Vorotnikov, “Dissipative solutions for equations of viscoelastic diffusion in polymers”, *J. Math. Anal. Appl.*, **339**:2 (2008), 876–888.
- [18] B. Rivière, S. Shaw, “Discontinuous Galerkin finite element approximation of nonlinear non-Fickian diffusion in viscoelastic polymers”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **44**:6 (2006), 2650–2670.
- [19] S. Kaniel, M. Shinbrot, “A reproductive property of the Navier–Stokes equations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **24**:5 (1967), 363–369.
- [20] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
- [21] Х. Гаевский, К. Гререр, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [22] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, ГИТТЛ, М., 1956; англ. пер.: М. А. Krasnosel’skii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford; Macmillan, New York, 1964.
- [23] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975; англ. пер.: М. А. Krasnosel’skii, P. P. Zabreiko, *Geometrical methods of nonlinear analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **263**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [24] N. G. Lloyd, *Degree theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York–Melbourne, 1978.
- [25] В. Г. Звягин, В. Т. Дмитриенко, *Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса*, УРСС, М., 2004.

- [26] J. Simon, “Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ ”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **146**:1 (1986), 65–96.
- [27] И. В. Скрыпник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, Наука, М., 1990; англ. пер.: I. V. Skrypnik, *Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **139**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [28] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.

Д. А. Воротников (D. A. Vorotnikov)

Воронежский государственный университет

E-mail: vorotnikov@math.vsu.ru; mitvorot@mat.uc.pt

Поступила в редакцию

07.06.2008 и 31.03.2009