Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Матевосян, С. В. Пикулин, Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях, *Матем. сб.*, 2002, том 193, номер 3, 101–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm638>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:20:26

УДК 517.95

О. А. Матевосян, С. В. Пикулин

Об усреднении полулинейных эллиптических операторов в перфорированных областях

В настоящей работе для полулинейного эллиптического уравнения второго порядка с младшим членом, растущим по неизвестной функции степенным образом, доказывается, что последовательность решений в перфорированных областях стремится к решению в неперфорированной области, если радиусы дыр стремятся к нулю со скоростью, зависящей от показателя степени в младшем члене.

Библиография: 18 названий.

Изучению вопросов теории усреднения для перфорированных областей посвящено много монографий и работ (см. [1]–[5]), в которых на поведение решений уравнений при приближении к дырам ставятся какие-либо ограничения, например граничные условия. Однако для усреднения решений уравнений с достаточно сильным нелинейным поглощением такие ограничения не нужны. Подобная ситуация была обнаружена и в теории устранения особенностей. В связи с этим отметим работы [6]–[11]. Вопросы, рассматриваемые в §1 нашей работы, были изучены авторами для случая перфорированного куба в работе [12]. Центральным моментом доказательств теорем настоящей работы является оценка Кондратьева–Ландиса решения через расстояние от точки до границы области.

Авторы следуют идеям и методам теории устранения особенностей, разработанными В. А. Кондратьевым, Е. М. Ландисом в [6], [7]. Особую благодарность за полезные обсуждения мы выражаем В. А. Кондратьеву и А. А. Конькову.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq R\}$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в точке x_0 ;

$S(x_0, R) \equiv \partial B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = R\}$ – сфера в $\mathbb{R}^n$;

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ ($n > 2$) с границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – замыкание Ω .

Пусть в области Ω лежат m замкнутых шаров с центрами в точках $y_{k,\varepsilon}$ одинакового радиуса R_ε , $\varepsilon = m^{-1}$ – малый параметр, m – натуральное число, $k = 1, \dots, m$. Отметим, что не налагается никаких условий на расположение шаров по отношению друг к другу или к границе области $\partial\Omega$.

Положим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(\varepsilon)$, $B(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon)$. Начало координат мы будем обозначать через 0.

Пусть L – оператор вида

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_{ij}(x)$ — ограниченные измеримые функции такие, что $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$ и выполняются условия:

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda |\xi|^2, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad (1)$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

Будем изучать решение задачи

$$Lu(x) = f(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\varphi(x) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$, а функция $f(x, z)$ предполагается измеримой и такой, что композиция $f(x, u(x))$ является измеримой локально ограниченной функцией переменной x при любой функции $u(x) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u(x) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$ называется *обобщенным решением задачи* (2), (3), если для любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} f(x, u) \psi(x) dx = 0 \quad (4)$$

и при любой функции $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено включение $\chi(x)(u(x) - \varphi(x)) \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$.

Вопросы разрешимости, а также единственности решения рассматриваемой задачи изучены в [13; гл. 4, §§ 9, 10; гл. 5, §§ 2, 3].

Работа состоит из двух параграфов. В §1 доказана теорема 1 о поточечной сходимости решений и теорема 2 о сходимости градиентов. В §2 доказаны теоремы 3 и 4, аналогичные теоремам 1 и 2 соответственно, в случае, когда правая часть уравнения имеет особенность в одной точке области.

§ 1

В этом параграфе рассматривается следующая задача:

$$Lu_\varepsilon(x) = a(x)|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (5)$$

$$u_\varepsilon(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (6)$$

где $a(x)$ — ограниченная измеримая функция, $a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0$, $\varphi(x) \in H^1(\Omega_\varepsilon) \cap L^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\sigma > n/(n-2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $u_\varepsilon(x) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ называется *обобщенным решением задачи* (5), (6), если для любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} a(x)|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) \psi(x) dx = 0$$

и при любой функции $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равной нулю в окрестности $B(\varepsilon)$, выполнено включение $\chi(x)(u_\varepsilon(x) - \varphi(x)) \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$.

Для задачи (5), (6) не выполняются, вообще говоря, теоремы единственности, так как на границах дырок перфорированной области Ω_ε не заданы никакие граничные условия. Мы покажем, что при некоторых условиях предел решений задачи (5), (6) будет существовать, причем этот предел не зависит от выбора последовательности $u_\varepsilon(x)$; здесь $u_\varepsilon(x)$ – любое решение задачи (5), (6).

Пусть $u(x)$ – решение следующей задачи:

$$Lu(x) = a(x)|u(x)|^{\sigma-1}u(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$R_\varepsilon = o\left(\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n}}\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (9)$$

Тогда решение задачи (5), (6) стремится к решению задачи (7), (8) в следующем смысле: для любой положительной постоянной d

$$\sup_{x \in \Omega_{\varepsilon,d}} |u_\varepsilon(x) - u(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (10)$$

где

$$\Omega_{\varepsilon,d} = \{x \in \Omega_\varepsilon : \text{dist}(x, \partial B(\varepsilon)) > d\}.$$

Заметим, что общий объем дырок $|B(\varepsilon)| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЛЕММА 1. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 1$ имеет место неравенство

$$||a|^{\sigma-1}a - |b|^{\sigma-1}b| \geq C_\sigma |a - b|^\sigma = C_\sigma |a - b|^{\sigma-1} |a - b|,$$

где C_σ – некоторая положительная постоянная, зависящая от σ , но не зависящая от a и b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для разности $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$ имеем

$$Lw_\varepsilon(x) - a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x)) = 0.$$

Умножим это равенство на $\text{sgn } w_\varepsilon(x)$ и применим лемму 1, тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \text{sgn } w_\varepsilon(x) [Lw_\varepsilon(x) - a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))] \\ &\leq \text{sgn } w_\varepsilon(x) [Lw_\varepsilon(x) - C_\sigma a(x)|w_\varepsilon(x)|^\sigma], \quad x \in \Omega_\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $w_\varepsilon(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\text{sgn } w_\varepsilon(x) [Lw_\varepsilon(x) - b_0(x)|w_\varepsilon(x)|^\sigma] \geq 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon,$$

с граничным условием

$$w_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon; \quad (11)$$

здесь $b_0(x) = C_\sigma a(x)$. Согласно теореме 1' работы [6; §1, п. 3] имеет место оценка

$$|w_\varepsilon(x)| \leq C(\text{dist}(x, \partial B(\varepsilon)))^{\frac{2}{1-\sigma}}. \quad (12)$$

Буквой C здесь и далее будем обозначать любую положительную постоянную, не зависящую от x и ε .

Обозначим через $\Gamma(x)$ фундаментальное решение оператора L , имеющее особенность в начале координат 0 и положительное в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Известно [14], что такое решение существует и удовлетворяет неравенствам:

$$C_1|x|^{2-n} \leq \Gamma(x) \leq C_2|x|^{2-n}, \quad (13)$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят от λ из условия (1).

Положим

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Gamma(x - y_{k,\varepsilon}). \quad (14)$$

Согласно (12) и (13) на границе шаров $B_2(\varepsilon) \equiv \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon}, 2R_\varepsilon)$, концентрически с $B(y_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon)$ и имеющих радиусы $2R_\varepsilon$, выполняются неравенства

$$|w_\varepsilon(x)| < CR_\varepsilon^{\frac{2}{1-\sigma}}, \quad (15)$$

$$g_\varepsilon(x) > C'_1 \varepsilon R_\varepsilon^{2-n}, \quad (16)$$

где $C'_1 = 2^{2-n}C_1$. При этом

$$R_\varepsilon^{\frac{2}{1-\sigma}} = o(\varepsilon R_\varepsilon^{2-n}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (17)$$

поскольку из (9) следует, что

$$\varepsilon R_\varepsilon^{2-n} R_\varepsilon^{-\frac{2}{1-\sigma}} = \varepsilon R_\varepsilon^{\frac{-n-2\sigma+n\sigma}{1-\sigma}} = o(\varepsilon^{1+\frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n} \frac{(n-2)\sigma-n}{1-\sigma}}) = o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, при $x \in \partial B_2(\varepsilon)$ и достаточно малых ε согласно (15)–(17) выполняется неравенство

$$|w_\varepsilon(x)| < g_\varepsilon(x).$$

Предположим, что $u_\varepsilon(x)$ не стремится к $u(x)$ в смысле (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда найдется положительная постоянная C_0 такая, что для любого $\varepsilon_0 = m_0^{-1}$ существуют $\varepsilon = m^{-1} < \varepsilon_0$ и $x_\varepsilon \in \Omega_{\varepsilon,d}$ такие, что $|w_\varepsilon(x_\varepsilon)| > C_0$, т.е. $w_\varepsilon(x_\varepsilon) > C_0$ либо $w_\varepsilon(x_\varepsilon) < -C_0$. Будем считать, что первый случай реализуется при различных ε бесконечно много раз (для второго случая $w_\varepsilon(x_\varepsilon) < -C_0$ рассмотрение аналогично).

Так как $x_\varepsilon \in \Omega_{\varepsilon,d}$, то $\text{dist}(x_\varepsilon, \partial B(\varepsilon)) > d$ и согласно (13) имеем

$$g_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq C_2 d^{2-n}. \quad (18)$$

Положим

$$h_\varepsilon(x) = \frac{C_0}{2} \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(x_\varepsilon)}, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (19)$$

тогда из (16) и (18) следует, что

$$h_\varepsilon(x) > C_3 \varepsilon R_\varepsilon^{2-n} \quad (20)$$

на границах шаров $\partial B_2(\varepsilon)$, где $C_3 = \frac{C_0 C'_1}{2C_2 d^{2-n}}$.

Рассмотрим функцию

$$v_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x), \quad v_\varepsilon(x_\varepsilon) > \frac{C_0}{2} > 0. \quad (21)$$

Из (15), (17), (20) следует, что при достаточно малых ε и при $x \in \partial B_2(\varepsilon)$ выполнено $v_\varepsilon(x) < 0$.

При $x \in \partial\Omega$ согласно (11) имеем $w_\varepsilon(x) = 0$. Из (14) и (19) следует, что $h_\varepsilon(x) > 0$ при $x \in \partial\Omega$. Тогда из определения (21) следует, что $v_\varepsilon(x) < 0$ при $x \in \partial\Omega$. Таким образом, $v_\varepsilon(x) < 0$ при $x \in \partial(\Omega \setminus B_2(\varepsilon))$.

Кроме того, из оценок (12), (13) с учетом определения (14) следует, что $w_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ и $h_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Определим множество $D \equiv \{x \in \Omega_\varepsilon : v_\varepsilon(x) > 0\} \neq \emptyset$. Обозначим через D_0 компоненту связности множества D , содержащую точку x_ε .

Покажем, что $Lv_\varepsilon(x) > 0$ при $x \in D$. Действительно, по определению множества D $u_\varepsilon(x) - u(x) = w_\varepsilon(x) > h_\varepsilon(x) > 0$, т.е. $u_\varepsilon(x) > u(x)$ при $x \in D$. Тогда

$$Lv_\varepsilon(x) = Lw_\varepsilon(x) - Lh_\varepsilon(x) = a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x)) > 0. \quad (22)$$

Поскольку $v_\varepsilon(x_\varepsilon) > 0$ согласно (21), $v_\varepsilon(x) < 0$ при $x \in \partial(\Omega \setminus B_2(\varepsilon))$ и $v_\varepsilon(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то функция $v_\varepsilon(x)$ достигает локального максимума во внутренней точке области D_0 , что с учетом (22) противоречит принципу максимума для функции $v_\varepsilon(x)$. Следовательно, наше предположение неверно, т.е. $u_\varepsilon(x)$ стремится к $u(x)$ в смысле (10) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для объема шара радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство $|B(0, R)| \leq CR^n$, где C зависит только от n . Оценим общий объем дырок:

$$|B(\varepsilon)| \leq C m R_\varepsilon^n = o\left(\varepsilon^{\frac{2\sigma}{(n-2)\sigma-n}}\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

Положим $B_4(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon}, 4R_\varepsilon)$.

ЛЕММА 2 (обобщенное неравенство Юнга). Пусть $a, b, \beta > 0$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$ab \leq \frac{\alpha}{\beta} a^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1-\alpha}{\beta^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}} b^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

В частности, при $\alpha = 1/2$ имеем $2ab \leq a^2/\beta + \beta b^2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $R_\varepsilon = O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\gamma > \frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n}$. Тогда

$$\int_{\Omega \setminus B_4(\varepsilon)} \frac{|\nabla(u_\varepsilon(x) - u(x))|^2 + |u_\varepsilon(x) - u(x)|^{\sigma+1}}{1 + |u_\varepsilon(x) - u(x)|} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $\theta_{k,\varepsilon}(x) \in C^1(\Omega)$, $k = 1, \dots, m$, такие, что

$$0 \leq \theta_{k,\varepsilon}(x) \leq 1 \quad \text{при } x \in \Omega, \quad (23)$$

$$|\nabla \theta_{k,\varepsilon}(x)| < \frac{C_\Omega}{R_\varepsilon} \quad \text{при } x \in \Omega, \quad (24)$$

$$\theta_{k,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \setminus B(y_{k,\varepsilon}, 4R_\varepsilon), \\ 0, & x \in B(y_{k,\varepsilon}, 2R_\varepsilon), \end{cases} \quad (25)$$

где C_Ω зависит от области Ω и не зависит от ε .

Положим $\theta_\varepsilon(x) = \inf_{k=1,\dots,m} \theta_{k,\varepsilon}(x)$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \theta_\varepsilon^p(x) \eta(u_\varepsilon(x) - u(x)), \quad (26)$$

где

$$\eta(\tau) = \begin{cases} \tau, & |\tau| \leq 1, \\ |\tau|^{q-1}\tau, & |\tau| > 1, \end{cases}$$

$q > 0$ — таково, что $\gamma > \frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n-2q}$, $p = p(q) > 2$ — таково, что

$$p = \frac{(p-2)(\sigma+q)}{1+q}. \quad (27)$$

Как и в доказательстве теоремы 1, обозначим $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$. Умножим равенство $Lw_\varepsilon(x) = a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))$ на $\psi(x)$ и проинтегрируем по Ω , тогда

$$\begin{aligned} \int_\Omega (Lw_\varepsilon(x))\psi(x) dx &\equiv \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right) \psi(x) dx \\ &= \int_\Omega a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))\psi(x) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначим $\Omega_1 = \{x \in \Omega : |w_\varepsilon(x)| \leq 1\} \subset \Omega$ и $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |w_\varepsilon(x)| > 1\} \subset \Omega$.

Оценим правую часть равенства (28), используя лемму 1 при $a = u_\varepsilon(x)$, $b = u(x)$:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))\psi(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))w_\varepsilon(x)\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2} a(x)(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))|w_\varepsilon(x)|^{q-1}w_\varepsilon(x)\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ &\geq a_0 C_\sigma \int_{\Omega_1} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}\theta_\varepsilon^p(x) dx + a_0 C_\sigma \int_{\Omega_2} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x) dx. \end{aligned} \quad (29)$$

После тождественных преобразований и интегрирования по частям в левой части равенства (28) получим

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_j} \right) \psi(x) dx \\
&= \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_j} \right) w_{\varepsilon}(x) \theta_{\varepsilon}^p(x) dx \\
&\quad + \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_j} \right) |w_{\varepsilon}(x)|^{q-1} w_{\varepsilon}(x) \theta_{\varepsilon}^p(x) dx \\
&= - \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_i} \theta_{\varepsilon}^p(x) dx \\
&\quad - \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_j} w_{\varepsilon}(x) p \theta_{\varepsilon}^{p-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{\varepsilon}(x) dx \\
&\quad - \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_j} q |w_{\varepsilon}(x)|^{q-1} \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_i} \theta_{\varepsilon}^p(x) dx \\
&\quad - \int_{\Omega_2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w_{\varepsilon}(x)}{\partial x_j} |w_{\varepsilon}(x)|^{q-1} w_{\varepsilon}(x) p \theta_{\varepsilon}^{p-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \theta_{\varepsilon}(x) dx \\
&\equiv S_1 + S_2 + S_3 + S_4.
\end{aligned} \tag{30}$$

Оценим первое и третье слагаемые правой части тождества (30), учитывая (1):

$$S_1 \leq -\frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_1} |\nabla w_{\varepsilon}(x)|^2 \theta_{\varepsilon}^p(x) dx, \tag{31}$$

$$S_3 \leq -\frac{q}{\lambda} \int_{\Omega_2} |\nabla w_{\varepsilon}(x)|^2 |w_{\varepsilon}(x)|^{q-1} \theta_{\varepsilon}^p(x) dx. \tag{32}$$

Для оценки второго и четвертого слагаемых правой части тождества (30) используется неравенство Юнга при $\alpha = 1/2$, $a = |\nabla w_{\varepsilon}(x)|$, $b = |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)|$. Выбирая $\beta = \frac{p\lambda^2}{\theta_{\varepsilon}(x)}$ и $\beta = \frac{p\lambda^2 |w_{\varepsilon}(x)|}{q\theta_{\varepsilon}(x)}$ при каждом x , соответственно получаем

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq p\lambda \int_{\Omega_1} |\nabla w_{\varepsilon}(x)| |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)| \theta_{\varepsilon}^{p-1}(x) dx \\
&\leq p\lambda \int_{\Omega_1} \theta_{\varepsilon}^{p-1}(x) \left(\frac{\theta_{\varepsilon}(x)}{2p\lambda^2} |\nabla w_{\varepsilon}(x)|^2 + \frac{p\lambda^2}{2\theta_{\varepsilon}(x)} |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)|^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_1} |\nabla w_{\varepsilon}(x)|^2 \theta_{\varepsilon}^p(x) dx + C_4 \int_{\Omega_1} |\nabla \theta_{\varepsilon}(x)|^2 \theta_{\varepsilon}^{p-2}(x) dx,
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &\leq p\lambda \int_{\Omega_2} |\nabla w_\varepsilon(x)| |\nabla \theta_\varepsilon(x)| |w_\varepsilon(x)|^q \theta_\varepsilon^{p-1}(x) \\
&\leq p\lambda \int_{\Omega_2} \theta_\varepsilon^{p-1}(x) |w_\varepsilon(x)|^q \left(\frac{q\theta_\varepsilon(x)}{2p\lambda^2 |w_\varepsilon(x)|} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 + \frac{p\lambda^2 |w_\varepsilon(x)|}{2q\theta_\varepsilon(x)} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \right) dx \\
&= \frac{q}{2\lambda} \int_{\Omega_2} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx \\
&\quad + C_5 \int_{\Omega_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q+1} \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx.
\end{aligned} \tag{34}$$

Теперь оценим второе слагаемое правой части неравенства (34). Полагая в неравенстве Юнга $a = |w_\varepsilon(x)|^{q+1} \theta_\varepsilon^{p-2}(x)$, $b = |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2$ при $\alpha = \frac{1+q}{\sigma+q}$ и выбирая $\beta = \frac{2C_5}{a_0 C_\sigma} \alpha$, с учетом (27) получаем

$$\begin{aligned}
C_5 \int_{\Omega_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q+1} \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx \\
\leq \frac{a_0 C_\sigma}{2} \int_{\Omega_2} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx + C_6 \int_{\Omega_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx.
\end{aligned} \tag{35}$$

Учитывая равенства (28), (30) и оценки (31)–(35), имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (Lw_\varepsilon(x)) \psi(x) dx &\leq -\frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_1} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx \\
&\quad - \frac{q}{2\lambda} \int_{\Omega_2} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx + C_4 \int_{\Omega_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx \\
&\quad + \frac{a_0 C_\sigma}{2} \int_{\Omega_2} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx + C_6 \int_{\Omega_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx \equiv S_5.
\end{aligned} \tag{36}$$

Объединяя (28), (29) и (36), получаем

$$S_5 \geq a_0 C_\sigma \int_{\Omega_1} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1} \theta_\varepsilon^p(x) dx + a_0 C_\sigma \int_{\Omega_2} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned}
C_4 I_1 + C_6 I_2 &\equiv C_4 \int_{\Omega_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx + C_6 \int_{\Omega_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx \\
&\geq a_0 C_\sigma \int_{\Omega_1} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1} \theta_\varepsilon^p(x) dx + \frac{a_0 C_\sigma}{2} \int_{\Omega_2} |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q} \theta_\varepsilon^p(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_1} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx + \frac{q}{2\lambda} \int_{\Omega_2} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q-1} \theta_\varepsilon^p(x) dx \\
&\geq C_7 \int_{\Omega} \frac{|w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}}{1 + |w_\varepsilon(x)|} \theta_\varepsilon^p(x) dx + C_8 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\varepsilon(x)|^2}{1 + |w_\varepsilon(x)|} \theta_\varepsilon^p(x) dx \\
&\geq C_9 \int_{\Omega \setminus B_4(\varepsilon)} \frac{|\nabla w_\varepsilon(x)|^2 + |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}}{1 + |w_\varepsilon(x)|} dx.
\end{aligned} \tag{37}$$

Теперь докажем, что $I_1 \rightarrow 0$ и $I_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega_1} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 dx \leq C_{10} m R_\varepsilon^n \left(\frac{1}{R_\varepsilon} \right)^2 \\ &= o(\varepsilon^{-1 + \frac{(n-2)(\sigma-1)}{(n-2)\sigma-n}}) = o(\varepsilon^{\frac{2}{(n-2)\sigma-n}}) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Omega_2} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \frac{\sigma+q}{\sigma-1} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^2 \frac{\sigma+q}{\sigma-1} dx \leq C_{11} m R_\varepsilon^n \left(\frac{1}{R_\varepsilon} \right)^{2 \frac{\sigma+q}{\sigma-1}} \\ &= C_{11} \varepsilon^{-1} R_\varepsilon^{\frac{(n-2)\sigma-n-2q}{\sigma-1}} = o(\varepsilon^{-1 + \frac{(n-2)\sigma-n-2q}{\sigma-1} \frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n-2q}}) = o(1) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Из (37)–(39) следует справедливость теоремы 2.

§ 2

В этом параграфе рассматривается следующая задача:

$$Lu_\varepsilon(x) = |x|^s |u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1} u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (40)$$

$$u_\varepsilon(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (41)$$

где $\varphi(x) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $s \in \mathbb{R}^1$, $s < n-2$ и при этом $\sigma > \frac{n}{n-2}$, если $s < 0$, и $\sigma > \frac{n-s}{n-s-2}$, если $s \geq 0$. Будем предполагать, что начало координат $0 \in \bar{\Omega}$ (в случае $0 \notin \bar{\Omega}$ к задаче (40), (41) применимы теоремы 1 и 2 при $a(x) = |x|^s$ для любого $s \in \mathbb{R}^1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $u_\varepsilon(x) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_\varepsilon) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ называется *обобщенным решением задачи* (40), (41), если для любой функции $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_\varepsilon} |x|^s |u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1} u_\varepsilon(x) \psi(x) dx = 0$$

и при любой функции $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равной нулю в окрестности $B(\varepsilon)$, выполнено включение $\chi(x)(u_\varepsilon(x) - \varphi(x)) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Пусть $u(x)$ – решение следующей задачи:

$$Lu(x) = |x|^s |u(x)|^{\sigma-1} u(x), \quad x \in \Omega, \quad (42)$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (43)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$R_\varepsilon = o\left(\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n}}\right), \quad \text{если } s < 0,$$

$$R_\varepsilon = o\left(\varepsilon^{\frac{\sigma-1}{(n-s-2)\sigma-n+s}}\right), \quad \text{если } s \geq 0,$$

тогда решение задачи (40), (41) стремится к решению задачи (42), (43) в смысле (10).

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Докажем сначала лемму, аналогичную лемме 3 работы [6; § 1, п. 1], для случая уравнения (42).

ЛЕММА 3. Пусть $u(x) \in H^1(B(0,1)) \cap L^\infty(B(0,1))$ – решение уравнения

$$Lu(x) = |x|^s |u(x)|^{\sigma-1} u(x) \quad (44)$$

в шаре $B(0,1)$. Существует константа $\alpha_0 > 0$, зависящая от λ , n , σ и s , но не зависящая ни от константы, ограничивающей $|u(x)|$ в $B(0,1)$, ни от нормы $u(x)$ в $H^1(B(0,1))$, такая, что

$$|u(0)| \leq \alpha_0. \quad (45)$$

Доказательство леммы 3 основано на результатах [15; теоремы 3.7, 3.8], [16; лемма 7.1], [17], [18].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $G \subset B(0,1)$ – область и Γ – та часть границы области G , которая принадлежит внутренности шара $B(0,1)$. Если в условиях леммы 3 рассмотреть функции $u \in H^1(B(0,1)) \cap L^\infty(B(0,1))$, обращающиеся в нуль на Γ , то лемма останется справедливой.

Следующая лемма аналогична теореме 1' работы [6; § 1, п. 3].

ЛЕММА 4. Пусть $R_0 > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и G – область, принадлежащая $B(x_0, R_0)$. Пусть $u \in H^1(B(0,1)) \cap L^\infty(B(0,1))$ – решение неравенства

$$\operatorname{sgn} u(x) (Lu(x) - |x|^s |u(x)|^{\sigma-1} u(x)) \geq 0, \quad (46)$$

где $\sigma > 1$ и $u(x)|_{\partial G \cap B(x_0, R_0)} = 0$. Тогда

$$|u(x_0)| < \alpha_0 R_0^{-\frac{2}{\sigma-1}},$$

где $\alpha_0 > 0$ зависит только от λ , σ , s и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решение $v(x) \in H^1(B(0,1)) \cap L^\infty(B(0,1))$ уравнения

$$Lv(x) - |x|^s |v(x)|^{\sigma-1} v(x) = 0 \quad (47)$$

с условием $v(x) - u(x) \in \mathring{H}^1(G)$. Сделаем замену переменных $x - x_0 = R_0 x'$, $v = Kw$, $K^q R_0^2 = 1$. Функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению (47) в области $G' \subset B(0,1)$, являющейся образом области G , и согласно сделанному выше замечанию $|w(0)| < \alpha_0$. Делая обратное преобразование, получаем $|v(x_0)| < \alpha_0 R_0^{-\frac{2}{\sigma-1}}$. По принципу максимума [15] имеем $|u(x)| \leq |v(x)|$ при $x \in G$, откуда следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При доказательстве теоремы 1 использовалась оценка (12) решения неравенства (46) в точке $x \in \Omega_\varepsilon$ через расстояние $\text{dist}(x, B(\varepsilon))$ от точки x до границ шаров $B(y_{k,\varepsilon}, R_\varepsilon)$. Теорема 3 доказывается точно так же, как и теорема 1, но для получения оценки (12) следует использовать лемму 4 вместо теоремы 1' работы [6].

Как и ранее, положим $B_4(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^m B(y_{k,\varepsilon}, 4R_\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, $R_\varepsilon = O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\gamma > \frac{\sigma-1}{(n-2)\sigma-n}$, если $s < 0$, и $\gamma > \frac{\sigma-1}{(n-s-2)\sigma-n+s}$, если $s \geq 0$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega \setminus B_4(\varepsilon)} \frac{|\nabla(u_\varepsilon(x) - u(x))|^2 + |u_\varepsilon(x) - u(x)|^{\sigma+1}}{1 + |u_\varepsilon(x) - u(x)|} dx \rightarrow 0,$$

если $s < 0$, и

$$\int_{\Omega \setminus B_4(\varepsilon)} |x|^s \frac{|\nabla(u_\varepsilon(x) - u(x))|^2 + |u_\varepsilon(x) - u(x)|^{\sigma+1}}{1 + |u_\varepsilon(x) - u(x)|} dx \rightarrow 0,$$

если $s \geq 0$; здесь $y_{0,\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $s < 0$. Пусть $R > 0$ столь велико, что $\bar{\Omega} \subset B(0, R)$. Тогда для любого $x \in \Omega$ имеет место $|x|^s \geq R^s > 0$. Утверждение теоремы при $s < 0$ является прямым следствием теоремы 2 при $a(x) = |x|^s$ и $a_0 = R^s$.

Пусть теперь $s \geq 0$. Рассмотрим функции $\theta_{k,\varepsilon}(x) \in C^1(\Omega)$, $k = 0, \dots, m$, заданные условиями (23)–(25). Положим $\theta_\varepsilon(x) = \inf_{k=0, \dots, m} \theta_{k,\varepsilon}(x)$.

Рассмотрим функцию $\psi(x)$, заданную равенством (26), где $q > 0$ – таково, что $\gamma > \frac{\sigma-1}{(n-s-2)\sigma-n+s-2q}$; $p = p(q) > 2$ задано соотношением (27).

Умножим равенство $Lw_\varepsilon(x) = |x|^s(|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))$ на $\psi(x)$ и проинтегрируем по Ω , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Lw_\varepsilon(x))\psi(x) dx &\equiv \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w_\varepsilon(x)}{\partial x_j} \right) \psi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} |x|^s (|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))\psi(x) dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Для правой части равенства (48) имеем оценку, аналогичную (29):

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |x|^s (|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))\psi(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} |x|^s (|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))w_\varepsilon(x)\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_2} |x|^s (|u_\varepsilon(x)|^{\sigma-1}u_\varepsilon(x) - |u(x)|^{\sigma-1}u(x))|w_\varepsilon(x)|^{q-1}w_\varepsilon(x)\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ &\geq C_\sigma \int_{\Omega_1} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}\theta_\varepsilon^p(x) dx + C_\sigma \int_{\Omega_2} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x) dx. \end{aligned} \quad (49)$$

Для оценки левой части равенства (48) воспользуемся неравенствами (30)–(34).

Оценим второе слагаемое правой части неравенства (34). Полагая в неравенстве Юнга $a = |w_\varepsilon(x)|^{q+1}\theta_\varepsilon^{p-2}(x)$, $b = |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^2$ при $\alpha = \frac{1+q}{\sigma+q}$ и выбирая

$\beta = \frac{2C_5}{C_\sigma|x|^s}\alpha$ при каждом x , с учетом (27) получаем

$$\begin{aligned} & C_5 \int_{\Omega_2} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q+1}\theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx \\ & \leq \frac{C_\sigma}{2} \int_{\Omega_2} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x) dx + C_{12} \int_{\Omega_2} |x|^{-s} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx. \end{aligned} \quad (50)$$

Учитывая равенства (48), (30) и оценки (31)–(34), (50), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Lw_\varepsilon(x))\psi(x) dx \leq -\frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_1} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx \\ & - \frac{q}{2\lambda} \int_{\Omega_2} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q-1}\theta_\varepsilon^p(x) dx + C_4 \int_{\Omega_1} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx \\ & + \frac{C_\sigma}{2} \int_{\Omega_2} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x) dx + C_{12} \int_{\Omega_2} |x|^{-s} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx. \end{aligned} \quad (51)$$

Объединяя (48), (49) и (51), получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_1} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx - \frac{q}{2\lambda} \int_{\Omega_2} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q-1}\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ & + C_4 \int_{\Omega_1} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx + \frac{C_\sigma}{2} \int_{\Omega_2} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ & + C_{12} \int_{\Omega_2} |x|^{-s} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx \\ & \geq C_\sigma \int_{\Omega_1} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}\theta_\varepsilon^p(x) dx + C_\sigma \int_{\Omega_2} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x) dx. \end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & C_4 \int_{\Omega_1} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^{p-2}(x) dx + C_{12} \int_{\Omega_2} |x|^{-s} |\nabla\theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx \\ & \geq C_\sigma \int_{\Omega_1} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}\theta_\varepsilon^p(x) dx + \frac{C_\sigma}{2} \int_{\Omega_2} |x|^s |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+q}\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ & + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega_1} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 \theta_\varepsilon^p(x) dx + \frac{q}{2\lambda} \int_{\Omega_2} |\nabla w_\varepsilon(x)|^2 |w_\varepsilon(x)|^{q-1}\theta_\varepsilon^p(x) dx \\ & \geq C_{13} \int_{\Omega} |x|^s \frac{|w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}}{1+|w_\varepsilon(x)|} \theta_\varepsilon^p(x) dx + C_{14} \int_{\Omega} |x|^s \frac{|\nabla w_\varepsilon(x)|^2}{1+|w_\varepsilon(x)|} \theta_\varepsilon^p(x) dx \\ & \geq C_{15} \int_{\Omega \setminus B_4(\varepsilon)} |x|^s \frac{|\nabla w_\varepsilon(x)|^2 + |w_\varepsilon(x)|^{\sigma+1}}{1+|w_\varepsilon(x)|} dx. \end{aligned} \quad (52)$$

Теперь докажем, что

$$\int_{\Omega_2} |x|^{-s} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |x|^{-s} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx &\leq \int_{\Omega} |x|^{-s} |\nabla \theta_\varepsilon(x)|^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} dx \\ &\leq C_{16} m R_\varepsilon^{n-s} \left(\frac{1}{R_\varepsilon} \right)^{2\frac{\sigma+q}{\sigma-1}} = C_{16} \varepsilon^{-1} R_\varepsilon^{\frac{(n-s-2)\sigma-n+s-2q}{\sigma-1}} \\ &= o\left(\varepsilon^{-1 + \frac{(n-s-2)\sigma-n+s-2q}{\sigma-1} \frac{\sigma-1}{(n-s-2)\sigma-n+s-2q}}\right) = o(1) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Из (38), (52) и (53) следует справедливость теоремы 4.

Список литературы

1. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.
2. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymtotic analysis for periodic structures. Amsterdam: North-Holland, 1978.
3. Damlamian A., Li Ta-Tsien. Boundary homogenization for elliptic problems // J. Math. Pures Appl. (9). 1987. V. 66. №9. P. 351–361.
4. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
5. Скрипник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Физматлит, 1990.
6. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 135. №3. С. 346–360.
7. Кондратьев В. А., Ландис Е. М. Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №4. С. 457–468.
8. Туваев М. В. Об устранимых особых множествах решений квазилинейных эллиптических уравнений // Матем. сб. 1994. Т. 185. №2. С. 107–114.
9. Vazquez J. L., Véron L. Removable singularities of some strongly nonlinear elliptic equations // Manuscripta Math. 1980. V. 33. P. 129–144.
10. Vazquez J. L., Véron L. Singularities of elliptic equations with an exponential nonlinearity // Math. Ann. 1984. V. 269. P. 119–135.
11. Vazquez J. L., Véron L. Isolated singularities of some semilinear elliptic equations // J. Differential Equations. 1985. V. 60. P. 301–321.
12. Матевосян О. А., Пикулин С. В. Об усреднении слабонелинейных дивергентных эллиптических операторов в перфорированном кубе // Матем. заметки. 2000. Т. 68. №3. С. 390–398.
13. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
14. Littman W., Stampacchia G., Weinberger B. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3). 1963. V. 17. №1–2. P. 43–77.
15. Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équation elliptique second ordre à coefficients discontinus // Ann. Inst. Fourier. 1965. V. 15. №1. P. 189–257.
16. Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка // УМН. 1963. Т. 18. №1. С. 3–62.

17. *Гервер М. Л., Ландис Е. М.* Одно обобщение теоремы о среднем для функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146. № 4. С. 761–764.
18. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `matevossian@cswebmail.com`;
`pikulin@shade.msu.ru`, `pikulin@lostpassword.com`

Поступила в редакцию
27.12.2000