Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Клячко, Ю. Б. Мельникова, Короткое доказательство теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 5, 33–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm6380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:59:43

УДК 512.544.44+512.543.22+512.544.33

А. А. Клячко, Ю. Б. Мельникова

Короткое доказательство теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством

Предложено короткое доказательство и некоторое усиление теоремы Макаренко–Хухро о том, что каждая группа, почти удовлетворяющая внешнему коммутаторному тождеству, содержит характеристическую подгруппу конечного индекса, удовлетворяющую этому тождеству. Получена оценка для индекса такой характеристической подгруппы.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: характеристические подгруппы, внешние коммутаторные тождества.

Эта статья посвящена А. Л. Шмелькину в связи с его 70-летием.

Пусть G – группа и H – ее подгруппа конечного индекса. В учебниках по теории групп (см., например, [1]) можно обнаружить несколько простых фактов, позволяющих в этой ситуации найти в G подгруппу конечного индекса, которая похожа на H , но лучше нее. В частности:

- внутри H найдется нормальная в G подгруппа конечного индекса (делящего $|G : H|!$);
- если группа G конечно порождена, то внутри H найдется вполне характеристическая (и даже вербальная) в G подгруппа конечного индекса;
- если подгруппа H абелева, то в G найдется характеристическая абелева подгруппа конечного индекса.

Последнее утверждение было недавно существенно обобщено.

ТЕОРЕМА МАКАРЕНКО–ХУХРО (см. [2], а также [3]). *Если в группе G есть подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая внешнему (полилинейному – в авторской терминологии) коммутаторному тождеству, то в группе G найдется также характеристическая подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая этому тождеству.*

Примерами внешних коммутаторных тождеств могут служить нильпотентность или разрешимость данной ступени. Определение выглядит так.

Пусть $F(x_1, x_2, \dots)$ – свободная группа счетного ранга. Внешними коммутаторами веса 1 называются образующие x_i . Внешним коммутатором веса $t > 1$ называется каждое слово вида

$$w(x_1, \dots, x_t) = [u(x_1, \dots, x_r), v(x_{r+1}, \dots, x_t)],$$

где u и v – внешние коммутаторы весов r и $t - r$ соответственно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00573).

© А. А. Клячко, Ю. Б. Мельникова, 2009

Говоря неформально, внешний коммутатор веса t представляет собой выражение $[x_1, x_2, \dots, x_t]$, в котором каким-то осмысленным образом расставлены квадратные скобки.

Внешним коммутаторным тождеством веса t называется тождество

$$w(x_1, \dots, x_t) = 1,$$

левая часть которого является внешним коммутатором веса t .

Приведенное ниже доказательство теоремы Макаренко–Хухро значительно проще и короче оригинального.

Пусть $H_1, \dots, H_t$ – нормальные подгруппы группы G и $w(x_1, \dots, x_t)$ – внешний коммутатор. Тогда:

- 1) подгруппа $w(H_1, \dots, H_t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle w(h_1, \dots, h_t); h_i \in H_i \rangle$ нормальна в группе G ;
- 2) $w(G, \dots, G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет тождеству $w(x_1, \dots, x_t) = 1$;
- 3) $w(H_1, \dots, H_t) = [u(H_1, \dots, H_r), v(H_{r+1}, \dots, H_t)]$, если $w(x_1, \dots, x_t) = [u(x_1, \dots, x_r), v(x_{r+1}, \dots, x_t)]$;
- 4) $w(H_1, \dots, H_{i-1}, \prod_{N \in \mathcal{N}} N, H_{i+1}, \dots, H_t) = \prod_{N \in \mathcal{N}} w(H_1, \dots, H_{i-1}, N, H_{i+1}, \dots, H_t)$ для произвольного семейства $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп группы G .

Эти свойства почти очевидны и легко могут быть проверены по индукции.

ЛЕММА. Пусть $w(x_1, \dots, x_t)$ – внешний коммутатор, m – натуральное число, G – группа и $\mathcal{N}$ – некоторое семейство ее нормальных подгрупп таких, что

$$w(\underbrace{N, N, \dots, N}_{m \text{ раз}}, G, G, \dots, G) = 1 \quad \text{для всех } N \in \mathcal{N}.$$

Тогда

$$w(\underbrace{\hat{N}, \hat{N}, \dots, \hat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \hat{G}, \hat{G}, \dots, \hat{G}) = 1, \quad \text{где } \hat{N} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N, \quad \hat{G} = \prod_{N \in \mathcal{N}} N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} w(\underbrace{\hat{N}, \hat{N}, \dots, \hat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \hat{G}, \hat{G}, \dots, \hat{G}) &= w(\underbrace{\hat{N}, \hat{N}, \dots, \hat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \prod_{N \in \mathcal{N}} N, \hat{G}, \dots, \hat{G}) \\ &= \prod_{N \in \mathcal{N}} w(\underbrace{\hat{N}, \hat{N}, \dots, \hat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, N, \hat{G}, \dots, \hat{G}). \end{aligned}$$

Но $\hat{N} \subseteq N$ и $\hat{G} \subseteq G$, поэтому каждый сомножитель последнего произведения содержится в группе

$$w(\underbrace{N, N, \dots, N}_{m \text{ раз}}, G, G, \dots, G),$$

которая тривиальна по условию.

В качестве следствия мы получаем усиленную версию теоремы Макаренко–Хухро с явной оценкой на индекс.

ТЕОРЕМА. *Если группа G содержит подгруппу N конечного индекса, удовлетворяющую внешнему коммутаторному тождеству $w(x_1, \dots, x_t) = 1$, то G содержит характеристическую и даже инвариантную относительно всех сюръективных эндоморфизмов подгруппу H , удовлетворяющую тому же тождеству. Причем*

$$\log_2 |G : H| \leq f^{t-1}(\log_2 |G : N|), \quad (*)$$

если подгруппа N нормальна, и, следовательно, $\log_2 |G : H| \leq f^{t-1}(\log_2 |G : N|!)$ в общем случае, где $f^k(x)$ обозначает k -ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты мы будем строить характеристическую подгруппу. Построение подгруппы, инвариантной относительно сюръективных эндоморфизмов, повторяет приведенные ниже рассуждения дословно с заменой всех используемых автоморфизмов на сюръективные эндоморфизмы.

Рассмотрим подгруппу $G_1 = \prod_{\varphi \in \text{Aut } G} \varphi(N)$. Эта подгруппа характеристична и $|G : G_1| \leq |G : N|$. Ясно также, что G_1 является произведением не более чем $\log_2 |G : N| + 1$ автоморфных образов группы N (поскольку в цепочке $N \subseteq N\varphi_1(N) \subseteq N\varphi_1(N)\varphi_2(N) \subseteq \dots$ не может быть более $\log_2 |G : N| + 1$ различных подгрупп). Таким образом,

$$G_1 = \prod_{k=0}^{p_1} \varphi'_k(N), \quad \text{где } \varphi'_k \in \text{Aut } G, \quad p_1 \leq l_0 \stackrel{\text{def}}{=} \log_2 |G : N|.$$

Теперь рассмотрим подгруппу $N_1 = \bigcap_{k=0}^{p_1} \varphi'_k(N)$. Индекс пересечения подгрупп не превосходит произведения их индексов (см., например, [1]), следовательно,

$$l_1 \stackrel{\text{def}}{=} \log_2 |G : N_1| \leq \log_2 (|G : N|^{p_1+1}) = (p_1 + 1)l_0 \leq (l_0 + 1)l_0 = f(l_0).$$

Согласно лемме

$$w(N_1, \dots, N_1, G_1) = 1.$$

Аналогичным образом построим подгруппы

$$G_2 = \prod_{\varphi \in \text{Aut } G_1} \varphi(N_1) = \prod_{k=0}^{p_2} \varphi''_k(N_1), \quad N_2 = \bigcap_{k=0}^{p_2} \varphi''_k(N_1),$$

где $\varphi''_k \in \text{Aut } G_1$, $p_2 \leq \log_2 |G : N_1| = l_1 \leq f(l_0)$.

Ясно, что подгруппа G_2 характеристична в G (и даже в G_1), причем

$$\log_2 |G : G_2| \leq \log_2 |G : N_1| = l_1 \leq f(l_0),$$

$$l_2 \stackrel{\text{def}}{=} \log_2 |G : N_2| \leq \log_2 (|G : N_1|^{p_2+1}) = (p_2 + 1)l_1 \leq f(l_1) \leq f(f(l_0)).$$

Согласно лемме

$$w(N_2, \dots, N_2, G_2, G_2) = 1.$$

Продолжая действовать аналогичным образом, на t -м шаге мы получим характеристическую в G подгруппу

$$G_t = \prod_{\varphi \in \text{Aut } G_{t-1}} \varphi(N_{t-1}) = \prod_{k=0}^{p_t} \varphi_k^{(t)}(N_{t-1}), \quad \text{где } \varphi_k^{(t)} \in \text{Aut } G_{t-1},$$

причем

$$w(G_t, \dots, G_t) = 1, \\ \log_2 |G : G_t| \leq \log_2 |G : N_{t-1}| = l_{t-1} \leq f(l_{t-2}) \leq f(f(l_{t-3})) \leq \dots \leq f^{t-1}(l_0).$$

Таким образом, подгруппа $H = G_t$ является искомой, и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работах [2] и [3] явная оценка не приводится, но отмечает-ся, что она может быть получена из доказательства. По нашим подсчетам, оценка (*) лучше.

Список литературы

- [1] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, 3-е изд., Наука, М., 1982; англ. пер. 2-го изд.: M. I. Kargapolov, Ju. I. Merzljakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Grad. Texts in Math., **62**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979.
- [2] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, “Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **75**:3 (2007), 635–646.
- [3] Н. Ю. Макаренко, Е. И. Хухро, “Большие характеристические подгруппы, удовлетворяющие полилинейным коммутаторным тождествам”, *Докл. АН СССР*, **412**:5 (2007), 594–596; англ. пер.: N. Yu. Makarenko, E. I. Khukhro, “Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities”, *Dokl. Math.*, **75**:1 (2007), 112–114.

А. А. Клячко (А. А. Klyachko)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: klyachko@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

12.06.2008

Ю. Б. Мельникова (Yu. B. Mel'nikova)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: yuliamel@mail.ru